

Phép tính tích phân Riemann cho hàm hai biến

Trương Phước Nhân, 01/08/2021

Nội dung của bài viết này nhằm mở rộng phương pháp tiếp cận khái niệm tích phân xác định của nhà toán học Riemann trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**” cho các hàm hai và ba biến. Trong toàn bộ bài viết, chúng ta chủ yếu sẽ chỉ khảo sát đối với các hàm hai biến và giới thiệu ngắn gọn các kết quả đối với các hàm ba biến. Phép mở rộng cho các hàm n biến có thể được thực hiện tương tự và sẽ được trình bày chi tiết trong một bài viết khác.

Trong phần đầu của bài viết, chúng ta sẽ xây dựng khái niệm tích phân hai lớp cho các hàm xác định trên các hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$. Khái niệm tích phân hai lớp cho các hàm xác định trên các tập con bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ sẽ được phát triển trong mục 2). Tiếp theo, chúng ta sẽ thảo luận và chứng minh công thức đổi biến cho tích phân hai lớp trong một số trường hợp quan trọng. Sau cùng, chúng ta sẽ chỉ ra cách mở rộng phép tính tích phân hai lớp lên cho phép tính tích phân ba lớp cho các hàm xác định trên các tập con bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$ và giới thiệu công thức đổi biến cho các tích phân ba lớp.

1. Tích phân hai lớp trên các hình chữ nhật.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ hiểu một **hình chữ nhật** là một hình chữ nhật đóng không rỗng trong $\mathbb{R}^2$.

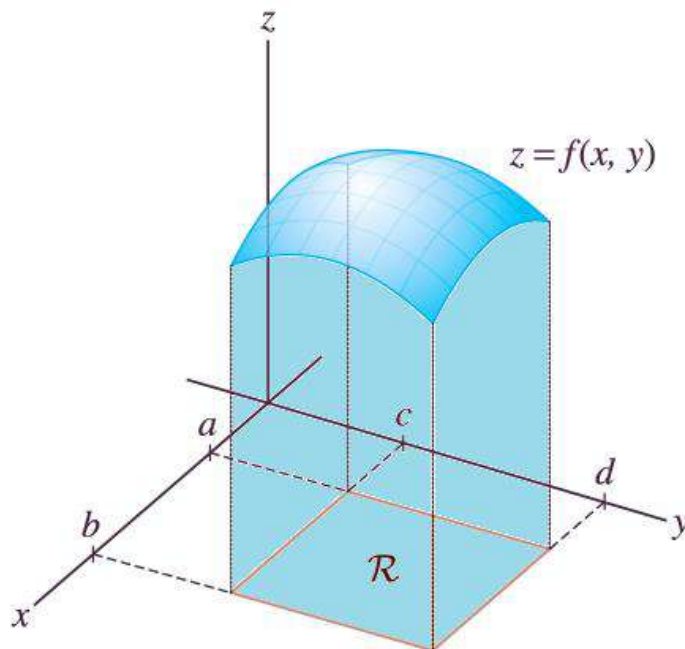
Nói cách khác, một hình chữ nhật là một tập con của $\mathbb{R}^2$ có dạng:

$$[a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ và } c \leq y \leq d\}, \text{ trong đó } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ với } a < b \text{ và } c < d.$$

Bài toán mở đầu.

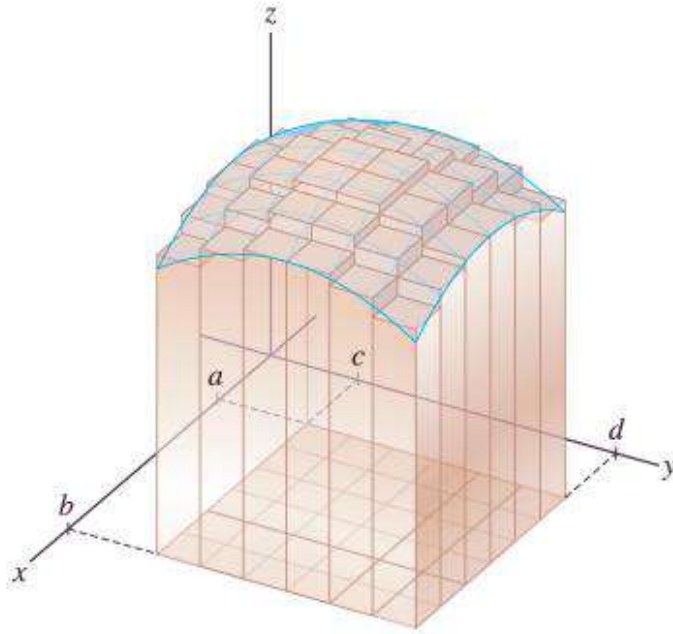
Giả sử f là một hàm số không âm bị chặn và xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$.

Tính thể tích $V(S_f)$ của khối $S_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$



Hình vẽ minh họa S_f .

Bài toán xác định thể tích trên có thể được giải quyết bằng cách chia nhỏ hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ thành một số hữu hạn các hình chữ nhật con. Khi đó, thể tích $V(S_f)$ cần tìm có thể được xấp xỉ bằng tổng thể tích các hình hộp chữ nhật nội tiếp khối S_f và tổng thể tích các hình hộp chữ nhật ngoại tiếp khối S_f .



Hình vẽ minh họa phép xấp xỉ thể tích $V(S_f)$ bởi tổng thể tích các hình hộp chữ nhật nội tiếp khối S_f .

Tổng thể tích các hình hộp chữ nhật nội tiếp khối S_f sẽ luôn nhỏ hơn thể tích $V(S_f)$ và tổng thể tích các hình hộp chữ nhật ngoại tiếp khối S_f sẽ luôn lớn hơn thể tích $V(S_f)$. Hơn nữa, nếu chúng ta chọn các điểm chia “đủ mịn” thì hai tổng này sẽ càng gần với thể tích $V(S_f)$ cần tìm. (xem lại bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”)

Ý tưởng tiếp cận nêu trên có thể được tổng quát lên cho các hàm bị chặn bất kì xác định trên một hình chữ nhật như sau:

Giả sử $R := [a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn bất kì.

Kí hiệu $m(f) := \inf\{f(x, y): (x, y) \in R\}$ và $M(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in R\}$.

Giả sử cho trước một phân hoạch $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của R . (Phân hoạch P của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ là một tập hữu hạn $\{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ các điểm của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ và $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$. Mỗi điểm (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$) được gọi là một **điểm lưới của phân hoạch P** . Hơn nữa, với mỗi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$, hình chữ nhật $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ được gọi là **hình chữ nhật con thứ (i, j) cảm sinh bởi P** .)

Kí hiệu:

$$m_{i,j}(f) := \inf\{f(x, y): (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\},$$

$$M_{i,j}(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}, \text{ với mọi } i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k.$$

Hiển nhiên, $m(f) \leq m_{i,j}(f) \leq M_{i,j}(f) \leq M(f)$, với mọi $i = 0, 1, \dots, n$ và $j = 0, 1, \dots, k$.

Khi đó, $L(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{i,j}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ được gọi là **tổng Riemann hai lớp dưới của hàm f ứng với phân hoạch P** và $U(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{i,j}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ được gọi là **tổng Riemann hai lớp trên của hàm f ứng với phân hoạch P** .

Kết quả 1.1.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, $m(f)(b-a)(d-c) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b-a)(d-c)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 1.1.

Giả sử $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$.

Do $m(f) \leq m_{i,j}(f) \leq M_{i,j}(f) \leq M(f)$, với mọi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ và

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1}) = (b-a)(d-c),$$

nên $m(f)(b-a)(d-c) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b-a)(d-c)$. □

Ý tưởng của chúng ta là sẽ tìm kiếm các phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho tổng Riemann hai lớp dưới của nó đạt giá trị lớn nhất có thể được và tổng Riemann hai lớp trên của nó đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

Kí hiệu:

$$L(f) := \sup\{L(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\},$$

$$U(f) := \inf\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\}.$$

Giả sử cho trước các phân hoạch P, P^* của $[a, b] \times [c, d]$, phân hoạch P^* được gọi là một **phép mịn hóa của P** nếu mọi điểm lưới của phân hoạch P đều là một điểm lưới của phân hoạch P^* .

Giả sử cho trước các phân hoạch P, P_1, P_2 của $[a, b] \times [c, d]$, phân hoạch P được gọi là một **phép mịn hóa chung của P_1 và P_2** nếu phân hoạch P chứa tất cả các điểm lưới của P_1 và P_2 .

Bằng phương pháp lập luận tương tự như khi khảo sát phép tính tích Riemann cho hàm một biến, nếu chúng ta làm mịn hóa một phân hoạch bất kì thì tổng Riemann hai lớp dưới chỉ có thể tăng trong khi tổng Riemann hai lớp trên chỉ có thể giảm. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định này, chúng ta cần xem xét ảnh hưởng của việc chèn thêm một điểm (x^*, y^*) vào một hình chữ nhật con cảm sinh bởi một phân hoạch $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$. Trên thực tế, phân hoạch kết quả nhận được sau khi làm mịn hóa có thể có nhiều hơn một điểm bổ sung, tạm giả sử là các điểm (x_i, y^*) ($i = 0, 1, \dots, n$) và (x^*, y_j) ($j = 0, 1, \dots, k$). Để đơn giản, chúng ta sẽ xem phép mịn hóa này như là kết quả thu được bằng cách chèn thêm một điểm (x^*, y^*) vào một hình chữ nhật con cảm sinh bởi một phân hoạch P và gọi phép mịn hóa này là **phép mịn hóa 1 – bước của P thu được bằng cách chèn thêm điểm (x^*, y^*)** .

Kết quả 1.2.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn và $\alpha \in \mathbb{R}$ là một số thực sao cho $|f(x, y)| \leq \alpha$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Giả sử P là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ và P^* là một phép mịn hóa 1 – bước của P thu được bằng cách chèn thêm một điểm $(x^*, y^*) \in [a, b] \times [c, d]$ không nằm trong P .

Khi đó, $0 \leq U(P, f) - U(P^*, f) \leq \alpha \mu l$ và $0 \leq L(P^*, f) - L(P, f) \leq \alpha \mu l$, trong đó $\mu := \mu(P)$ là đường kính của phân hoạch P và $l := 2(b - a + d - c)$ là chu vi của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$.

(Đường kính $\mu(P)$ của phân hoạch P) được định nghĩa là chiều dài lớn nhất trong số các cạnh của các hình chữ nhật con cảm sinh bởi P , nghĩa là $\mu(P) := \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}, y_1 - y_0, \dots, y_k - y_{k-1}\}$. Đường kính $\mu(P)$ của một phân hoạch P có thể được coi như một thước đo cho độ mịn của phân hoạch P khi phân chia thành các hình chữ nhật con của $[a, b] \times [c, d]$. Nguyên nhân cho việc đường kính $\mu(P)$ được xác định theo cách nêu trên sẽ được giải thích rõ ràng trong chứng minh của kết quả 1.2)

Chứng minh kết quả 1.2.

