

Bài toán 15 nữ sinh của Kirkman

Trương Phước Nhân, 11/08/2018

Bài toán. Trong một trường nội trú, có 15 nữ sinh ngày nào cũng đi dạo hàng ba. Làm thế nào để sắp xếp cho mỗi nữ sinh đi cùng một hàng với mọi nữ sinh khác đúng một lần mỗi tuần?

Bài toán thú vị này được nhà toán học người Anh là T. P. Kirkman đặt ra trong cuốn *Lady's and Gentleman's Diary* năm 1850.

Trong số rất nhiều cách giải được tìm thấy ta sẽ chỉ lập lại hai cách giải. Một cách của mục sư người Anh Andrew Frost và cách giải kia của B. Pierce

Cách giải của Frost

Đầu tiên, ta biểu diễn lại bài toán dưới dạng toán học.

Bài toán'. Sắp xếp 15 phần tử $x, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ vào 7 cột và mỗi cột này gồm 5 bộ ba theo cách thức sao cho bất kỳ hai phần tử nào được chọn cũng luôn xuất hiện trong chính xác một bộ ba trong số 35 bộ ba này.

Với tư cách là những bộ ba đầu tiên của 7 cột, chúng ta sẽ chọn:

$$xa_1a_2 \mid xb_1b_2 \mid xc_1c_2 \mid xd_1d_2 \mid xe_1e_2 \mid xf_1f_2 \mid xg_1g_2.$$

Do đó, chúng ta chỉ phải phân bố 14 phần tử $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ một cách phù hợp vào bốn dòng còn lại của hệ thống của ta.

Bằng cách sử dụng bảy chữ cái a, b, c, d, e, f, g ta sẽ tạo ra được một nhóm các bộ ba mà trong đó mỗi cặp phần tử xuất hiện đúng một lần, cụ thể là nhóm:

$$abc, ade, afg, bdf, beg, cdg, cef.$$

Từ nhóm này ta có thể chọn cho mỗi cột đúng 4 bộ ba mà chứa tất cả các chữ cái trừ những chữ cái đã nằm trong dòng đầu tiên của cột đó. Do đó, nếu chúng ta đặt những bộ ba thích hợp theo thứ tự chữ cái vào mỗi cột ta thu được cách sắp xếp như sau:

Chủ Nhật	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu	Thứ Bảy
xa_1a_2	xb_1b_2	xc_1c_2	xd_1d_2	xe_1e_2	xf_1f_2	xg_1g_2
bdf	ade	ade	abc	abc	abc	abc
beg	afg	afg	afg	afg	ade	ade
cdg	cdg	bdf	beg	bdf	beg	bdf
cef	cef	beg	cef	cdg	cdg	cef

Bây giờ chúng ta phải đánh chỉ số các bộ ba $bdf, beg, cdg, cef, ade, afg, abc$, nghĩa là cung cấp cho chúng những chỉ số 1 và 2.

Chúng ta đánh chỉ số chúng theo đúng thứ tự đã nêu ở trên, có nghĩa là đầu tiên là bộ ba người bdf , sau đó đến tất cả các bộ ba beg , v.v... tuân theo những quy tắc sau:

I. Nếu một chữ cái trong một cột đã nhận được số chỉ số của nó thì lần tiếp theo mà chữ cái này vẫn nằm trong cùng một cột sẽ nhận được số chỉ số khác.

II. Nếu hai chữ cái của một bộ ba đã được gán các số chỉ số thì hai số chỉ số này không được sử dụng trong cùng một dãy cho chính những chữ cái đó ở những bộ ba khác.

III. Nếu số chỉ số của một chữ cái không được xác định bởi các quy tắc I và II, thì chữ cái này được gán số chỉ số là 1.

Các chữ cái được đánh chỉ số theo ba bước:

Bước thứ nhất. Lần lượt đánh chỉ số các bộ ba bdf, beg, cdg và tất cả các chữ cái trừ a mà có thể được đánh chỉ số theo hệ thống đánh số với các quy tắc I, II, III.

