

Bất đẳng thức và cực trị trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm 2021

Phần 1. Đề bài.

1. (Gia Lai) Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (5x^2 + 7y)(5y^2 + 7x) + 151xy$.
2. (Quảng Bình) Cho $x, y, z \in [5, 7]$. Chứng minh rằng $\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z$.
3. (Đại học Khoa học, Huế) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng
4. (Tây Ninh) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $0 \leq x, y, z \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$
5. (Bình Dương) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng: $10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

6. (Cần Thơ) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng $(x+2)^2/(y+z) + (y+2)^2/(z+x) + (z+2)^2/(x+y) \geq 12$.
7. (Tiền Giang) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 1/(a^2 + 2b^2 + 3) + 1/(b^2 + 2c^2 + 3) + 1/(c^2 + 2a^2 + 3)$
8. (Quảng Nam) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = x^2/(9z + zx^2) + y^2/(9x + xy^2) + z^2/(9y + yz^2)$
9. (Ninh Thuận) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1/8$. Chứng minh rằng $1/(xy + yz + zx) - 1/(x + y + z) \leq 2/3$.
10. (Nghệ An) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \sqrt{(a^2+b^2)/(2a+2b)} - \sqrt{(b^2+c^2)/(2b+2c)} - \sqrt{(c^2+a^2)/(2c+2a)}$$
11. (Bà Rịa – Vũng Tàu) Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$S = a/(1+bc) + b/(1+ca) + c/(1+ab)$$
12. (Quảng Trị) Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng
 - a) $a^2 - ab + b^2 \geq (a+b)^2/4$;
 - b) $4(a^2+b^2)(b^2-bc+c^2)(3c^2+2ca+3a^2) \geq (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.
13. (Thái Bình) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a/(3a^2 + 2b^2 + c^2) + b/(3b^2 + 2c^2 + a^2) + c/(3c^2 + 2a^2 + b^2)$
14. (Quảng Ninh) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x < y \leq 8$ và $xy \leq 4x + 3y$. Chứng minh $x^2 + y^2 \leq 100$.
15. (Lào Cai)
 - a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 2/3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 53x + 53y + 1/x^2 + 1/y^2$.
 - b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 + x + y + z.$$

16. (Khánh Hòa) Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_{21}$ thỏa mãn $x_1, x_2, \dots, x_{21} \geq -2$ và $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{21}^3 = 12$. Chứng minh rằng $x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leq 18$.
17. (PTNK, ĐHQG Tp HCM) Cho dãy n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 5$) thỏa mãn điều kiện $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.
- a) Chứng minh rằng nếu $x_n \geq 1/3$ thì $x_1 + x_2 \leq x_n$.
- b) Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương $k < n$ sao cho
- $$1/3 \leq x_1 + \dots + x_k \leq 2/3.$$
18. (Lâm Đồng) Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^3/(a^2+4ab+b^2) + b^3/(b^2+4bc+c^2) + c^3/(c^2+4ca+a^2)$
19. (Hà Nam) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng $(1/x^2 - 1)(1/y^2 - 1)(1/z^2 - 1) \geq 512$.
20. (Daklak) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
- $$P = b(a^2+1)^2/a^2(b^2+1) + c(b^2+1)^2/b^2(c^2+1) + a(c^2+1)^2/c^2(a^2+1)$$
21. (Bình Phước) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng
- a) $a^3/(a^2+b^2) \geq a - b/2$
- b) $a^3/(a^2+ab+b^2) + b^3/(b^2+bc+c^2) + c^3/(c^2+ca+a^2) \geq (a+b+c)/3$
22. (Quảng Ngãi) Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b) = 4$. Chứng minh rằng $1/(a-b)^2 + 1/(c+a)^2 + 1/(c+b)^2 \geq 1$.
23. (Daknong) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $2021 \leq a \leq 2022, 2021 \leq b \leq 2022$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (a+b)(2021/a + 2021/b)$
24. (Hòa Bình) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh rằng $1/xy + 1/xz \geq 1$.
25. (Vĩnh Long) Cho số thực x thỏa mãn $1 \leq x \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (3+x)/x + (6-x)/(3-x)$.
26. (Kiên Giang) Cho x, y, z là các số thực lớn hơn 2021 và thỏa mãn $1/x + 1/y + 1/z = 2/2021$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau
- $$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-2021} + \sqrt{y-2021} + \sqrt{z-2021}$$
27. (Bình Định) Cho các số thực x, y . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (x - y)/(x^4+y^4+6)$
28. (Bình Định) Cho x, y, z là ba số dương thỏa $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng
- $$P = (1-x^2)/(x+yz) + (1-y^2)/(y+zx) + (1-z^2)/(z+xy) \geq 6.$$
29. (Cà Mau) Cho a, b là hai số thực dương sao cho $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{3a+b} + \sqrt{3b+a} \leq 2\sqrt{3a+b}\sqrt{3b+a}$
30. (Bình Định, chuyên tin) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + 2b \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = [3a^2 + a^2b + 9ab^2/2 + (8+a)b^3]/ab$$

