

# SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC

Nguyễn Đăng Khoa, Lê Trung Hiếu

Ngày 1 tháng 5 năm 2018

## 1 Một bất đẳng thức hay gặp

Trong quá trình làm toán đặc biệt đối với bất đẳng thức thì ta gặp rất nhiều loại bất đẳng thức khác nhau, nhiều bổ đề khác nhau và sau đây là một bất đẳng thức quen thuộc đối với nhiều bạn: Cho các số dương  $a, b, c$  thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1.$$

Và bất đẳng thức trên thì ai cũng biết đến lời giải đơn giản nhất là Cauchy - Schwarz như sau:

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + 2bc + b^2 + 2ac + c^2 + 2ab} = \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)^2} = 1$$

Xuất phát từ bài toán trên chúng ta cùng đi khám phá và mở rộng thêm nhiều bài bất đẳng thức khác nhau.

## 2 Sáng tạo bất đẳng thức

### 2.1 Làm sao để sáng tạo một bất đẳng thức

Câu hỏi này khá phổ biến đối với nhiều bạn đang học bất đẳng thức và đặt ra tại sao người viết sách lại có thể sáng tác ra nhiều bài toán hay như vậy. Câu trả lời là họ xuất phát từ những bài toán ban đầu và bằng sự tư duy, kinh nghiệm thì đã có thể sáng tạo ra nhiều bài BDT khác lạ so với ban đầu. Muốn sáng tạo BDT thì trước tiên ta phải quan sát, tư duy với các dạng BDT khác để ta lồng ghép và đôi khi cần thêm giả thiết để không bị lộ ý tưởng ban đầu của mình. Sau đây là một vài ý tưởng cho bài BDT trên.

### 2.2 Sáng tạo bất đẳng thức

Trước hết ta biến đổi BDT ban đầu

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a^3}{a^3 + 2abc} + \frac{b^3}{b^3 + 2abc} + \frac{c^3}{c^3 + 2abc} \geq 1$$

Ta thấy tất cả dưới mẫu đều có  $2abc$  nên ta nảy ra ý tưởng cho thêm giả thiết  $abc = 1$  là ta có ngay một BDT mới.

**Ví dụ 1:** Cho các số dương  $abc = 1$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1$$

Từ bất đẳng thức và với giả thiết trên ta biến đổi ra dạng đẹp hơn là

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1$$

**Ví dụ 2** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{a}{a^2+2bc}\right)^2 + \left(\frac{b}{b^2+2ca}\right)^2 + \left(\frac{c}{c^2+2ab}\right)^2 \geq 1$$

Ta thấy mỗi phân số đều xuất hiện các bình phương nên có thể độc giả đã nảy ra ý tưởng là sử dụng BDT quen thuộc là:  $3(A^2 + B^2 + C^2) \geq (A + B + C)^2$ . Nhưng nếu ta dùng BDT đó thì ta thu được:

$$\left(\frac{a}{a^2+2bc}\right)^2 + \left(\frac{b}{b^2+2ca}\right)^2 + \left(\frac{c}{c^2+2ab}\right)^2 \geq \frac{\left(\frac{a}{a^2+2bc} + \frac{b}{b^2+2ca} + \frac{c}{c^2+2ab}\right)^2}{3}$$

Đến đây độc giả hoàn toàn có thể kiểm tra bằng máy tính là BDT cuối trên đã bị ngược dấu. Vậy làm sao để sử dụng giả thiết  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  mà không bị ngược dấu. Chúng ta cùng đi xét lời giải sau:

**Lời giải:** Áp dụng BDT Cauchy - Schwarz ta có:

$$\left[\left(\frac{a}{a^2+2bc}\right)^2 + \left(\frac{b}{b^2+2ca}\right)^2 + \left(\frac{c}{c^2+2ab}\right)^2\right](a^2+b^2+c^2) \geq \left(\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab}\right)^2 \geq 1$$

Kết hợp giả thiết ta thu được điều phải chứng minh.

Với ý tưởng trên ta có thể sáng tạo ra BDT khác cùng giả thiết  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ :

$$\frac{a^2}{(a^2+2bc)^3} + \frac{b^2}{(b^2+2ca)^3} + \frac{c^2}{(c^2+2ab)^3} \geq 1$$

Bài bất đẳng thức này ta có thể sử dụng BDT Holder như sau:

$$\left[\frac{a^2}{(a^2+2bc)^3} + \frac{b^2}{(b^2+2ca)^3} + \frac{c^2}{(c^2+2ab)^3}\right](a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) \geq \left[\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab}\right]^3 \geq 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{(a^2+2bc)^3} + \frac{b^2}{(b^2+2ca)^3} + \frac{c^2}{(c^2+2ab)^3} \geq 1$$

Qua hai dạng trên ta phải đưa ra dạng tổng quát cho bài toán:

Cho các số dương  $a, b, c$  sao cho  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  và số thực dương  $k \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(a^2+2bc)^k} + \frac{b^2}{(b^2+2ca)^k} + \frac{c^2}{(c^2+2ab)^k} \geq 1$$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } a^2 + 2bc \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a^2 + 2bc)^k \leq a^2 + 2bc \Rightarrow \sum \frac{a^2}{(a^2+2bc)^k} \geq \sum \frac{a^2}{a^2+2bc} \geq 1$$

Hoàn tất chứng minh và ta qua ví dụ tiếp theo.

