Lời giải tham khảo đề thi vào lớp 10 môn Toán (chuyên) tỉnh Hà Nam, năm học 2021-2022

Đội dự tuyển Chuyên Toán K61, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

Ngày 10 tháng 6 năm 2021

Lời nói đầu. Nhóm tác giả xin gửi tới bạn đọc và quý thầy (cô) lời giải tham khảo cho đề thi vào lớp 10 môn Toán (chuyên) trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên của Sở GD-ĐT Hà Nam chiều ngày 09/06/2021. Do trong thời gian ngắn nên quá trình biên soạn có thể còn nhiều thiếu sót, bạn đọc, quý thầy (cô) có thể góp ý dưới phần bình luận bài viết này. Dưới đây là đội ngũ tác giả bài viết:

① Đoàn Duy Tùng, K61 Toán, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

② Nguyễn Trần Tiến, K61 Toán, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

③ Nguyễn Văn Dương, K61 Toán, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

④ Lương Hữu Thành, K61 Toán, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

⑤ Vũ Phúc Thành, K61 Toán, THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam

Lời giải chi tiết.

Câu 1. Cho biểu thức $S=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ab}}+1\right):\dfrac{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{1-ab}$ với $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a^2+b^2>0$ và $ab\neq 1$.

① Rút gọn biểu thức S.

② Tính giá trị của biểu thức S khi $a=3+2\sqrt{2}$ và $b=11-6\sqrt{2}$.

Lời giải.

1) Điều kiện xác định: $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a^2+b^2>0$ và $ab\neq 1$. Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned}S&=\left(\frac{(\sqrt{a}+1)\left(1-\sqrt{ab}\right)+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)+1-ab}{1-ab}\right)\cdot\frac{1-ab}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}\\&=\frac{\sqrt{a}-a\sqrt{b}+1-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+ab+\sqrt{a}+a\sqrt{b}+1-ab}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}\\&=\frac{2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

2) Với $a=3+2\sqrt{2}, b=11-6\sqrt{2}$, ta có $\sqrt{a}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ và $\sqrt{b}=\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$. Cho nên khi đó:

$$S=\frac{2}{1+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

■

Câu 2.

① Giải phương trình $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0$.

② Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-1-2\sqrt{2xy+x-4y-2}=0 \\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4. \end{cases}$

Lời giải.

1) Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.
Phương trình đề bài tương đương với:

$$\begin{aligned} &x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2-x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}+2x=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(x^2-x+4-2\sqrt{x^2-x+4}\right)+\left(2x-x\sqrt{x^2-x+4}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{x^2-x+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2-x+4}-x\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+4}=2 \\ \sqrt{x^2-x+4}=x \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đến đây ta xét hai trường hợp:

1. **Trường hợp 1.** $\sqrt{x^2-x+4}=2$. Bình phương hai vế ta có $x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0$. Từ trường hợp này ta thu được hai nghiệm $x=0, x=1$.
2. **Trường hợp 2.** $\sqrt{x^2-x+4}=x$. Bình phương hai vế ta có:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-x+4=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Từ trường hợp này ta thu được nghiệm $x=4$.

Vậy kết luận tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1;4\}$.

2) $\begin{cases} x+2y-1-2\sqrt{2xy+x-4y-2}=0\,(1) \\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4\,(2). \end{cases}$

Điều kiện xác định $x-2\geqslant 0, 2y+1\geqslant 0, 2xy+x-4y-2\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 2, y\geqslant -\frac{1}{2}$. Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} &(x-2)+(2y+1)-2\sqrt{2y(x-2)+(x-2)}=0 \\ \Leftrightarrow\ &(x-2)+(2y+1)-2\sqrt{(x-2)(2y+1)}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2y+1}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=\sqrt{2y+1} \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}-\sqrt{2y+1}=0 \\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{2y+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;0)$.

