

Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến

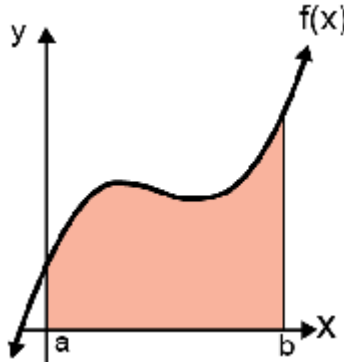
Trương Phước Nhân, 30/07/2021

Nội dung của bài viết nhằm trình bày lại ý tưởng tiếp cận khái niệm tích phân xác định cho các hàm số một biến do nhà toán học người đức Riemann đề xuất và hoàn chỉnh bởi nhà toán học pháp Darboux.

Bài toán mở đầu.

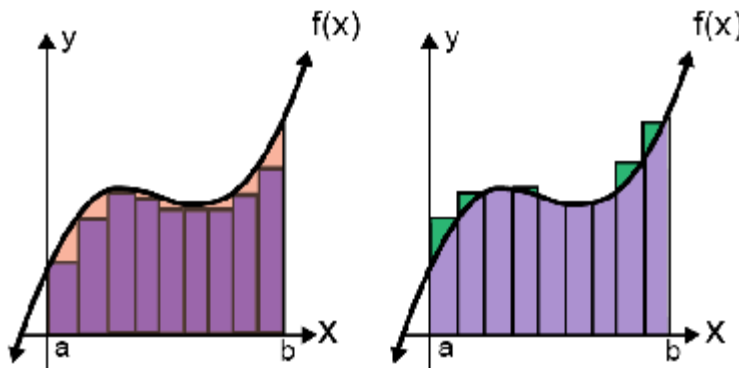
Giả sử f là một hàm số không âm bị chặn xác định trên đoạn $[a, b]$.

Tính diện tích $A(R_f)$ của miền $R_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Hình vẽ minh họa miền R_f .

Từ thời Archimedes, lời giải bài toán nêu trên đã được thực hiện bằng cách chia nhỏ đoạn $[a, b]$ thành một số hữu hạn các đoạn con. Khi đó, diện tích $A(R_f)$ cần tìm sẽ được xấp xỉ bằng tổng diện tích các hình chữ nhật nội tiếp miền R_f và tổng diện tích các hình chữ ngoại tiếp miền R_f .



Hình vẽ minh họa phép xấp xỉ diện tích $A(R_f)$ bởi tổng diện tích các hình chữ nhật nội tiếp miền R_f và tổng diện tích các hình chữ ngoại tiếp miền R_f .

Tổng diện tích các hình chữ nhật nội tiếp miền R_f sẽ luôn nhỏ hơn diện tích $A(R_f)$ và tổng diện tích các hình chữ ngoại tiếp miền R_f sẽ luôn lớn hơn diện tích $A(R_f)$. Hơn nữa, nếu chúng ta chọn các điểm chia đủ mịn thì hai tổng này sẽ càng gần với diện tích $A(R_f)$ cần tìm.

Ý tưởng tiếp cận trên có thể được tổng quát lên cho lớp các hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn bất kì như sau:

1. Định nghĩa tích phân Riemann

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn.

Kí hiệu $m(f) := \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$ và $M(f) := \sup\{f(x): x \in [a, b]\}$.

Giả sử cho trước một phân hoạch $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ của $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$).

(Phân hoạch P của đoạn $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $a < b$) là một tập hữu hạn $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ các điểm của $[a, b]$ sao cho $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$)

Kí hiệu $m_i(f) := \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ và $M_i(f) := \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ với $i = 1, \dots, n$.

Hiển nhiên, $m(f) \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M(f)$, với mọi $i = 1, \dots, n$.

Khi đó, $L(P, f) := \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ được gọi là **tổng Riemann dưới** của hàm f ứng với phân hoạch P và $U(P, f) := \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ được gọi là **tổng Riemann trên** của hàm f ứng với phân hoạch P .

Kết quả 1.1.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, $m(f)(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b - a)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$.

Chứng minh kết quả 1.1.

Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$.

Do $m(f) \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M(f)$, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$, nên

$$m(f)(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b - a).$$

□

Ý tưởng của chúng ta là sẽ tìm kiếm các phân hoạch P của $[a, b]$ sao cho tổng Riemann dưới của nó đạt giá trị lớn nhất có thể được và tổng Riemann trên của nó đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

Kí hiệu:

$$L(f) := \sup\{L(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\},$$

$$U(f) := \inf\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\}.$$

Ta sẽ chứng minh $L(f) \leq U(f)$. Để làm được điều này, chúng ta sẽ cần đến các khái niệm sau:

Giả sử cho trước các phân hoạch P, P^* của $[a, b]$, phân hoạch P^* được gọi là một **phép mịn hóa của P** nếu mọi điểm của P đều là một điểm của P^* .

Giả sử cho trước các phân hoạch P, P_1, P_2 của $[a, b]$, phân hoạch P của $[a, b]$ được gọi là một **phép mịn hóa chung của P_1 và P_2** nếu phân hoạch P chứa tất cả các điểm của P_1 và P_2 .

Kết quả 1.2.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn

i) Nếu P là một phân hoạch của $[a, b]$ và P^* là một phép mịn hóa P thì

$$L(P, f) \leq L(P^*, f), U(P^*, f) \leq U(P, f), U(P^*, f) - L(P^*, f) \leq U(P, f) - L(P, f).$$

ii) Nếu P_1 và P_2 là các phân hoạch của $[a, b]$ thì $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$.

iii) $L(f) \leq U(f)$.

Chứng minh kết quả 1.2.

i) Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch của $[a, b]$.

Giả sử P^* là một phép mịn hóa của P thu được bằng cách bổ sung thêm một điểm x^* .

Khi đó, $x_{i-1} \leq x^* \leq x_i$ với một chỉ số i nào đó.

Kí hiệu:

$$M_l^* := \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x^*]\} \text{ và } M_r^* := \sup\{f(x): x \in [x^*, x_i]\}.$$

Hiển nhiên, $M_l^* \leq M_i(f)$, $M_r^* \leq M_i(f)$ và $x_i - x_{i-1} = (x_i - x^*) + (x^* - x_{i-1})$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} U(P, f) - U(P^*, f) &= M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - M_l^*(x^* - x_{i-1}) - M_r^*(x_i - x^*) \\ &= (M_i(f) - M_l^*)(x^* - x_{i-1}) + (M_i(f) - M_r^*)(x_i - x^*) \\ &\geq 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nếu P^* là một phép mịn hóa của P thu được bằng cách bổ sung thêm nhiều điểm thì chúng ta có thể lặp lại lập luận trên nhiều lần để có thể chỉ ra rằng $U(P^*, f) \leq U(P, f)$.

Phép chứng minh cho đánh giá $L(P, f) \leq L(P^*, f)$ có thể được thực hiện bằng phương pháp tương tự.

Bằng cách kết hợp cả hai đánh giá trên, chúng ta sẽ có $U(P^*, f) - L(P^*, f) \leq U(P, f) - L(P, f)$.

ii) Giả sử P^* là một phép mịn hóa chung của P_1 và P_2 .

Khi đó, $L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f)$. (khẳng định này suy ra từ khẳng định (i))

iii) Giả sử P_0 là một phân hoạch cho trước của $[a, b]$.

Từ khẳng định (ii), $L(P_0, f) \leq U(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$.

Như vậy, $L(P_0, f)$ là một cận dưới của tập $\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\}$. Do $U(f)$ là cận dưới đúng của tập $\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\}$ nên $L(P_0, f) \leq U(f)$.

Nếu chúng ta xem P_0 như một phân hoạch cho trước của $[a, b]$ thì $U(f)$ sẽ là một cận trên của tập $\{L(P_0, f): P_0 \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\}$.