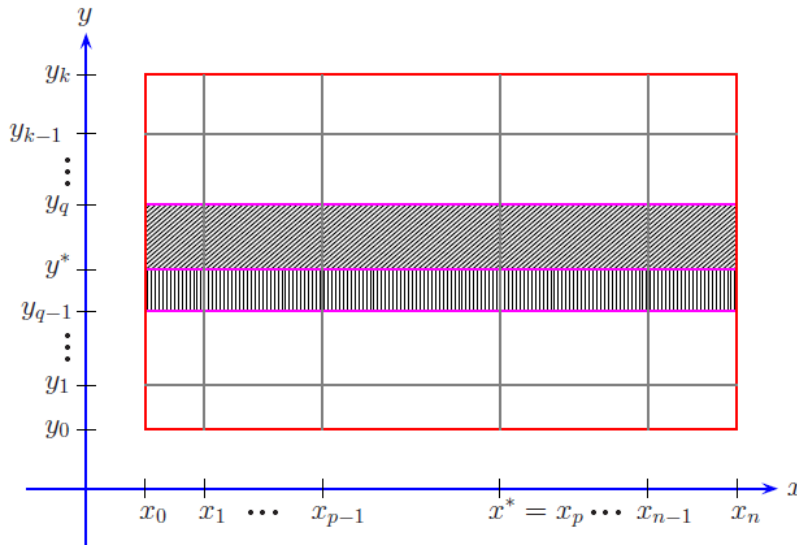
Giả sử $P := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$.

Do (x^*, y^*) không phải là một điểm lưới của phân hoạch P nên chúng ta xem xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x^* \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, y^* \notin \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$.

Khi đó, tồn tại các số nguyên p, q với $0 \leq p \leq n$ và $1 \leq q \leq k$ sao cho $x^* = x_p$ và $y_{q-1} < y^* < y_q$.

Hơn nữa, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j \neq q$ thì hình chữ nhật con thứ (i, j) cảm sinh bởi P cũng là một hình chữ nhật con cảm sinh bởi P^* ; với mọi $i = 1, \dots, n$, các hình chữ nhật con thứ (i, q) cảm sinh bởi P sẽ bị tách thành hình chữ nhật con bên trên $[x_{i-1}, x_i] \times [y^*, y_q]$ và hình chữ nhật con bên dưới $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{q-1}, y^*]$ cảm sinh bởi P^* .



Hình vẽ minh họa trường hợp 1: điểm (x^*, y^*) tách các hình chữ nhật con (i, q) của P thành các hình chữ nhật con bên trên $[x_{i-1}, x_i] \times [y^*, y_q]$ và các hình chữ nhật con bên dưới $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{q-1}, y^*]$ của P^* .

Với mọi $i = 1, \dots, n$, kí hiệu:

$$M_{i,q}^T(f) := \sup\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y^*, y_q]\},$$

$$M_{i,q}^B(f) := \sup\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{q-1}, y^*]\}.$$

Khi đó,

$$U(P, f) - U(P^*, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [M_{i,q}(f)(y_q - y_{q-1}) - M_{i,q}^T(f)(y_q - y^*) - M_{i,q}^B(f)(y^* - y_{q-1})].$$

Bằng cách biểu diễn lại $(y_q - y_{q-1}) = (y_q - y^*) + (y^* - y_{q-1})$ trong số hạng đầu tiên của tổng trên, chúng ta nhận thấy

$$U(P, f) - U(P^*, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left[(M_{i,q}(f) - M_{i,q}^T(f))(y_q - y_{q-1}) + (M_{i,q}(f) - M_{i,q}^B(f))(y^* - y_{q-1}) \right]$$

Với mỗi $i = 1, \dots, n$, $0 \leq M_{i,q}(f) - M_{i,q}^T(f) \leq 2\alpha$ và $0 \leq M_{i,q}(f) - M_{i,q}^B(f) \leq 2\alpha$, nên

$$0 \leq U(P, f) - U(P^*, f) \leq 2\alpha(y_q - y_{q-1}) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \alpha(y_q - y_{q-1})[2(b - a)] \leq \alpha\mu l.$$

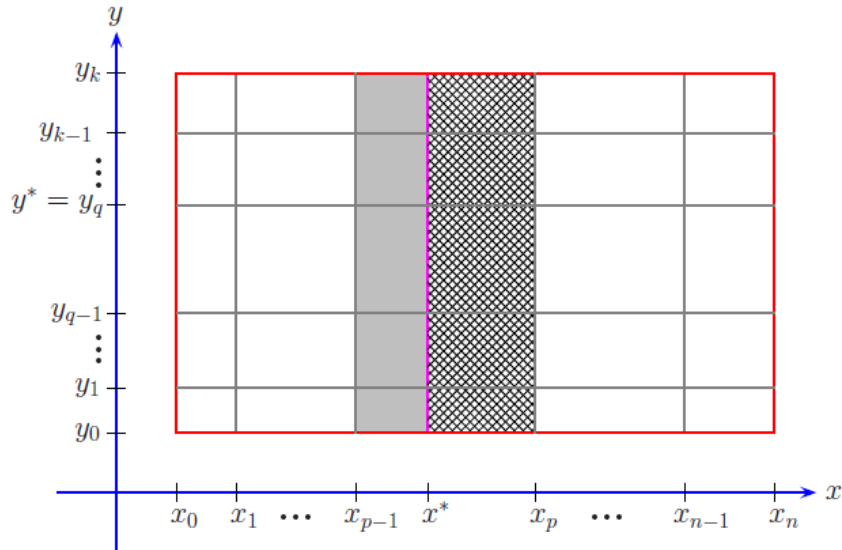
Lập luận tương tự, $0 \leq L(P^*, f) - L(P, f) \leq \alpha\mu l$.

Trường hợp 2. $x^* \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $y^* \in \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$.

Khi đó, tồn tại các số nguyên p, q với $1 \leq p \leq n$ và $0 \leq q \leq k$ sao cho $x_{p-1} < x^* < x_p$ và $y^* = y_q$.

Bằng cách khảo sát các hình chữ nhật con bên trái $[x_{p-1}, x^*] \times [y_{j-1}, y_j]$ và các hình chữ nhật con bên phải $[x^*, x_p] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($j = 1, \dots, k$) tương tự như trong trường hợp 1), chúng ta nhận thấy rằng

$$0 \leq U(P, f) - U(P^*, f) \leq 2\alpha(x_p - x_{p-1}) \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1}) = \alpha(x_p - x_{p-1})[2(d - c)] \leq \alpha\mu l.$$



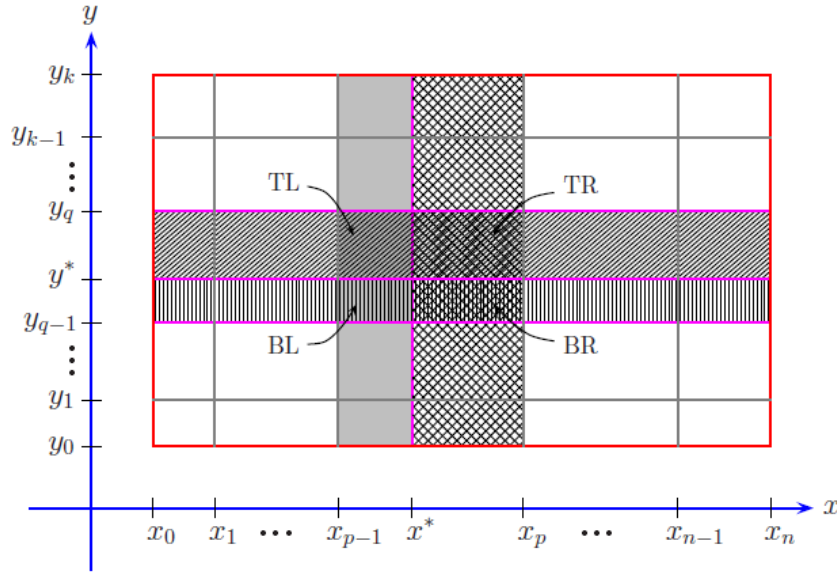
Hình vẽ minh họa trường hợp 1: điểm (x^*, y^*) tách các hình chữ nhật con (p, j) của P thành các hình chữ nhật con bên trái $[x_{p-1}, x^*] \times [y_{j-1}, y_j]$ và các hình chữ nhật con bên phải $[x^*, x_p] \times [y_{j-1}, y_j]$ của P^* .

Lập luận tương tự, $0 \leq L(P^*, f) - L(P, f) \leq \alpha \mu l$.

Trường hợp 3. $x^* \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $y^* \notin \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$.

Khi đó, tồn tại các số nguyên p, q với $1 \leq p \leq n$ và $1 \leq q \leq k$ sao cho $x_{p-1} < x^* < x_p$, $y_{q-1} < y^* < y_q$.

Hơn nữa, với mọi $i = 1, \dots, n$, các hình chữ nhật con thứ (i, q) cảm sinh bởi P sẽ bị tách thành hình chữ nhật con bên trên $[x_{i-1}, x_i] \times [y^*, y_q]$ và hình chữ nhật con bên dưới $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{q-1}, y^*]$ cảm sinh bởi P^* ; với mọi $j = 1, \dots, n$, các hình chữ nhật con thứ (p, j) cảm sinh bởi P sẽ bị tách thành hình chữ nhật con bên trái $[x_{p-1}, x^*] \times [y_{j-1}, y_j]$ và hình chữ nhật con bên phải $[x^*, x_p] \times [y_{j-1}, y_j]$ cảm sinh bởi P^* ; hình chữ nhật thứ (p, q) cảm sinh bởi P sẽ bị tách thành hình chữ nhật con trên bên trái $[x_{p-1}, x^*] \times [y^*, y_q]$, hình chữ nhật con trên bên phải $[x^*, x_p] \times [y^*, y_q]$, hình chữ nhật con dưới bên trái $[x_{p-1}, x^*] \times [y^*, y_{q-1}]$, hình chữ nhật con dưới bên phải $[x^*, x_p] \times [y^*, y_{q-1}]$.



Hình vẽ minh họa trường hợp 1: điểm (x^*, y^*) tách hình chữ nhật con (p, q) của P thành hình chữ nhật con trên bên trái (TL), hình chữ nhật con trên bên phải (TR), hình chữ nhật con dưới bên trái (BL), hình chữ nhật con dưới bên phải (BR).

Kí hiệu:

$$M_{i,q}^{TL}(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in [x_{p-1}, x^*] \times [y^*, y_q]\},$$

$$M_{i,q}^{TR}(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in [x^*, x_p] \times [y^*, y_q]\},$$

$$M_{i,q}^{BL}(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in [x_{p-1}, x^*] \times [y^*, y_{q-1}]\},$$

$$M_{i,q}^{BR}(f) := \sup\{f(x, y): (x, y) \in [x^*, x_p] \times [y^*, y_{q-1}]\},$$

$$U_{p,q}^* := M_{i,q}^{TL}(f)(x^* - x_{p-1})(y_q - y^*) + M_{i,q}^{TR}(f)(x_p - x^*)(y_q - y^*) \\ + M_{i,q}^{BL}(f)(x^* - x_{p-1})(y^* - y_{q-1}) + M_{i,q}^{BR}(f)(x_p - x^*)(y^* - y_{q-1}),$$

$$U_{p,q} := M_{p,q}(f)(x_p - x_{p-1})(y_q - y_{q-1}).$$

Bằng cách biểu diễn $(y_q - y_{q-1}) = (y_q - y^*) + (y^* - y_{q-1})$ và $(x_p - x_{p-1}) = (x_p - x^*) + (x^* - x_{p-1})$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} U_{p,q} - U_{p,q}^* &= [M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{TL}(f)](x^* - x_{p-1})(y_q - y^*) + [M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{TR}(f)](x_p - x^*)(y_q - y^*) \\ &\quad + [M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{BL}(f)](x^* - x_{p-1})(y^* - y_{q-1}) + [M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{BR}(f)](x_p - x^*)(y^* - y_{q-1}). \end{aligned}$$

Do các hiệu số $M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{TL}(f)$, $M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{TR}(f)$, $M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{BL}(f)$, $M_{p,q}(f) - M_{i,q}^{BR}(f)$ đều là các số không âm và bị chặn trên bởi 2α nên $0 \leq U_{p,q} - U_{p,q}^* \leq 2\alpha(x_p - x_{p-1})(y_q - y_{q-1})$.