31. (Thanh Hóa, chuyên tin) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 15\sqrt{3(x^4+y^4+z^4)} + (xy+yz+zx)/(x^2y+y^2z+z^2x)$

32. (Hải Phòng) Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$x\sqrt{xy}/\sqrt{2x+y} + y\sqrt{yz}/\sqrt{2y+z} + z\sqrt{zx}/\sqrt{2z+x} \geq \sqrt{3xyz}$$

33. (Yên Bái) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $18abc = a + 2b + 3c$. Chứng minh $(1+a^2)(1+4b^2)(1+9c^2) \geq 8$.

34. (Ninh Bình) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $1/(x+y) + 1/(y+z) + 1/(z+x) = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 1/(2x+3y+3z) + 1/(3x+2y+3z) + 1/(3x+3y+2z)$$

35. (Phú Thọ) Cho ba số dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xz/(y^2+yz) + y^2/(xz+yz) + (\sqrt{x} + \sqrt{z})/2\sqrt{x}$$

36. (Bình Thuận) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng $2xz/(x^2+2yz+3) + 2yx/(y^2+2zx+3) + 2zy/(z^2+2xy+3) \leq 1$.

Phần 2. Hướng dẫn và bình luận.

- Bài này cơ bản, phù hợp với thi tuyển sinh 10. Đặt $t = xy$ và sử dụng điều kiện $x + y = 2$ ta tính được P theo t : $P = 25t^2 - 10t + 280 = (5t-1)^2 + 279$. Đến đây thì dễ rồi.
- Mẹo chính của bài này là $x, y \in [5, 7]$ suy ra $|x - y| \leq 2$. Từ đó $1 + xy \geq (x-y)^2/4 + xy = (x+y)^2/4$. Dấu bằng xảy ra khi $|x - y| = 2$. Vì là mẹo nên bài này khó bình luận ☺.
- Bài này thì quá cơ bản rồi. Vế trái chỉ là $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Còn vế phải thì dùng $a^2 < a(b+c)$ là xong.
- Bài này là khá khó đối với học sinh THCS.

Cách 1. Ta dự đoán giá trị lớn nhất là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$. Để xuất hiện đánh giá liên quan đến x^2y, y^2z, z^2x , ta sử dụng điều kiện để suy ra $(1 - x^2)(1 - y) \geq 0$. Suy ra $-x^2y \leq 1 - x^2 - y$.

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự, ta có

$$-x^2y - y^2z - z^2x \leq 3 - (x^2+y^2+z^2+x+y+z)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } T &= 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 2(x^3 + y^3 + z^3) + 3 - (x^2+y^2+z^2+x+y+z) \\ &= 3 - x(1-x)(1+2x) - y(1-y)(1+2y) - z(1-z)(1+2z) \leq 3. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Cách 2. Trước hết ta chứng minh $2x^3 - x^2y \leq 2x - xy$. Thật vậy, điều cần chứng minh tương đương với $2x(1-x^2) - xy(1-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x^2)(2-y) \geq 0$ (đúng)

Tương tự $2y^3 - y^2z \leq 2y - yz, 2z^3 - z^2x \leq 2z - xz$

$$\text{Suy ra } T \leq 2(x+y+z) - xy - yz - zx \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } (1-x)(1-y) + (1-y)(1-z) + (1-z)(1-x) \geq 0$$

$$\text{Suy ra } 3 + xy + yz + zx - 2(x+y+z) \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $T \leq 3$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $x = y = z = 1$.