Do $L(f)$ là cận trên đúng của tập $\{L(P_0, f): P_0 \text{ là một phân hoạch của } [a, b]\}$ nên $L(f) \leq U(f)$. □

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn. Hàm số f được gọi là **khả tích Riemann** (hoặc **khả tích**) trên $[a, b]$ nếu $L(f) = U(f)$. Giá trị $L(f) = U(f)$ được gọi là **tích phân Riemann của hàm f trên $[a, b]$** (hoặc **tích phân của hàm f trên $[a, b]$**) và được kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ (hoặc $\int_a^b f$). Giá trị $U(f)$ được gọi là **tích phân Riemann trên của hàm f trên $[a, b]$** và giá trị $L(f)$ được gọi là **tích phân Riemann dưới của hàm f trên $[a, b]$** . Như vậy, một hàm bị chặn sẽ khả tích Riemann trên $[a, b]$ nếu tích phân Riemann trên bằng với tích phân Riemann dưới.

Nhận thấy rằng cách định nghĩa tích phân Riemann cho một hàm số bị chặn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nêu trên có rất nhiều hạn chế. Bởi vì để tính tích phân Riemann trên $U(f)$ của hàm f chúng ta sẽ cần xét cận dưới đúng của tổng $U(P, f) := \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ với mọi phân hoạch P của $[a, b]$ và chúng ta cũng phải xét cận trên đúng của tổng $L(P, f) := \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ với mọi phân hoạch P của $[a, b]$ để xác định tích phân Riemann dưới $L(f)$. Phân tích trên chỉ ra rằng không dễ dàng gì để xác định liệu một hàm bị chặn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ có khả tích Riemann hay không và thậm chí nếu chúng ta đã biết hàm f là khả tích Riemann thì việc tính toán tích phân Riemann $\int_a^b f(x)dx$ cũng sẽ gặp rất nhiều khó khăn.

Như vậy, chúng ta sẽ cần một số tiêu chuẩn và đánh giá thật đơn giản để xác định xem khi nào một hàm bị chặn f trên $[a, b]$ là khả tích Riemann và đánh giá sơ bộ độ lớn của tích phân Riemann $\int_a^b f(x)dx$. Điều này sẽ giúp ích rất nhiều cho chúng ta khi cần khảo sát tính khả tích của một số khá lớn các lớp hàm trong mục “**2. Các lớp hàm khả tích Riemann**”. Phần lớn các câu hỏi phức tạp hơn liên quan đến việc đánh giá giá trị tích phân Riemann sẽ được thảo luận trong mục “**3. Định lí cơ bản của giải tích**”.

Kết quả 1.3. (Riemann)

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Điều kiện cần và đủ để f khả tích Riemann là với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Chứng minh kết quả 1.3.

Giả sử với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Khi đó, $0 \leq U(f) - L(f) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$.

Như vậy, $L(f) = U(f)$, nên f là một hàm khả tích Riemann.

Ngược lại, giả sử f là một hàm khả tích Riemann.

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ định nghĩa của $U(f)$ và $L(f)$, tồn tại các phân hoạch Q_ε và $\tilde{Q}_\varepsilon$ của $[a, b]$ sao cho $U(Q_\varepsilon, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ và $L(\tilde{Q}_\varepsilon, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Giả sử P_ε là một phép mịn hóa chung của Q_ε và $\tilde{Q}_\varepsilon$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.2),

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\tilde{Q}_\varepsilon, f) \leq L(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f) \leq U(Q_\varepsilon, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do $L(f) = U(f)$ nên $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

□

Kết quả 1.4.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và tồn tại các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta \leq f \leq \alpha$.

Khi đó, $\beta(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \alpha(b-a)$. Hơn nữa, nếu $|f| \leq \alpha$ thì $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \alpha(b-a)$.

Chứng minh kết quả 1.4.

Do $\beta \leq f(x) \leq \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\beta \leq m(f)$ và $M(f) \leq \alpha$.

Giả sử $P_1 := \{a, b\}$ là phân hoạch tầm thường của $[a, b]$.

Khi đó, $\beta(b-a) \leq m(f)(b-a) = L(P, f)$ và $U(P, f) = M(f)(b-a) \leq \alpha(b-a)$.

Như vậy, $\beta(b-a) \leq L(f) = \int_a^b f(x)dx = U(f) \leq \alpha(b-a)$.

□

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh một kết quả quan trọng và khá hữu ích sau:

Kết quả 1.5.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn và $c \in (a, b)$.

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ nếu và chỉ nếu f là hàm khả tích Riemann trên $[a, c]$ và $[c, b]$. Hơn nữa, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Chứng minh kết quả 1.5.

Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann). Bằng cách bổ sung thêm điểm c vào các điểm của phân hoạch P_ε (nếu c không phải là một điểm của phân hoạch P_ε), chúng ta sẽ thu được một phép mịn hóa $P_\varepsilon^* = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ của P_ε trong đó $c = x_k$ với một chỉ số $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.2),

$$0 \leq U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Khi đó, $Q_\varepsilon^* := \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ sẽ là một phân hoạch của $[a, c]$, nên nếu kí hiệu g là thu hẹp của hàm số f trên $[a, c]$ thì

$$\begin{aligned} U(Q_\varepsilon^*, g) - L(Q_\varepsilon^*, g) &= \sum_{i=1}^k [M_i(g) - m_i(g)](x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k [M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \\ &= U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) \\ \Rightarrow U(Q_\varepsilon^*, g) - L(Q_\varepsilon^*, g) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Như vậy, g sẽ khả tích Riemann trên $[a, c]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann), hay f khả tích trên $[a, c]$. Lập luận tương tự, chúng ta cũng sẽ chứng minh được rằng f khả tích trên $[c, b]$.

Ngược lại, giả sử f khả tích trên $[a, c]$ và $[c, b]$. Giả sử g và h lần lượt là thu hẹp của f trên $[a, c]$ và $[c, b]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại phân hoạch Q_ε của $[a, c]$ và phân hoạch R_ε của $[c, b]$ sao cho

$$U(Q_\varepsilon, g) - L(Q_\varepsilon, g) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{và} \quad U(R_\varepsilon, h) - L(R_\varepsilon, h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Giả sử P_ε là phân hoạch của $[a, b]$ thu được bằng cách kết hợp các điểm của Q_ε và các điểm của R_ε .

Khi đó, P_ε sẽ chứa điểm c , $U(P_\varepsilon, f) = U(Q_\varepsilon, g) + U(R_\varepsilon, h)$ và $L(P_\varepsilon, f) = L(Q_\varepsilon, g) + L(R_\varepsilon, h)$, nên

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Như vậy, f sẽ khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy từ điều kiện Riemann).

Giả sử $\alpha := U(P_\varepsilon, f)$ và $\beta := L(P_\varepsilon, f)$. Hiển nhiên, $\beta \leq \int_a^b f(x)dx \leq \alpha$.

Đồng thời, do $\alpha = U(Q_\varepsilon, g) + U(R_\varepsilon, h)$ và $\beta := L(Q_\varepsilon, g) + L(R_\varepsilon, h)$ nên

$$\beta \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \alpha.$$

Do $\alpha - \beta < \varepsilon$ nên $\left| \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Như vậy, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (điều này suy ra từ việc số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý). □

Nhận thấy rằng chúng ta luôn giả định rằng $a < b$ khi định nghĩa tích phân Riemann của một hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Để có được sự đồng nhất và thuận tiện trong cách trình bày, chúng ta sẽ bổ sung thêm hai quy ước sau: Nếu $a = b$ thì mọi hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ đều khả tích Riemann và $\int_a^b f(x)dx = 0$; nếu $a > b$ và hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích Riemann thì $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$.

Ưu điểm tuyệt vời của cách quy ước này nằm ở chỗ chúng ta sẽ ko bị giới hạn bất kì liên hệ nào về hướng cho đoạn cần lấy tích phân.

2. Các lớp hàm khả tích Riemann

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ áp dụng điều kiện Riemann để khảo sát tính giải tích cho một loạt các lớp hàm thường gặp. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ khảo sát các tính chất đại số và thứ tự thường dùng của tích phân Riemann.

Kết quả 2.1.

Giả sử cho trước hàm số $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Nếu f là một hàm đơn điệu thì f là một hàm khả tích Riemann.

ii) Nếu f là một hàm liên tục thì f là một hàm khả tích Riemann.