Bằng cách kết hợp các lập luận trong Trường hợp 1) và Trường hợp 2), chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 \leq U(P, f) - U(P^*, f) &\leq 2\alpha(y_q - y_{q-1}) \sum_{i \neq p} (x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + 2\alpha(x_p - x_{p-1}) \sum_{j \neq q} (y_j - y_{j-1}) \\ &\quad + 2\alpha(x_p - x_{p-1})(y_q - y_{q-1}). \end{aligned}$$

Bằng cách biểu diễn $\sum_{i \neq p} (x_i - x_{i-1}) = (b - a) - (x_p - x_{p-1})$,

$$\sum_{j \neq q} (y_j - y_{j-1}) = (d - c) - (y_q - y_{q-1}),$$

chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 \leq U(P, f) - U(P^*, f) &\leq 2\alpha[(y_q - y_{q-1})(b - a) + (x_p - x_{p-1})(d - c) - (x_p - x_{p-1})(y_q - y_{q-1})] \\ &\leq \alpha\mu[2(b - a) + 2(d - c)] \\ &= \alpha\mu l. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự, $0 \leq L(P^*, f) - L(P, f) \leq \alpha\mu l$. □

Sau đây, chúng ta sẽ sử dụng Kết quả 1.2) để chứng minh một số tính chất quan trọng của tích phân Riemann cho các hàm hai biến:

Kết quả 1.3.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

i) Nếu P là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ và P^* là một phép mịn hóa của P thì

$$L(P, f) \leq L(P^*, f), U(P^*, f) \leq U(P, f), U(P^*, f) - L(P^*, f) \leq U(P, f) - L(P, f).$$

ii) Nếu P_1 và P_2 là các phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ thì $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$.

iii) $L(f) \leq U(f)$.

Chứng minh kết quả 1.3.

i) Nhận thấy rằng mọi phép mịn hóa P^* của P đều có thể thu được bằng cách áp dụng liên tiếp một dãy hữu hạn các phép mịn hóa 1 – bước nào đó của P .

Bằng cách áp dụng liên tiếp Kết quả 1.2), $0 \leq L(P^*, f) - L(P, f)$ và $0 \leq U(P, f) - U(P^*, f)$, nghĩa là $L(P, f) \leq L(P^*, f)$ và $U(P^*, f) \leq U(P, f)$. Như vậy, $U(P^*, f) - L(P^*, f) \leq U(P, f) - L(P, f)$.

ii) Giả sử P^* là một phép mịn hóa chung của P_1 và P_2 . Khi đó, $L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f)$. (khẳng định này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3)

iii) Giả sử P_0 là một phân hoạch cho trước của $[a, b] \times [c, d]$.

Từ khẳng định ii) của Kết quả 1.3), $L(P_0, f) \leq U(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$.

Như vậy, $L(P_0, f)$ là một cận dưới của tập $\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\}$. Do $U(f)$ là cận dưới đúng của tập $\{U(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\}$ nên $L(P_0, f) \leq U(f)$.

Nếu chúng ta xem P_0 như một phân hoạch cho trước của $[a, b] \times [c, d]$ thì $U(f)$ sẽ là một cận trên của tập $\{L(P_0, f): P_0 \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\}$.

Do $L(f)$ là cận trên đúng của tập $\{L(P_0, f): P_0 \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d]\}$ nên $L(f) \leq U(f)$. $\square$

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Hàm f được gọi là **khả tích Riemann** (hoặc **khả tích**) trên $[a, b] \times [c, d]$ nếu $L(f) = U(f)$. Giá trị $U(f)$ được gọi là **tích phân Riemann trên của hàm f trên $[a, b] \times [c, d]$** và giá trị $L(f)$ được gọi là tích phân Riemann dưới của hàm f trên $[a, b] \times [c, d]$. Như vậy, một hàm số bị chặn f sẽ khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ nếu tích phân Riemann trên bằng với tích phân Riemann dưới. Trong trường hợp f khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$, giá trị $L(f) = U(f)$ được gọi là **tích phân Riemann của hàm f trên $[a, b] \times [c, d]$** và được kí hiệu bởi $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y)$ hoặc đơn giản chỉ là $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f$.

Điều kiện khả tích Riemann.

Kết quả sau đây sẽ chỉ ra một điều kiện đơn giản để giúp chúng ta nhận biết khi nào thì một hàm bị chặn f xác định trên $[a, b] \times [c, d]$ là khả tích Riemann. Điều kiện này được lấy cảm hứng từ điều kiện Riemann cho tính khả tích của hàm một biến (xem lại Kết quả 1.3) trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”)

Kết quả 1.4. (Riemann)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Điều kiện cần và đủ để hàm f khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ khi và chỉ khi, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Chứng minh kết quả 1.4.

Giả sử với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Khi đó, $0 \leq U(f) - L(f) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$.

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $U(f) = L(f)$.

Như vậy, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Ngược lại, giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ cách định nghĩa của $U(f)$ và $L(f)$, tồn tại các phân hoạch Q_ε và $\tilde{Q}_\varepsilon$ của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho

$$U(Q_\varepsilon, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } L(\tilde{Q}_\varepsilon, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Giả sử P_ε là một phép mịn hóa chung của Q_ε và $\tilde{Q}_\varepsilon$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3),

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\tilde{Q}_\varepsilon, f) \leq L(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f) \leq U(Q_\varepsilon, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do $L(f) = U(f)$ nên $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$. □

Kết quả tiếp theo sẽ đưa ra một ước tính cơ bản cho độ lớn của giá trị tuyệt đối của một tích phân hai lớp (xem lại Kết quả 1.4) trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”)

Kết quả 1.5.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

Khi đó, nếu tồn tại các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta \leq f \leq \alpha$ thì

$$\beta(b-a)(d-c) \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \leq \alpha(b-a)(d-c).$$

Hơn nữa, nếu $|f| \leq \alpha$ thì $\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \right| \leq \alpha(b-a)(d-c)$.

Chứng minh kết quả 1.5.

Do $\beta \leq f(x) \leq \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\beta \leq m(f)$ và $M(f) \leq \alpha$.

Nhận thấy rằng, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$, chúng ta đều có

$$m(f)(b-a)(d-c) \leq L(P, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b-a)(d-c).$$

Như vậy, $\beta(b-a)(d-c) \leq L(f) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = U(f) \leq M(f)(b-a)(d-c)$. □

Tính chất cộng miền của tích phân Riemann hai lớp trên các hình chữ nhật.

Một trong các tính chất quan trọng nhất của phép tích phân Riemann cho hàm một biến là tính chất cộng miền. Phép chứng minh cho tính chất này có thể tham khảo trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”.

Tính chất cộng miền của tích phân Riemann cho các hàm một biến.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn và $c \in (a, b)$.

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ khi và chỉ khi f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, c]$ và $[c, b]$. Hơn nữa, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Sau đây, chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một kết quả tương tự cho tích phân Riemann hai lớp trên các hình chữ nhật:

Kết quả 1.6. (Tính chất cộng miền của tích phân Riemann hai lớp trên các hình chữ nhật)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

i) Giả sử $s \in (a, b)$. Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ khi và chỉ khi f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, s] \times [c, d]$ và $[s, b] \times [c, d]$.

$$\text{Hơn nữa, } \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \iint_{[a,s] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[s,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y).$$

ii) Giả sử $t \in (c, d)$. Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ khi và chỉ khi f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, t]$ và $[a, b] \times [t, d]$.

$$\text{Hơn nữa, } \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \iint_{[a,b] \times [c,t]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[a,b] \times [t,d]} f(x, y) d(x, y).$$

Chứng minh kết quả 1.6.

i) Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại một phân hoạch $P_\varepsilon := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

Bằng cách bổ sung thêm các điểm $(s, y_0), \dots, (s, y_k)$ vào các điểm của phân hoạch P_ε nếu các điểm $(s, y_0), \dots, (s, y_k)$ không phải là các điểm lưới của phân hoạch P_ε , chúng ta sẽ thu được một phép mịn hóa $P_\varepsilon^* := \{(x_i^*, y_j): i = 0, 1, \dots, n^* \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của P_ε trong đó $\{x_i^*: 0, 1, \dots, n^*\} = \{x_i: 0, 1, \dots, n\} \cup \{s\}$ và $n^* \in \{n, n+1\}$. Hơn nữa, tồn tại một chỉ số $p \in \{1, \dots, n^*\}$ sao cho $x_p^* = s$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3),

$$0 \leq U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Giả sử g là thu hẹp của f trên $[a, s] \times [c, d]$ và kí hiệu $Q_\varepsilon^* := \{(x_i^*, y_j): i = 0, 1, \dots, p \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$.

Khi đó, Q_ε^* sẽ là một phân hoạch của $[a, s] \times [c, d]$, và

$$\begin{aligned} U(Q_\varepsilon^*, g) - L(Q_\varepsilon^*, g) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k [M_{i,j}(g) - m_{i,j}(g)](x_i^* - x_{i-1}^*)(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)](x_i^* - x_{i-1}^*)(y_j - y_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)](x_i^* - x_{i-1}^*)(y_j - y_{j-1}) \\ &= U(Q_\varepsilon^*, f) - L(Q_\varepsilon^*, f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(Q_\varepsilon^*, g) - L(Q_\varepsilon^*, g) < \varepsilon.$$

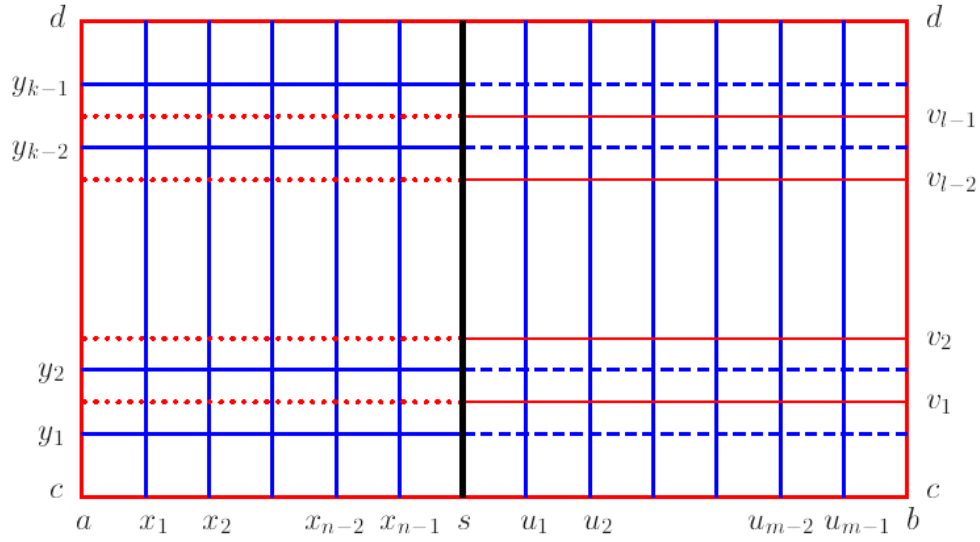
Từ điều kiện Riemann, g sẽ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, s] \times [c, d]$, nghĩa là f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, s] \times [c, d]$. Lập lập tương tự, f cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[s, b] \times [c, d]$.

