

Câu 1 (3 điểm).

a) Cho a, b là các số dương thoả mãn: $a + \sqrt{ab} + b = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = a^2 + b^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4.$$

b) Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = x(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$.

Câu 2 (1.5 điểm). Bạn Long có 4 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ ghi một số thực. Bạn Long đặt mỗi thẻ vào một ô của biểu thức sau (giữa các ô là phép toán cộng hoặc phép toán nhân)

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square$$

Biết rằng, với mọi cách đặt, kết quả của phép tính đều như nhau. Chứng minh rằng có ba trong bốn tấm thẻ trên, mà các số ghi trên ba tấm thẻ ấy bằng nhau.

Câu 3 (1.5 điểm). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (a, b, c) sao cho

$$a^2 + ab + b^2 = 5c^2.$$

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($CB < CA$), có tâm đường tròn nội tiếp I và đường tròn ngoại tiếp (O) . AI cắt BC tại D và cắt (O) lần thứ hai tại E . Đường tròn đi qua A, I và tiếp xúc với AC , cắt (O) lần thứ hai tại F . BC và EF cắt nhau tại điểm K .

a) Chứng minh $EI^2 = EF \cdot EK$.

b) Gọi P là giao điểm của BI và DF . Chứng minh các điểm A, K, P thẳng hàng.

Câu 5 (1 điểm). Một con bọ nhảy dọc theo trục số, giữa các điểm biểu diễn các số tự nhiên. Con bọ nhảy theo quy tắc sau đây: Mỗi lần nhảy, nếu nó đang ở điểm biểu diễn số tự nhiên n , thì nó sẽ nhảy đến điểm biểu diễn số $\frac{n+11}{2}$, nếu n lẻ và nó sẽ nhảy đến điểm biểu diễn số $\frac{n}{2}$, nếu n chẵn. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương $a < 11$, nếu ban đầu con bọ ở vị trí điểm biểu diễn số a , thì sau khi kết thúc 10 lần nhảy, nó sẽ lại quay về vị trí ban đầu đó.

.....**HẾT**.....

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....