Chứng minh kết quả 2.1.

i) Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu tăng. Khi đó, f cũng là một hàm bị chặn (điều này suy ra từ việc $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ với mọi $x \in [a, b]$). Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$. Khi đó, $M_i(f) = f(x_i)$ và $m_i(f) = f(x_{i-1})$ với mọi $i = 1, \dots, n$, nên

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}).$$

Nếu $f(b) = f(a)$ thì $f(x) = f(a)$ với mọi $x \in [a, b]$, nên $U(P, f) = L(P, f) = f(b)(b - a)$ với mọi phân hoạch P của $[a, b]$.

Nếu $f(b) > f(a)$ thì chúng ta sẽ thực hiện quá trình lập luận như sau: Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Xét một phân hoạch $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ của $[a, b]$ sao cho $x_i - x_{i-1} < \varepsilon / [f(b) - f(a)]$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Khi đó, $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \frac{[f(b) - f(a)]\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$.

Như vậy, f là một hàm khả tích Riemann (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

Phép chứng minh cho trường hợp f là hàm đơn điệu giảm được thực hiện tương tự như trên.

ii) Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Khi đó, f sẽ là một hàm bị chặn. Hơn nữa, f cũng là một hàm liên tục đều. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ định nghĩa khái niệm hàm liên tục đều, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Giả sử $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch của $[a, b]$ sao cho $x_i - x_{i-1} < \delta$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Nhận thấy rằng với mọi $i = 1, 2, \dots, n$, với mọi $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Bằng cách lấy supremum $x \in [x_{i-1}, x_i]$ và infimum $y \in [x_{i-1}, x_i]$, chúng ta có $M_i(f) - m_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Như vậy, $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$, nên f sẽ là một hàm khả tích Riemann (điều này suy ra từ điều kiện Riemann). $\square$

Kết quả trên chỉ ra rằng tính đơn điệu và tính liên tục là điều kiện đủ để đảm bảo tính khả tích Riemann của một hàm số. Tuy nhiên, một hàm số đơn điệu thì không nhất thiết phải liên tục và một hàm số liên tục cũng không nhất thiết là phải đơn điệu. Điều này chỉ ra rằng tính liên tục và tính đơn điệu không phải là điều kiện cần cho tính khả tích Riemann của một hàm số. Trên thực tế, chúng ta có thể chứng minh được rằng nếu f là một hàm đơn điệu hoặc liên tục trên một số hữu hạn đoạn con hợp thành $[a, b]$ thì f cũng sẽ khả tích Riemann trên $[a, b]$ (Kết quả 2.3). Muốn làm được như vậy, chúng ta sẽ cần đến kết quả sau:

Kết quả 2.2.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Giả sử tồn tại các số thực $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ nằm trong $[a, b]$ sao cho hàm f khả tích trên các đoạn con $[a, a_1], [b_1, a_2], \dots, [b_{n-1}, a_n], [b_n, b]$ với $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là $2n$ điểm bất kì nằm trong $[a, b]$ sao cho $a_1 \leq c_1 < b_1 < a_2 < c_2 < b_2 < \dots < a_n < c_n \leq b_n$ (nếu $c_1 = a$ thì $a_1 = c_1$, nếu $c_n = b$ thì $c_n = b_n$).

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

Chứng minh kết quả 2.2.

Đầu tiên, chúng ta giả sử rằng tồn tại một điểm $c_1 \in [a, b]$ sao cho $c_1 \neq a, c_1 \neq b$ và hàm f khả tích trên các đoạn con $[a, a_1], [b_1, b]$ với a_1, b_1 là các điểm nằm trong $[a, b]$ sao cho $a_1 < c_1 < b_1$.

Nếu f là một hàm hằng trên $[a, b]$ thì f sẽ khả tích Riemann trên $[a, b]$. Giả sử f không phải là một hàm hằng trên $[a, b]$. Khi đó, $M(f) \neq m(f)$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Chọn các điểm a_1, b_1 trong $[a, b]$ sao cho $a_1 < c_1 < b_1$ và $b_1 - a_1 < \frac{\varepsilon}{3[M(f) - m(f)]}$. Giả sử g_1 là thu hẹp của f trên $[a, a_1]$ và h_1 là thu hẹp của f trên $[b_1, b]$. Khi đó, g_1 và h_1 lần lượt sẽ là các hàm khả tích trên $[a, a_1]$ và $[b_1, b]$.

Từ điều kiện Riemann, tồn tại phân hoạch P_1 của $[a, a_1]$ và phân hoạch Q_1 của $[b_1, b]$ sao cho $U(P_1, g_1) - L(P_1, g_1) < \frac{\varepsilon}{3}$ và $U(Q_1, h_1) - L(Q_1, h_1) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Giả sử P_ε là phân hoạch của $[a, b]$ thu được bằng cách kết hợp các điểm của P_1 và các điểm của Q_1 .

Khi đó, P_ε sẽ chứa các điểm a_1, b_1 , $U(P_\varepsilon, f) = U(P_1, g_1) + M_1^*(b_1 - a_1) + U(Q_1, h_1)$,

$$L(P_\varepsilon, f) = L(P_1, g_1) + m_1^*(b_1 - a_1) + L(Q_1, h_1),$$

trong đó $M_1^* = \sup\{f(x): x \in [a_1, b_1]\}$ và $m_1^* = \inf\{f(x): x \in [a_1, b_1]\}$.

Do $M_1^* - m_1^* \leq M(f) - m(f)$ nên $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{3} + [M(f) - m(f)] \cdot \frac{\varepsilon}{3[M(f) - m(f)]} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Từ điều kiện Riemann, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Hơn nữa, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^b f(x)dx$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.5).

Nếu $c_1 = a$ thì chúng ta sẽ đặt $a_1 := a$ và nếu $c_1 = b$ thì chúng ta sẽ đặt $b_1 := b$ trong lập luận nêu trên.

Phép chứng minh cho trường hợp n điểm $c_1, \dots, c_n$ được thực hiện bằng cách lặp lại liên tiếp quá trình suy luận nêu ở trên. $\square$

Kết quả 2.3.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Giả sử tồn tại các số thực $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ nằm trong $[a, b]$ sao cho trên mỗi đoạn con $[a, c_1], (c_1, c_2), \dots, (c_{n-1}, c_n), (c_n, b]$, hàm f hoặc đơn điệu hoặc liên tục.

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Chứng minh kết quả 2.3.

Xét các điểm $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in [a, b]$ sao cho $a_1 \leq c_1 < b_1 < a_2 < c_2 < b_2 < \dots < a_n < c_n \leq b_n$ (nếu $c_1 = a$ thì $a_1 = c_1$, nếu $c_n = b$ thì $c_n = b_n$). Từ Kết quả 2.1), f là hàm khả tích Riemann trên mỗi đoạn con $[a, a_1], [b_1, a_2], \dots, [b_{n-1}, a_n], [b_n, b]$. Từ Kết quả 2.2), f là hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. $\square$

Tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng Kết quả 2.3) để chứng minh một tính chất khá lí thú của tích phân Riemann. Nói một cách đại khái, khẳng định này phát biểu rằng: “nếu chúng ta thay đổi tùy ý giá trị của một hàm khả tích Riemann tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nhận được cũng khả tích Riemann và tích phân Riemann của nó cũng bằng với tích phân Riemann của hàm đã cho”.

Kết quả 2.4.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho $\{x \in [a, b]: g(x) \neq f(x)\} = \{c_1, \dots, c_n\}$. Khi đó, g khả tích Riemann và $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Chứng minh kết quả 2.4.

Do f, g là các hàm bị chặn và g khác f tại một số hữu hạn điểm, nên tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $|f(x)| \leq \alpha$ và $|g(x)| \leq \alpha$ với mọi $x \in [a, b]$.

Để chứng minh g khả tích Riemann, chúng ta sẽ lập luận như sau:

Xét $2n$ điểm $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in [a, b]$ sao cho $a_1 \leq c_1 < b_1 < a_2 < c_2 < b_2 < \dots < a_n < c_n \leq b_n$ (nếu $c_1 = a$ thì $a_1 = c_1$, nếu $c_n = b$ thì $c_n = b_n$).

