GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY SỐ DẠNG TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

Võ Quốc Bá Cẩn

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả tổng quát cho một bài toán giới hạn của dãy số dạng trung bình và các ứng dụng của nó trong các bài toán tính giới hạn dãy số.

1. Lời dẫn

Trong quá trình tự học và rèn luyện, chắc hẳn nhiều bạn đã được làm quen với bài toán sau:

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) bị chặn dưới và thỏa mãn

$$u_{n+2} \le \frac{u_{n+1}+u_n}{2}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ.

Đây là một bài toán thú vị đặc trưng cho phương pháp sử dụng dãy phụ (dãy số max − min) để tìm giới hạn dãy số. Tuy nhiên, nếu chỉ dừng lại ở đây thì ta chưa thể thấy hết được nét đặc sắc của nó.

Một bài toán hay sẽ càng hay hơn nên nếu ta ứng dụng được nó cho các bài toán khác. Nhưng vì bài toán 1 quá cụ thể (giống như một trường hợp riêng) nên muốn làm được điều này, ta cần mở rộng bài toán hơn nữa. Cụ thể, ta hãy thử thêm nhiều số hạng hơn thay vì chỉ có u_{n+1} và u_n, đồng thời hãy thử thay các hệ số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ bằng các số khác xem sao?

Kết quả thu được thật bất ngờ! Sử dụng phương pháp dãy phụ max − min, ta chứng minh được kết quả tổng quát cho bài toán 1 như sau:

Bài 2 (Tổng quát hóa của bài 1).

Cho k là một số nguyên dương và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét dãy số (u_n) bị chặn dưới thỏa mãn tính chất:

$$u_{n+k} \le \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \cdots + \alpha_k u_{n+k-1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng (u_n) hội tụ.

2. Lời giải bài toán tổng quát

Đặt $A_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}\}$. Khi đó, dễ thấy (A_n) cũng bị chặn dưới và:

$$A_n \ge \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \cdots + \alpha_k u_{n+k-1} \ge u_{n+k} \quad (*)$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Do vậy, ta có

$$\begin{aligned} A_n &= \max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \\ &\ge \max\{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \\ &= A_{n+1}. \end{aligned}$$

Kết quả này cho thấy (A_n) là dãy giảm và bị chặn dưới. Và như thế, nó hội tụ về một hằng số A nào đó. Theo tính chất giới hạn của dãy số, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên n_0 đủ lớn để:

$$A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0. \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) cũng hội tụ về A. Từ (1), ta suy ra $u_n \le A_n < A + \varepsilon, \forall n \ge n_0$.

Đặt $K = \max\left\{\frac{2-\alpha_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{2-\alpha_k}{\alpha_k}\right\}$. Ta chứng minh

$$u_n > A - K\varepsilon, \quad \forall n \ge n_0 + k - 1. \qquad (2)$$

Nếu $u_n \geq A - \varepsilon$ thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng do $K > 1$. Giả sử có số $n \geq n_0 + k - 1$ mà $u_n < A - \varepsilon$. Khi đó, trong các số $u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}$ phải có ít nhất một số lớn hơn $A - \varepsilon$ (do (1)). Gọi số đó là u_{n+m}. Khi đó, với chú ý rằng $n + m - k \geq n_0$, ta có

$$u_{n+m-k}, \ldots, u_{n+m-1} < A + \varepsilon.$$

Sử dụng các đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned} u_{n+m} &\leq \sum_{i=1, i \neq k+1-m}^{k} \alpha_i u_{n+m-k+i-1} + \alpha_{k+1-m} u_n \\ &< (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon) + \alpha_{k+1-m} u_n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} u_n &> \frac{u_{n+m} - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}} \\ &> \frac{A - \varepsilon - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}} \\ &= A - \frac{2 - \alpha_{k+1-m}}{\alpha_{k+1-m}} \varepsilon \geq A - K\varepsilon. \end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức (2) luôn được thỏa mãn với mọi $n \geq n_1 = n_0 + k - 1$. Từ đây, ta suy ra

$$A - K\varepsilon < u_n < A + \varepsilon < A + K\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1.$$

