

Ghép cặp hoàn hảo – Pfaffian

Trương Phước Nhân, 20/01/2019

Một trong những ý tưởng để xác định số các ghép cặp hoàn hảo của một đồ thị đó là liệt kê tất cả các cách có thể xảy ra được. Điều này là bất khả thi trong trường hợp tổng quát. Tuy nhiên, đối với các đồ thị phẳng thì ta có một phương pháp hữu hiệu để xác định số các ghép cặp của một đồ thị bằng phương pháp tính toán toán học – phương pháp sử dụng định hướng Pfaffian.

1. Kiến thức cơ bản

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

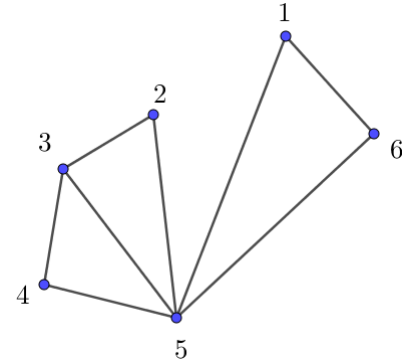
Đặt a_{ij} bằng số các cạnh của đồ thị G nối đỉnh v_i và v_j .

Khi đó ta có thể biểu diễn đồ thị G bởi ma trận kề $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ của đồ thị G .

Nhận xét rằng do $a_{ij} = a_{ji}$ nên $A(G)$ là một ma trận đối xứng.

Trong trường hợp G là đồ thị đơn thì ta có

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G), \\ 0, & v_i \text{ và } v_j \text{ không liên hợp với nhau.} \end{cases}$$



Từ định nghĩa trên, ta tìm được ma trận kề $A(G)$:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Phép biểu diễn trên cho phép ta chuyển nhiều vấn đề quan trọng khác nhau trong lý thuyết đồ thị về dưới dạng ngôn ngữ ma trận. Đối với vấn đề xác định số các ghép cặp của một đồ thị cũng không ngoại lệ.

Để xác định số các ghép cặp hoàn hảo dựa trên công cụ ma trận ta cần đến khái niệm Pfaffian như sau:

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh $V = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$.

Thực hiện định hướng cho mỗi cạnh của đồ thị G một hướng bất kì và gán cho mỗi cạnh $e \in E$ một giá trị x_e , định nghĩa ma trận $B = (b_{ij})_{2n \times 2n}$ như sau:

$$b_{ij} = \begin{cases} x_e, & e = (v_i, v_j) \\ -x_e, & e = (v_j, v_i) \\ 0, & v_i \text{ và } v_j \text{ không liên hợp với nhau.} \end{cases}$$

Khi đó, B là một ma trận phản đối xứng có dạng

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \dots & b_{1,2n} \\ -b_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{2n-1,2n} \\ -b_{1,2n} & \dots & -b_{2n-1,2n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét rằng nếu đồ thị G có một số lẻ các đỉnh thì không thể có ghép cặp hoàn hảo nên ta chỉ cần khảo sát bài toán cho các đồ thị gồm một số chẵn các đỉnh. Để thuận tiện cho việc trình bày chứng minh ta gán cho các đỉnh của đồ thị các số $1, 2, \dots, 2n$.

Khi đó, mỗi cách ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G sẽ là một phép phân hoạch tập $\{1, 2, \dots, 2n\}$ thành các cặp $\{\text{không tính thứ tự}\}$ có dạng $\{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$.

Lưu ý rằng chiều ngược lại của khẳng định trên là không đúng.

Đặt Π là tập tất cả các phép phân hoạch ở trên.

Pfaffian của ma trận B , kí hiệu $\text{Pf}(B)$, được xác định như sau:

$$\text{Pf}(B) = \sum_{\pi \in \Pi} \text{sgn}(\pi) \prod_{e \in \pi} b_e,$$

trong đó $b_e = b_{ij}$ nếu $e = \{i, j\}$ với $i < j$ và dấu $\text{sgn}(\pi)$ của phân hoạch $\pi = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$ được xác định bởi công thức:

$$\text{sgn}(\pi) = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k),$$

trong đó $\sigma(i, j) = \begin{cases} 1, i < j, \\ -1, i > j, \\ 0, \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$

Nhận xét rằng định nghĩa về dấu của phân hoạch π vừa trình bày ở trên là hoàn toàn hợp lý.

Để chứng minh nhận định trên ta chỉ cần chứng minh rằng thứ tự của hai phần tử bất kì trong cùng một cặp, tạm giả sử là cặp $\{i, j\}$, của phân hoạch π không làm thay đổi giá trị của $\text{sgn}(\pi)$.

Giả sử ta thay đổi thứ tự của hai phần tử từ ij sang ji trong biểu thức $\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k)$.

Thật vậy, do dấu của hoán vị $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ và $\prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k)$ đồng thời bị đổi dấu nên $\text{sgn}(\pi)$ giữ nguyên.

