

Khảo sát điều kiện tồn tại của một (b, v, r, k, λ) - cấu hình

Trương Phước Nhân, 19/07/2018

Đầu tiên ta bắt đầu bằng việc trình bày một số khái niệm cơ bản sẽ được sử dụng nhiều xuyên suốt nội dung bài viết.

Cho $S = (s_{ij})_{n \times n}$ và $S' = (s'_{ij})_{n \times n}$ là hai ma trận đối xứng cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$.

Hai ma trận S và S' được gọi là tương đẳng trên $\mathbb{F}$, ký hiệu $S \approx S'$, nếu tồn tại một ma trận vuông P không suy biến cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$ sao cho $P^T S P = S'$, trong đó P^T là ma trận chuyển vị của P . Dễ dàng chứng minh được rằng tính tương đẳng của các ma trận là một quan hệ tương đương.

Cho $S = (s_{ij})_{n \times n}$ là một ma trận đối xứng cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$ và xác định hàm f bởi

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i s_{ij} x_j$ là một dạng song tuyến tính theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta nói rằng f là dạng song tuyến tính của ma trận S .

Cho $S' = (s'_{ij})_{n \times n}$ là một ma trận đối xứng cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$ và $S \approx S'$ trên $\mathbb{F}$.

Khi đó, từ định nghĩa ta tìm được một ma trận $P = (p_{ij})_{n \times n}$ không suy biến cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$ sao cho $P^T S P = S'$.

Bằng cách đưa vào thêm các biến số mới $y_1, y_2, \dots, y_n$ được xác định bởi các hệ thức

$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j, i = 1, 2, \dots, n$, lưu ý rằng do ma trận P không suy biến nên ta tìm được ma trận nghịch đảo

$Q = (q_{ij})_{n \times n}$ và chỉ cần đặt $y_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, n$, ta sẽ thu được nhận định vừa nêu.

Bây giờ ta thay các biểu thức $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j, i = 1, 2, \dots, n$, vào biểu thức tính của f ta thu được một dạng tuyến tính f' mới theo các biến $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Bằng một số phép biến đổi đơn giản ta có thể kiểm tra được rằng $f'(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n y_i s'_{ij} y_j$.

Nói cách khác, f' là dạng song tuyến tính của ma trận S' .

Khi đó, các dạng song tuyến tính f và f' được gọi là tương đẳng trên $\mathbb{F}$.

Nếu A và B lần lượt là các ma trận vuông cấp n và m với các phần tử thuộc trường $\mathbb{F}$ thì ta định nghĩa tổng trực tiếp của hai ma trận A và B là một ma trận vuông cấp $(n+m)$ được xác định bởi

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Nếu $S_1 \approx S'_1$ và $S_2 \approx S'_2$ thì bằng các lập luận đơn giản ta chứng minh được rằng $S_1 \oplus S_2 \approx S'_1 \oplus S'_2$.

Tính phức tạp của bài toán khảo sát tính tương đẳng của các ma trận phụ thuộc rất nhiều vào các đặc tính cơ bản của trường $\mathbb{F}$. Các nghiên cứu của nhà toán học Sylvester cho bài toán này cho trường số thực không thật sự quá khó khăn. Nhưng cũng bài toán này khi khảo sát cho trường số hữu tỷ ta vẫn phải rất nhiều khó khăn mang tính kỹ thuật. Nguyên nhân của việc này nằm ở chỗ các khảo sát trên trường số hữu tỷ có liên hệ rất mật thiết với các lĩnh vực của lý thuyết số.

Cho m là một số nguyên dương bất kỳ.

Áp dụng định lý Lagrange ta thu được $m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, trong đó a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên.

Đặt $H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & -a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, bằng cách nhân H với ma trận chuyển vị của nó, ta thu được $HH^T = mI_4$.

Do đó, $mI_4 \approx I_4$ trên trường số hữu tỷ.