Bước thứ hai. Gán số chỉ số bị thiếu (in đậm trong trong lược đồ) của những bộ ba ade và afg cũng như những số chỉ số thu được theo quy tắc I. Đồng thời gán cho hai chữ cái a cuối cùng ở dòng thứ hai số 1.

Bước thứ ba. Chèn số chỉ số vẫn còn thiếu của chữ cái a trong cột 4 và 5 (trong những khoảng trống của lược đồ), cụ thể là số chỉ số 2 ở dòng 2 và 1 ở dòng 3.

Phương pháp này dẫn đến lược đồ đầy đủ thể hiện lời giải của bài toán sau đây:

Chủ Nhật	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu	Thứ Bảy
xa_1a_2	xb_1b_2	xc_1c_2	xd_1d_2	xe_1e_2	xf_1f_2	xg_1g_2
$b_1d_1f_1$	$a_1d_2e_2$	$a_1d_1e_1$	ab_2c_2	ab_1c_1	$a_1b_2c_1$	$a_1b_1c_2$
$b_2e_1g_1$	$a_2f_2g_2$	$a_2f_1g_1$	af_2g_2	af_1g_2	$a_2d_2e_1$	$a_2d_1e_2$
$c_1d_2g_2$	$c_1d_1g_1$	$b_1d_2f_2$	$b_1e_1g_2$	$b_2d_1f_2$	$b_1e_2g_1$	$b_2d_2f_1$
$c_2e_2f_2$	$c_2e_1f_1$	$b_2e_2g_2$	$c_1e_2f_1$	$c_2d_2g_1$	$c_2d_1g_2$	$c_1e_1f_2$

Cách giải của Pierce

Chọn một cô gái, ta tạm ký hiệu là $*$, đi ở giữa của cùng một hàng trong tất cả các ngày. Chúng ta sẽ chia những cô gái còn lại thành hai nhóm 7 người và ký hiệu cho nhóm đầu bằng những số Ả Rập từ 1 đến 7, hoặc bằng những chữ thường còn nhóm thứ hai bằng các số La Mã từ I đến VII hoặc bằng các chữ cái in. Ta cũng sẽ quy ước rằng $R = s$ có nghĩa là chữ số La Mã được ký hiệu bằng chữ cái R sẽ có cùng giá trị bằng số như số Ả Rập tương ứng với chữ cái s . Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ ký hiệu các ngày trong tuần như Chủ Nhật, Thứ Hai,..., Thứ Bảy bằng các số 0, 1, 2,..., 6.

Giả sử sự sắp xếp của ngày Chủ Nhật có thứ tự như sau:

$$\begin{array}{lll} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \\ d & * & D \\ E & F & G \end{array}$$

Từ đây bằng cách cộng $r = R$ vào mỗi số, chúng ta thu được sự sắp xếp cho ngày thứ r trong tuần như sau:

$$\begin{array}{lll} a+r & \alpha+r & A+R \\ b+r & \beta+r & B+R \\ c+r & \gamma+r & C+R \\ d+r & * & D+R \\ E+R & F+R & G+R \end{array}$$

Do đó, mỗi chữ số thu được vượt quá 7, chẳng hạn như $c+r$ hoặc $D+R$ sẽ đại diện cho cô gái nhận số $c+r-7$ hoặc $D+R-7$ đứng dưới số đó sau đó được làm biến đổi thành số đó.

Những sự sắp xếp thu được như trên cung cấp cho ta một lời giải của bài toán nếu ba điều kiện sau thỏa mãn:

I. Ba hiệu số $\alpha-a, \beta-b, \gamma-c$ là 1, 2 và 3.

II. Bảy hiệu số $A-a, A-\alpha, B-b, B-\beta, C-c, C-\gamma, D-d$ tạo thành một hệ thống phân dư đầy đủ của những số không đồng dư nhau theo môđun 7.

III. Ba hiệu số $F-E, G-F, G-E$ là 1, 2 và 3.

Sau đây ta sẽ chứng minh chặt chẽ lại rằng nếu các tính chất vừa nêu được thỏa mãn thì cách sắp xếp như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Lưu ý rằng trong quá trình chứng minh ta chỉ quan tâm đến những đồng dư theo môđun 7.