Kết quả 1. (Cayley)

$$\det(B) = (\text{Pf}(B))^2.$$

Chứng minh kết quả 1.

Bằng cách áp dụng công thức khai triển định thức Leibniz, ta thu được

$$\det(B) = \sum_{\pi \in S_{2n}} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi(i)} \cdot \sigma(i, \pi(i)),$$

trong đó $b_{i, \pi(i)}$ là giá trị được gán cho cạnh $\{i, j\}$ và $\sigma(i, j) = \begin{cases} 1, i < j, \\ -1, i > j, \\ 0, \text{ trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$

Mặt khác, bằng cách khai triển bình phương $(\text{Pf}(B))^2$, ta có

$$\begin{aligned} (\text{Pf}(B))^2 &= \left(\sum_{M \in \Pi} \text{sgn}(M) \prod_{e \in M} b_e \right) \left(\sum_{N \in \Pi} \text{sgn}(N) \prod_{f \in N} b_f \right) \\ &= \sum_{M, N \in \Pi} \text{sgn}(M) \cdot \text{sgn}(N) \prod_{e \in M} b_e \prod_{f \in N} b_f \end{aligned}$$

Do đó, để kết thúc phép chứng minh của bài toán ta chỉ cần chỉ ra rằng mỗi số hạng trong $(\text{Pf}(B))^2$ tương ứng với một số hạng nào đó trong $\det(B)$.

Thật vậy, mỗi hoán vị $\pi \in S_{2n}$ đều có thể phân hoạch thành các chu trình chẵn và các chu trình lẻ.

Giả sử phân hoạch của hoán vị π chứa ít nhất một chu trình lẻ $(i_1 i_2 \dots i_{2k+1})$ trong đó $k \geq 1$.

Xét chu trình lẻ có chứa phần tử nhỏ nhất trong phân hoạch của hoán vị π .

Khi đó, tồn tại một hoán vị π' trong khai triển của định thức $\det(B)$ cũng chứa chu trình lẻ này nhưng theo chiều ngược lại $(i_{2k+1} \dots i_2 i_1)$ và tất cả các chu trình thành phần còn lại đều được giữ nguyên.

Do đó, $\prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi(i)} = - \prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi'(i)}$ và $\text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(\pi')$, do π và π' chứa các chu trình có cùng một độ dài.

Nói cách khác tất cả các số hạng tương ứng với các hoán vị chứa ít nhất một chu trình lẻ đều có thể ghép thành các cặp số hạng triệt tiêu lẫn nhau trong khai triển của $\det(B)$.

Phần việc còn lại của ta bây giờ là chỉ ra rằng các số hạng còn lại trong khai triển của $\det(B)$, các hoán vị mà trong phân hoạch chỉ chứa các chu trình có độ dài chẵn, tương ứng 1-1 với các số hạng trong khai triển của $(\text{Pf}(B))^2$.

Thật vậy, mỗi số hạng trong khai triển của $(\text{Pf}(B))^2$ đều có dạng $\text{sgn}(M) \cdot \text{sgn}(N) \prod_{e \in M} b_e \prod_{f \in N} b_f$,

trong đó $M = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$ và $N = \{\{i'_1, j'_1\}, \dots, \{i'_n, j'_n\}\}$.

Ta sẽ tiến hành xây dựng hoán vị $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(2n) \end{pmatrix}$ từ các ghép cặp hoàn hảo M, N như sau:

Đầu tiên nhận thấy rằng phần tử 1 nằm trong một ghép cặp nào đó của $M = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$,

tạm giả sử là phần tử i_1 , ta thực hiện phép đặt

$$\pi(1) = i_1.$$

Khi đó, phần tử i_1 nằm trong một ghép cặp nào đó của $N = \{\{i'_1, j'_1\}, \dots, \{i'_n, j'_n\}\}$, tạm giả sử là phần

tử i'_1 , ta thực hiện phép đặt $\pi(i_1) = j'_1$.

Lúc này, phần tử j'_1 nằm trong một ghép cặp nào đó của M , tạm giả sử là phần tử i_2 , ta thực hiện phép đặt $\pi(j'_1) = i_2$.

Quá trình xây dựng vừa nêu chỉ dừng lại cho tới khi $\pi(j'_r) = 1$.

Dễ dàng chứng minh được rằng phép xây dựng trên là một song ánh.