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng suy ra được rằng $mI_n \approx I_n$ trên trường số hữu tỷ với mọi $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Trở lại với các (v, k, λ) -cấu hình, một trong các vấn đề trọng tâm trong các khảo sát về các cấu hình tổ hợp là đánh giá các miền giá trị của v, k và λ để sao cho tồn tại một cấu hình tương ứng. Từ định nghĩa ta suy ra được ngay rằng v, k và λ là các số nguyên thỏa mãn $0 < \lambda < k < v-1$ và $k-\lambda = k^2 - \lambda v$. Chúng đều là các điều kiện cần của v, k và λ để tồn tại một (v, k, λ) -cấu hình, tức là trong các thảo luận của ta về sự tồn tại của một (v, k, λ) -cấu hình thì các hệ thức vừa kể ra ở trên luôn chính xác. Sau đây ta trình bày điều kiện cần cho sự tồn tại của (v, k, λ) -cấu hình, lưu ý rằng cho đến ngày nay ta vẫn chưa tìm ra được một điều kiện cần khác với điều kiện trình bày dưới đây nên ta có thể phỏng đoán rằng sự tồn tại của một (v, k, λ) -cấu hình sẽ là một trường hợp đặc biệt nào đó của khẳng định này.

Kết quả 1. Cho v, k và λ là các số nguyên sao cho có ít nhất là một (v, k, λ) -cấu hình. Khi đó

- i) Nếu v là số chẵn thì $k - \lambda$ là một số chính phương.
- ii) Nếu v là số lẻ thì phương trình $x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda z^2$ có một nghiệm nguyên với x, y, z không đồng thời bằng không.

Chứng minh. Giả sử A là ma trận liên thuộc của (v, k, λ) -cấu hình.

$$\text{Khi đó, } AA^T = B = (k - \lambda)I + \lambda J.$$

Từ phương trình trên ta tính được $(\det A)^2 = \det B = k^2 (k - \lambda)^{v-1}$, nên $k^2 (k - \lambda)^{v-1}$ là một số chính phương.

Nếu v chẵn thì từ khẳng định trên ta suy ra được $k - \lambda$ phải là một số chính phương.

Bây giờ ta xét tiếp trường hợp v là số lẻ.

Từ phương trình của ma trận liên thuộc ta thu được $B \approx I$ trên trường số hữu tỷ.

Trường hợp 1. $v \equiv 1 \pmod{4}$

Từ phương trình của ma trận liên thuộc ta thu được $B \approx (k - \lambda)I_{v-1} \oplus I_1$.

Khi biểu diễn qua ngôn ngữ của các dạng song tuyến tính thì điều này có nghĩa là

$$(k - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 = (k - \lambda)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{v-1}^2) + y_v^2,$$

trong đó $x_i = p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \dots + p_{iv}y_v, i = 1, 2, \dots, v, P = (p_{ij})_{v \times v}$ là ma trận không suy biến với các phần tử là các số hữu tỷ.

Đặt $x_1 = \begin{cases} y_1, & \text{nếu } p_{11} \neq 1, \\ -y_1, & \text{nếu } p_{11} = 1, \end{cases}$ ta thu được hệ thức $y_1 = e_2y_2 + e_3y_3 + \dots + e_vy_v$, trong đó $e_2, e_3, \dots, e_v$ là các số hữu tỷ nào đó.

Kết hợp hệ thức vừa thu được với công thức liên hệ giữa x_i và y_j ta nhận được

$$x_2 = p_2y_2 + p_3y_3 + \dots + p_vy_v, \text{ trong đó } p_2, p_3, \dots, p_v \text{ là các số hữu tỷ nào đó.}$$

Bằng các đặt $x_2 = \begin{cases} y_2, & \text{nếu } p_2 \neq 1, \\ -y_2, & \text{nếu } p_2 = 1, \end{cases}$ ta thu được hệ thức $y_2 = f_3y_3 + f_4y_4 + \dots + f_vy_v$, trong đó $f_3, f_4, \dots, f_v$

là các số hữu tỷ nào đó.