■

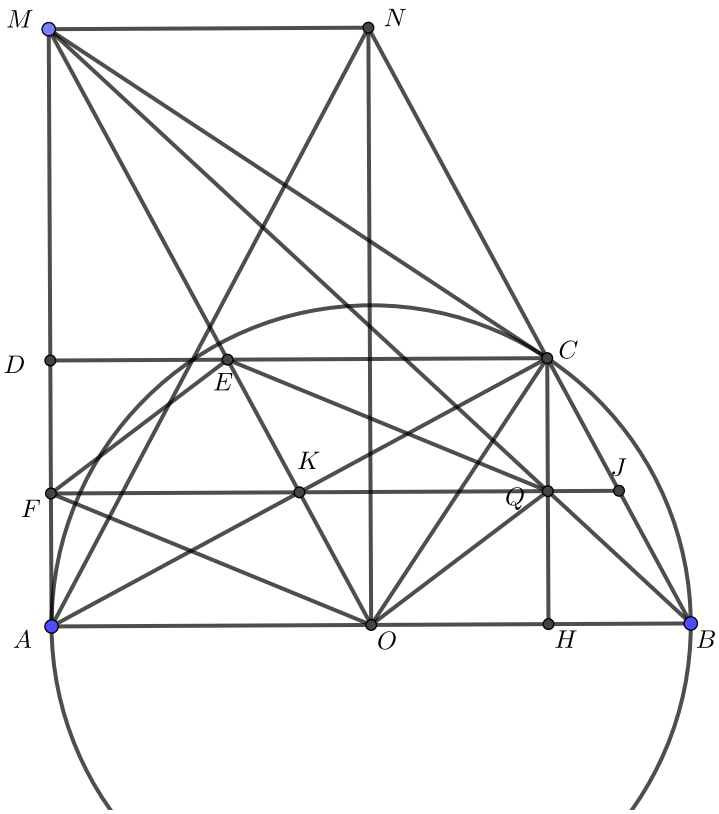
Câu 3. Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên Δ lấy điểm M sao cho $MA>R$. Qua M vẽ tiếp tuyến MC(C thuộc đường tròn (O), C khác A). Gọi H và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB và AM. Gọi d là đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB. Gọi N là giao điểm của d và BC.

① Chứng minh $OM \parallel BN$ và $MC=NO$.

② Gọi Q là giao điểm của MB và CH, K là giao điểm của AC và OM. Chứng minh đường thẳng QK đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

③ Gọi F là giao điểm của QK và AM, E là giao điểm của CD và OM. Chứng minh tứ giác $FEQO$ là hình bình hành. Khi M thay đổi trên Δ, tìm giá trị lớn nhất của $QF+EO$.

Lời giải.



1) Vì MA, MC là các tiếp tuyến kẻ từ M tới (O) nên MO là trung trực của đoạn AC, do đó $MO \perp AC$.
Mặt khác C thuộc đường tròn đường kính AB nên $CA \perp CB$, nên $MO \parallel CB$ hay $MO \parallel BN$.
Ta có $\angle NOA = \angle NCA = 90^\circ$ nên tứ giác $ANCO$ nội tiếp đường tròn đường kính AN.

Xét hai tam giác BCO và BAN có: $\begin{cases} \angle BOC = \angle CNA \text{ (cùng bù } \angle AOC) \\ \angle OBC \text{ chung} \end{cases}$ nên $\Delta BCO \backsim \Delta BAN$. Do đó:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BO}{BN} \Leftrightarrow BN = \frac{BA.BO}{BC} = \frac{2R^2}{BC}.$$

Mặt khác do MO là trung trực AC (chứng minh trên) nên nếu ta gọi K là giao điểm MO và AC thì K sẽ là trung điểm của AC. Vì vậy OK là đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ACB nên $OK = \frac{1}{2}CB$.

Mặt khác tam giác AMO vuông tại A, đường cao AK nên theo tính chất hệ thức lượng ta có:

$$OA^2 = OK.OM \Rightarrow OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{2R^2}{BC} = BN$$

Mà $OM \parallel BN$ nên tứ giác $MNBO$ là hình bình hành, vì vậy $MN = OB = OA$ và $MN \parallel AB$, vì vậy $MNOA$ là hình bình hành, hơn nữa $\angle MAO = 90^\circ$ nên $MNOA$ là hình chữ nhật, vậy $MA = NO$. Mà MO là trung trực đoạn AC nên $MA = MC$, vậy $NO = MC$.

Chú ý. Đoạn chứng minh $NO = MC$ ta có thể xử lý khác như sau: Để ý $\angle CNO = \angle CMO = \angle CAO$, nên tứ giác $MNCO$ nội tiếp, mà $NC \parallel MO$ nên $MNCO$ là hình thang cân, do đó $NO = MC$.

2) Ta có $QH \parallel AM$ (do cùng vuông góc AB) nên theo định lý Thales ta có: $\frac{QH}{AM} = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{2BO}(1)$.