Nhận thấy rằng dấu của phân hoạch M cho $\text{sgn}(M) = \text{sgn} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}}_{\pi_M} \right) \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k)$ và dấu của phân

$$\text{hoạch } \text{sgn}(N) = \text{sgn} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ j_1 & j'_1 & \dots & j'_n \end{pmatrix}}_{\pi_N} \right) \prod_{l=1}^n \sigma(j_l, j'_l).$$

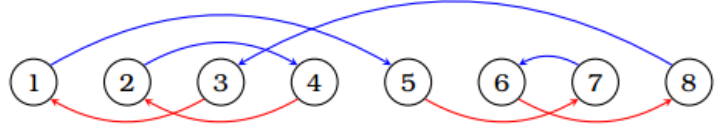
Từ phép xây dựng ta nhận thấy rằng hoán vị tương ứng với cặp (M, N) trong khai triển của định thức

$$\det(B) \text{ là } \pi_N \pi_M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ j_1 & j'_1 & \dots & j'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & \dots & j_n \\ j_1 & j'_1 & \dots & j'_n \end{pmatrix} = \pi.$$

$$M = \{\{1, 5\}, \{7, 6\}, \{8, 3\}, \{2, 4\}\},$$

$$N = \{\{5, 7\}, \{6, 8\}, \{3, 1\}, \{2, 4\}\}.$$

Thực hiện phép xây dựng vừa nêu ta thu được kết quả



Tương ứng với hoán vị $\pi = (5 \ 4 \ 1 \ 2 \ 7 \ 6 \ 8 \ 3)$.

Do $\text{sgn}(\pi_M) = \text{sgn}(\pi_M^{-1})$ và $\sigma(i, j) \cdot \sigma(j, j')$, bởi vì $i \rightarrow j \rightarrow j'$, nên $\text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(M) \cdot \text{sgn}(N)$.

Điều này kết thúc phép chứng minh kết quả 1.

2. Định hướng Pfaffian

Nhận thấy rằng mỗi số hạng khác 0 của Pfaffian của ma trận kề của đồ thị G sẽ tương ứng với một ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G , lưu ý rằng trong trường hợp nếu ma trận kề A của G có cấp lẻ thì hiển nhiên rằng $\det(A) = 0$. Nhưng thật không may mắn bởi vì ma trận kề A là ma trận đối xứng chứ không phải ma trận phản đối xứng. Để khắc phục điểm khó khăn cơ bản này ta nhận ra một ý tưởng đơn giản như sau: ta định hướng các cạnh ij của đồ thị G và gán $a_{ij} = 1$ nếu $i \rightarrow j$ còn nếu $j \rightarrow i$ thì $a_{ij} = -1$. Bằng cách làm như trên ma trận mới nhận được sẽ là một ma trận phản đối xứng. Khi đó, nếu tồn tại một phép định hướng các cạnh của đồ thị G sao cho tất cả các số hạng khác 0 trong khai triển của định thức Pfaff của A đều có cùng dấu thì từ kết quả 1) ta có thể đếm được số các cách ghép cặp hoàn hảo của một đồ thị G bằng cách sử dụng công cụ định thức! Một định hướng của đồ thị G thỏa mãn các tính chất vừa nêu được gọi là định hướng Pfaffian của đồ thị G .

Từ phân tích trên ta nhận ra hai vấn đề cần giải quyết ở đây là:

- Khi nào thì tồn tại một định hướng Pfaffian cho đồ thị G ?
- Nếu biết trước sự tồn tại của định hướng Pfaffian thì làm thế nào để ta tìm nó một cách hiệu quả?

Giả sử G là một đồ thị định hướng và C là một chu trình chẵn không định hướng bất kì của đồ thị G .

Bằng cách di chuyển vòng quanh chu trình C theo một hướng bất kì, nếu chu trình C chứa một số chẵn các cạnh được định hướng cùng chiều di chuyển thì chu trình C cũng sẽ chứa một số chẵn các cạnh được định hướng theo chiều ngược.

Nếu C là một chu trình chẵn không định hướng bất kì của đồ thị G thì C được gọi là chu trình định hướng chẵn nếu C có số chẵn các cạnh được định hướng theo cùng một chiều, trong trường hợp ngược lại C được gọi là chu trình định hướng lẻ.

Từ phân tích trong phần đầu của bài viết ta cũng có định nghĩa về dấu của một ghép cặp hoàn hảo M của đồ thị G như sau:

$$\text{sgn}(M) := \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k),$$

trong đó $M = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$, $\sigma(i, j) = \begin{cases} 1, i \rightarrow j, \\ -1, j \rightarrow i. \end{cases}$

Kết quả 2.

Giả sử $\vec{G}$ là một định hướng bất kì nào đó của đồ thị G , M và N là các ghép cặp hoàn hảo nào đó của đồ thị G . Đặt k là số các chu trình định hướng thay phiên trong $M \cup N$.

Khi đó, $\text{sgn}(M) \cdot \text{sgn}(N) = (-1)^k$.

Chứng minh kết quả 2.

Đầu tiên ta nhận thấy rằng nếu khẳng định trên đúng đối với một định hướng nào đó thì khẳng định trên đúng với định hướng bất kì.

Thật vậy, xét một cạnh e bất kì, ta khảo sát các trường hợp có thể xảy ra:

- 1) $e \notin M \cup N$
- 2) $e \in M \cap N$
- 3) $e \in E(M) \oplus E(N)$.