**Ví dụ 3:** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1$$

**Lời giải:**

Vì  $abc = 1$  nên tồn tại các số dương  $x, y, z$  sao cho  $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{xz}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$  Ta viết lại được bất đẳng

thức:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} = \sum \frac{1}{\frac{2yz}{x^2} + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq 1$$

Và đây chính là BDT ban đầu nên ta có đpcm. Ngoài cách đổi biến khá sáng tạo như trên thì ta còn có cách quy đồng rồi nhân hết ra và sử dụng giả thiết.

Bất đẳng thức trên cũng viết lại dưới dạng:

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \leq 1$$

**Ví dụ 4:** Cho các số dương  $a, b, c$  sao cho  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq 1$$

Nếu ở ví dụ 3 ta chọn cách đặt như trên thì ở ví dụ này ta lại phải đặt ngược lại để có thể sử dụng BDT ban đầu.

**Lời giải:**

Đặt:  $a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{xz}; c = \frac{z^2}{xy}$ . Ta viết lại được bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = \sum \frac{1}{\frac{x^2}{yz} + 2} = \sum \frac{yz}{x^2 + 2yz} \leq 1$$

Đây chính là kết quả ban đầu nên ta có điều phải chứng minh. Tương tự ví dụ 3 ta có thể chứng minh bằng cách quy đồng và bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \geq 1$$

Kết hợp ví dụ 3 và ví dụ 4 ta có bài toán tiếp theo.

**Ví dụ 5:** Cho các số dương  $a, b, c$  có tích của chúng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \geq \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1}$$

và một số bất đẳng thức khác có số 1 làm trung gian.

**Ví dụ 6:** Cho các số dương  $a, b, c$  là tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3bc+a} + \frac{b}{3ca+b} + \frac{c}{3ab+c} \geq \frac{3}{2}$$

Trước hết ta thấy giả thiết là  $a, b, c$  có tổng là 1 và ở các mẫu mỗi phân thức có chứa biến  $a, b, c$  nên ta có ý tưởng nhân thêm. Nhưng sau khi nhân thêm chúng ta lại vào thế bí nên chúng ta cần tinh tế hơn trong quá trình biến đổi như sau.

**Lời giải:** Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{bc}{3bc+a} + \frac{ca}{3ca+b} + \frac{ab}{3ab+c} \leq \frac{1}{2}$$

Và ở đây ta hoàn toàn có thể sử dụng giả thiết  $a + b + c = 1$ . Sử dụng Cauchy - Schwarz ta có:

$$\frac{bc}{3bc + a} = \frac{bc}{3bc + a(a + b + c)} = \frac{bc}{(a^2 + 2bc) + (ab + bc + ca)} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{bc}{ab + bc + ca} \right)$$

Thiết lập các BDT còn lại rồi cộng vào ta có:

$$\frac{bc}{3bc + a} + \frac{ca}{3ca + b} + \frac{ab}{3ab + c} \leq \frac{1}{4} \left( \sum \frac{ab}{2ab + c^2} + \sum \frac{ab}{ab + bc + ca} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng của bất đẳng thức khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$

**Ví dụ 6:** Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b, c là các số thực dương

$$\frac{bc}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{ca}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{ab}{2c^2 + (a + b)^2} \leq \frac{1}{2}$$

**Lời giải:** Áp dụng BDT Cauchy - Schwarz ta có:

$$\frac{bc}{2a^2 + (b + c)^2} = \frac{bc}{2a^2 + b^2 + 2bc + c^2} = \frac{bc}{a^2 + 2bc + (a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{bc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

Thiết lập các BDT tương tự rồi cộng vào ta có:

$$\sum \frac{bc}{2a^2 + (b + c)^2} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Biến đổi bất đẳng thức trên về dạng:

$$\frac{2a^2 + b^2 + c^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{2b^2 + a^2 + c^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{2c^2 + a^2 + b^2}{2c^2 + (a + b)^2} \geq 2$$

Ta có thêm giả thiết  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  thì ta có bất đẳng thức mới:

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + 1}{a^2 + 2bc + 1} + \frac{b^2 + 1}{b^2 + 2ca + 1} + \frac{c^2 + 1}{c^2 + 2ab + 1} \geq 2$$

## 2.3 Bài tập rèn luyện

**Bài tập 1:** Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{(a + 1)^2}{a + 2} + \frac{(b + 1)^2}{b + 2} + \frac{(c + 1)^2}{c + 2} \leq \frac{4}{3}(a + b + c)$$

**Bài tập 2:** Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{ab}{3ab + 2b + c} + \frac{bc}{3bc + 2c + a} + \frac{ca}{3ca + 2a + b} \leq \frac{1}{4}$$

**Bài tập 3:** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

**Bài tập 4:** Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực dương a, b, c

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1(*)$$

(\*) Bất đẳng thức này là dạng biến đổi tương đương của bất đẳng thức ban đầu và có nhiều ứng dụng trong các bài toán BDT.

### 3 Tài liệu tham khảo

[1] [www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)

[2] [www.diendantoanhoc.net](http://www.diendantoanhoc.net)

[3] Sáng tạo bất đẳng thức - Phạm Kim Hùng. Nxb Hà Nội

[4] Sử dụng phương pháp Cauchy - Schwarz để chứng minh bất đẳng thức - Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh. Nxb Đại học quốc gia Hà Nội