Vậy GTLN của T là 3.

Dành cho các thầy cô giáo và các bạn học sinh THPT: Nếu để ý T là biểu thức thuần nhất bậc 3, $T(ka, kb, kc) = k^3 T(a, b, c)$ ta sẽ thấy GTLN của T sẽ phải đạt được khi có 1 biến nào đó bằng 1. Chẳng hạn $z = 1$. Khi đó thì $T = 2(x^3 + y^3 + 1) - (x^2y + y^2 + x)$

$$\leq x^2 + x + y^2 + y + 3 - 1 - x^2y - y^2 - x = 3 - (1 - x^2)(1 - y) \leq 3.$$

5. Ý tưởng là dùng AM-GM có trọng số. Các hệ số của x, y giống nhau nên x, y có vai trò như nhau. Ta tách

$$(10 - a^2/2)x^2 + (10 - a^2/2)y^2 + (a^2x^2 + z^2)/2 + (a^2y^2 + z^2)/2 \\ \geq (10 - a^2/2)2xy + axz + ayz.$$

Ta chọn a sao cho vế trái là hằng số, tức là $20 - a^2 = a$. Giải ra được $a = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ và $4x = 4y = z$, tức là khi $x = y = 1/3, z = 4/3$.

Bài này được tính là khá thách thức.

6. Sử dụng bất đẳng thức CBS ở dạng Engel $a^2/x + b^2/y + c^2/z \geq (a+b+c)^2/(x+y+z)$ ta có $VT \geq (x+y+z+6)^2/2(x+y+z)$. Tiếp tục áp dụng AM-GM cho hai số $x+y+z$ và 6 thì $(x+y+z+6)^2 \geq 4(x+y+z) \cdot 6$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài này nếu quen cách dùng CBS như ở trên thì cũng ở dạng cơ bản.

7. Bài này khá khó chịu nếu không liên hệ được với bài toán quen thuộc sau: Cho $abc = 1$ khi đó $1/(ab+b+1) + 1/(bc+c+1) + 1/(ca+a+1) = 1$.

$$\text{Ta có } a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2(ab + b + 1).$$

$$\text{Từ đó } 1/(a^2+2b^2+3) \leq 1/2(ab+b+1).$$

Từ đó GTLN cần tìm bằng $1/2$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

8. Ý đầu tiên để giải bài này là đưa điều kiện về $1/x + 1/y + 1/z = 1$ rồi đặt $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$. Điều kiện $a + b + c = 1$ dĩ nhiên là dễ sử dụng hơn. Lúc này thì

$$H = a/(9b^2+1) + b/(9c^2+1) + c/(9a^2+1)$$

Ta dùng AM-GM để đánh giá các số hạng của H như sau

$$a/(9b^2+1) = (a + 9b^2a - 9b^2a)/(9b^2+1) = a - 9b^2a/(9b^2+1) \geq a - 9b^2a/6b = a - 3ab/2.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự, ta suy ra

$$H \geq a + b + c - 3(ab+bc+ca)/2 \geq 1 - 1/2 = 1/2.$$

(Ở đây ta dùng bất đẳng thức quen thuộc $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2$).

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1/3$ tức là khi $x = y = z = 3$.

9. Bài này nhẹ nhàng. Ý tưởng là sử dụng đánh giá trung gian để đưa về một biến.

Đặt $x + y + z = 6/t^2$. Sử dụng đánh giá $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$ ta sẽ suy ra $(xy+yz+zx)^2 \geq 9t^2/4$. Suy ra $xy + yz + zx \geq 3/2t$.

$$\text{Từ đó } 1/(xy+yz+zx) - 1/(x+y+z) \leq 2t/3 - t^2/6 = 2/3 - (t-2)^2/6 \leq 2/3.$$

Lưu ý. Cách đặt chỉ giúp chúng ta làm việc với các số đẹp hơn, không phải bí quyết của cách giải. Nếu ta đặt $x + y + z = t$ cũng được.