Ngược lại, giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, s] \times [c, d]$ và $[s, b] \times [c, d]$, kí hiệu g và h lần lượt là thu hẹp của f trên $[a, s] \times [c, d]$ và $[s, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ điều kiện Riemann, tồn tại phân hoạch $Q_\varepsilon := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của $[a, s] \times [c, d]$ và $R_\varepsilon := \{(u_i, v_j): i = 0, 1, \dots, m \text{ và } j = 0, 1, \dots, l\}$ của $[s, b] \times [c, d]$ sao cho

$$U(Q_\varepsilon, g) - L(Q_\varepsilon, g) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } U(R_\varepsilon, h) - L(R_\varepsilon, h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Giả sử Q_ε^* là phép mịn hóa của phân hoạch Q_ε thu được bằng cách bổ sung thêm các điểm $\{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, l\}$ và R_ε^* là phép mịn hóa của phân hoạch R_ε thu được bằng cách bổ sung thêm các điểm $\{(u_i, y_j): i = 0, 1, \dots, m \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$. Giả sử P_ε^* là phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ thu được bằng cách kết hợp các điểm lưới của Q_ε^* và R_ε^* .



Hình vẽ minh họa phương pháp tinh chỉnh và ghép nối các phân hoạch $Q_\varepsilon = \{(x_i, y_j)\}$ và $R_\varepsilon := \{(u_i, v_j)\}$.

Khi đó,

$$U(P_\varepsilon^*, f) = U(Q_\varepsilon^*, g) + U(R_\varepsilon^*, h) \text{ và } L(P_\varepsilon^*, f) = L(Q_\varepsilon^*, g) + L(R_\varepsilon^*, h).$$

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3),

$$U(P_\varepsilon^*, f) \leq U(Q_\varepsilon, g) + U(R_\varepsilon, h) \text{ và } L(P_\varepsilon^*, f) \geq L(Q_\varepsilon, g) + L(R_\varepsilon, h).$$

Như vậy,

$$U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) \leq [U(Q_\varepsilon, g) - L(Q_\varepsilon, g)] + [U(R_\varepsilon, h) - L(R_\varepsilon, h)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Từ điều kiện Riemann, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

$$\text{Để chứng minh hệ thức } \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \iint_{[a,s] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[s,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y),$$

giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Khi đó,

$$L(P_\varepsilon^*, f) \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \leq U(P_\varepsilon^*, f).$$

Đồng thời, do $L(P_\varepsilon^*, f) = L(Q_\varepsilon^*, g) + L(R_\varepsilon^*, h)$ và $U(P_\varepsilon^*, f) = U(Q_\varepsilon^*, g) + U(R_\varepsilon^*, h)$ nên

$$L(P_\varepsilon^*, f) \leq \iint_{[a,s] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[s,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \leq U(P_\varepsilon^*, f).$$

Do $U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) < \varepsilon$ nên

$$\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) - \iint_{[a,s] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[s,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \iint_{[a,s] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \iint_{[s,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y).$$

ii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự như trong khẳng định (i) của Kết quả 1.6). □

Kết quả 1.7.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Giả sử $s, t \in \mathbb{R}$ sao cho $s \in (a, b)$ và $t \in (c, d)$.

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ khi và chỉ khi f là một hàm khả tích Riemann trên các hình chữ nhật $[a, s] \times [c, t]$, $[a, s] \times [t, d]$, $[s, b] \times [c, t]$, $[s, b] \times [t, d]$.

$$\text{Hơn nữa, } \iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,s] \times [c,t]} f + \iint_{[a,s] \times [t,d]} f + \iint_{[s,b] \times [c,t]} f + \iint_{[s,b] \times [t,d]} f.$$

Chứng minh kết quả 1.7.

Phép chứng minh thu được bằng cách kết hợp các khẳng định (i) và (ii) trong Kết quả 1.6). □

Nhận thấy rằng chúng ta luôn giả định rằng $a < b$ và $c < d$ khi định nghĩa tích phân Riemann hai lớp của một hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Để tạo ra sự đồng nhất và thuận tiện trong cách trình bày, chúng ta sẽ bổ sung thêm một quy ước như sau:

Giả sử a, b, c, d là các số thực bất kì và R là một hình chữ nhật trong $\mathbb{R}^2$ với (a, c) và (b, d) là các đỉnh đối diện nhau trên đường chéo của hình chữ nhật R . Nếu $a = b$ hoặc $c = d$ thì mọi hàm $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ đều khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) := 0$. Nếu $a > b$ và $c < d$ hoặc $a < b$ và $c > d$ (nên $R = [b, a] \times [c, d]$ hoặc $R = [a, b] \times [d, c]$) thì mọi hàm khả tích Riemann $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ đều khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) := -\iint_R f(x, y) d(x, y)$. Nếu $a > b$ và $c > d$ (nên $R = [b, a] \times [d, c]$) thì mọi hàm khả tích Riemann $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ đều khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) := \iint_R f(x, y) d(x, y)$.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ($a < b$ và $c < d$) và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

Khi đó, $\iint_{[a,u] \times [c,v]} f = \iint_{[a,u_0] \times [c,v_0]} f + \iint_{[a,u_0] \times [v_0,v]} f + \iint_{[u_0,u] \times [c,v_0]} f + \iint_{[u_0,u] \times [v_0,v]} f$, với mọi $(u, v), (u_0, v_0) \in [a, b] \times [c, d]$.

Tính khả tích của các hàm đơn điệu và liên tục

Nhắc lại rằng một hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là đơn điệu tăng (tương ứng đơn điệu giảm) nếu nó là đơn điệu tăng (tương ứng đơn điệu giảm) theo cả hai biến số. Sau đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một hàm đơn điệu như vậy luôn khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Trên thực tế, chúng ta chứng minh một kết quả còn tổng quát hơn như vậy: “mọi hàm $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu tăng theo một biến và đơn điệu giảm theo biến còn lại cũng khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ ”. Đồng thời, chúng ta cũng chỉ ra rằng mọi hàm liên tục f xác định trên $[a, b] \times [c, d]$ cũng khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Ý tưởng chứng minh cho các khẳng định này được lấy cảm hứng từ Kết quả 2.1) trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”.

Kết quả 1.8.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm cho trước bất kì. Khi đó:

i) Nếu, với mỗi $x \in [a, b]$ cố định, hàm $\psi_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\psi_x(y) := f(x, y)$ là một hàm đơn điệu và, với mỗi $y \in [c, d]$ cố định, hàm $\phi_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\phi_y(x) := f(x, y)$ là một hàm đơn điệu thì f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

ii) Nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì f cũng khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 1.8.

i) Giả sử, với mỗi $x \in [a, b]$ cố định, hàm $\psi_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\psi_x(y) := f(x, y)$ và, với mỗi $y \in [c, d]$ cố định, hàm $\phi_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\phi_y(x) := f(x, y)$ đều là các hàm đơn điệu tăng. Khi đó, $f(a, c) \leq f(x, y) \leq f(b, d)$, với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Như vậy, f là một hàm số bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét phân hoạch $P_{n,n} := \{(x_i, y_j): i, j = 0, 1, \dots, n\}$ là phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ thu được bằng cách chia hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ thành n^2 phần bằng nhau.

Khi đó, $M_{i,j}(f) = f(x_i, y_j)$ và $m_{i,j}(f) = f(x_{i-1}, y_{j-1})$, với mọi $i, j = 1, \dots, n$, nên

$$\begin{aligned} U(P_{n,n}, f) - L(P_{n,n}, f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)](x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1})]. \end{aligned}$$

Bằng cách biểu diễn lại tổng hai lớp $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1})]$ lại dưới dạng

$$[f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)] + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i, y_n) - f(x_i, y_0)] + \sum_{j=1}^{n-1} [f(x_n, y_j) - f(x_0, y_j)],$$

và nhận xét rằng mỗi hiệu nằm trong dấu hoặc vuông đều có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng $[f(b, d) - f(a, c)]$,

$$\begin{aligned} U(P_{n,n}, f) - L(P_{n,n}, f) &\leq \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} [f(b, d) - f(a, c)](1 + n - 1 + n - 1) \\ &= \frac{2n-1}{n^2} (b-a)(d-c)[f(b, d) - f(a, c)]. \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho $U(P_{n,n}, f) - L(P_{n,n}, f) < \varepsilon$.

Từ điều kiện Riemann, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Phép chứng minh cho trường hợp f đơn điệu giảm theo cả hai biến x, y hoặc f đơn điệu tăng theo một biến và đơn điệu giảm theo biến còn lại được thực hiện tương tự như trên.

ii) Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Khi đó, f là một hàm bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

Hơn nữa, f cũng là một hàm liên tục đều trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Kí hiệu $A := (b - a)(d - c)$ là diện tích của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$.

Từ định nghĩa của một hàm liên tục đều, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y), (u, v) \in D, |(x, y) - (u, v)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Giả sử $P_\varepsilon = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho diện tích

$A_{ij} := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ của hình chữ nhật con thứ (i, j) $R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ nhỏ hơn δ với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$. Do hình chữ nhật $R_{i,j}$ là một tập đóng nên, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, tồn tại các điểm (a_i, b_j) và (c_i, d_j) nằm trong $R_{i,j}$ sao cho $f(a_i, b_j) = M_{i,j}(f)$ và $f(c_i, d_j) = m_{i,j}(f)$.

Khi đó, $M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f) = f(a_i, b_j) - f(c_i, d_j) < \frac{\varepsilon}{A}$, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$.

Như vậy, $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)] A_{ij} < \frac{\varepsilon}{A} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_{ij} = \varepsilon$.

Từ điều kiện Riemann, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. □

Tính chất đại số của tích phân Riemann hai lớp.

Kết quả 1.9.

Giả sử $f, g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann. Khi đó:

i) $f + g$ là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} (f + g) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f + \iint_{[a,b] \times [c,d]} g$.

ii) rf là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ với mọi $r \in \mathbb{R}$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} (rf) = r \iint_{[a,b] \times [c,d]} f$.

iii) fg là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

iv) nếu tồn tại một số dương $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y)| \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ thì $1/f$ là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

v) nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ thì $f^{\frac{1}{k}}$ là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh kết quả 1.9.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại phân hoạch Q và R của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$ và $U(R, g) - L(R, g) < \varepsilon$. Giả sử P_ε là một phép mịn hóa chung của Q và R .

Khi đó, $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) \leq U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$ và $U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g) \leq U(R, g) - L(R, g) < \varepsilon$.

i) Giả sử $P_\varepsilon = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$.

Khi đó, $M_{i,j}(f + g) \leq M_{i,j}(f) + M_{i,j}(g)$ và $m_{i,j}(f + g) \geq m_{i,j}(f) + m_{i,j}(g)$, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$.