Vì $MNOA$ là hình chữ nhật (ở ý 1), nên $NO \parallel MA \Rightarrow CH \parallel NO$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{BH}{BO} = \frac{CH}{NO} = \frac{CH}{AM}(2)$.

Kết hợp (1) và (2) ta có $\frac{QH}{AM} = \frac{1}{2}.\frac{CH}{AM}$, do đó $CH = 2QH$, hay Q là trung điểm đoạn CH.

Gọi J là trung điểm của CB. Khi đó JQ là đường trung bình ứng với C của tam giác CHB nên $QJ \parallel HB$. Mặt khác do K là trung điểm đoạn AC nên ta cũng có JK là đường trung bình ứng với C của tam giác ACB nên $KJ \parallel AB$. Như vậy K, Q, J thẳng hàng hay nói cách khác QK đi qua trung điểm J của đoạn BC.

3) Theo ý 2) ta có $QK \parallel HA$ nên $QF \parallel BA$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{FK}{AO} = \frac{MK}{MO} = \frac{KQ}{OB}$.

Mà $OA = OB$ nên $FK = KQ$, hay K là trung điểm của đoạn FQ (3).

Xét hình chữ nhật $DCHA$, có Q là trung điểm CH và $QF \parallel BA$ nên QF là đường trung bình của hình chữ nhật $DCHA$, nên F là trung điểm đoạn DA. Lại xét hình thang $DEOA$ có F là trung điểm DA và $FK \parallel AO$ nên K là trung điểm của EO (4).

Từ (3) và (4) ta có $FEQO$ là hình bình hành. Khi đó $QF + EO = 2(QK + KO)$.

Mà QK là đường trung bình ứng với C của tam giác CHA nên $QK = \frac{1}{2}AH$, và $KO = \frac{1}{2}CB$ (chứng minh ở ý 1), do đó $QF + EO = AH + CB = 2R - BH + CB$.

Để $QF + EO$ lớn nhất thì $CB - BH$ phải lớn nhất, ta sẽ đi tìm giá trị lớn nhất của $CB - BH$.

Do tam giác ACB vuông tại C, đường cao CH nên theo tính chất hệ thức lượng của tam giác vuông ta có $BC^2 = BH.BA \Rightarrow BH = \frac{BC^2}{2R}$.

Do đó:

$$CB - BH = CB - \frac{BC^2}{2R} = -\left(\frac{BC}{\sqrt{2R}} - \frac{\sqrt{2R}}{2}\right)^2 + \frac{R}{2} \leqslant \frac{R}{2}$$

Vậy $QF+EO \leqslant \dfrac{5R}{2}$, hay giá trị lớn nhất của $QF+EO$ là $\dfrac{5R}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{BC}{\sqrt{2R}} = \dfrac{\sqrt{2R}}{2} \Leftrightarrow BC = R$.

Khi đó $BN = \dfrac{2R^2}{BC} = 2R = OM$ (do ý 1), và theo định lý Pythagoras cho tam giác MAO ta tìm được dấu bằng xảy ra khi: $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3} > R$ (thỏa mãn).

■

Câu 4.

① Giải phương trình $x^3 + y^2 - x + 3z = 2021$ với x, y và z là các số nguyên.

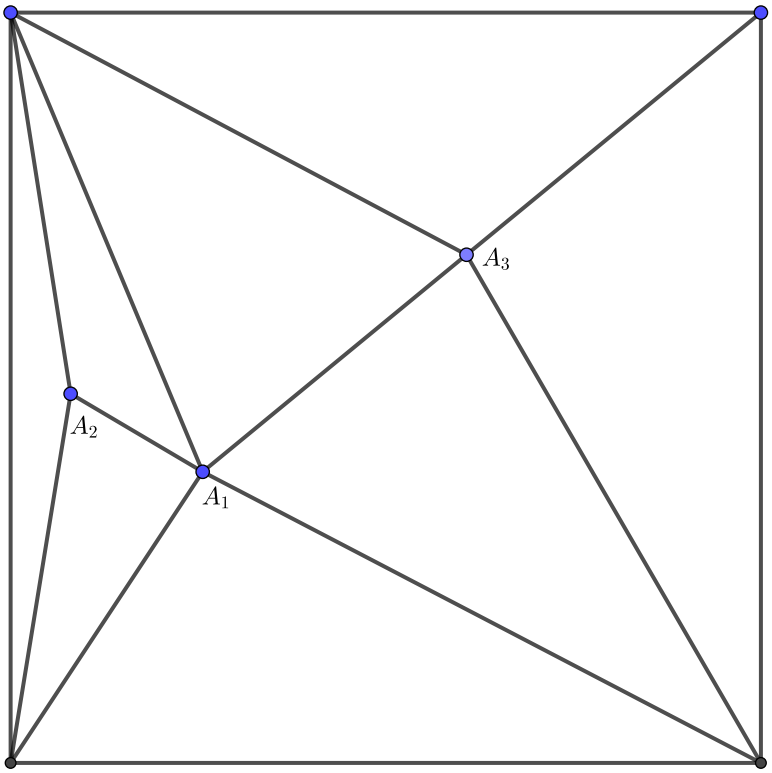
② Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông người ta lấy tùy ý 2021 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{2021}$ sao cho 2025 điểm $A, B, C, D, A_1, A_2, .., A_{2021}$ không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ 2025 điểm trên luôn tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của hình tam giác có diện tích không quá $\dfrac{1}{4044}$.