Kết hợp hệ thức vừa thu được với công thức liên hệ giữa x_i và y_j ta nhận được

$$x_3 = g_2y_2 + g_3y_3 + \dots + g_vy_v, \text{ trong đó } g_2, g_3, \dots, g_v \text{ là các số hữu tỷ nào đó.}$$

Tiếp tục thực hiện quá trình này ta sẽ thu được $y_{v-2} = h_{v-1}y_{v-1} + h_vy_v$, trong đó h_{v-1} và h_v là các số hữu tỷ.

Kết hợp với công thức liên hệ x_i và y_j ta nhận được $x_{v-1} = k_{v-1}y_{v-1} + k_vy_v$, trong đó k_{v-1} và k_v là các số hữu tỷ. Sau cùng, bằng cách đặt $x_{v-1} = \pm y_{v-1}$ ta thu được $y_{v-1} = l_vy_v$, trong đó l_v là một số hữu tỷ. Cho đến nay chúng ta không xác định một giá trị cụ thể nào cho y_v và bằng cách chọn cho y_v bằng một số hữu tỷ khác không bất kỳ.

Khi đó $y_{v-1}, y_{v-2}, \dots, y_1$ được xác định một cách duy nhất nên $x_1, x_2, \dots, x_v$ cũng được xác định một cách duy nhất.

Hơn nữa, $x_i^2 = y_i^2, i = 1, 2, \dots, v-1$, nên khi ta thay các tính toán vừa trình bày ở trên vào hệ thức $(k-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 = (k-\lambda)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{v-1}^2) + y_v^2$ ta thu lại được hệ thức mới như sau $(k-\lambda)x_v^2 + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 = y_v^2$, điều này kết thúc chứng minh cho trường hợp $v \equiv 1 \pmod{4}$.

Trường hợp 2. $v \equiv 3 \pmod{4}$

Chúng minh cho trường hợp này thực ra không khác quá nhiều so với trường hợp $v \equiv 1 \pmod{4}$ và chỉ yêu cầu những sửa đổi nhỏ trong các lập luận trong trường hợp trước, cụ thể là $B \oplus I_1 \approx (k-\lambda)I_{v+1}$.

Khi diễn đạt dưới ngôn ngữ của các dạng song tuyến tính thì điều này có nghĩa là

$$(k-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 + x_{v+1}^2 = (k-\lambda)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{v+1}^2),$$

trong đó $x_i = p'_{i1}y_1 + p'_{i2}y_2 + \dots + p'_{i,v+1}y_{v+1}, i = 1, 2, \dots, v+1, P = (p_{ij})_{(v+1) \times (v+1)}$ là ma trận không suy biến với các phần tử là các số hữu tỷ.

Bằng cách đặt $x_1 = \pm y_1$, ta thu được hệ thức $y_1 = e'_2y_2 + e'_3y_3 + \dots + e'_{v+1}y_{v+1}$, trong đó $e'_2, e'_3, \dots, e'_{v+1}$ là các số hữu tỷ nào đó.

Tương tự, bằng cách đặt $x_2 = \pm y_2$ ta thu được hệ thức $y_2 = f'_3y_3 + f'_4y_4 + \dots + f'_{v+1}y_{v+1}$, trong đó $f'_3, f'_4, \dots, f'_{v+1}$ là các số hữu tỷ nào đó.

Tiếp tục thực hiện quá trình này ta sẽ thu được $y_{v-1} = h'_vy_v + h'_{v+1}y_{v+1}$, trong đó h' và h'_{v+1} là các số hữu tỷ.

Kết hợp với công thức liên hệ x_i và y_j ta nhận được $x_v = k'_vy_v + k'_{v+1}y_{v+1}$, trong đó k'_v và k'_{v+1} là các số hữu tỷ. Sau cùng, bằng cách đặt $x_v = \pm y_v$ ta thu được $y_{v+1} = l'_{v+1}y_{v+1}$, trong đó l'_{v+1} là một số hữu tỷ. Bây giờ ta cho y_v bằng một số hữu tỷ khác không bất kỳ.