Bằng cách nhân cả hai vế các đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = k$, chúng ta thu được

$$U(P_\varepsilon, f + g) \leq U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g) \text{ và } L(P_\varepsilon, f + g) \geq L(P_\varepsilon, f) + L(P_\varepsilon, g).$$

Như vậy, $U(P_\varepsilon, f + g) - L(P_\varepsilon, f + g) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Từ điều kiện Riemann, $f + g$ là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Hơn nữa, nếu $\alpha := U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g)$ và $\beta := L(P_\varepsilon, f) + L(P_\varepsilon, g)$ thì

$$\beta \leq L(P_\varepsilon, f + g) \leq L(f + g) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} (f + g) = U(f + g) \leq U(P_\varepsilon, f + g) \leq \alpha.$$

Đồng thời, chúng ta cũng có

$$\beta \leq L(f) + L(g) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f + \iint_{[a,b] \times [c,d]} g = U(f) + U(g) \leq \alpha.$$

Như vậy,

$$\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f + \iint_{[a,b] \times [c,d]} g - \iint_{[a,b] \times [c,d]} (f + g) \right| \leq \alpha - \beta < 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $\iint_{[a,b] \times [c,d]} (f + g) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f + \iint_{[a,b] \times [c,d]} g$.

ii) Nếu $r = 0$ thì $rf(x, y) = 0$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, nên khẳng định (ii) là hiển nhiên.

Giả sử $r > 0$. Khi đó, $L(P, rf) = rL(P, f)$ và $U(P, rf) = rU(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$, nên

$$L(rf) = rL(f) = rU(f) = U(rf).$$

Ngược lại, nếu $r < 0$ thì $L(P, rf) = rU(P, f)$ và $U(P, rf) = rL(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$, nên

$$L(rf) = rU(f) = rL(f) = U(rf).$$

Như vậy, rf khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\iint_{[a,b] \times [c,d]} (rf) = r \iint_{[a,b] \times [c,d]} f$.

iii) Với mọi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, và $(x, y), (u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$\begin{aligned}(fg)(x, y) - (fg)(u, v) &= f(x, y)[g(x, y) - g(u, v)] + [f(x, y) - f(u, v)]g(u, v) \\ &\leq |f(x, y)||g(x, y) - g(u, v)| + |g(u, v)||f(x, y) - f(u, v)| \\ &\leq M(|f|)[M_{i,j}(g) - m_{i,j}(g)] + M(|g|)[M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)].\end{aligned}$$

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và infimum $(u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, chúng ta thu được

$$M_{i,j}(fg) - m_{i,j}(fg) \leq M(|f|)[M_{i,j}(g) - m_{i,j}(g)] + M(|g|)[M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)].$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = n$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}U(P_\varepsilon, fg) - L(P_\varepsilon, fg) &\leq M(|f|)[U(P_\varepsilon, g) - L(P_\varepsilon, g)] + M(|g|)[U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f)] \\ &< [M(|f|) + M(|g|)]\varepsilon.\end{aligned}$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên fg là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

iv) Giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y)| \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Với mọi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ và $(x, y), (u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$\frac{1}{f(x, y)} - \frac{1}{f(u, v)} = \frac{f(u, v) - f(x, y)}{f(x, y)f(u, v)} \leq \frac{|f(u, v) - f(x, y)|}{|f(x, y)||f(u, v)|} \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)].$$

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và infimum $(u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, chúng ta thu được

$$M_{i,j}\left(\frac{1}{f}\right) - m_{i,j}\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)].$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = n$, chúng ta thu được

$$U\left(P_\varepsilon, \frac{1}{f}\right) - L\left(P_\varepsilon, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} [U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f)] < \frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể có giá trị nhỏ tùy ý trong khi số thực dương $\delta > 0$ có giá trị cố định nên $\frac{1}{f}$ là hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

(v) Với mọi $k \in \mathbb{N}$, kí hiệu $F := f^{\frac{1}{k}}$.

Đầu tiên, chúng ta giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Với mọi $(x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$,

$$f(x, y) - f(u, v) = [F(x, y) - F(u, v)] \sum_{j=1}^k F(x, y)^{k-j} F(u, v)^{j-1}.$$

Như vậy,
$$F(x, y) - F(u, v) = \frac{f(x, y) - f(u, v)}{\sum_{j=1}^k F(x, y)^{k-j} F(u, v)^{j-1}}.$$

Do $F(x, y)^{k-j} F(u, v)^{j-1} \geq \delta^{\frac{k-j}{k}} \delta^{\frac{j-1}{k}} = \delta^{\frac{k-1}{k}} > 0$ với mọi $j = 1, \dots, k$, nên

$$F(x, y) - F(u, v) = \frac{f(x, y) - f(u, v)}{\sum_{j=1}^k F(x, y)^{k-j} F(u, v)^{j-1}} \leq \frac{f(x, y) - f(u, v)}{k \delta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Nếu $P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ và $(x, y), (u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 0, 1, \dots, n$ và $j = 0, 1, \dots, k$) thì

$$F(x, y) - F(u, v) \leq \frac{f(x, y) - f(u, v)}{k \delta^{\frac{k-1}{k}}} \leq \frac{M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)}{k \delta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và infimum $(u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, chúng ta thu được

$$M_{i,j}(F) - m_{i,j}(F) \leq \frac{M_{i,j}(f) - m_{i,j}(f)}{k \delta^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = k$, chúng ta thu được

$$U(P, F) - L(P, F) \leq \frac{1}{k \delta^{\frac{k-1}{k}}} [U(P, f) - L(P, f)].$$

Do f khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ nên F cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ (điều này suy ra từ điều kiện Riemann).

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát cho các hàm f không âm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử $\delta > 0$ và xét các hàm $g, G : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi các công thức

$$g(x, y) := f(x, y) + \delta \text{ và } G := g^{\frac{1}{k}}.$$

Khi đó, g là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.9) và $g(x, y) \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Những gì chúng ta đã chứng minh ở trên chỉ ra rằng G cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Hơn nữa, do f là một hàm không âm nên

$$G - \delta^{\frac{1}{k}} = (f + \delta)^{\frac{1}{k}} - \delta^{\frac{1}{k}} \leq f^{\frac{1}{k}} = F \leq (f + \delta)^{\frac{1}{k}} = G.$$

Như vậy, $L(G - \delta^{\frac{1}{k}}) \leq L(F) \leq U(F) \leq U(G)$.

Tuy nhiên, $L(G - \delta^{\frac{1}{k}}) = L(G) - \delta^{\frac{1}{k}}(b - a)(d - c) = U(G) - \delta^{\frac{1}{k}}(b - a)(d - c)$, nên

$$0 \leq U(F) - L(F) \leq U(G) - L(G - \delta^{\frac{1}{k}}) = \delta^{\frac{1}{k}}(b - a)(d - c)$$

Do $\delta^{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$ khi $\delta \rightarrow 0$ nên $F = f^{\frac{1}{k}}$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. □

Nhận xét rằng không có cách nào đơn giản để có thể biểu diễn tích phân Riemann của hàm fg theo tích phân Riemann của f và g . Kết quả 1.15) sẽ cung cấp cho chúng ta một phương pháp để tính giá trị của các tích phân Riemann có dạng fg bằng cách bổ sung thêm một số giả định phụ cho các hàm f, g .

Với cách kí hiệu và các giả thiết nêu ở trên, chúng ta có thể chứng minh được rằng hàm $(f - g)$ cũng là một khả tích Riemann trên $[a, b]$ và $\int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.9). Hơn nữa, với mọi $n \in \mathbb{N}$, f^n là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ việc áp dụng liên tiếp khẳng định (iii) của Kết quả 1.9). Tương tự, nếu tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|g(x)| \geq \delta$ với mọi $x \in [a, b]$ thì f/g cũng là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (iv)). Đồng thời, nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì, với mọi $r \in \mathbb{Q}_+$, f^r là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ (điều này suy ra từ việc mọi số hữu tỉ dương $r \in \mathbb{Q}_+$ đều biểu diễn được dưới dạng $r = n/k$ với $n, k \in \mathbb{N}$ và sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (v)).

Từ Kết quả 1.9), tính khả tích Riemann được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ tương tự như việc tính liên tục và tính khả vi được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ đã được biết đến từ trước. Tuy nhiên, phép hợp thành của hai hàm khả tích Riemann không nhất thiết phải là một hàm khả tích Riemann trong khi phép hợp thành của hai hàm liên tục (hoặc hai hàm khả vi) thì luôn là một hàm liên tục (hoặc hàm khả vi).

Tính chất thứ tự của tích phân Riemann hai lớp.

Kết quả 1.10.

Giả sử $f, g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann. Khi đó:

i) Nếu $f \leq g$ thì $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} g$.

ii) Hàm $|f|$ khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và $\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f \right| \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} |f|$.

Chứng minh kết quả 1.10.

i) Giả sử $f(x, y) \leq g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Khi đó, $U(P, f) \leq U(P, g)$, với mọi phân hoạch $[a, b] \times [c, d]$, nên

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = U(f) \leq U(g) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} g.$$

ii) Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$. Giả sử $P_\varepsilon = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$.

Với mọi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ và $(x, y), (u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$|f|(x, y) - |f|(u, v) \leq |f(x, y) - f(u, v)| \leq M_i(f) - m_i(f).$$

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và infimum $(u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, chúng ta thu được

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leq M_i(f) - m_i(f).$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = n$, chúng ta thu được

$$U(P_\varepsilon, |f|) - L(P_\varepsilon, |f|) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Từ điều kiện Riemann, $|f|$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$.

Hơn nữa, do $-|f|(x, y) \leq f(x, y) \leq |f|(x, y)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ nên

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} -|f| \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} f \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} |f|.$$

(điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.10)

Tuy nhiên, $\iint_{[a,b] \times [c,d]} -|f| = -\iint_{[a,b] \times [c,d]} |f|$ (điều này suy ra từ khẳng định (ii) của Kết quả 1.9), nên

$$\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f \right| \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} |f|.$$

□

Nhận thấy rằng mọi hàm số $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ đều có thể biểu diễn lại dưới dạng $f = f^+ - f^-$, trong đó $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ và $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ là các hàm số không âm xác định trên $[a, b] \times [c, d]$ bởi công thức

$f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$ và $f^-(x, y) = -\min\{f(x, y), 0\}$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Các hàm f^+ và f^- lần lượt được gọi là **phần dương** và **phần âm** của hàm f . Từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.6) và khẳng định (ii) của Kết quả 2.5), hàm f khả tích Riemann khi và chỉ khi f^+ và f^- đều là các hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f^+ - \iint_{[a,b] \times [c,d]} f^-.$$

Tính chất này đóng một vai trò quan trọng trong quá trình mở rộng từ khái niệm tích phân Riemann lên tích phân Lebègue (dạng khái quát thông dụng nhất của tích phân Riemann trong các vấn đề về khoa học – kỹ thuật).

Định lý Fubini trên các hình chữ nhật.