Khi đó, bằng cách đổi chiều định hướng của cạnh e thì:

Trong trường hợp thứ 1, cạnh e không nằm trong M cũng như N nên không làm ảnh hưởng đến kết luận của bài toán.

Trong trường hợp 2, cạnh e nằm trong cả M và N nên dấu của mỗi ghép cặp thay đổi, và giá trị của k không thay đổi nên không làm ảnh hưởng đến kết luận của bài toán.

Trong trường hợp 3, cạnh e là thành phần của một chu trình thay phiên nào đó nên dấu của một trong hai ghép cặp M hoặc N bị thay đổi và đồng thời giá trị của k cũng thay đổi đi 1 đơn vị nên hệ thức trên vẫn được thỏa mãn.

Nhận xét rằng phép định hướng ban đầu ta có thể chọn bất kì nên để thuận tiện cho quá trình tính toán ta thực hiện định hướng các cạnh của đồ thị như sau: Nếu cạnh e rơi vào trường hợp (1) và (2) thì ta chọn hướng cho cạnh e bất kì; nếu cạnh e là thành phần của một chu trình thay phiên nào đó thì ta chọn hướng cho cạnh e sao cho chu trình này trở thành chu trình định hướng hoặc

Tiếp theo ta thực hiện đánh số lại các đỉnh của đồ thị $\vec{G}$ sao cho các hàng và các cột của ma trận kề đều thu được bằng cách hoán đổi vị trí từ cùng một hoán vị π . Khi đó, trong khai triển của Pfaffian các hoán vị tương ứng với các số hạng thu được bằng cách nhân cho hoán vị π . Do đó, hệ thức nêu trong bài toán vẫn được giữ nguyên qua thủ thuật đánh số lại các đỉnh nêu ở trên.

Ta thực hiện đánh số lại các đỉnh của đồ thị như sau:

Nếu cạnh $e \in (M \cap N)$ thì ta đánh số lại các đầu mút của nó sao cho đỉnh đầu bằng đỉnh cuối cộng với một. Nếu cạnh $e \in E(M) \oplus E(N)$ thì, ta tạm giả sử cạnh $e \in M$, ta đánh số lại các đầu mút của nó bởi các số liên tiếp nhau chưa được sử dụng sao cho đỉnh đầu bằng đỉnh cuối cộng với một. Lặp lại quá trình đánh số vừa nêu ở trên cho đến khi tất cả các chu trình thay phiên đều được đánh số.

Khi đó, số hạng trong khai triển Pfaffian tương ứng với ghép cặp hoàn hảo M có dấu bằng 1 và các số hạng a_{mm} trong tích này đều dương. Đồng thời số hạng trong khai triển Pfaffian tương ứng với ghép cặp hoàn hảo N đều có các số hạng a_{mm} , do cách ta đánh số và định hướng lại. Do đó, dấu của ghép cặp N trùng với dấu của hoán vị ρ tương ứng.

Do mỗi chu trình thay phiên của đồ thị G tương ứng với một chu trình chẵn của hoán vị ρ và các chu trình này đều rời nhau nên $\text{sgn}(N) = (-1)^k$.

Điều này kết thúc phép chứng minh.

Một chu trình C của đồ thị G được gọi là tốt nếu đồ thị $G - C$ có ít nhất một ghép cặp hoàn hảo.

Kết quả 3.

Giả sử G là một đồ thị có số chẵn các đỉnh và $\vec{G}$ là một phép định hướng của đồ thị G .

Khi đó, các khẳng định sau tương đương với nhau:

- 1) $\vec{G}$ là một định hướng Pfaffian.
- 2) Mọi ghép cặp hoàn hảo của G đều có cùng dấu với $\vec{G}$.
- 3) Mọi chu trình tốt của đồ thị G đều là các chu trình định hướng lẻ trong $\vec{G}$.
- 4) Nếu G có ít nhất một ghép cặp hoàn hảo thì, với mọi ghép cặp hoàn hảo M , mọi chu trình M -thay phiên đều là các chu trình định hướng lẻ trong $\vec{G}$.

Chứng minh kết quả 3.

(1) $\Rightarrow$ (2): Suy ra từ định nghĩa của định hướng Pfaffian.

(2) $\Rightarrow$ (3): Giả sử $\vec{G}$ là một định hướng Pfaffian và C là một chu trình tốt của đồ thị G .

Gọi F là một ghép cặp hoàn hảo của đồ thị $G - C$ và C_1, C_2 là các ghép cặp hoàn hảo của C .

Bằng cách sử dụng khẳng định (2), M và N có cùng dấu.

Do C là một M, N -chu trình thay phiên trong $M \cup N$ nên, bằng cách sử dụng kết quả 2, C là một chu trình định hướng lẻ.

(3) $\Rightarrow$ (4): Giả sử mọi chu trình tốt trong đồ thị G đều là chu trình định hướng lẻ như trong khẳng định (3) và M là một ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G .

Gọi C là một M -chu trình thay phiên.