10. Bài này là rất khó đối với mức THCS. Đã phân thức lại còn chứa căn, lại có điều kiện, lại cộng kênh, bốn thứ gộp lại.

Để giải bài toán, ta cần vài đánh giá để đơn giản bớt biểu thức P. Trước hết, ta có bất đẳng thức phụ $\sqrt{(a^2+b^2)/2} \leq a + b - \sqrt{ab}$ (Ý nghĩa: Trung bình cộng của trung bình bình phương và trung bình nhân nhỏ hơn trung bình cộng). Bất đẳng thức này thu được bằng cách viết lại thành $\sqrt{(a^2+b^2)/2} - (a+b)/2 = (a+b)/2 - \sqrt{ab}$ rồi nhân lượng liên hợp.

$$\text{Từ đây suy ra } \sqrt{(a^2+b^2)/2(a+b)} \leq (a+b - \sqrt{ab})/\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b} - \sqrt{ab/(a+b)}.$$

$$\text{Từ đó } P \geq \sqrt{ab/(a+b)} + \sqrt{bc/(b+c)} + \sqrt{ca/(c+a)}.$$

Đến đây thì dễ thở hơn rồi. Đặt $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$ thì $x + y + z \leq 3$ và ta cần giá trị nhỏ nhất của $Q = \sqrt{1/(x+y)} + \sqrt{1/(y+z)} + \sqrt{1/(z+x)}$.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$$Q \geq 9/[\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}] \geq 9/\sqrt{3(x+y+y+z+z+x)} \geq 9/\sqrt{3 \cdot 6} = 3/\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$ tức là $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $3/\sqrt{2}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

11. Bài này rất khó, chỉ một trong hai giá trị cần tìm đã là đủ khó rồi. Có thể “đoán” được giá trị nhỏ nhất là 1 và giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ (bài toán gốc là như vậy), nhưng xử lý tiếp thế nào?

Ý tưởng chung là tìm cách “quy đồng mẫu số” bằng một đánh giá trung gian.

Ở chiều giá trị lớn nhất, ta sẽ chứng minh rằng $a/(1+bc) \leq \sqrt{2}a/(a+b+c)$ (1). Điều này sẽ luôn đúng khi $a = 0$ còn với $a > 0$ thì tương đương với $(a+b+c)^2 \leq 2(1+bc)^2$. Khai triển ra và áp dụng giả thiết, điều này tương đương với $2ab + 2ac \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2c^2 + 2bc$
 $\Leftrightarrow (a - b - c)^2 + 2b^2c^2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b+c$ và $bc = 0$. Như vậy (1) đúng và dấu bằng xảy ra khi $a = 0$ hoặc $a = b+c$, $bc = 0$. Từ đây ta tìm được giá trị lớn nhất của S là $\sqrt{2}$ đạt được, chẳng hạn khi $a = b = 1/\sqrt{2}$, $c = 0$.

Ở chiều giá trị nhỏ nhất, ta lại phải dùng một đánh giá khác, chú ý rằng $a \leq 1$ nên

$$a + abc \leq a + a(b^2+c^2)/2 = a + a(1-a^2)/2 = a + a(1+a)(1-a)/2 \leq a + 1.2(1-a)/2 = 1.$$

Cho nên $a/(1+abc) \geq a^2/(a+abc) \geq a^2$. Cộng các bất đẳng thức tương tự lại ta có $S \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dấu bằng xảy ra, chẳng hạn khi $a = 1$, $b = c = 0$.