Lời giải.

1) Ta có $x^3 + y^2 - x + 3z = 2021 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) + 3z = 2021 - y^2$.
Do $x, x-1$ và $x+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên tích của chúng $x(x-1)(x+1)$ chia hết cho 3.
Mà do z nguyên nên $3z$ cũng chia hết cho 3, vậy vế trái chia hết cho 3, nên vế phải $2021 - y^2$ cũng chia hết cho 3, hay $2021 \equiv y^2 \pmod 3$.
Vì $2021 \equiv 2 \pmod 3$, thế nên $y^2 \equiv 2 \pmod 3$. Nhưng điều này là vô lý do số chính phương khi chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1. Thật vậy, xét ba trường hợp y có dạng $3k, 3k+1$ hoặc $3k+2$ (với k nguyên).

1. **Trường hợp 1.** $y = 3k$ thì tất nhiên $y^2 \equiv 0 \pmod 3$.
2. **Trường hợp 2.** $y = 3k+1$ thì $y^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod 3$.
3. **Trường hợp 3.** $y = 3k+2$ thì $y^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Không trường hợp nào $y^2 \equiv 2 \pmod 3$, nói cách khác phương trình này vô nghiệm.



2)

Đầu tiên ta xét điểm A_1, nối điểm này với 4 đỉnh của hình vuông $ABCD$ thu được 4 tam giác.
Tiếp theo ta xét điểm A_k với $2 \leqslant k \leqslant 2021$. Ta xét hai trường hợp:

1. **Trường hợp 1.** Nếu như A_k nằm trong một trong bốn tam giác được tạo ra ở trên, trong hình giả sử là A_2, thì ta nối điểm A_k với 3 đỉnh của tam giác đó, số tam giác sẽ tăng thêm 2 (từ 1 lên 3).
2. **Trường hợp 2.** Nếu như A_k nằm trên cạnh chung của hai tam giác được tạo ra ở trên, trong hình giả sử là A_3, thì ta nối A_k với hai đỉnh đối diện cạnh đó, số tam giác cũng sẽ tăng thêm 2 (từ 2 lên 4).

Vậy sau bước một ta có 4 tam giác, và sau mỗi bước ta lại có thêm 2 tam giác, và thực hiện đối với A_2 đến A_{2021} có 2020 bước nên tổng số tam giác tổng cộng được tạo thành là $4+2.2020=4044$.
Vì tổng diện tích của 4044 tam giác này bằng diện tích hình vuông và bằng 1 nên tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\dfrac{1}{4044}$.
Chú ý. Bài toán có thể tổng quát bằng cách thay số 2021 bằng n và 4044 bằng $2n+2$.

Câu 5. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leqslant 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) \geqslant 512$$

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2} \geqslant \frac{(x+y+z)^2-x^2}{x^2}=\frac{(y+z)(x+x+y+z)}{x^2} \geqslant \frac{2\sqrt{yz}.4\sqrt[4]{x^2yz}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2}$$

Chứng minh tương tự ta có các bất đẳng thức: $\frac{1}{y^2}-1 \geqslant \frac{8\sqrt[4]{y^2z^3x^3}}{y^2}, \frac{1}{z^2}-1 \geqslant \frac{8\sqrt[4]{z^2x^3y^3}}{z^2}$ ■

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức ta thu được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.