Khi đó, $M - C$ là một ghép cặp hoàn hảo của đồ thị $G - C$. Do đó, C là một chu trình tốt và đồng thời cũng là một chu trình định hướng lẻ.

(4) $\Rightarrow$ (1): Giả sử M là một ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G và giả sử rằng mọi M - chu trình thay phiên đều là chu trình định hướng lẻ.

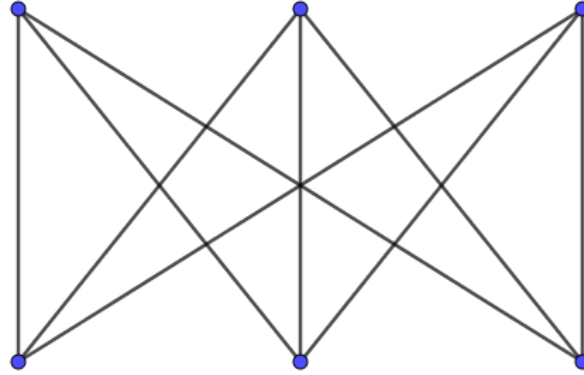
Giả sử N là một ghép cặp hoàn hảo khác của đồ thị G .

Từ khẳng định (4), ta suy ra mọi M, N - chu trình thay phiên đều là chu trình định hướng lẻ.

Bằng cách sử dụng kết quả 2, ta suy ra hai ghép cặp M và N có cùng dấu.

Do đó, $\vec{G}$ là một định hướng Pfaffian.

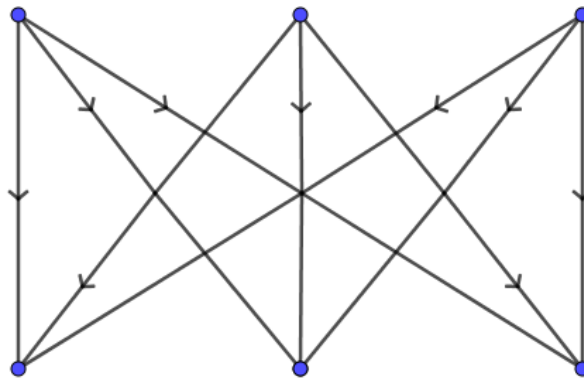
Trước khi tiếp tục khảo sát tiếp các vấn đề về Pfaffian ta xem xét một ví dụ nhỏ trình bày ý tưởng áp dụng kết quả 3) để xác định Pfaffian của một đồ thị cho trước như sau:



Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta dễ dàng tính được rằng đồ thị $K_{3,3}$ vừa nêu ở trên có 6 ghép cặp hoàn hảo.

Tuy nhiên, đồ thị này lại không có bất kì một định hướng Pfaffian nào.

Thật vậy, ta xét một định hướng của đồ thị $K_{3,3}$ như sau:



Nhận thấy rằng tất cả các chu trình tốt trong định hướng vừa nêu đều chứa 4 hoặc 6 cạnh và với định hướng đã chọn các chu trình đều là các chu trình định hướng chẵn.

Giả sử đồ thị $K_{3,3}$ có ít nhất một định hướng Pfaffian.

Khi đó, để thu được định hướng Pfaffian mà ta vừa giả sử ở trên cần phải đảo hướng của một số lẻ các cạnh trong mỗi chu trình này.

Do có $C_3^2 C_3^2 = 9$ chu trình độ dài 4 nên mỗi cạnh của đồ thị $K_{3,3}$ xuất hiện 4 lần trong mỗi 9 chu trình này.

Nếu ta giả sử rằng ta đảo hướng của các cạnh thuộc tập $F \subseteq E(K_{3,3})$ thì $4 \cdot |F| \equiv 9 \pmod{2}$, mâu thuẫn.

Điều này chỉ ra rằng đồ thị $K_{3,3}$ không có bất kì một định hướng Pfaffian nào.

Ta sẽ tiếp tục phát triển các lập luận đã dùng trong ví dụ trên để khảo sát sự tồn tại của định hướng Pfaffian đối với các đồ thị phẳng. Để thuận tiện cho các lập luận ta quy ước xét các chu trình theo chiều quay kim đồng hồ.

Kết quả 4.

Nếu $\vec{G}$ là một đồ thị phẳng định hướng liên thông sao cho mọi đường biên, ngoại trừ mặt vô hạn, đều có một số lẻ các cạnh được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ.

Khi đó, trong mỗi chu trình số các cạnh được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ khác tính chẵn lẻ với số các đỉnh của đồ thị $\vec{G}$ nằm trên chu trình.

Chứng minh kết quả 4.

Giả sử C là một chu trình bất kỳ của đồ thị $\vec{G}$.