1. Mỗi cô gái x của nhóm thứ nhất sẽ đi chung với chính xác một cô gái y khác của nhóm này.

Do đó, theo I) hiệu số $x-y$ đồng dư với chỉ một trong sáu hiệu số $a-\alpha, b-\beta, c-\gamma, \alpha-a, \beta-b, \gamma-c$, tạm giả sử $x-y = \beta-b$.

Khi đó, nếu r biểu thị số ngày của tuần mà đồng dư với $x-\beta$ hoặc $y-b$ thì:

$$x \equiv \beta + r \text{ và } y \equiv b + r,$$

do đó các cô nữ sinh x và y sẽ đi cùng hàng trong ngày thứ r của tuần.

2. Mỗi một cô gái x của nhóm thứ nhất đi cùng chính xác một lần với cô gái X của nhóm thứ hai.

Theo điều kiện II) hiệu $X-x$ chỉ có thể đồng dư với một trong bảy hiệu số

$A-a, A-\alpha, B-b, B-\beta, C-c, C-\gamma, D-d$, ta tạm giả sử $X-x \equiv C-\gamma$ hay $X-C \equiv x-\gamma$.

Nếu $s = S$ là số ngày trong tuần đồng dư với $X-C$ hoặc $x-\gamma$ thì ta có: $X \equiv C+S$ và $x \equiv \gamma+s$.

Do đó các cô gái X và x đi trong cùng một hàng vào ngày thứ s trong tuần.

3. Mỗi cô gái X của nhóm thứ hai đi cùng chính xác một lần với mọi cô gái Y khác của nhóm này.
 Theo điều kiện III) hiệu $X - Y$ chỉ đồng dư với một trong những hiệu số
 $F - E, G - F, G - E, E - F, F - G, E - G$, ta tạm giả sử $X - Y \equiv G - F$ hay $X - G \equiv Y - F$.

Khi đó, nếu R biểu thị cho số ngày trong tuần mà đồng dư với $X - G$ hoặc $Y - F$, chúng ta thu được:

$$X \equiv G + R \text{ và } Y \equiv F + R.$$

Do đó, những cô gái X và Y đi cùng hàng vào ngày thứ R trong tuần.

Phần việc còn lại của ta là cần làm thỏa mãn các điều kiện I, II và III để thu được sự sắp xếp vào ngày Chủ Nhật.

Bằng cách chọn $a = 1, \alpha = 2, b = 3$ ta suy ra $\beta = 5$ và tiếp đó bằng cách chọn $c = 4$ ta tiếp tục thu được $\gamma = 7$ và $d = 6$. Sau đó, bằng cách chọn $A = I$ và kết hợp với điều kiện II ta thu được $B = VI, C = II$ và $D = III$. Do đó, các số IV, V và VII còn lại là cho các chữ cái E, F, G .

Do đó, sự sắp xếp trong ngày Chủ Nhật là:

1	2	I
3	5	VI
4	7	II
6	*	III
IV	V	VII

Từ kết quả trên ta suy ra được sự sắp xếp các hàng trong

2	3	II	3	4	III	4	5	IV
4	6	VII	5	7	I	6	1	II
5	1	III	6	2	IV	7	3	V
7	*	IV	1	*	V	2	*	VI
V	VI	I	VI	VII	II	VII	I	III
5	6	V	6	7	VI	7	1	VII
7	2	III	1	3	IV	2	4	V
1	4	VI	2	5	VII	3	6	I
3	*	VII	4	*	I	5	*	II
I	II	IV	II	III	V	III	IV	VI

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Heinrich Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution, New York Dover Publications.
- [2]. Trương Phước Nhân, Bài toán thực tế và lý thuyết trường hữu hạn, 23/07/2017.
- [3]. Trương Phước Nhân, Bộ ba Steiner, 02/02/2018.
- [4]. Trương Phước Nhân, t-design, 12/02/2018.
- [5]. Trương Phước Nhân, Mô hình designs-Tập difference, 22/07/2017.