12. Bài này rất cơ bản. Câu b) cũng cứ tách ra từng nhóm mà làm.

13. Ta dùng AM-GM để đánh giá mẫu số. $3a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 6(a^6b^4c^2)^{1/6}$. Từ đó

$$a/(3a^2+2b^2+c^2) \leq (1/6)1/b^{2/3}c^{1/3}$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự cho hai số hạng còn lại, ta có

$$T \leq (1/6)[1/b^{2/3}c^{1/3} + 1/c^{2/3}a^{1/3} + 1/a^{2/3}b^{1/3}] \quad (1)$$

Tiếp tục dùng AM-GM ta có $2/b + 1/c \geq 3/b^{2/3}c^{1/3}$

Tương tự $2/c + 1/a \geq 3/c^{2/3}a^{1/3}$, và $2/a + 1/b \geq 3/a^{2/3}b^{1/3}$

$$\text{Suy ra } 1/a + 1/b + 1/c \geq 1/b^{2/3}c^{1/3} + 1/c^{2/3}a^{1/3} + 1/a^{2/3}b^{1/3} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được

$$T \leq 1/a + 1/b + 1/c = (ab+bc+ca)/abc \leq (a^2+b^2+c^2)/abc = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Đây là một bài toán khá khó.

14. Đây là bài toán khó và đẹp.

Trước hết, để ý rằng nếu $x < 6$ thì hiển nhiên là $x^2 + y^2 \leq 6^2 + 8^2 = 100$ nên tiếp theo ta chỉ cần xét trường hợp $x \geq 6$.

Ta khai thác điều kiện $x < y \leq 8$ và $xy \leq 4x + 3y$ như sau: $(8-x)(8-y) \geq 0$. Suy ra $xy + 64 \geq 8x + 8y$, suy ra $4x + 3y + 64 \geq 8x + 8y$. Từ đó $4x + 5y \leq 64$.

Vì $6 \leq x < y \leq 8$ nên $y - x \leq 2$. Suy ra $(y - x)^2 \leq 2(y - x)$.

Từ đây suy ra $x^2 + y^2 \leq 2xy + 2(y - x) \leq 2(4x+3y) + 2(y - x) = 6x + 8y = (3/2)(4x+5y) + y/2 \leq (3/2)64 + 8/2 = 100$.

15. Hai bài này đều khá cơ bản.

a) Ta dự đoán điểm rơi là $1/3$, $1/3$ nên sẽ dùng AM-GM tương ứng với điểm rơi này:

$$27x + 27x + 1/x^2 \geq 3(27^2)^{1/3} = 27$$

Hay là $54x + 1/x^2 \geq 3(27^2)^{1/3} = 27$. Tương tự $54y + 1/y^2 \geq 3(27^2)^{1/3} = 27$.

Từ đó $A = 54x + 1/x^2 + 54y + 1/y^2 - (x+y) \geq 27 + 27 - 2/3 = 160/3$.

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $x^4 + y^4 + z^4 + 3 = (x^4 + 1) + (y^4 + 1) + (z^4 + 1) \geq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 6$. Suy ra $x^4 + y^4 + z^4 \geq 3$.

Lại áp dụng AM-GM ta có $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z \geq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2x + 2y + 2z$. Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$.

16. Bài này tuy kỹ thuật nhẹ nhàng nhưng có thể xếp vào bài toán khó. Ý tưởng là ta tìm cách đánh giá x_i qua x_i^3 bằng các biểu thức hiển nhiên dương. Biểu thức thứ nhất hiển nhiên là $x_i + 2$. Còn biểu thức thứ hai là một bình phương dạng $(x_i + a)^2$. Để chỉ xuất hiện x_i^3 và x_i ta chọn $a = -1$.

Vậy là $(x_i + 2)(x_i - 1)^2 \geq 0$. Suy ra $x_i^3 - 3x_i + 2 \geq 0$, hay $x_i^3 + 2 \geq 3x_i$

Cho $i = 1, 2, \dots, 21$ rồi cộng lại, ta được $12 + 42 \geq 3(x_1 + \dots + x_{21})$.

Suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leq 18$.

17. Tương tự như bài trên, bài này kỹ thuật nhẹ nhàng nhưng là bài toán khó. Và hai ý về cơ bản là không liên quan đến nhau.

a) Giả sử ngược lại $x_1 + x_2 > x_n \geq 1/3$. Khi đó $x_2 > 0$ và vì thế $x_n > 0$ với mọi $n > 2$. Lúc này $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (\dots) + x_n > 1/3 + 1/3 + 0 + 1/3 = 1$. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai và ta có $x_1 + x_2 \leq x_n$.

b) Xét hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất $x_n \geq 1/3$. Khi đó thì

$$x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 - x_n \leq 2/3 \text{ và } \geq 1/3$$

và ta có $k = n-1$ là số nguyên dương cần tìm.