Đặt:

f là số các mặt chứa trong chu trình C , $f_1, f_2, \dots$ là các mặt chứa trong chu trình C ,

c_i là số các cạnh nằm trên biên của mặt f_i được định hướng theo chiều kim đồng hồ,

e là số các cạnh chứa trong chu trình C ,

v là số các đỉnh chứa trong chu trình C ,

k là số các cạnh nằm trên chu trình C , hay số đỉnh của chu trình C ,

c là số các cạnh nằm trên chu trình C và được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ.

Ta sẽ chứng minh rằng $c + v \equiv 1 \pmod{2}$.

Thật vậy, gọi G' là đồ thị thu được bằng cách xóa tất cả các đỉnh nằm bên ngoài chu trình C .

Bằng cách áp dụng định lý Euler cho các đồ thị phẳng liên thông, số đỉnh - số cạnh + số mặt = 2, cho đồ thị G' ta thu được:

$$\begin{aligned}(v + k) - (e + k) + (f + 1) &= 2 \\ \Rightarrow v - e + f &= 1.\end{aligned}$$

Do mọi mặt biên, ngoại trừ mặt vô hạn, đều có một số lẻ các cạnh được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ nên $c_i \equiv 1 \pmod{2}$, hay $f \equiv \sum_{i=1}^f c_i \pmod{2}$.

Do mỗi cạnh nằm trong chu trình C được tính theo chiều kim đồng hồ chính xác một lần nên $\sum_{i=1}^f c_i = c + e$.

Do đó,

$$\begin{aligned}f &\equiv c + e \pmod{2} \\ \Rightarrow f &\equiv c - 1 + f + v \pmod{2} \\ \Rightarrow c - 1 + v &\equiv 0 \pmod{2}.\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $c + v \equiv 1 \pmod{2}$.

Từ kết quả vừa thu được ta nhận thấy rằng nếu chu trình C là một M, N - chu trình thay phiên với M và N là hai ghép cặp hoàn hảo của đồ thị G thì số các đỉnh nằm trong chu trình C sẽ là một số chẵn.

Do đó, số các cạnh nằm trên chu trình C được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ là một số lẻ.

Như vậy, $\vec{G}$ là một định hướng Pfaffian.

Kết quả 5. (Kasteleyn)

Mọi đồ thị phẳng G đều có ít nhất một định hướng Pfaffian.

Chứng minh kết quả 5.

Không mất tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử rằng G là một đồ thị liên thông.

Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán theo số chu trình của đồ thị liên thông G .

Nếu G là một cây thì dễ dàng chứng minh rằng mọi định hướng trên G là định hướng Pfaffian.

Do đó, khẳng định của bài toán đúng với các đồ thị phẳng liên thông không chứa chu trình.

Giả sử e là một cạnh bất kỳ nằm trên đường biên C của mặt vô hạn.

Khi đó, đồ thị $G - e$ sẽ có ít nhất một định hướng Pfaffian, áp dụng giả thiết quy nạp.

Bằng cách bổ sung thêm cạnh e vào đồ thị $G - e$ và định hướng cho cạnh e sao cho tất cả các mặt, trừ mặt vô hạn, đều có một số lẻ các cạnh được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ.

Áp dụng kết quả 4), ta suy ra rằng đồ thị G có ít nhất một định hướng Pfaffian.

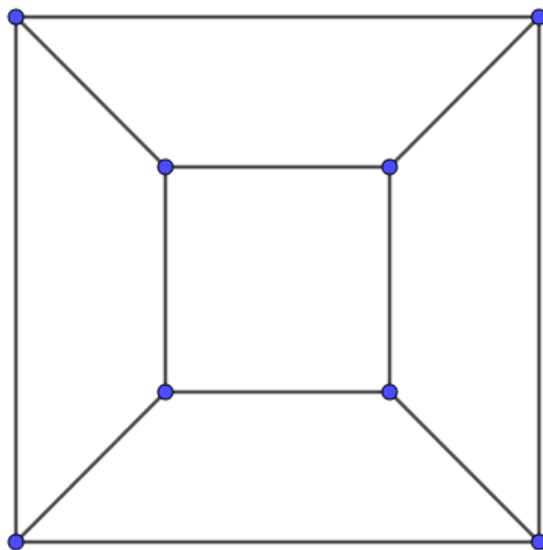
Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định của bài toán đúng với mọi đồ thị phẳng liên thông.

Điều phải chứng minh.

3. Ứng dụng Pfaffian tính số cách ghép cặp của một lưới chữ nhật

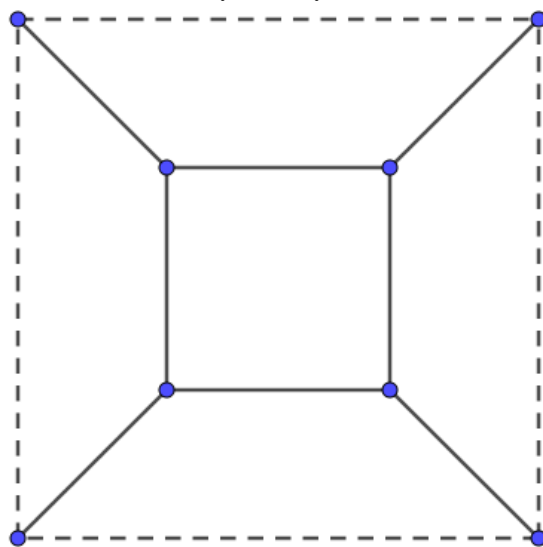
Từ các phân tích ở trên ta nhận thấy rằng để xác định số ghép cặp của một đồ thị phẳng G ta cần xác định định hướng Pfaffian của đồ thị và tính toán định thức của Pfaffian tương ứng.