Khi đó, nếu $c_1 \neq a$ và $c_n \neq b$ thì $g(x) = f(x)$ với mọi x nằm trong các đoạn con $[a, a_1], [b_1, a_2], \dots, [b_{n-1}, a_n], [b_n, b]$. Nếu $c_1 = a$ thì $a_1 = a$, nên g khả tích trên $[a, a_1]$. Nếu $c_n = b$ thì $b_n = b$, nên g khả tích trên $[b_n, b]$. Đồng thời, do f khả tích Riemann trên $[a, b]$, nên f khả tích Riemann trên các đoạn con $[a, a_1], [b_1, a_2], \dots, [b_{n-1}, a_n], [b_n, b]$. Nói cách khác, g cũng khả tích Riemann trên các đoạn con $[a, a_1], [b_1, a_2], \dots, [b_{n-1}, a_n], [b_n, b]$. Từ Kết quả 2.2), g khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Để chứng minh tích phân Riemann của hàm g bằng với tích phân Riemann của hàm f , chúng ta sẽ lập luận như sau:

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Chọn các điểm $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in [a, b]$ thỏa mãn các bất đẳng thức nêu ở trên và $(b_j - a_j) < \varepsilon/2n\alpha$ với mọi $j = 1, \dots, n$.

$$\text{Từ Kết quả 1.5), } \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} f(x)dx - \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} g(x)dx.$$

$$\text{Từ Kết quả 1.5), } \left| \int_{a_j}^{b_j} f(x)dx \right| \leq \alpha(b_j - a_j) \text{ và } \left| \int_{a_j}^{b_j} g(x)dx \right| \leq \alpha(b_j - a_j) \text{ với mọi } j = 1, \dots, n.$$

$$\text{N như vậy, } \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| \leq \alpha \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) + \alpha \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) = 2n\alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2n\alpha} = \varepsilon.$$

$$\text{Do số thực dương } \varepsilon > 0 \text{ có thể nhỏ tùy ý nên } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx. \quad \square$$

Đầu tiên, chúng ta sẽ xem xét tính khả tích Riemann đối với một số dạng toán tử đại số thường gặp:

Tính chất đại số của tích phân Riemann.

Kết quả 2.5.

Giả sử $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann. Khi đó,

$$\text{i) } f + g \text{ là hàm khả tích Riemann trên } [a, b] \text{ và } \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\text{ii) } rf \text{ là hàm khả tích Riemann trên } [a, b] \text{ với mọi } r \in \mathbb{R} \text{ và } \int_a^b (rf)(x)dx = r \int_a^b f(x)dx.$$

$$\text{iii) } fg \text{ là hàm khả tích Riemann trên } [a, b].$$

$$\text{iv) nếu tồn tại một số thực dương } \delta > 0 \text{ sao cho } |f(x)| \geq \delta \text{ với mọi } x \in [a, b] \text{ thì } 1/f \text{ là hàm khả tích Riemann trên } [a, b].$$

$$\text{v) nếu } f(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in [a, b] \text{ thì } f^{\frac{1}{k}} \text{ là hàm khả tích Riemann trên } [a, b] \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh kết quả 2.5.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại phân hoạch Q và R của $[a, b]$ sao cho $U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$ và $U(R, g) - L(R, g) < \varepsilon$.

Giả sử P_ε là một phép mịn hóa chung của Q và R .

$$\text{Khi đó, } U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) \leq U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon \text{ và } U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g) \leq U(R, g) - L(R, g) < \varepsilon.$$

i) Giả sử $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Khi đó, $M_i(f + g) \leq M_i(f) + M_i(g)$ và $m_i(f + g) \geq m_i(f) + m_i(g)$, với mọi $i = 1, \dots, n$. Bằng cách nhân cả hai vế các đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được $U(P_\varepsilon, f + g) \leq U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g)$ và $L(P_\varepsilon, f + g) \geq L(P_\varepsilon, f) + L(P_\varepsilon, g)$.

$$\text{N như vậy, } U(P_\varepsilon, f + g) - L(P_\varepsilon, f + g) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $f + g$ khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann). Hơn nữa, nếu $\alpha := U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g)$ và $\beta := L(P_\varepsilon, f) + L(P_\varepsilon, g)$ thì

$$\beta \leq L(P_\varepsilon, f + g) \leq L(f + g) = \int_a^b (f + g)(x)dx = U(f + g) \leq U(P_\varepsilon, f + g) \leq \alpha.$$

Đồng thời, chúng ta cũng có

$$\beta \leq L(f) + L(g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = U(f) + U(g) \leq \alpha.$$

Như vậy,

$$\left| \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b (f + g)(x)dx \right| \leq \alpha - \beta < 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

ii) Nếu $r = 0$ thì $rf(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$, nên khẳng định (ii) là hiển nhiên. Giả sử $r > 0$.

Khi đó, $L(P, rf) = rL(P, f)$ và $U(P, rf) = rU(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$, nên

$$L(rf) = rL(f) = rU(f) = U(rf).$$

Ngược lại, nếu $r < 0$ thì $L(P, rf) = rU(P, f)$ và $U(P, rf) = rL(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$, nên

$$L(rf) = rU(f) = rL(f) = U(rf).$$

Như vậy, rf khả tích Riemann trên $[a, b]$ và $\int_a^b (rf)(x)dx = r \int_a^b f(x)dx$.

iii) Với mọi $i = 1, \dots, n$, với mọi $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{aligned} (fg)(x) - (fg)(y) &= f(x)[g(x) - g(y)] + [f(x) - f(y)]g(y) \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq M(|f|)[M_i(g) - m_i(g)] + M(|g|)[M_i(f) - m_i(f)]. \end{aligned}$$

Bằng cách lấy supremum $x \in [x_{i-1}, x_i]$ và infimum $y \in [x_{i-1}, x_i]$, chúng ta thu được

$$M_i(fg) - m_i(fg) \leq M(|f|)[M_i(g) - m_i(g)] + M(|g|)[M_i(f) - m_i(f)].$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon, fg) - L(P_\varepsilon, fg) &\leq M(|f|)[U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g)] + M(|g|)[U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f)] \\ &< [M(|f|) + M(|g|)]\varepsilon. \end{aligned}$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên fg sẽ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

iv) Giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|f(x)| \geq \delta$ với mọi $x \in [a, b]$.

Với mọi $i = 1, \dots, n$, với mọi $x, y \in [x_i, x_{i-1}]$,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} = \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \leq \frac{1}{\delta^2} [M_i(f) - m_i(f)].$$

Bằng cách lấy supremum $x \in [x_{i-1}, x_i]$ và infimum $y \in [x_{i-1}, x_i]$, chúng ta thu được

$$M\left(\frac{1}{f}\right) - m\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_i(f) - m_i(f)].$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được

$$U\left(P_\varepsilon, \frac{1}{f}\right) - L\left(P_\varepsilon, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_i(f) - m_i(f)].$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý và số thực dương $\delta > 0$ có giá trị cố định nên $1/f$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

v) Với mọi $k \in \mathbb{N}$, kí hiệu $F := f^{1/k}$.

Đầu tiên, chúng ta giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq \delta$ với mọi $x \in [a, b]$.

Với mọi $x, y \in [a, b]$,

$$f(x) - f(y) = F(x)^k - F(y)^k = [F(x) - F(y)][F(x)^{k-1} + F(x)^{k-2}F(y) + \dots + F(y)^{k-1}].$$

$$\text{Nhu vậy, } F(x) - F(y) = \frac{f(x) - f(y)}{F(x)^{k-1} + F(x)^{k-2}F(y) + \dots + F(y)^{k-1}}.$$

Do $F(x)^{k-j}F(y)^{j-1} \geq \delta^{(k-j)/k}\delta^{(j-1)/k} = \delta^{(k-1)/k} > 0$ với mọi $j = 1, \dots, k$, nên

$$F(x) - F(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{k\delta^{(k-1)/k}}.$$

Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$.

$$\text{Với mọi } i = 1, \dots, n, \text{ với mọi } x, y \in [x_i, x_{i-1}], F(x) - F(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{k\delta^{(k-1)/k}} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{k\delta^{(k-1)/k}} \leq \frac{M_i(f) - m_i(f)}{k\delta^{(k-1)/k}}.$$

Bằng cách lấy supremum $x \in [x_{i-1}, x_i]$ và infimum $y \in [x_{i-1}, x_i]$, chúng ta thu được

$$M_i(F) - m_i(F) \leq \frac{M_i(f) - m_i(f)}{k\delta^{(k-1)/k}}.$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được

$$U(P, F) - L(P, F) \leq \frac{1}{k\delta^{(k-1)/k}} [U(R, f) - L(R, f)].$$

Do f khả tích Riemann trên $[a, b]$ nên F cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát cho các hàm số f không âm khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Giả sử $\delta > 0$ và xét hàm $g, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $g(x) := f(x) + \delta$ và $G := g^{1/k}$.