Đặt $\varepsilon' = K\varepsilon$. Khi đó, bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành $A - \varepsilon' < u_n < A + \varepsilon'$, hay

$$|u_n - A| < \varepsilon', \quad \forall n \geq n_1.$$

Từ đây, sử dụng định nghĩa giới hạn, ta suy ra dãy (u_n) cũng hội tụ về A. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Một trong những mấu chốt của bài toán là đánh giá $(*)$. Có thể thấy rằng nếu dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0 thì ta có thể thay đổi giả thiết thành $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k < 1$. Lúc này, bất đẳng thức $(*)$ vẫn đúng. Do đó, các lý luận vẫn được đảm bảo. Kết quả bài toán và lời giải trên vẫn giữ được tính đúng đắn. Ngoài ra, dễ thấy rằng lúc này $\lim u_n = 0$.

Đây là một chú ý quan trọng để ta có thể ứng dụng kết quả bài toán tổng quát cho các bài toán phía sau.

Ngoài ra, cũng cần chú ý rằng kết quả bài toán sẽ không còn đúng nếu ta thay giả thiết α_i dương thành không âm. Thật vậy, chẳng hạn ta có thể xét trường hợp $k = 2$ và $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. Khi đó, (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+2} \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lúc này, nếu ta chọn $u_{2n} = 1$ và $u_{2n-1} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy này phân kỳ.

3. Một số bài toán ứng dụng

Bài 3.

Xét dãy (u_n) được xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$ và:

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + u_n}{5}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới bởi* 0, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \frac{2}{5}$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta thu được ngay $\lim u_n = 0$. □

Bài 4.

Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2, u_3 \in (0, 1)$ và:

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}^2 + u_n^2}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim u_n$.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $0 < u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng kết quả này, ta thu được

$$u_{n+3} < \frac{u_{n+2} + u_n}{3} < \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đến đây, sử dụng kết quả bài toán 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới,* $k = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, ta dễ thấy u_n hội tụ.

Bây giờ, đặt $\lim u_n = A$, ta dễ thấy $0 \leq A \leq 1$. Chuyển phương trình sai phân ở đề bài sang giới hạn, ta được $A = \frac{2}{3}A^2$. Từ đó suy ra $A = 0$ (do $A \leq 1$).

Vậy giới hạn cần tìm là 0. □

Bài 5.

Cho dãy số dương (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 để $u_{n_0} \geq 1$. Thật vậy, giả sử $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, từ công thức của dãy, ta có

$$\sqrt{u_n + u_{n+2}} = u_{n+3} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}} > u_n + u_{n+2} > u_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ (u_n) là dãy tăng kể từ số hạng thứ ba trở đi. Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại $\lim u_n = A$ với $0 < A \leq 1$. Tuy nhiên, khi chuyển phương trình ở đề bài sang giới hạn, ta lại thu được $A = 0 \vee A = 2$ đều không thỏa mãn $0 < A \leq 1$.

Như vậy, phải tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n_0} \geq 1$. Khi đó, dễ thấy $u_{n_0+3}, u_{n_0+4}, u_{n_0+5} > 1$. Do ta cần tìm giới hạn của dãy (u_n) nên không mất tính tổng quát, ta có thể xem như dãy được bắt đầu từ ba số hạng này trở đi. Nghĩa là, ta có thể giả sử $u_1, u_2, u_3 > 1$.

Đến đây, lại sử dụng công thức truy hồi của dãy, ta suy ra $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta có

$$|u_{n+3} - 2| = \left|\sqrt{u_n + u_{n+2}} - 2\right| = \frac{|u_n + u_{n+2} - 4|}{\sqrt{u_n + u_{n+2}} + 2} \leq \frac{|u_n - 2| + |u_{n+2} - 2|}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $v_n = |u_n - 2|$. Khi đó, ta có $v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và:

$$v_{n+3} \leq \frac{v_n + v_{n+2}}{3} \leq \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_{n+2}.$$

Sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới bởi* 0, $k = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$, ta thu được ngay

$$\lim v_n = 0.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n = 2$. □

Bài 6 (Hà Nội, 2013).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0, 1)$ và:

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy (u_n), ta dễ dàng suy ra $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Điều này cho phép ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\frac{1}{5} \cdot u_{n+1}^3 + \frac{4}{5} \cdot \sqrt[3]{u_n} \geq \sqrt[5]{u_{n+1}^3 \cdot \left(\sqrt[3]{u_n}\right)^4} = u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy logarith nepe hai vế và đặt $v_n = -\ln u_n$, ta có

$$v_{n+2} \leq \frac{3}{5}v_{n+1} + \frac{4}{15}v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $0 < u_n < 1$ nên $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới bởi* 0, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\alpha_2 = \frac{4}{15}$ *và*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{13}{15} < 1,$$

ta có $\lim v_n = 0$. Từ đây, ta dễ thấy $\lim u_n = 1$. □

Bài 7 (Trường Đông TH miền Nam, 2013).

Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3}, a_2 = \dfrac{2}{7} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n}{3} + \dfrac{a_{n-1}^2}{6}, \quad \forall n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = 1 - a_n$, ta có

$$1 - a_{n+2} = \frac{1 - a_{n+1}}{3} + \frac{1 - a_n^2}{6},$$

suy ra

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{1 + a_n}{6}v_n < \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n.$$

Do $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$ và (v_n) bị chặn dưới bởi 0 nên theo kết quả bài toán tổng quát 2, ta chứng minh được $\lim v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim a_n = 1$. □

Bài 8 (TP HCM, 2014).

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 1, x_2 = 2014$ và:

$$x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, ta dễ thấy $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lấy logarith nepe hai vế phương trình sai phân ở đề bài rồi đặt $v_n = \ln x_n$, ta có $v_1 = 0$, $v_2 = \ln 2014$ và:

$$v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới*, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, ta có (v_n) hội tụ. Mặt khác, ta dễ thấy

$$3v_{n+2} + v_{n+1} = 3v_{n+1} + v_n = \cdots = 3v_2 + v_1.$$

Do đó $\lim v_n = \frac{3v_2+v_1}{4} = \frac{3}{4}\ln 2014$. Với kết quả này, ta dễ dàng tìm được $\lim x_n = 2014^{\frac{3}{4}}$. □

Bài 9 (Romanian TST, 2004).

Tìm tất cả các đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n)+n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Cố định n và đặt:

$$u_0 = n, \quad u_m = f_m(n) = f(\ldots f(n)\ldots) \ (m \text{ lần } f).$$

Từ giả thiết, ta chứng minh bằng quy nạp được rằng:

$$u_{m+2} \leq \frac{u_{m+1} + u_m}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, dễ thấy dãy (u_m) bị chặn dưới bởi 1 nên theo kết quả bài toán 2, dãy này hội tụ và có giới hạn là A. Từ đó, theo định nghĩa giới hạn, với mỗi $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn sao cho

$$|u_m - A| < \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq m_0.$$

Với kết quả này, ta có

$$|u_{m_0+1} - u_{m_0}| \leq |u_{m_0+1} - A| + |u_{m_0} - A| < 2\varepsilon < 1.$$

Vì $|u_{m_0+1} - u_{m_0}|$ là số tự nhiên nên từ bất đẳng thức trên, ta suy ra $|u_{m_0+1} - u_{m_0}| = 0$, tức là

$$u_{m_0} = u_{m_0+1} \Leftrightarrow f_{m_0}(n) = f_{m_0}(f(n)).$$

Mặt khác, do f đơn ánh nên dễ thấy $f_{m_0}(n)$ cũng là đơn ánh. Từ đây kết hợp với đẳng thức trên, ta suy ra $f(n) = n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại, ta dễ thấy hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 10 (Bắc Ninh, 2014).