Để cụ thể hóa vấn đề ta xét một ví dụ như sau:

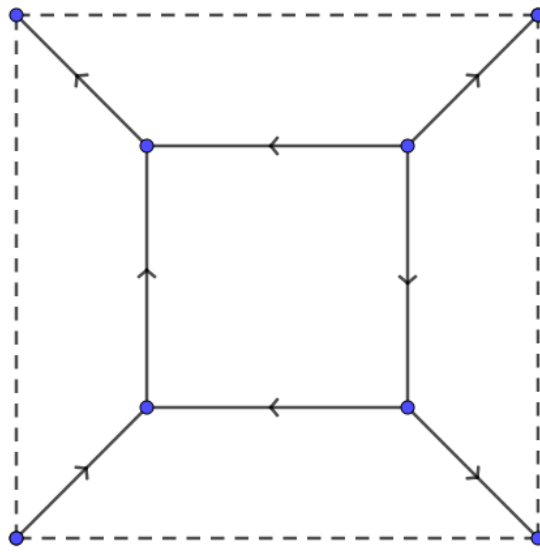


Để xác định định hướng Pfaffian của đồ thị ta áp dụng lại phương pháp lập luận nêu trong kết quả 4) và 5).

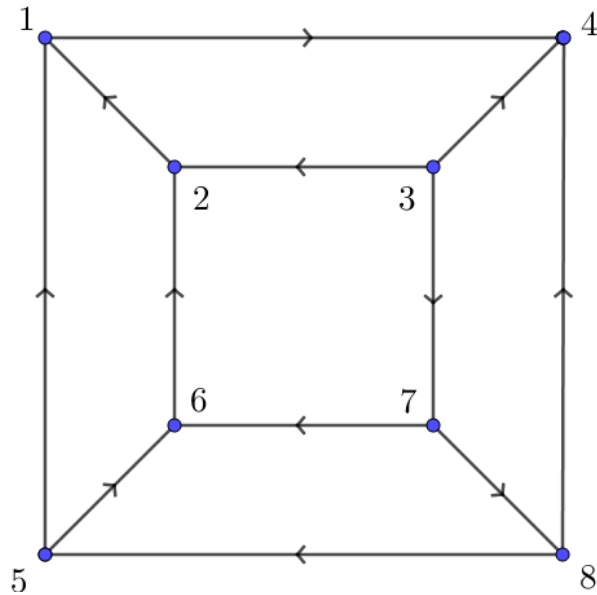
Đầu tiên ta xóa đi các cạnh nằm trên biên của mặt vô hạn



Định hướng các cạnh còn lại của đồ thị sao cho tất cả các đường biên của các mặt đều có một số lẻ các cạnh được định hướng theo chiều quay kim đồng hồ



Đặt lại các cạnh biên của mặt vô hạn và định hướng các cạnh này sao cho đường biên của tất cả các mặt đều là một chu trình định hướng lẻ theo chiều quay kim đồng hồ.



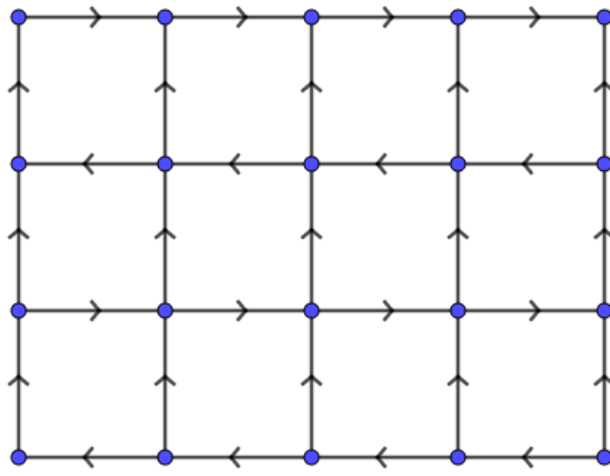
Do đó, ta thu được định hướng Pfaffian

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Để dàng tính được định thức của ma trận này bằng 81 nên, bằng cách áp dụng kết quả 1, ta suy ra số các ghép cặp hoàn hảo của đồ thị đã cho bằng 9.

Tiếp theo, ta sẽ tính số cách ghép cặp hoàn hảo cho đồ thị lưới chữ nhật $L_{m,n}$ (xem bài viết “**Công thức tính số cách lát bảng ô vuông kích thước $m \times n$ bởi các quân domino**”).