Trong các phân tích trước của bài viết, chúng ta chủ yếu chỉ khảo sát các kết quả về tính khả tích và phương pháp đánh giá thô cho giá trị của các tích phân Riemann hai lớp $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f$. Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ trình bày một ý tưởng đơn giản giúp giảm độ phức tạp của các bài toán tích phân Riemann hai lớp của nhà toán học Fubini:

Kết quả 1.11. (Định lý Fubini trên các hình chữ nhật)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và kí hiệu I là tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d]$.

i) Nếu, với mỗi điểm $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_c^d f(x, y)dy$ thì tồn tại tích phân lặp $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$ và bằng I .

ii) Nếu, với mỗi điểm $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_a^b f(x, y)dx$ thì tồn tại tích phân lặp $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$ và bằng I .

iii) Nếu các điều kiện (i) và (ii) được thỏa mãn hoặc f là một hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y)d(x, y).$$

Chứng minh kết quả 1.11.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ điều kiện Riemann, tồn tại một phân hoạch $P_\varepsilon = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

i) Giả sử với mỗi điểm $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_c^d f(x, y)dy$.

Xét hàm $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $A(x) := \int_c^d f(x, y)dy$.

Do $m(f)(d - c) \leq A(x) \leq M(f)(b - a)$ với mọi $x \in [a, b]$ nên A là một hàm bị chặn trên $[a, b]$.

Từ tính chất cộng miền của tích phân Riemann cho các hàm một biến,

$$A(x) = \sum_{j=1}^k \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy.$$

Hơn nữa, với mỗi $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^k m_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}) \leq A(x) \leq \sum_{j=1}^k M_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}) \text{ với mọi } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Bằng cách kí hiệu $M_i(A) := \sup\{A(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ và $m_i(A) := \inf\{A(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

$$\sum_{j=1}^k m_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}) \leq m_i(A) \leq M_i(A) \leq \sum_{j=1}^k M_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}).$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})$ và lấy tổng từ $i = 1$ đến $i = n$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} L(P_\varepsilon, f) &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^k m_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n m_i(A)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(A)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^k M_{i,j}(f)(y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1}) = U(P_\varepsilon, f) \end{aligned}$$

Như vậy, phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ cảm sinh một phân hoạch $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ của $[a, b]$ sao cho

$$U(P, A) - L(P, A) = \sum_{i=1}^n [M_i(A) - m_i(A)](x_i - x_{i-1}) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Từ điều kiện khả tích Riemann cho các hàm một biến, A khả tích Riemann trên $[a, b]$. Hơn nữa, do $L(P_\varepsilon, f) \leq L(P, A) \leq \int_a^b A(x)dx \leq U(P, A) \leq U(P_\varepsilon, f)$ và $L(P_\varepsilon, f) \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y)d(x, y) \leq U(P_\varepsilon, f)$

nên $\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) - \int_a^b A(x) dx \right| \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có giá trị nhỏ tùy ý nên $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \int_a^b A(x) dx$.

ii) Giả sử với mỗi điểm $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_a^b f(x,y) dx$.

Xét hàm $B: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $B(y) := \int_a^b f(x,y) dx$.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như trong khẳng định (i) của Kết quả 1.11).

iii) Nếu các điều kiện (i) và (ii) được thỏa mãn thì khẳng định là hiển nhiên do khẳng định (i) và (ii).

Giả sử f là một hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$.

Khi đó, với mỗi điểm $x \in [a, b]$, hàm $y \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $[c, d]$ và, với mỗi điểm $y \in [c, d]$, hàm $x \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $[a, b]$.

Như vậy, với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_c^d f(x, y) dy$ và, với mọi $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_a^b f(x, y) dx$.

Từ khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.11),

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y).$$

□

Định lý cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến.

Nhắc lại rằng một trong số những kết quả tuyệt vời nhất mà chúng ta đã đạt được khi khảo sát phép tính tích phân Riemann trên các hàm một biến chính là “**Định lý cơ bản của giải tích**”. Kết quả này chỉ ra rằng phép tính vi phân và phép tính tích phân là nghịch đảo của nhau:

Định lý cơ bản của giải tích.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

i) Nếu tồn tại một hàm $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho F liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $F' = f$ trên (a, b) thì $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

ii) Nếu hàm f liên tục tại điểm $c \in [a, b]$ thì hàm $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ khả vi tại điểm c và $F'(c) = f(c)$.

(Phép chứng minh chi tiết cho Định lý cơ bản của giải tích được trình bày trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”)

Định lý cơ bản của giải tích có thể mở rộng lên cho các hàm hai biến bằng cách định nghĩa thêm khái niệm tích phân đường – **Công thức Green** (xem lại Kết quả 1) và 2) trong bài viết “**Lý thuyết tích phân các hàm chỉnh hình**”). Trong bài viết này, chúng ta sẽ giới thiệu một dạng tương tự khác của Định lý cơ bản của giải

tích cho các tích phân Riemann hai lớp độc lập với Công thức Green. Kết quả này cũng phát biểu rằng các phép tính vi phân bậc hai và phép tính tích phân hai lớp là nghịch đảo của nhau.

Để bắt đầu, chúng ta sẽ chứng minh một số tính chất cơ bản của hàm $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $F(x, y) := \iint_{[a, x] \times [c, y]} f(s, t) d(s, t)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Kết quả 1.12.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $F(x, y) := \iint_{[a, x] \times [c, y]} f(s, t) d(s, t)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Khi đó:

i) F là một hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$. Hơn nữa, F thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên $[a, b] \times [c, d]$, nghĩa là tồn tại một số thực dương $L > 0$ sao cho

$$|F(x, y) - F(u, v)| \leq L|(x, y) - (u, v)|, \text{ với mọi } (x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d].$$

ii) Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Khi đó, nếu f là một hàm liên tục theo biến x tại x_0 , nghĩa là với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon, \text{ với mọi } y \in [c, d],$$

và $\int_c^{y_0} f(x_0, t) dt$ tồn tại thì $F_x(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_x(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f(x_0, t) dt$.

iii) Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Khi đó, nếu f là một hàm liên tục theo biến y tại y_0 , nghĩa là với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$y \in [c, d], |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon, \text{ với mọi } x \in [a, b],$$

và $\int_a^{x_0} f(s, y_0) ds$ tồn tại thì $F_y(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_y(x_0, y_0) = \int_a^{x_0} f(s, y_0) ds$.

Chứng minh kết quả 1.12.

i) Do f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ nên f cũng là một hàm bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$, nghĩa là tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $|f(s, t)| \leq \alpha$ với mọi $(s, t) \in [a, b] \times [c, d]$.

Giả sử (u, v) là một điểm bất kì nằm trong $[a, b] \times [c, d]$.

Khi đó, $F(x, y) - F(u, v) = \iint_{[a, u] \times [v, y]} f + \iint_{[u, x] \times [c, v]} f + \iint_{[u, x] \times [v, y]} f$, với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Từ Kết quả 1.5), $|F(x, y) - F(u, v)| \leq \alpha((b - a)|y - v| + (d - c)|x - u| + |x - u||y - v|)$.

Nếu kí hiệu $K := \max\{b - a, d - c\}$ và nhận xét rằng cả $|x - u|$ và $|y - v|$ đều $\leq |(x, y) - (u, v)|$ và $|x - u||y - v| \leq K|(x, y) - (u, v)|$ thì

$$|F(x, y) - F(u, v)| \leq L|(x, y) - (u, v)| \text{ với } L := 3\alpha K.$$

Như vậy, F sẽ thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên $[a, b] \times [c, d]$, nên F là một hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$.

ii) Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ nêu trong khẳng định (i) của Kết quả 1.11) được thỏa mãn và $\int_c^{y_0} f(x_0, t)dt$ tồn tại.

Từ Kết quả 1.11), với mọi $x \in [a, b]$ và $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \left(\int_c^{y_0} f(x_0, t)dt \right) ds &= \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} f(x_0, t) d(s, t) \\ \Rightarrow \left(\int_c^{y_0} f(x_0, t)dt \right) \left(\int_{x_0}^x ds \right) &= \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} f(x_0, t) d(s, t) \\ \Rightarrow (x - x_0) \left(\int_c^{y_0} f(x_0, t)dt \right) &= \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} f(x_0, t) d(s, t) \\ \Rightarrow \int_c^{y_0} f(x_0, t)dt &= \frac{1}{x - x_0} \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} f(x_0, t) d(s, t). \end{aligned}$$

Từ Kết quả 1.7), với mọi $x \in [a, b]$ và $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} F(x, y_0) - F(x_0, y_0) &= \iint_{[a, x] \times [c, y_0]} f(s, t) d(s, t) - \iint_{[a, x_0] \times [c, y_0]} f(s, t) d(s, t) \\ \Rightarrow F(x, y_0) - F(x_0, y_0) &= \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} f(s, t) d(s, t). \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $x \in [a, b]$ và $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} - \int_c^{y_0} f(x_0, t)dt = \iint_{[x_0, x] \times [c, y_0]} [f(s, t) - f(x_0, t)] d(s, t).$$

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{d - c}, \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Từ Kết quả 1.5), với mọi $x \in [a, b]$ và $x \neq x_0$,

$$\left| \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} - \int_c^{y_0} f(x_0, t)dt \right| < \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\varepsilon}{d - c} |x - x_0| (d - c) = \varepsilon.$$

Như vậy, $F_x(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_x(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f(x_0, t)dt$.

iii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự khẳng định (ii) của Kết quả 1.12). □

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh dạng tương tự của Định lý cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến:

Kết quả 1.13. (Định lý cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

i) Nếu tồn tại một hàm $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

- Với mỗi điểm $y_0 \in [c, d]$, hàm $x \mapsto F(x, y_0)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) .
- Với mỗi điểm $x_0 \in [a, b]$, hàm $y \mapsto F(x_0, y)$ liên tục trên $[c, d]$, khả vi trên (c, d) .
- F_{xy} tồn tại và bằng f trên $(a, b) \times (c, d)$.

Khi đó, $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)} F := F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

ii) Giả sử $F: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $F(x,y) := \iint_{[a,x] \times [c,y]} f(s,t) d(s,t)$ với mọi $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d]$ và f thỏa mãn các tính chất sau:

- Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$x \in [a,b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon, \text{ với mọi } y \in [c,d].$$

- Hàm $\psi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\psi(t) := f(x_0, t)$ với mọi $t \in [c,d]$ khả tích Riemann trên $[c,d]$ và liên tục tại y_0 .

Khi đó, $F_{xy}(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_{xy}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$.

iii) Giả sử $F: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $F(x,y) := \iint_{[a,x] \times [c,y]} f(s,t) d(s,t)$ với mọi $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d]$ và f thỏa mãn các tính chất sau:

- Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$y \in [c,d], |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon, \text{ với mọi } x \in [a,b].$$

- Hàm $\phi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\phi(s) := f(s, y_0)$ với mọi $s \in [a,b]$ khả tích Riemann trên $[a,b]$ và liên tục tại x_0 .

Khi đó, $F_{yx}(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_{yx}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 1.13.

i) Giả sử $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[a,b] \times [c,d]$.

Bằng cách áp dụng định lý giá trị trung bình cho thu hẹp của F trên hình chữ nhật $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

($i = 0, 1, \dots, n$ và $j = 0, 1, \dots, k$), tồn tại một điểm $(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sao cho

$$F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}) = F_{xy}(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\Rightarrow F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}) = f(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Bằng cách lấy tổng từ $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, chúng ta có

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Như vậy, $L(P, f) \leq F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \leq U(P, f)$, với mọi phân hoạch P của $[a,b] \times [c,d]$.

Bằng cách lấy supremum và infimum trên tập tất cả các phân hoạch P của $[a,b] \times [c,d]$, chúng ta có

$$L(f) = \sup L(P, f) \leq F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \leq \inf U(P, f) = U(f).$$

Do f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ nên

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

ii) Giả sử cho trước điểm $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$.