Khi đó, g là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ khẳng định (i)) và $g(x) \geq \delta$ với mọi $x \in [a, b]$.

Những gì chúng ta đã chứng minh ở trên chỉ ra rằng G cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Hơn nữa, do f là một hàm không âm nên $G - \delta^{1/k} = (f + \delta)^{1/k} - \delta^{1/k} \leq f^{1/k} = F \leq (f + \delta)^{1/k} = G$.

Như vậy, $L(G - \delta^{1/k}) \leq L(F) \leq U(F) \leq U(G)$.

Tuy nhiên, $L(G - \delta^{1/k}) = L(G) - \delta^{1/k}(b - a) = U(G) - \delta^{1/k}(b - a)$, nên

$$0 \leq U(F) - L(F) \leq U(G) - L(G - \delta^{1/k}) = \delta^{1/k}(b - a).$$

Do $\delta^{1/k} \rightarrow 0$ khi $\delta \rightarrow 0$ nên $F = f^{1/k}$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. □

Nhận xét rằng không có cách nào đơn giản để có thể biểu diễn tích phân Riemann của hàm fg theo tích phân Riemann của f và g . Kết quả 3.4) sẽ cung cấp cho chúng ta một phương pháp để tính giá trị của các tích phân Riemann có dạng fg bằng cách bổ sung thêm một số giả định phụ cho các hàm f, g .

Với cách kí hiệu và các giả thiết nêu ở trên, chúng ta có thể chứng minh được rằng hàm $(f - g)$ cũng là một khả tích Riemann trên $[a, b]$ và $\int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.5). Hơn nữa, với mọi $n \in \mathbb{N}$, f^n là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ việc áp dụng liên tiếp khẳng định (iii) của Kết quả 2.5). Tương tự, nếu tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|g(x)| \geq \delta$ với mọi $x \in [a, b]$ thì f/g cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (iv)). Đồng thời, nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì, với mọi $r \in \mathbb{Q}_+$, f^r là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ việc mọi số hữu tỉ dương $r \in \mathbb{Q}_+$ đều biểu diễn được dưới dạng $r = n/k$ với $n, k \in \mathbb{N}$ và sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (v)).

Từ Kết quả 2.5), tính khả tích Riemann được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ tương tự như việc tính liên tục và tính khả vi được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ đã được biết đến từ trước. Tuy nhiên, phép hợp thành của hai hàm khả tích Riemann không nhất thiết phải là một hàm khả tích Riemann trong khi phép hợp thành của hai hàm liên tục (hoặc hai hàm khả vi) thì luôn là một hàm liên tục (hoặc hàm khả vi).

Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét các tính chất cơ bản về thứ tự có liên quan đến tích phân Riemann:

Tính chất thứ tự của tích phân Riemann.

Kết quả 2.6.

Giả sử $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann.

i) Nếu $f \leq g$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

ii) Hàm $|f|$ khả tích Riemann trên $[a, b]$ và $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$.

Chứng minh kết quả 2.6.

i) Giả sử $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó, $U(P, f) \leq U(P, g)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$, nên

$$\int_a^b f(x)dx = U(f) \leq U(g) = \int_a^b g(x)dx.$$

ii) Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$. Giả sử $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Với mọi $i = 1, \dots, n$, với mọi $x, y \in [x_i, x_{i-1}]$, chúng ta thu được

$$|f|(x) - |f|(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i(f) - m_i(f).$$

Bằng cách lấy supremum $x \in [x_{i-1}, x_i]$ và infimum $y \in [x_{i-1}, x_i]$, chúng ta thu được

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leq M_i(f) - m_i(f).$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được

$$U(P_\varepsilon, |f|) - L(P_\varepsilon, |f|) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Như vậy, $|f|$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

Hơn nữa, do $-|f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ nên

$$\int_a^b -|f|(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f|(x)dx$$

(điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 2.6).

Tuy nhiên, $\int_a^b -|f|(x)dx = -\int_a^b |f|(x)dx$ (điều này suy ra từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.5), nên

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$

□

Nhận thấy rằng mọi hàm số $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ đều có thể biểu diễn lại dưới dạng $f = f^+ - f^-$, trong đó $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ và $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ là các hàm số không âm xác định trên $[a, b]$ bởi công thức $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ và $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ với mọi $x \in [a, b]$. Các hàm f^+ và f^- lần lượt được gọi là **phần dương** và **phần**

âm của hàm f . Từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.6) và khẳng định (ii) của Kết quả 2.5), hàm f khả tích Riemann khi và chỉ khi f^+ và f^- đều là các hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f^+(x) \, dx - \int_a^b f^-(x) \, dx.$$

Tính chất này đóng một vai trò quan trọng trong quá trình mở rộng từ khái niệm tích phân Riemann lên tích phân Lebègue (dạng khái quát thông dụng nhất của tích phân Riemann trong các vấn đề về khoa học – kỹ thuật).

3. Định lí cơ bản của giải tích

Phép tính vi phân và phép tính tích phân là hai phép tính quan trọng nhất của lý thuyết giải tích toán học. Nhận thấy rằng phép tính vi phân là một phép toán mang tính chất cục bộ, nghĩa là giá trị của đạo hàm tại một điểm chỉ phụ thuộc vào các giá trị của hàm số trong một khoảng đủ nhỏ nào đó bao quanh điểm này. Mặt khác, phép tính tích phân lại là một phép toán mang tính chất toàn cục, nghĩa là giá trị của tích phân phụ thuộc vào giá trị của hàm số trên toàn bộ khoảng lấy tích phân. Hơn nữa, các phép toán này được xác định theo các cách hoàn toàn khác nhau mà không có bất kỳ một kết nối rõ ràng nào giữa chúng. Thật vậy, nếu nhìn nhận từ quan điểm hình học thì phép tính vi phân tương ứng với việc tìm độ dốc của tiếp tuyến đường cong còn phép tính tích phân tương ứng với việc tính diện tích miền giới hạn bởi đường cong. Nếu chúng ta chỉ nhìn thoáng qua thì dường như không có lý do gì để giúp chúng ta tin rằng hai khái niệm hình học này có quan hệ mật thiết với nhau.

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ chứng minh một kết quả tuyệt vời trong giải tích toán học – Định lí cơ bản của giải tích, khẳng định này phát biểu rằng phép tính vi phân và phép tính tích phân của cùng một hàm là nghịch đảo của nhau. Nói cách khác, nếu chúng ta lấy vi phân của một hàm trên một khoảng nào đó rồi sau đó lấy tích phân kết quả này thì sẽ nhận lại được hàm số ban đầu. Ngược lại, nếu chúng ta lấy tích phân một hàm rồi sau đó lấy vi phân kết quả này thì sẽ nhận lại được hàm số ban đầu. Phép chứng minh cho khẳng định này chỉ cần một số tính toán đơn giản đã biết về tích phân Riemann:

Nhắc lại rằng nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi thì chúng ta sẽ thu được một hàm mới $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là đạo hàm bậc nhất của f . Tương tự, nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann thì chúng ta cũng sẽ thu được một hàm mới $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ với mọi $x \in [a, b]$.

Từ Kết quả 1.5), $F(a) = 0$. Như vậy, hàm số F xác định tốt trên $[a, b]$. Để bắt đầu, chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất khá quan trọng của hàm số này:

Kết quả 3.1.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định trên bởi công thức $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Khi đó, F là một hàm số liên tục trên $[a, b]$. Hơn nữa, F còn thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên $[a, b]$: tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$ với mọi $x, y \in [a, b]$.

Chứng minh kết quả 3.1.

Do f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ nên tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $|f(t)| \leq \alpha$ với mọi $t \in [a, b]$. Giả sử c là một số thực bất kì nằm trong $[a, b]$.