Khi đó $y_{v-1}, y_{v-2}, \dots, y_1$ được xác định một cách duy nhất nên $x_1, x_2, \dots, x_v$ cũng được xác định một cách duy nhất.

Hơn nữa, $x_i^2 = y_i^2, i = 1, 2, \dots, v-1$, nên khi ta thay các tính toán vừa trình bày ở trên vào hệ thức $(k-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 + x_{v+1}^2 = (k-\lambda)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{v+1}^2)$ ta thu lại được hệ thức mới như sau $\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 + x_{v+1}^2 = (k-\lambda)y_{v+1}^2$, điều này kết thúc chứng minh cho trường hợp $v \equiv 3 \pmod{4}$.

Trước khi tiếp tục khảo sát tiếp các điều kiện cho sự tồn tại của (v, k, λ) -cấu hình ta sẽ trình bày thêm một số khái niệm về số học và đồng thời khái quát lại các ý chính đã thu nhận được

Cho a và m là các số nguyên khác không và nguyên tố cùng nhau.

Số nguyên a được gọi là thặng dư bình phương của m nếu phương trình $x^2 \equiv a \pmod{m}$ có một nghiệm.

Cho a, b và c là các số nguyên khác không, không phải là bình phương của một số nguyên, nguyên tố cùng nhau từng đôi một và không có cùng dấu. Khi đó, phương trình nghiệm nguyên $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ được gọi là phương trình Legendre. Các nghiên cứu và khảo sát chuyên sâu của nhà toán học Legendre đã chỉ ra rằng điều kiện cần và đủ để phương trình Legendre có một nghiệm nguyên x, y, z không tầm thường là $-bc, -ac, -ab$ lần lượt là các thặng dư bình phương của a, b, c .

Bây giờ dễ dàng nhận thấy rằng phương trình được nêu trong kết quả 1 có dạng tương tự với phương trình Legendre. Nhưng nên lưu ý rằng điều kiện các hệ số không phải bình phương số nguyên chưa được thỏa mãn nên để có thể áp dụng kết quả nghiên cứu của Legendre thì ta phải khử bỏ các nhân tử bình phương trong các hệ số.

Ký hiệu $(k-\lambda)'$ và λ' lần lượt là các nhân tử không phải thể biểu diễn thành bình phương của các số $k-\lambda$ và λ . Đặt $d = \gcd((k-\lambda)', \lambda')$, khi đó phương trình $x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda z^2$ có một nghiệm

nguyên x, y, z không tầm thường khi và chỉ khi phương trình $dx^2 = \frac{(k-\lambda)'}{d} y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \frac{\lambda'}{d} z^2$ cũng có một nghiệm nguyên x, y, z không tầm thường. Hơn nữa, phương trình $dx^2 = \frac{(k-\lambda)'}{d} y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \frac{\lambda'}{d} z^2$ thỏa mãn hoàn toàn các điều kiện của một phương trình Legendre. Áp dụng kết quả nghiên cứu của Legendre, ta suy ra rằng nếu tồn tại một (v, k, λ) -cấu hình với v lẻ thì các số $(-1)^{\frac{v+1}{2}} \frac{\lambda'(k-\lambda)'}{d^2}$, $(-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda'$ và $(k-\lambda)'$ lần lượt là thặng dư bình phương của các số $-d, \frac{(k-\lambda)'}{d}$ và $(-1)^{\frac{v-1}{2}} \frac{\lambda'}{d}$.

Trong đa phần các (v, k, λ) -cấu hình quan trọng như mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn hoặc ma trận Hadamard thì v là một số lẻ và $(k, \lambda) = 1$ nên $(k-\lambda, \lambda) = 1$ hay $d = 1$. Trong số các cấu hình quan trọng này thì các điều kiện 1 và 2 được thỏa mãn một cách tầm thường. Do đó cái mà ta phải quan tâm đến đó là điều kiện 3, hay nói cách khác nếu tồn tại một (v, k, λ) -cấu hình với v lẻ và $(k, \lambda) = 1$ thì $(k-\lambda)'$ là một thặng dư bình phương của $(-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda'$.