Đầu tiên, bằng cách áp dụng phương pháp định hướng Pfaffian vừa trình bày, ta nhận thấy định hướng Pfaffian của lưới chữ nhật $L_{m,n}$ có dạng



Đánh số các đỉnh ở hàng đầu tiên của lưới $L_{m,n}$ bởi các số $1, 2, \dots, m$; các đỉnh ở hàng thứ hai bởi các số $m+1, m+2, \dots, 2m$ và lặp lại quá trình trên cho đến khi tất cả các đỉnh đều được đánh số xong.

Khi đó, mỗi hàng của lưới $L_{m,n}$ được biểu diễn bởi một ma trận A cấp $m \times m$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

và ma trận kề của Pfaffian có dạng

$$A(\vec{G}) = \begin{pmatrix} A & I & 0 & \dots & 0 \\ -I & -A & I & \dots & 0 \\ 0 & -I & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} A \end{pmatrix},$$

trong đó I là ma trận đơn vị cấp $m \times m$.

Từ kết quả 1), số cách ghép cặp hoàn hảo của lưới $L_{m,n}$ bằng $\text{Pf}A(\vec{G}) = \sqrt{\det A(\vec{G})}$.

Tính
$$\begin{vmatrix} A & I & 0 & \dots & 0 \\ -I & -A & I & \dots & 0 \\ 0 & -I & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} A \end{vmatrix}.$$

Để đơn giản và thuận tiện cho tính toán ta chuyển định thức về dạng đối xứng bằng cách đổi dấu các cột ở khối thứ nhất, các hàng ở khối thứ ba, các cột ở khối thứ tư, các hàng ở khối thứ năm, các cột ở khối thứ sáu, các hàng ở khối thứ bảy, ..., ta thu được ma trận mới có định thức cùng trị tuyệt đối (nếu tính toán trên số phức thì chúng có cùng môđun) với định thức cần tính

$$M = \begin{pmatrix} -A & I & 0 & \dots & 0 \\ I & -A & I & \dots & 0 \\ 0 & I & -A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -A \end{pmatrix}.$$

Bằng cách đặt $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$, ta biểu diễn lại ma trận M lại dưới dạng

$$M = -I \otimes A + B \otimes I,$$

trong đó $\otimes$ là tích tensor/ tích Kronecker.

Để xác định định thức của ma trận M ta cần xác định các giá trị riêng của nó.

Giả sử rằng ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ với các giá trị riêng tương ứng $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ và ma trận B có các giá trị riêng $\mu_1, \dots, \mu_n$ với các giá trị riêng tương ứng $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} M(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) &= (-I \otimes A + B \otimes I)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (-I \otimes A)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) + (B \otimes I)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (-I\vec{b}_i \otimes A\vec{a}_j) + (B\vec{b}_i \otimes I\vec{a}_j) \\ &= -\lambda_j(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) + \mu_i(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (\mu_i - \lambda_j)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j). \end{aligned}$$

Do đó, M nhận $\mu_i - \lambda_j$ làm giá trị riêng và nhận $\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j$ làm vector riêng tương ứng.

Nhắc lại rằng nếu một ma trận Toeplitz có dạng

$$\begin{pmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & b & a & c \\ & & & & & b & a \end{pmatrix}_{n \times n},$$

thì nó nhận $\lambda_k = a - 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$, $k = 1, \dots, n$, làm các giá trị riêng tương ứng. (phương pháp tính toán có

thể tham khảo bài viết “**Công thức tính số cách lát bảng ô vuông kích thước $m \times n$ bởi các quân domino**”).

Do đó, A có các giá trị riêng $2i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right), k=1, \dots, m$, còn B có các giá trị riêng $2 \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right), l=1, \dots, n$; nên M có các giá trị riêng $2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) - i \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)\right), k=1, \dots, m, l=1, \dots, n$.
 Khi đó,

$$|\det M| = 2^{mn} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Pf}\left(A(\vec{G})\right) = \sqrt{|\det M|} = 2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Tóm lại, số cách ghép cặp hoàn hảo của lưới chữ nhật $L_{m,n}$ bằng $2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right)^{\frac{1}{4}}$

Lưu ý rằng về mặt nguyên tắc phương pháp sử dụng định hướng Pfaffian vừa trình bày trong phân tích trên và sử dụng ma trận Kasteleyn là như nhau. Điểm khác nhau cơ bản giữa hai cách làm nằm ở chỗ khi sử dụng ma trận Kasteleyn sử dụng các căn đơn vị trong tính toán.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Jeanette Nguyen, Perfect Matchings and Pfaffian Orientation, Universiteit van Amsterdam.
- [2]. Ngô Quang Hưng, Vĩnh Thức, Tạp chí Epsilon 03.
- [3]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số cách lát bảng ô vuông kích thước $m \times n$ bởi các quân domino, 16/08/2018.