Do hàm $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\psi(t) := f(x_0, t)$ với mọi $t \in [c, d]$ khả tích Riemann trên $[c, d]$ nên ψ cũng khả tích Riemann trên $[c, y]$ với mọi $y \in [c, d]$, nghĩa là $\int_c^y f(x_0, t) dt$ tồn tại với mọi $y \in [c, d]$. Từ khẳng định (ii) của Kết quả 1.13), $F_x(x_0, y)$ tồn tại và $F_x(x_0, y) = \int_c^y f(x_0, t) dt = \int_c^y \psi(t) dt$ với mọi $y \in [c, d]$. Hơn nữa, do ψ liên tục tại y_0 nên $F_{xy}(x_0, y_0)$ tồn tại và $F_{xy}(x_0, y_0) = \psi(y_0) = f(x_0, y_0)$.

iii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự khẳng định (ii) của Kết quả 1.13). □

Kết quả 1.14.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $F(x, y) := \iint_{[a,x] \times [c,y]} f(s, t) d(s, t)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Khi đó, F_x, F_y, F_{xy} và F_{yx} xác định trên $[a, b] \times [c, d]$.

Hơn nữa, $F_x(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f(x_0, t) dt$, $F_x(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f(x_0, t) dt$, $F_{xy}(x_0, y_0) = F_{yx}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, với mọi $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$.

Chứng minh kết quả 1.14.

Phép chứng minh được suy ra trực tiếp bằng cách tổng hợp các kết quả 1.12) và 1.13). □

Nhắc lại rằng, hai ứng dụng quan trọng nhất của định lý cơ bản của giải tích cho các hàm một biến thường được gọi là “**Công thức tích phân từng phần**” và “**Công thức đổi biến**” (xem lại bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”). Dưới đây, chúng ta sẽ chứng minh các dạng tương tự của công thức tích phân từng phần và công thức đổi biến cho các tích phân Riemann hai lớp:

Kết quả 1.15. (Công thức tích phân từng phần cho tích phân hai lớp)

i) Giả sử $R := [a, b] \times [c, d]$ và $f, g, G: R \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann thỏa mãn các điều kiện sau:

- f và G là các hàm liên tục theo biến x trên $[a, b]$.
- f_x, f_y, f_{xy}, G_x và G_y tồn tại và khả tích Riemann trên R .
- f_x và G_x là các hàm liên tục theo biến y trên $[c, d]$.
- G_{xy} tồn tại và $G_{xy} = g$ trên R .

Khi đó,

$$\iint_R fg = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) - \iint_R (f_x G_y + f_y G_x + f_{xy} G),$$

trong đó $\Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) := (fG)(b,d) - (fG)(b,c) - (fG)(a,d) + (fG)(a,c)$.

ii) Giả sử $R := [a,b] \times [c,d]$ và $f, g, G: R \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann thỏa mãn các điều kiện sau:

- f và G là các hàm liên tục theo biến y trên $[c,d]$.
- f_x, f_y, f_{yx}, G_x và G_y tồn tại và khả tích Riemann trên R .
- f_y và G_y là các hàm liên tục theo biến x trên $[a,b]$.
- G_{yx} tồn tại và $G_{yx} = g$ trên R .

Khi đó,

$$\iint_R fg = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) - \iint_R (f_x G_y + f_y G_x + f_{yx} G),$$

trong đó $\Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) := (fG)(b,d) - (fG)(b,c) - (fG)(a,d) + (fG)(a,c)$.

Chứng minh kết quả 1.15.

Giả sử $H := fG$. Từ khẳng định (ii) của Kết quả 1.9), H khả tích Riemann trên R .

Hơn nữa, $H_x = fG_x + f_x G$ và $H_{xy} = fG_{xy} + f_y G_x + f_x G_y + f_{xy} G = fg + f_x G_y + f_y G_x + f_{xy} G$.

Xét hàm $h: R \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $h := fg + f_x G_y + f_y G_x + f_{xy} G$. Khi đó, $H_{xy} = h$ trên R .

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.13),

$$\iint_R h = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)} H$$

$$\Rightarrow \iint_R h = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG)$$

$$\Rightarrow \iint_R fg = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) - \iint_R (f_x G_y + f_y G_x + f_{xy} G).$$

i) Phép chứng minh được thực hiện tương tự như trong khẳng định (i) của Kết quả 1.15). □

Nhận xét rằng hàm G nêu trong cách khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.15) không được xác định một cách duy nhất. Thật vậy, nếu chúng ta thay $G(x,y)$ bởi $G(x,y) + \phi(x) + \psi(y)$ với ϕ là một hàm khả vi theo biến x trên $[a,b]$ và ψ là một hàm khả vi theo biến y trên $[c,d]$ thì điều kiện $G_{xy} = g$ vẫn được thỏa mãn.

Kết quả 1.16. (Công thức đổi biến cho tích phân hai lớp)

i) Giả sử $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ và $\gamma < \delta$, kí hiệu $E := [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một phép biến hình xác định bởi công thức $\Phi(u,v) = (\phi(u), \psi(v))$ với mọi $(u,v) \in E$, trong đó $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi sao cho ϕ' là một hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ và ψ' là một hàm khả tích Riemann trên $[\gamma, \delta]$.

Khi đó, $D := \Phi(E)$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$ và Jacobian $J(\Phi)$ của phép biến hình Φ được tính bởi công thức $J(\Phi)(u,v) = \phi'(u)\psi'(v)$ với mọi $(u,v) \in E$.

Hơn nữa:

$i')$ Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thì $(f \circ \Phi)J(\Phi)$ là một hàm khả tích Riemann trên E và

$$\iint_{[\phi(\alpha), \phi(\beta)] \times [\psi(\gamma), \psi(\delta)]} f(x, y) d(x, y) = \iint_E f(\Phi(u, v)) J(\Phi)(u, v) d(u, v).$$

$ii')$ Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $J(\Phi)(u, v) \neq 0$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\alpha < u < \beta$ và $\gamma < v < \delta$ thì $(f \circ \Phi)|J(\Phi)|$ là một hàm khả tích Riemann trên E và

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E f(\Phi(u, v)) |J(\Phi)(u, v)| d(u, v).$$

ii) Giả sử $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ và $\gamma < \delta$, kí hiệu $E := [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một phép biến hình xác định bởi công thức $\Phi(u, v) = (\psi(v), \phi(u))$ với mọi $(u, v) \in E$, trong đó $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả vi sao cho ϕ' là một hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ và ψ' là một hàm khả tích Riemann trên $[\gamma, \delta]$.

Khi đó, $D := \Phi(E)$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$ và Jacobian $J(\Phi)$ của phép biến hình Φ được tính bởi công thức $J(\Phi)(u, v) = -\phi'(u)\psi'(v)$ với mọi $(u, v) \in E$.

Hơn nữa:

$ii')$ Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thì $(f \circ \Phi)J(\Phi)$ là một hàm khả tích Riemann trên E và

$$\iint_{[\psi(\gamma), \psi(\delta)] \times [\phi(\alpha), \phi(\beta)]} f(x, y) d(x, y) = - \iint_E f(\Phi(u, v)) J(\Phi)(u, v) d(u, v).$$

$ii'')$ Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $J(\Phi)(u, v) \neq 0$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\alpha < u < \beta$ và $\gamma < v < \delta$ thì $(f \circ \Phi)|J(\Phi)|$ là một hàm khả tích Riemann trên E và

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E f(\Phi(u, v)) |J(\Phi)(u, v)| d(u, v).$$

Chứng minh kết quả 1.16.

$i)$ Do ϕ và ψ lần lượt là các hàm khả vi theo biến u và v nên ϕ và ψ cũng là các hàm liên tục theo biến u và v . Như vậy, $\phi([\alpha, \beta])$ và $\psi([c, d])$ là các khoảng con đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$. Kí hiệu $[a, b] := \phi([\alpha, \beta])$ và $[c, d] := \psi([c, d])$.

Hiển nhiên, $D := \Phi(E)$ chính là hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ trong $\mathbb{R}^2$ và $J(\Phi)(u, v) = \phi'(u)\psi'(v)$ với mọi $(u, v) \in E$.

$i')$ Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Xét hàm $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$F(x, y) := \iint_{[a, x] \times [c, y]} f(s, t) d(s, t) \text{ với mọi } (x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

Từ Kết quả 1.14), F_x, F_y, F_{xy} tồn tại và $F_{xy} = f$ trên D .

Xét hàm $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $H := F \circ \Phi$.

Bằng cách áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp cho hàm một biến, với mọi $v \in [\gamma, \delta]$, hàm $u \mapsto H(u, v)$ khả vi trên (α, β) và $H_u(u_0, v) = F_x(\phi(u_0), \psi(v))\phi'(u_0)$.

Bằng cách áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp cho hàm một biến, hàm $v \mapsto H_u(u_0, v)$ khả vi trên (α, β) và $H_{uv}(u_0, v_0) = F_{xy}(\phi(u_0), \psi(v_0))\psi'(v_0)\phi'(u_0) = (f \circ \Phi)(u_0, v_0)J(\Phi)(u_0, v_0)$ với mọi $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ với $\alpha < \beta$ và $\gamma < \delta$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.13),

$$\begin{aligned} \iint_E f(\Phi(u, v))J(\Phi)(u, v)d(u, v) &= \Delta_{(\alpha, \gamma)}^{(\beta, \delta)} H, \\ \Rightarrow \iint_E f(\Phi(u, v))J(\Phi)(u, v)d(u, v) &= \Delta_{(\phi(\alpha), \psi(\gamma))}^{(\phi(\beta), \phi(\delta))} F \\ &= \iint_{[\psi(\gamma), \psi(\delta)] \times [\phi(\alpha), \phi(\beta)]} f(x, y)d(x, y). \end{aligned}$$

ii) Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $J(\Phi)(u, v) \neq 0$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ với $\alpha < u < \beta$ và $\gamma < v < \delta$. Xét hàm $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $g := (f \circ \Phi)|J(\Phi)|$. Ta sẽ chứng minh rằng g là một hàm khả tích Riemann trên E và $\iint_E g = \iint_D f$ bằng cách chỉ ra rằng $L(f) \leq L(g)$ và $U(g) \leq U(f)$.

Do $\phi'(u)\psi'(v) = J(\Phi)(u, v) \neq 0$ nên $\phi'(u) \neq 0$ với mọi $u \in (\alpha, \beta)$ và $\psi'(v) \neq 0$ với mọi $u \in (\gamma, \delta)$.

Từ Định lý giá trị trung gian của hàm một biến, ϕ' không đổi dấu trong khoảng (α, β) và ψ' không đổi dấu trong khoảng (γ, δ) . Chúng ta sẽ xét bốn trường hợp có thể xảy ra như sau:

Trường hợp 1. $\phi'(u) > 0$ với mọi $u \in (\alpha, \beta)$ và $\psi'(v) > 0$ với mọi $u \in (\gamma, \delta)$.

Khi đó, ϕ là một hàm tăng thực sự trên (α, β) và ψ là một hàm tăng thực sự trên (γ, δ) , nên

$\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ và $\psi(\gamma) = c, \psi(\delta) = d$. Giả sử $P := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$.

Ta sẽ chứng minh rằng $L(P, f) \leq L(g)$.

Kí hiệu $u_i := \phi^{-1}(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ và $v_j := \phi^{-1}(y_j) (j = 0, 1, \dots, k)$.