Trong phần cuối của bài viết ta tập trung khảo sát mối liên hệ giữa phương trình ma trận $AA^T = B$ và điều kiện tồn tại của (v, k, λ) -cấu hình, trong đó $B = (k-\lambda)I + \lambda J$.

Kết quả 2. Cho A là một ma trận vuông cấp v với các phần tử hữu tỷ thỏa mãn phương trình $AA^T = B$. Khi đó $A^T A = (k-\lambda)I + \frac{\lambda}{k^2} A^T J A$.

Chứng minh. Từ công thức xác định của B , $B = (k-\lambda)I + \lambda J$, ta nhận ra rằng B không suy biến.

Bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản trên ma trận ta chỉ ra được $B^{-1} = \frac{1}{k-\lambda} I - \frac{\lambda}{k^2(k-\lambda)} J$.

Từ giả thiết ta suy ra $A(A^T B^{-1}) = I$ nên $A^T B^{-1} A = I$.

Thay kết quả tính B^{-1} vào hệ thức trên ta suy ra $A^T \left(\frac{1}{k-\lambda} I - \frac{\lambda}{k^2(k-\lambda)} J \right) A = I$.

Sau khi thu gọn hệ thức trên ta nhận được $A^T A = (k-\lambda)I + \frac{\lambda}{k^2} A^T J A$, điều phải chứng minh.

Kết quả vừa chứng minh ở trên có một số hệ quả rất thú vị.

Gọi s_i là tổng các phần tử của cột thứ i và t_i là tổng bình phương các phần tử nằm trên cột thứ i của ma trận A .

Bằng tính toán trực tiếp ta nhận ra rằng $A^T J A = (s_i s_j)_{i,j=1,2,\dots,v}$.

Áp dụng kết quả 2 ta suy ra $k^2 t_i = \lambda s_i^2 + k^2 (k-\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, v$.

Nếu A là ma trận với các phần tử là số hữu tỷ sao cho $AA^T = B$ và $JA = kJ$ thì $A^T A = B$.

Một nghiên cứu chi tiết về điều kiện $B \approx I$ trên trường số hữu tỷ đã được thực hiện nhưng ta không thể trình bày tất cả các kết quả đó trong bài viết này. Trong bài viết này ta chỉ đơn thuần là khảo sát điều kiện $B \approx I$ trên trường số hữu tỷ với các giá trị v, k, λ thỏa mãn các điều kiện nêu trong kết quả 1. Đồng thời ta cũng biết rằng nếu $B \approx I$ trên trường số hữu tỷ thì tồn tại một ma trận A với các phần tử là các số hữu tỷ sao cho $AA^T = B$.

Một cách rất tự nhiên ta nghiên cứu phương trình $AA^T = B$ trong trường hợp ma trận A có tất cả các phần tử đều nguyên. Ta bắt đầu với một số quan sát đơn giản.

Cho A là một ma trận với tất cả các phần tử nguyên sao cho $AA^T = A^T A = B$.

Ta khẳng định rằng A hoặc $-A$ là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) -cấu hình nào đó.

Thật vậy, từ điều kiện $A^T A = B$ ta suy ra $t_i = k$, $i = 1, \dots, n$, và từ hệ thức $k^2 t_i = \lambda s_i^2 + k^2 (k-\lambda)$,

$i=1, \dots, n$, ta tính được $s_i^2 = k^2$. Bây giờ từ $t_i = k$ và $s_i = k$ ta suy ra được rằng các phần tử thuộc cột thứ i của ma trận A bằng 0 hoặc 1; từ hệ thức $t_i = k$ và $s_i = -k$ ta suy ra các phần tử thuộc cột thứ i của ma trận A bằng 0 hoặc -1 . Do mỗi phần tử của ma trận B không nằm trên đường chéo chính đều bằng số nguyên ương λ nên ta suy ra được rằng không thể xảy ra trường hợp có hai cột với hai loại phần tử khác nhau. Do đó, A hoặc $-A$ là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) -cấu hình nào đó.