Trường hợp thứ hai, $x_n < 1/3$. Khi đó $x_k < 1/3$ với mọi k .

Vì $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ nên sẽ tồn tại số k nhỏ nhất sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq 1/3$. Ta chứng minh với số k này, $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 2/3$. Thật vậy, nếu ngược lại, $x_1 + x_2 + \dots + x_k > 2/3$ thì $x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) - x_k > 2/3 - 1/3 = 1/3$ mâu thuẫn với cách chọn k .

Lưu ý. Ở câu a) có một cái bẫy. Nếu chứng minh trực tiếp mà sử dụng đánh giá

$$2/3 \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2(x_1 + x_2)$$

rồi suy ra $x_1 + x_2 \leq 1/3$ là ta phạm sai lầm ở dấu bất đẳng thức thứ hai: ở đây x_i là số thực và có thể âm.

18. Bài này sử dụng một đánh giá trung gian, xem hướng dẫn ở bài 21.

19. Sử dụng điều kiện $x+y+z \leq 1$ ta có $1/x^2 - 1 \geq (x+y+z)^2/x^2 - 1 = (2x+y+z)(y+z)/x^2$.

Từ đó chỉ cần chứng minh $(2x+y+z)(y+z)(2y+z+x)(z+x)(2z+x+y)(x+y) \geq 512x^2y^2z^2$. Cái cuối này dùng AM-GM là ra.

Thú vị là bất đẳng thức này “tương đương” với bất đẳng thức IMO 2001 nổi tiếng: Cho a, b, c là các số thực dương, khi đó

$$a/\sqrt{x^2+8bc} + b/\sqrt{b^2+8ca} + c/\sqrt{c^2+8ab} \geq 1.$$

Các bạn thử thiết lập sự tương đương đó nhé!

Đương nhiên, tuy là “tương đương” nhưng bất đẳng thức IMO khó hơn ☺

20. Đặt $x = (a^2+1)/a$, $y = (b^2+1)/b$, $z = (c^2+1)/c$ thì $P = x^2/y + y^2/z + z^2/x \geq (x+y+z)^2/(y+z+x) = x + y + z = a + b + c + 1/a + 1/b + 1/c \geq (a+b+c) + 9/(a+b+c)$

$$= (a+b+c) + 4/(a+b+c) + 5/(a+b+c) \geq 4 + 5/2 = 13/2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2/3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $13/2$, đạt được khi $a = b = c = 2/3$.

Bài này không có nhưng phát biểu công kênh, xấu xí, là ghép nối cơ học của hai bài toán.

21. Ý a) tất nhiên là không khó. Ta chỉ cần biến đổi tương đương. $a^3/(a^2+b^2) \geq a - b/2$
 $\Leftrightarrow 2a^3 \geq (2a - b)(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2a^3 \geq 2a^3 + 2ab^2 - ba^2 - b^3 \Leftrightarrow b(a-b)^2 \geq 0$ đúng.

Hơn nữa, đây là gợi ý quan trọng để giải ý b) (cũng là gợi ý để giải các bài 19,). Thật vậy, do $a^2+ab+b^2 \leq 3(a^2+b^2)/2$ nên

$$a^3/(a^2+ab+b^2) \geq (2/3)a^3/(a^2+b^2) \geq 2a/3 - b/3.$$

Cộng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức tương tự cho hai số hạng còn lại, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

22. Đây là một bài toán khá khó đối với trình độ THCS.

Đặt $x = c+a$, $y = c+b$ thì $xy = 4$ và $(a - b)^2 = (x - y)^2$. Ta quy về bài toán chứng minh

$$1/(x-y)^2 + 1/x^2 + 1/y^2 \geq 1 \text{ với } xy = 4, x \neq y. \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x, y > 0$. Ta chỉ cần chứng minh

$$xy/(x-y)^2 + xy/x^2 + xy/y^2 \geq 4$$

đúng thì khi $xy = 4$ ta sẽ có (1).