Khi đó, $F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt = \int_c^x f(t)dt$, với mọi $x \in [a, b]$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.5), nên $|F(x) - F(c)| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \leq \alpha|x - c|$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.4).

Như vậy, F là một hàm liên tục tại điểm $c \in [a, b]$. Do x và c là các điểm bất kì nằm trong $[a, b]$ và α không phụ thuộc vào x và c nên F thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên $[a, b]$. □

Khẳng định trên chỉ ra rằng mặc dù một hàm khả tích Riemann f có thể không cần liên tục trên $[a, b]$ nhưng hàm $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nhận được bằng cách lấy tích phân hàm f từ điểm a đến điểm $x \in [a, b]$ luôn là một hàm liên tục trên $[a, b]$. Như chúng ta sẽ chứng minh trong phần hai của “**Định lý cơ bản của giải tích**”,

nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì F sẽ là một hàm khả vi trên $[a, b]$. Như vậy, phép tính tích phân là một quá trình làm mịn hóa không giống như phép tính vi phân (do đạo hàm của một hàm số khả vi không nhất thiết phải khả vi). Để trình bày kết quả dưới dạng ngắn gọn, chúng ta sẽ cần đến khái niệm nguyên hàm như sau:

Giả sử I là một khoảng bất kì có chứa nhiều hơn một điểm và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bất kì.

Hàm $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một **nguyên hàm của f** nếu $F' = f$.

Kết quả 3.2. (Định lý cơ bản của giải tích)

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

i) Nếu f có một nguyên hàm F thì $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ với mọi $x \in [a, b]$.

ii) Giả sử $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $F(x) := \int_a^x f(t)dt$.

Nếu f liên tục tại điểm $c \in [a, b]$ thì F sẽ khả vi tại điểm c và $F'(c) = f(c)$.

Hơn nữa, nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì F sẽ là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$.

Chứng minh kết quả 3.2.

i) Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và F là một nguyên hàm của f . Nếu $x = a$ thì $\int_a^x f(t)dt = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(x) - F(a)$.

Giả sử $x \in (a, b]$ và g là thu hẹp của f trên $[a, x]$. Khi đó, g là một hàm khả tích Riemann trên $[a, x]$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.5). Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một phân hoạch $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ của $[a, x]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$. Bằng cách áp dụng định lý trung bình cho hàm F , với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại một $s_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sao cho

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(s_i)(x_i - x_{i-1}) = f(s_i)(x_i - x_{i-1}) = g(s_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Như vậy, $F(x) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n g(s_i)(x_i - x_{i-1})$, nên

$$L(P_\varepsilon, f) \leq F(x) - F(a) \leq U(P_\varepsilon, f).$$

Đồng thời, chúng ta cũng có $L(P_\varepsilon, f) \leq \int_a^x g(t)dt \leq U(P_\varepsilon, f)$, nên

$$\left| F(x) - F(a) - \int_a^x g(t)dt \right| \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt = F(x) - F(a)$.

Tóm lại, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ với mọi $x \in [a, b]$.

ii) Giả sử hàm số f liên tục tại điểm $c \in [a, b]$.

Khi đó, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$, sao cho

$$t \in [a, b] \text{ và } |t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon.$$

Mặt khác, nếu $x \in [a, b]$ và $x \neq c$ thì $\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)dt = \frac{1}{x-c} \left(\int_c^x [f(t) - f(c)]dt \right) + f(c)$, (điều này suy ra từ việc $\int_c^x f(c) dt = f(c)(x - c)$).

Tiếp theo, nếu chúng ta chọn $0 < |x - c| < \delta$ thì $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ với mọi điểm t nằm trong khoảng đóng giữa c và x , nên

$$\left| \frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| \leq \frac{1}{|x-c|} \cdot \varepsilon |x - c| = \varepsilon.$$

Nếu $c \in (a, b)$ thì F khả vi tại điểm c và $F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$. Nếu $c = a$ thì đạo hàm phải $F'_+(c)$ của F tại c tồn tại và bằng $f(c)$. Nếu $c = b$ thì đạo hàm trái $F'_-(c)$ của F tại c tồn tại và bằng $f(c)$. $\square$

(i) Theo quan điểm của khẳng định (i) của Định lý cơ bản của giải tích, nếu một hàm khả tích Riemann $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ có một nguyên hàm F thì F sẽ được gọi là một **tích phân bất định của f** , kí hiệu $\int f(x)dx$.

Tuy nhiên, cách kí hiệu này hơi mơ hồ bởi vì tích phân bất định của một hàm không xác định duy nhất mà sai khác nhau một hằng số. Chính vì lý do này, chúng ta thường kí hiệu tích phân bất định dưới dạng

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ trong đó } C \text{ là một hằng số nào đó.}$$

Nhắc lại rằng $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ trong đó F là một nguyên hàm nào đó của hàm f . Vế phải của đẳng thức trên thường được biểu diễn lại dưới dạng $F(x)|_a^b$. Với cách kí hiệu như trên, tích phân Riemann $\int_a^b f(x)dx$ thường được gọi là tích phân xác định của f trên $[a, b]$.

(ii) Theo quan điểm của khẳng định (ii) của Định lý cơ bản của giải tích, mọi hàm f liên tục trên $[a, b]$ đều có ít nhất một nguyên hàm F . Tuy nhiên, một hàm f khả tích Riemann trên khoảng I có thể không có bất kì một nguyên hàm F nào trên I hoặc có thể có nguyên hàm nhưng không liên tục.

Hai khẳng định (i) và (ii) của Định lý cơ bản của giải tích có thể kết hợp lại với nhau có được một điều kiện cần và đủ để một hàm số liên tục f có đạo hàm f' cũng là một hàm liên tục. Kết quả này được gọi là **Định lý cơ bản của tích phân Riemann**:

Kết quả 3.3. (Định lý cơ bản của tích phân Riemann)

Giả sử cho trước hàm số $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó, F là một hàm khả vi và hàm F' liên tục trên $[a, b]$ khi và chỉ khi tồn tại một hàm số liên tục $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ với mọi $x \in [a, b]$. Hơn nữa, $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in [a, b]$.

Chứng minh kết quả 3.3.

Giả sử F là một hàm khả vi và hàm F' liên tục trên $[a, b]$. Khi đó, F' khả tích Riemann trên $[a, b]$ và F là một nguyên hàm của F' trên $[a, b]$.

Từ khẳng định (i) của Định lý cơ bản của giải tích, $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bằng cách đặt $f := F'$, chúng ta thu được dạng biểu diễn $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ của hàm F .

Ngược lại, giả sử tồn tại một hàm số liên tục $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó, $F'(x) = 0 + f(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. □

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét hai hệ quả quan trọng của Định lý cơ bản của giải tích, hai hệ quả này mang lại cho chúng ta hai phương pháp đánh giá tích phân rất hiệu quả. Kết quả đầu tiên nói về tích phân Riemann của các hàm dạng tích fg :

Kết quả 3.4. (Công thức tích phân từng phần)

Giả sử cho trước hàm khả vi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f' là hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. Giả sử cho trước hàm khả tích Riemann $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ và G là một nguyên hàm của g trên $[a, b]$.

Khi đó, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(x)G(x)dx$.

Chứng minh kết quả 3.4.

Giả sử $H := fG$. Khi đó, $H' = fG' + f'G = fg + f'G$. Do f và G đều là các hàm khả vi nên chúng sẽ là các hàm liên tục và khả tích Riemann. Đồng thời, do f' và g đều là các hàm khả tích Riemann nên hàm $H' = fg + f'G$ cũng là một hàm khả tích Riemann (điều này suy ra từ khẳng định (i), (ii) của Kết quả 2.5).

Từ khẳng định (i) của Định lý cơ bản của giải tích,

$$\int_a^b [f(x)g(x) + f'(x)G(x)]dx = H(b) - H(a) = f(b)G(b) - f(a)G(a)$$

Như vậy, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(x)G(x)dx$ (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 2.5). □

Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét phương pháp thay thế biến để đánh giá tích phân Riemann. Kết quả này được chia thành hai phần và đều dựa trên Định lý cơ bản của giải tích, mỗi phần sẽ được áp dụng trong một tình huống khác nhau:

Kết quả 3.5. (Công thức đổi biến)

Giả sử cho trước hàm khả vi $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho ϕ' là hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ sao cho $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$.

i) Nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thì $(f \circ \phi)\phi': [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ sao cho

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

ii) Nếu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $\phi'(t) \neq 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$ thì $(f \circ \phi)|\phi'|: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))|\phi'(t)|dt.$$

Chứng minh kết quả 3.5.

i) Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Xét hàm $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $F(x) := \int_a^x f(u)du$.