Cho S và S' là hai ma trận đối xứng cấp n với các phần tử thuộc vành các số nguyên.

Hai ma trận S và S' được gọi là biểu diễn đồng nhất nếu tồn tại một ma trận vuông P cấp n với các phần tử nguyên sao cho $P^T S P = S'$. Trường hợp đặc biệt, ma trận đơn vị I cấp n biểu diễn đồng nhất với S' nếu tồn tại một ma trận vuông P cấp n với các phần tử nguyên sao cho $P^T P = S'$.

Dễ dàng nhận ra rằng nếu tồn tại một (v, k, λ) -cấu hình thì ma trận đơn vị I cấp v biểu diễn đồng nhất với B và lưu ý rằng chiều đảo của khẳng định này thì không phải luôn đúng. Trong phần sau của bài viết ta sẽ trình bày một điều kiện đủ cho khẳng định trên. Thật không may mắn cho ta khi bài toán khảo sát quan hệ biểu diễn đồng nhất trên các ma trận trong trường hợp tổng quát vẫn chưa được giải quyết. Những phát triển sâu sắc hơn cho bài toán này có thể sẽ mang lại cho ta những tiến bộ lớn về (v, k, λ) -cấu hình.

Cho A là một ma trận với các phần tử nguyên sao cho $AA^T = B$. Nếu ta nhân một cột bất kỳ của ma trận A cho -1 thì ma trận thu được vẫn thỏa mãn phương trình. Do đó ta có thể chọn ma trận A để sao cho tổng tất cả các phần tử trên mỗi cột là các số không âm, khi đó ta nói rằng ma trận A có dạng chuẩn.

Kết quả 3. Cho A là một ma trận với các phần tử nguyên sao cho $AA^T = B$ và A được viết ở dạng chuẩn. Nếu (k, λ) không phải là một số chính phương và $k - \lambda$ là một số lẻ thì A là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) -cấu hình nào đó.

Chứng minh. Ký hiệu s_i, t_i lần lượt là tổng các phần tử và tổng bình phương các phần tử nằm trên cột thứ i của A . Khi đó, $s_i \geq 0, i=1, \dots, v$, do ma trận A đã được chuẩn hóa.

Từ hệ thức $k^2 t_i = \lambda s_i^2 + k^2 (k - \lambda)$ ta suy ra $\lambda s_i^2 \equiv 0 \pmod{k^2}, i=1, \dots, v$.

Từ đồng dư thức $\lambda s_i^2 \equiv 0 \pmod{k^2}$ và hệ thức $k - \lambda = k^2 - \lambda v$ ta suy ra được $s_i \equiv 0 \pmod{k}$, lưu ý rằng (k, λ) không phải là một số chính phương. Do đó, $s_i = u_i k$.

Thay kết quả này vào hệ thức $k^2 t_i = \lambda s_i^2 + k^2 (k - \lambda)$ ta suy ra $t_i = \lambda u_i^2 + (k - \lambda), i=1, \dots, v$.

Giả sử $u_i = 0$ với một chỉ số i nào đó. Khi đó $s_i = 0$, nên $t_i = k - \lambda$.

Mặt khác, $k - \lambda \equiv t_i \equiv s_i^2 \equiv 0 \pmod{2}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $k - \lambda$ là số lẻ.

Do đó, $u_i \neq 0, i=1, \dots, v$.

Đồng thời ta lại có $JAA^T J = JBJ$ nên $s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_v^2 = k^2 v$, hay $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_v^2 = v$.

Do $u_i \neq 0$, ta suy ra $u_i = 1$ nên $s_i = k$ hay $t_i = k$.

Điều này chỉ ra rằng A là ma trận liên thuộc của một (v, k, λ) -cấu hình.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Trương Phước Nhân, Cấu hình tổ hợp, 16/07/2018.
- [2]. Trương Phước Nhân, Định lý Bruck-Ryser-Chowla về design đối xứng, 07/02/2016.
- [3]. Herbert John Ryser, Combinatorial Mathematics, The Mathematical Association of America