Đặt $t = x/y$, bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với

$$t/(t-1)^2 + 1/t + t \geq 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (t-1)^2 + t^2(t-1)^2 \geq 4t(t-1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 1/t^2 - 6(t+1/t) + 11 \geq 0 \quad (2)$$

Đặt $u = t + 1/t$ thì (2) $\Leftrightarrow u^2 - 2 - 6u + 11 \geq 0 \Leftrightarrow (u - 3)^2 \geq 0$, đúng.

23. Bài này cơ bản. Việc đưa các số 2021, 2022 vào chỉ làm rối thêm, bới đẹp. Cứ để a, b thuộc $[1, 2]$ và tìm GTNL của $(a+b)(1/a+1/b)$ thì chân phương hơn.

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $(a+b)(1/a+1/b) = (a+b)^2/ab = 2 + (a^2+b^2)/ab$.

Ta có $(2022a - 2021b)(2022b - 2021a) \geq 0$ nên từ đây suy ra

$$2021.2022(a^2+b^2) \leq (2021^2+2022^2)ab$$

Suy ra $(a^2+b^2)/ab \leq (2021^2+2022^2)/2021.2022$.

Từ đó tìm được giá trị lớn nhất cần tìm là $2042 + (2021^2+2022^2)/2022 = 6064 + 2021^2/2022$.

24. Bài này cơ bản, phù hợp đề thi tuyển sinh 10. Ta chỉ cần áp dụng AM-GM hai lần $1/xy + 1/xz \geq 4/(xy+xz) = 4/x(y+z) \geq 4/[(x+y+z)/2]^2 = 1$.

25. Bài này cơ bản, đẹp, phù hợp với đề tuyển sinh 10.

Ta có $T = 1 + 3/x + 1 + 3/(3-x) = 2 + 9/x(3-x)$

Để tìm min, max của T ta chỉ cần tìm min, max của $x(3-x)$. Ta có $x(3-x) = 9/4 - (x - 3/2)^2 \leq 9/4$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 3/2$.

Mặt khác, do $1 \leq x \leq 2$ nên $-1/2 \leq x - 3/2 \leq 1/2$. Suy ra $(x-3/2)^2 \leq 1/4$. Suy ra $x(3-x) \geq 9/4 - 1/4 = 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Từ đó giá trị lớn nhất của T bằng $2 + 9/2 = 13/2$ đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = 2$. Giá trị nhỏ nhất của T bằng $2 + 4 = 6$, đạt được khi $x = 3/2$.

26. Đặt $a = x/2021, b = y/2021, c = z/2021$ thì $a, b, c > 1, 1/a + 1/b + 1/c = 2$ và ta cần chứng minh $\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$. Đây là bài toán thi olympic của Iran. Cách giải là dùng Cauchy-Schwarz ở dạng $\sqrt{(x+y+z)(a+b+c)} \geq \sqrt{xa} + \sqrt{yb} + \sqrt{zc}$ cho các số $(a-1)/a, (b-1)/b, (c-1)/c$ và a, b, c với chú ý $(a-1)/a + (b-1)/b + (c-1)/c = 1$.

Bài toán của Iran rất đẹp, nhưng bài toán chế biến này thì không còn đẹp nữa. Bản thân tôi không thích kiểu “sáng tác” này cho lắm.

27. Bài này cơ bản. Gợi ý $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, $x^4 + y^4 \geq (x^2+y^2)^2/2$.

28. Bài này cơ bản. Gợi ý: sử dụng thuần nhất hóa $1 - x^2 = (x+y+z)^2 - x^2 = (2x+y+z)(y+z)$, $x + yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$. Từ đó nếu đặt $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ thì $VT = (b+c)a/bc + (c+a)b/ca + (a+b)c/ab = b/a + a/b + b/c + c/b + a/c + c/a$.