Dãy (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{9}{10}$ và:

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim x_n$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được $x_n > 1, \forall n \geq 3$. Gọi $a > 1$ là nghiệm dương duy nhất của phương trình $a^4 = a + 1$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - a^6| &= \left|\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_n} - a^6\right| \\
&= \left|\left(\sqrt{x_{n+1}} - a^3\right) + \left(\sqrt[3]{x_n} - a^2\right)\right| \\
&\leq \left|\sqrt{x_{n+1}} - a^3\right| + \left|\sqrt[3]{x_n} - a^2\right| \\
&= \frac{|x_{n+1} - a^6|}{\sqrt{x_{n+1}} + a^3} + \frac{|x_n - a^6|}{\sqrt[3]{x_n^2} + a^2\sqrt[3]{x_n} + a^4} \\
&\leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - a^6| + \frac{1}{3}|x_n - a^6|, \quad \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

Đặt $v_n = |x_n - a^6|$, ta có $v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và:

$$v_{n+2} \leq \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n, \quad \forall n \geq 3.$$

Sử dụng kết quả bài toán 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới bởi* 0, $k = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta có $\lim v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim x_n = a^6$. □

Bài 11 (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1990).

Cho bốn số thực dương a, b, A, B. Xét dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1 = a, x_2 = b$ và:

$$x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Để cho các lý luận và biến đổi được thuận tiện, ta đặt $x_n = (A+B)^3 u_n$ và $\alpha = \frac{A}{A+B}$, $\beta = \frac{B}{A+B}$. Khi đó, ta có $\alpha + \beta = 1$ và:

$$u_{n+2} = \alpha \sqrt[3]{u_{n+1}^2} + \beta \sqrt[3]{u_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $M = \min\{u_1, u_2, 1\}$. Ta sẽ chứng minh

$$x_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1, 2$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha \sqrt[3]{u_k^2} + \beta \sqrt[3]{u_{k-1}^2} \\ &\geq \alpha \sqrt[3]{M^2} + \beta \sqrt[3]{M^2} \\ &= \sqrt[3]{M^2} \geq M. \end{aligned}$$

Do đó, khẳng định cũng đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n.

Bây giờ, đặt $v_n = |u_n - 1|$, ta có

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - 1| &= \alpha \left| \sqrt[3]{u_{n+1}^2} - 1 \right| + \beta \left| \sqrt[3]{u_n^2} - 1 \right| \\ &= \frac{\alpha (u_{n+1}+1)|u_{n+1}-1|}{u_{n+1}^{\frac{4}{3}} + u_{n+1}^{\frac{2}{3}} + 1} + \frac{\beta (u_n+1)|u_n-1|}{u_n^{\frac{4}{3}} + u_n^{\frac{2}{3}} + 1} \\ &\leq \frac{\alpha (u_{n+1}+1)|u_{n+1}-1|}{2u_{n+1}+1} + \frac{\beta (u_n+1)|u_n-1|}{2u_n+1}. \end{aligned}$$

Do $f(t) = \frac{t+1}{2t+1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$ nên ta dễ thấy:

$$\frac{u_{n+1}+1}{2u_{n+1}+1}, \frac{u_n+1}{2u_n+1} \leq \frac{M+1}{2M+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$v_{n+2} \leq \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

trong đó $\alpha_1 = \frac{\beta(M+1)}{2M+1}$, $\alpha_2 = \frac{\alpha(M+1)}{2M+1}$. Đến đây, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: *dãy bị chặn dưới bởi* 0, $k = 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta thu được $\lim v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim x_n = (A+B)^3$. □

4. Bài tập tự luyện

Bài 1 (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1991). Dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = x_4 = 1$, $x_2 = x_3 = 9$ và:

$$x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (THTT, 2010). Cho $a, b \in (0, 1)$. Dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_0 = a$, $u_1 = b$ và

$$u_{n+2} = \frac{1}{2010} u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010} \sqrt[4]{u_n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3. Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ và:

$$x_{n+3} = \frac{1}{18} x_{n+2}^3 + \frac{1}{18} x_{n+1}^2 + \frac{8}{9} \sqrt[3]{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim x_n$.

Bài 4. Cho dãy số dương (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 5. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 > 0, x_2 > 0$ và:

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_n + 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim x_n$.