Từ khẳng định (ii) của Định lý cơ bản về giải tích, F là một hàm khả vi và $F' = f$.

Xét hàm $H: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $H := F \circ \phi$.

Bằng cách áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp,

$$H'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t) \text{ với mọi } t \in [\alpha, \beta].$$

Do $f \circ \phi$ là một hàm liên tục và ϕ' là một hàm khả tích Riemann nên $(f \circ \phi)\phi'$ là một hàm khả tích Riemann (điều này suy ra từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.5).

Từ khẳng định (i) của Định lý cơ bản của giải tích,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = H(\beta) - H(\alpha) = \int_a^{\phi(\beta)} f(x)dx - \int_a^{\phi(\alpha)} f(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx.$$

(điều này suy ra từ Kết quả 1.5)

ii) Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann, $\phi'(t) \neq 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$ và $\psi := (f \circ \phi)|\phi'|$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng $L(f) \leq L(\psi)$. Từ tính chất giá trị trung gian của hàm f' , chúng ta dễ dàng suy ra được rằng $\phi'(t) > 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$ hoặc $\phi'(t) < 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Giả sử $\phi'(t) > 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó, ϕ' là hàm tăng nghiêm ngặt trên $[\alpha, \beta]$, $\phi(\alpha) = a$ và $\phi(\beta) = b$.

Giả sử $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$ và kí hiệu $t_i := \phi^{-1}(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Khi đó, $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\phi'(t)| dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$).

Đồng thời, do $f([x_{i-1}, x_i]) = (f \circ \phi)([t_{i-1}, t_i])$ ($i = 1, \dots, n$) nên chúng ta có

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} m_i(f \circ \phi) |\phi'(t)| dt.$$

Với mỗi $i = 1, \dots, n$, kí hiệu ϕ_i và ψ_i lần lượt là thu hẹp của ϕ và ψ trên $[t_{i-1}, t_i]$.

Khi đó, $|\phi'_i|$ là một hàm khả tích Riemann trên $[t_{i-1}, t_i]$ và $m_i(f \circ \phi) |\phi'_i| \leq \psi_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Như vậy, $L(P, f) \leq \sum_{i=1}^n L(m_i(f \circ \phi) |\phi'_i|) \leq \sum_{i=1}^n L(\psi_i)$.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại một phân hoạch Q_i của $[t_{i-1}, t_i]$ sao cho $L(\psi_i) - \frac{\varepsilon}{n} < L(Q_i, \psi_i)$.

Giả sử Q là phân hoạch của $[a, b]$ thu được bằng cách tổng hợp các điểm của $Q_1, \dots, Q_n$.

$$\sum_{i=1}^n L(\psi_i) < \sum_{i=1}^n L(Q_i, \psi_i) + \varepsilon = L(Q, \psi) + \varepsilon \leq L(\psi) + \varepsilon.$$

Như vậy, $L(P, f) < L(\psi) + \varepsilon$ với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, nên $L(P, f) \leq L(\psi)$.

Bằng cách lấy supremum tất cả các phân hoạch P của $[a, b]$, $L(f) \leq L(\psi)$.

Giả sử $\phi'(t) < 0$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó, ϕ' là hàm giảm nghiêm ngặt trên $[\alpha, \beta]$, $\phi(\alpha) = b$ và $\phi(\beta) = a$.

Với mỗi $i = 1, \dots, n$, nếu chúng ta kí hiệu $t_i := \phi^{-1}(x_{n-i})$ thì lập luận chứng minh $L(f) \leq L(\psi)$ nêu ở trên của chúng ta vẫn hoạt động bình thường.

Thật vậy, $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\phi'(t)| dt = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt = -[\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})] = x_{n-i+1} - x_{n-i}$ và $f([x_{n-i}, x_{n-i+1}]) = (f \circ \phi)([t_{i-1}, t_i])$ nên $L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_{n-i+1}(f)(x_{n-i+1} - x_{n-i}) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} m_i(f \circ \phi) |\phi'(t)| dt$.

Như vậy, $L(f) \leq L(\psi)$. Lập luận tương tự chúng ta cũng chứng minh được rằng $U(f) \geq U(\psi)$.

Do f là một hàm khả tích Riemann nên $L(f) = U(f)$. Như vậy, $L(\psi) = U(\psi)$, nghĩa là ψ cũng là một hàm khả tích Riemann và $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b f(\phi(t)) |\phi'(t)| dt$. □

4. Tổng Riemann

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn. Điều kiện Riemann chỉ ra rằng f là một hàm khả tích Riemann khi và chỉ khi tồn tại một dãy các phân hoạch (P_n) của $[a, b]$ sao cho $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$. Mặc dù chúng ta đã tận dụng rất tốt điều kiện Riemann để chứng minh hầu hết các kết quả quan trọng trong lý thuyết về phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến. Tuy nhiên, vẫn có một số khó khăn nhất định trong việc sử dụng nó để kiểm tra tính khả tích cho một hàm bị chặn cho trước tùy ý và nếu một hàm đã được chứng minh là khả tích thì việc tính tích phân Riemann cũng là cả một vấn đề.

Đầu tiên, với mỗi phân hoạch $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bất kì của $[a, b]$, chúng ta cần tính toán “cực tiểu” và “cực đại” của f trên các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Nhiệm vụ này rất hiếm khi chúng ta có thể thực hiện được. Tiếp theo, chúng ta sẽ chọn một dãy các phân hoạch $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$. Sau cùng, nếu f thật sự là một hàm khả tích Riemann thì làm thế nào để chúng ta có thể đánh giá được giá trị của tích phân Riemann $\int_a^b f(x)dx$.

Để vượt qua khó khăn đầu tiên, chúng ta sẽ đưa ra một cách tiếp cận thay thế bằng cách nhận xét rằng việc tính toán “cực đại” và “cực tiểu” của f trên các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) có thể là khá khó nhưng việc đánh giá giá trị của f tại một số điểm “đặc biệt” của đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) có thể dễ dàng hơn rất nhiều. Với ý tưởng tiếp cận như trên, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm tổng Riemann sau đây:

Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$ và s_i là một điểm bất kì nằm trong đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Khi đó, $S(P, f) := \sum_{i=1}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1})$ được gọi là một **tổng Riemann của f tương ứng với phân hoạch P** . Nhận thấy rằng tổng Riemann trên $U(P, f)$ và tổng Riemann dưới $L(P, f)$ chỉ phụ thuộc vào phân hoạch P và hàm f còn tổng Riemann $S(P, f)$ phụ thuộc cả phân hoạch P , hàm f và cả cách lựa chọn điểm $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Đầu tiên, chúng ta sẽ trình bày một tiêu chuẩn về tính khả tích Riemann có liên quan đến tổng Riemann:

Kết quả 4.1. (Cauchy)

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ khi và chỉ khi với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho $|S(P_\varepsilon, f) - T(P_\varepsilon, f)| < \varepsilon$, với mọi tổng Riemann $S(P_\varepsilon, f)$ và $T(P_\varepsilon, f)$ của f tương ứng với phân hoạch P_ε .

Chứng minh kết quả 4.1.

Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Giả sử $S(P_\varepsilon, f)$ và $T(P_\varepsilon, f)$ là các tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P_ε .

Khi đó, $L(P_\varepsilon, f) \leq S(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f)$ và $L(P_\varepsilon, f) \leq T(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f)$, nên

$$|S(P_\varepsilon, f) - T(P_\varepsilon, f)| \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Ngược lại, giả sử điều kiện nêu trong khẳng định trên là đúng. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch của $[a, b]$ sao cho “hiệu giữa hai tổng Riemann bất kì $S(P, f)$ và $T(P, f)$ của f tương ứng với phân hoạch P ” nhỏ hơn $\varepsilon/3$.