29. Đây là một bài toán đẹp. Cách giải cũng khá cân phương, giống như giải phương trình chứa căn vậy ☺. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai căn thức vế trái, ta có

$$\sqrt{3a+b} + \sqrt{3b+a} \leq \sqrt{2[(3a+b)+(3b+a)]} = \sqrt{8a+8b}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{8a+8b} \leq 2\sqrt{(3a+b)(3b+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b) \leq (3a+b)(3b+a)$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 + 4ab - 2(a+b) \geq 0. \quad (1)$$

Đặt $ab = t^2$. Theo giả thiết $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ suy ra $a + b + 2t = 1$, tức là $a+b = 1 - 2t$.

Thay vào (1), ta cần chứng minh

$$3(1-2t)^2 + 4t^2 - 2(1-2t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 - 8t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4t - 1)^2 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 1/4$, từ đây tính được $a = b = 1/4$.

30. Bài này thật xấu xí. Không hiểu tại sao lại phát biểu một bài toán xấu như vậy. Và đây là một bài khá khó. Gợi ý: điểm rơi là $a = 3/2$, $b = 3/4$.

31. Bài này cơ bản nhưng dùng nhiều đánh giá trung gian. Gợi ý: $\sqrt{3(x^4+y^4+z^4)} \geq x^2+y^2+z^2$ và $3(x^2y+y^2z+z^2x) \leq (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

32. Bài này khá cơ bản đối với các bạn quen sử dụng AM-GM và Cauchy-Schwarz để đánh giá.

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{3xyz}$ ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$x/\sqrt{3z(2x+y)} + y/\sqrt{3x(2y+z)} + z/\sqrt{3y(2z+x)} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho mẫu thức, ta có $\sqrt{3z(2x+y)} \leq (3z+2x+y)/2$ cùng các bất đẳng thức tương tự.

Do đó $VT \geq 2x/(3z+2x+y) + 2y/(3x+2y+z) + 2z/(3y+2z+x)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel ta có

$$\begin{aligned} & 2x/(3z+2x+y) + 2y/(3x+2y+z) + 2z/(3y+2z+x) \\ &= (2x)^2/2x(3z+2x+y) + (2y)^2/2y(3x+2y+z) + (2z)^2/2z(3y+2z+x) \\ &\geq (2x+2y+2z)^2/[2x(3z+2x+y) + 2y(3x+2y+z) + 2z(3y+2z+x)] = 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

33. Bài này cơ bản. Đặt $x = a$, $y = 2b$, $z = 3c$ thì $3xyz = x + y + z$ và ta cần chứng minh $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq 8$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $3xyz = x + y + z \geq 3(xyz)^{1/3}$. Từ đây suy ra $xyz \geq 1$. Lại áp dụng AM-GM thì ta có

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz \geq 8.$$

34. Bài này cơ bản. Gọi ý: Sử dụng bất đẳng thức $1/a+1/b+1/c+1/d \geq 16/(a+b+c+d)$ cho các biểu thức ở vế trái.

35. Đây là một bài toán khó. Lời giải thông qua vài phép đánh giá, rồi dự đoán điểm rơi. Đặt $a = x/y$, $b = y/z$ thì $x/z = ab$ và $P = a/(b+1) + b/(a+1) + 1/2\sqrt{ab} + 1/2$.

$$\begin{aligned} &= 1+a/(b+1) + 1 + b/(a+1) + 1/2\sqrt{ab} - 3/2 \\ &= (a+b+1)/(1/(a+1) + 1/(b+1) + 1/2\sqrt{ab}) - 3/2 \\ &\geq 4(a+b+1)/(a+b+2) + 1/(a+b) - 3/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Đặt } t = a+b \text{ thì } P - 2 \geq 4(t+1)/(t+2) + 1/t - 7/2 = [8t(t+1) + 2(t+2) - 7t(t+2)]/2t(t+2) \\ &= (t^2 - 4t + 4)/2t(t+2) = (t-2)^2/2t(t+2) \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$, $a = b$. Giải ra được $a = b = 1$, $x = y = z$.

36. Bài này cơ bản. Gọi ý: Ý tưởng chính là thay thế các mẫu số bằng một mẫu số chung thông qua đánh giá. Hãy chứng minh rằng $x^2 + 2yz + 3 \geq 2(xy+yz+zx)$ bằng cách thay 3 bằng $(x+y+z)^2/3$.