Khi đó, với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại một điểm $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho $M_i(f) < f(s_i) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Xét tổng Riemann $S(P, f) := \sum_{i=1}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1})$.

Khi đó, $U(P, f) < S(P, f) + \frac{\varepsilon}{3}$ (điều này suy ra từ cách chọn các điểm $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$)).

Lập luận tương tự, với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại một điểm $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho $m_i(f) > f(t_i) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Xét tổng Riemann $T(P, f) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Khi đó, $L(P, f) > T(P, f) - \frac{\varepsilon}{3}$ (điều này suy ra từ cách chọn các điểm $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$)).

Hơn nữa, do $S(P, f) - T(P, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ nên $U(P, f) - L(P, f) < S(P, f) + \frac{\varepsilon}{3} - T(P, f) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Như vậy, f khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann). □

Tiếp theo, chúng ta sẽ giải quyết câu hỏi thứ hai liên quan đến việc lựa chọn phân hoạch P sao cho hiệu $U(P, f) - L(P, f)$ đủ nhỏ. Phép phân tích trình bày ở đầu bài viết cũng gợi ý rằng chúng ta có thể bắt đầu với một phân hoạch P bất kì của $[a, b]$ và tinh chỉnh nó liên tục để đạt được phân hoạch P' sao cho hiệu $U(P', f) - L(P', f)$ đủ nhỏ. Một điểm quan trọng cần lưu ý ở đây đó là: việc bổ sung các điểm mới tùy ý không khiến cho hiệu giữa tổng Riemann trên và Riemann dưới tiến đến 0; những điểm mới này cần được chọn sao cho chiều dài của phân đoạn con lớn nhất của phân hoạch đã tinh chỉnh phải nhỏ hơn chiều dài của phân đoạn con lớn nhất của phân hoạch đã cho. Nhận xét quan trọng này dẫn chúng ta đến khái niệm quan trọng sau:

Giả sử cho trước một phân hoạch P của $[a, b]$, **đường kính $\mu(P)$ của phân hoạch P** được định nghĩa là chiều dài của phân đoạn con lớn nhất của phân hoạch P .

Về mặt hình thức, nếu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ thì $\mu(P) := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$.

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh một kết quả phụ quan trọng sẽ được sử dụng trong phần sau của bài viết.

Một cách đại khái, kết quả này phát biểu rằng nếu đường kính $\mu(P)$ của phân hoạch P đủ nhỏ thì tổng Riemann trên $U(P, f)$ xấp xỉ với tích phân Riemann trên $U(f)$ và tổng Riemann dưới $L(P, f)$ cũng sẽ xấp xỉ với tích phân Riemann dưới $L(f)$.

Kết quả 4.2.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho nếu P là một phân hoạch của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $0 \leq U(P, f) - U(f) < \varepsilon$ và $0 \leq L(f) - L(P, f) \leq \varepsilon$.

Hơn nữa, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho nếu P là một phân hoạch của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P .

Chứng minh kết quả 4.2.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ cách định nghĩa của $U(f)$ và $L(f)$, tồn tại các phân hoạch P_1 và P_2 của $[a, b]$ sao cho $U(P_1, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ và $L(P_2, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Giả sử P_0 là phép mịn hóa chung của các phân hoạch P_1 và P_2 .

Khi đó, $U(P_0, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ và $L(P_0, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.2).

Giả sử $\alpha > 0$ là một số thực dương sao cho $|f(x)| \leq \alpha$ với mọi $x \in [a, b]$.

Kí hiệu $n_0 := |P_0|$ và $\delta := \varepsilon/4\alpha n_0$.

Giả sử $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b]$ sao cho $\mu(P) < \delta$. Giả sử P^* là phép mịn hóa chung của P và P_0 .

Khi đó, $U(P^*, f) \leq U(P, f)$ và $U(P^*, f) \leq U(P_0, f)$.

Nhận thấy rằng những đóng góp vào hiệu $U(P, f) - U(P^*, f)$ chỉ có thể phát sinh khi có một điểm x^* của phân hoạch P_0 nằm trong một khoảng mở (x_{i-1}, x_i) gây ra bởi phân hoạch P . Hơn nữa, tổng những đóng góp này tối đa không vượt quá $2\alpha\mu(P)$.

Thật vậy, nếu $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$ kí hiệu $M_l^* := \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x^*]\}$ và $M_r^* := \sup\{f(x): x \in [x^*, x_i]\}$ thì phần đóng góp vào hiệu $U(P, f) - U(P^*, f)$ phát sinh bởi điểm x^* là

$$\begin{aligned} & M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - M_l^*(x^* - x_{i-1}) - M_r^*(x_i - x^*) \\ &= (M_i(f) - M_l^*)(x^* - x_{i-1}) + (M_i(f) - M_r^*)(x_i - x^*) \\ &\leq 2\alpha[(x^* - x_{i-1}) + (x_i - x^*)] \\ &= 2\alpha(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2\alpha\mu(P). \end{aligned}$$

Do tổng số điểm trong phân hoạch P_0 là n_0 nên chúng ta có

$$U(P, f) - U(P^*, f) \leq n_0 \cdot 2\alpha\mu(P) < 2\alpha n_0 \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như vậy, nếu P là một phân hoạch của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$ thì

$$U(P, f) < U(P^*, f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(P_0, f) + \frac{\varepsilon}{2} < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = U(f) + \varepsilon.$$

Lập luận tương tự, nếu P là một phân hoạch của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(P, f) > L(f) - \varepsilon$.

Hơn nữa, nếu $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(f) - \varepsilon < L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f) < U(f) + \varepsilon$. □

Kết quả 4.3. (Darboux)

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Khi đó, nếu f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ thì, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|S(P, f) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$, với mọi phân hoạch P của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$.

Ngược lại, giả sử tồn tại một số thực $r \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: “Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch $P \in [a, b]$ sao cho $|S(P, f) - r| < \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$.”

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và tích phân Riemann của f trên $[a, b]$ bằng r .

Chứng minh kết quả 4.3.

Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ Kết quả 4.2), tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon$ với mọi phân hoạch P của $[a, b]$ với $\mu(P) < \delta$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$. Do $\int_a^b f(x)dx - \varepsilon = L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon = \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$ nên chúng ta suy ra điều phải chứng minh.

Ngược lại, giả sử $r \in \mathbb{R}$ là số thực thỏa mãn điều kiện đã nêu. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$ và $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ là một phân hoạch của $[a, b]$ sao cho $|S(P, f) - r| < \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$.

Nếu $S(P, f)$ và $T(P, f)$ là các tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b]$ thì

$$|S(P, f) - T(P, f)| \leq |S(P, f) - r| + |T(P, f) - r| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ điều kiện Cauchy). Để chứng minh tích phân Riemann của f trên $[a, b]$ bằng r , chúng ta lưu ý rằng tồn tại các số thực $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) sao cho nếu chúng ta đặt

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{và} \quad T(P, f) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

thì $U(P, f) < S(P, f) + \varepsilon$ và $T(P, f) - \varepsilon < L(P, f)$ (xem lại phép chứng minh của Kết quả 4.1).

$$\text{Do } L(P, f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(P, f) \text{ nên } r - 2\varepsilon < T(P, f) - \varepsilon < \int_a^b f(x)dx < S(P, f) + \varepsilon < r + 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên tích phân Riemann của f trên $[a, b]$ phải bằng r . □

Khẳng định trên chỉ ra rằng nếu f là một hàm khả tích Riemann và (P_n) là một dãy các phân hoạch của $[a, b]$ sao cho $\mu(P_n) \rightarrow 0$ thì $L(P_n, f) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$ và $U(P_n, f) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$. Hơn nữa, nếu $S(P_n, f)$ là một tổng Riemann bất kì của f tương ứng với phân hoạch P_n của $[a, b]$ thì $S(P_n, f) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$. Cách tiếp cận vấn đề như thế này sẽ cho phép chúng ta tính gần đúng giá trị của tích phân Riemann của hàm f khi chúng ta không thể đánh giá nó chính xác.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, A course in calculus and real analysis, ???/???/???.

[2]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 1 – GIẢI TÍCH 1, ???/???/???.

[3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập I, ???/???/???.