Khi đó, $\{(u_i, v_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

Hơn nữa, $f([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) = (f \circ \Phi)([u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j])$ và $m_{ij}(f) = m_{ij}(f \circ \Phi)$ với mọi $i = 0, 1, \dots, n$ và $j = 0, 1, \dots, k$.

Nhận thấy rằng $\iint_{[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]} \phi'(u)\psi'(v)d(u, v) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và $|J(\Phi)(u, v)| = \phi'(u)\psi'(v)$ với mọi $(u, v) \in [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ nên

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \iint_{[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]} m_{ij}(f \circ \Phi) |J(\Phi)(u, v)| d(u, v).
\end{aligned}$$

Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, kí hiệu $g_{i,j}, h_{i,j}: [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm được xác định bởi các công thức $g_{i,j}(u, v) := g(u, v)$ và $h_{i,j}(u, v) := m_{ij}(f \circ \Phi) |J(\Phi)(u, v)|$.

Khi đó, $h_{i,j}$ khả tích Riemann trên $[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ và $h_{i,j} \leq g_{i,j}$, nên

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \iint_{[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]} h_{i,j} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k L(h_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k L(g_{i,j}).$$

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, tồn tại một phân hoạch Q_{ij} của $[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ sao cho $L(g_{i,j}) - \frac{\varepsilon}{nk} < L(Q_{ij}, g_{i,j})$.

Giả sử Q là phân hoạch của $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ thu được bằng cách tổng hợp các phân hoạch Q_{ij} của $[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ (xem lại phép chứng minh của Kết quả 1.6).

Khi đó,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left[L(g_{i,j}) - \frac{\varepsilon}{nk} \right] < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k L(Q_{ij}, g_{i,j}) \leq L(Q, g).$$

Như vậy,

$$L(P, f) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k L(g_{i,j}) < L(Q, g) + \varepsilon \leq L(g) + \varepsilon, \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $L(P, f) \leq L(g)$. Bằng cách lấy supremum trên tập hợp tất cả các phân hoạch $P \in [a, b] \times [c, d]$, $L(f) \leq L(g)$.

Lập luận tương tự, chúng ta cũng chứng minh được $U(g) \leq U(f)$.

Trường hợp 2. $\phi'(u) > 0$ với mọi $u \in (\alpha, \beta)$ và $\psi'(v) < 0$ với mọi $u \in (\gamma, \delta)$.

Khi đó, ϕ là một hàm tăng thực sự trên (α, β) và ψ là một hàm giảm thực sự trên (γ, δ) , nên

$\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ và $\psi(\gamma) = d, \psi(\delta) = c$. Giả sử $P := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$.

Kí hiệu $u_i := \phi^{-1}(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ và $v_j := \phi^{-1}(y_{k-j}) (j = 0, 1, \dots, k)$.

Khi đó, $\{(u_i, v_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

Hơn nữa, $f([x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-j}, y_{k-j+1}]) = (f \circ \Phi)([u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j])$ và $m_{i,k-j+1}(f) = m_{ij}(f \circ \Phi)$ với mọi $i = 0, 1, \dots, n$ và $j = 0, 1, \dots, k$.

Nhận thấy rằng $\iint_{[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]} \phi'(u) \psi'(v) d(u, v) = (x_i - x_{i-1})(y_{k-j} - y_{k-j+1})$ và

$|J(\Phi)(u, v)| = -\phi'(u)\psi'(v)$ với mọi $(u, v) \in [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ nên

$$\begin{aligned} L(P, f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{i,k-j+1}(f)(x_i - x_{i-1})(y_{k-j+1} - y_{k-j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \iint_{[u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]} m_{ij}(f \circ \Phi) |J(\Phi)(u, v)| d(u, v) \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như trong trường hợp 1), $L(f) \leq L(g)$ và $U(g) \leq U(f)$.

Trường hợp 3. $\phi'(u) < 0$ với mọi $u \in (\alpha, \beta)$ và $\psi'(v) > 0$ với mọi $u \in (\gamma, \delta)$.

Lập luận tương tự như trong trường hợp 2).

Trường hợp 4. $\phi'(u) < 0$ với mọi $u \in (\alpha, \beta)$ và $\psi'(v) < 0$ với mọi $u \in (\gamma, \delta)$.

Lập luận tương tự như trong trường hợp 3).

Như vậy, $L(f) \leq L(g) \leq U(g) \leq U(f)$. Do f là một hàm khả tích Riemann nên $L(f) = U(f)$, nghĩa là

$$L(g) = U(g) = \iint_D f. \text{ Điều này chỉ ra rằng } g \text{ là một hàm khả tích Riemann và } \iint_D f = \iint_E g. \quad \square$$

Tổng Riemann hai lớp.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn. Mặc dù chúng ta đã tận dụng rất tốt điều kiện Riemann để chứng minh hầu hết các kết quả quan trọng trong lý thuyết về phép tính tích phân Riemann cho hàm hai biến. Tuy nhiên, vẫn có một số khó khăn nhất định trong việc sử dụng nó để kiểm tra tính khả tích cho một hàm bị chặn cho trước tùy ý và nếu một hàm đã được chứng minh là khả tích thì việc tính tích phân Riemann cũng là cả một vấn đề.

Đầu tiên, với mỗi phân hoạch $P_{n,k} = \{(u_i, v_i): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ bất kì của $[a, b] \times [c, d]$, chúng ta cần tính toán “cực tiểu” và “cực đại” của f trên các hình chữ nhật con $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$). Nhiệm vụ này rất hiếm khi chúng ta có thể thực hiện được. Tiếp theo, chúng ta sẽ chọn một dãy các phân hoạch $(P_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ sao cho $U(P_{n,k}, f) - L(P_{n,k}, f) \rightarrow 0$. Sau cùng, nếu f thật sự là một hàm khả tích Riemann thì làm thế nào để chúng ta có thể đánh giá được giá trị của tích phân Riemann

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f.$$

Để giải quyết các vấn đề trên, chúng ta sẽ cần đến khái niệm tổng Riemann hai lớp như sau:

Giả sử $P := \{(u_i, v_i): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ và

(s_i, t_j) là một điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật con $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$).

Khi đó, $S(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(s_i, t_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ được gọi là một **tổng Riemann hai lớp của f tương ứng với phân hoạch P** . Nhận thấy rằng tổng Riemann hai lớp trên $U(P, f)$ và tổng Riemann hai lớp dưới $L(P, f)$ chỉ phụ thuộc vào phân hoạch P và hàm f còn tổng Riemann hai lớp $S(P, f)$ phụ thuộc cả phân hoạch P , hàm f và cả cách lựa chọn điểm $(s_i, t_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$).

Hiển nhiên, $L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f)$, với mọi phân hoạch $P \in [a, b] \times [c, d]$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ trình bày tiêu chuẩn Cauchy về tính khả tích Riemann cho các tổng Riemann hai lớp:

Kết quả 1.18. (Cauchy)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ khi và chỉ khi với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $|S(P_\varepsilon, f) - T(P_\varepsilon, f)| < \varepsilon$, với mọi tổng Riemann hai lớp $S(P_\varepsilon, f)$ và $T(P_\varepsilon, f)$ của f tương ứng với phân hoạch P_ε .

Chứng minh kết quả 1.18.

Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại một phân hoạch P_ε của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Giả sử $S(P_\varepsilon, f)$ và $T(P_\varepsilon, f)$ là các tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P_ε .

Khi đó, $L(P_\varepsilon, f) \leq S(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f)$ và $L(P_\varepsilon, f) \leq T(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f)$, nên

$$|S(P_\varepsilon, f) - T(P_\varepsilon, f)| \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Ngược lại, giả sử điều kiện nêu trong khẳng định trên là đúng. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Giả sử $P = \{(u_i, v_i): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho “hiệu giữa hai tổng Riemann hai lớp bất kì $S(P, f)$ và $T(P, f)$ của f tương ứng với phân hoạch P ” nhỏ hơn $\varepsilon/3$.

Hơn nữa, với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, tồn tại một điểm $(s_i, t_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sao cho

$$M_{i,j}(f) < f(s_i, t_j) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)(d-c)}.$$

Xét tổng Riemann hai lớp $S(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(s_i, t_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Khi đó, $U(P, f) < S(P, f) + \frac{\varepsilon}{3}$. (điều này suy ra từ cách chọn các điểm $(s_i, t_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$))

Lập luận tương tự, với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, tồn tại một điểm $(\tilde{s}_i, \tilde{t}_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sao cho

$$m_{i,j}(f) > f(\tilde{s}_i, \tilde{t}_j) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)(d-c)}.$$

Xét tổng Riemann hai lớp $T(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\tilde{s}_i, \tilde{t}_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Khi đó, $L(P, f) > T(P, f) - \frac{\varepsilon}{3}$. (điều này suy ra từ cách chọn các điểm $(u_i, v_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$))

Do $S(P, f) - T(P, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ nên $U(P, f) - L(P, f) < S(P, f) + \frac{\varepsilon}{3} - T(P, f) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Như vậy, f khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. (điều này suy ra từ điều kiện khả tích Riemann)

□

Tiếp theo, chúng ta sẽ giải quyết câu hỏi thứ hai liên quan đến việc lựa chọn phân hoạch P sao cho hiệu $U(P, f) - L(P, f)$ đủ nhỏ. Phép phân tích trình bày ở đầu bài viết cũng gợi ý rằng chúng ta có thể bắt đầu với một phân hoạch P bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ và tinh chỉnh nó liên tục để đạt được phân hoạch P' sao cho hiệu $U(P', f) - L(P', f)$ đủ nhỏ. Để đạt được mục đích này, chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm về đường kính $\mu(P)$ của một phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ (xem lại phép chứng minh của Kết quả 1.2):

Giả sử cho trước một phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$, đường kính $\mu(P)$ của phân hoạch P được định nghĩa là chiều dài lớn nhất trong số các cạnh của các hình chữ nhật con cảm sinh bởi P .

Về mặt hình thức, nếu $P = \{(u_i, v_i): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ thì

$$\mu(P) := \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}, y_1 - y_0, \dots, y_k - y_{k-1}\}.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh một dạng mở rộng của kết quả 1.2) nhằm phục vụ cho mục đích tinh chỉnh phân hoạch P đã được giới thiệu trong phần đầu của bài viết. Một cách nôm na, kết quả này phát biểu rằng nếu đường kính $\mu(P)$ của phân hoạch P đủ nhỏ thì tổng Riemann hai lớp trên $U(P, f)$ xấp xỉ với tích phân Riemann hai lớp trên $U(f)$ và tổng Riemann hai lớp dưới $L(P, f)$ xấp xỉ với tích phân Riemann hai lớp dưới $L(f)$.

Kết quả 1.19. (Định lí Darboux cho tích phân Riemann hai lớp trên và tích phân Riemann hai lớp dưới)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho nếu P là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $0 \leq U(P, f) - U(f) < \varepsilon$ và $0 \leq L(f) - L(P, f) < \varepsilon$.

Hơn nữa, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho nếu P là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P .

Chứng minh kết quả 1.19.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$. Từ cách định nghĩa của $U(f)$ và $L(f)$, tồn tại các phân hoạch P_1 và P_2 của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $U(P_1, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ và $L(P_2, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Giả sử P_0 là một phép mịn hóa chung của các phân hoạch P_1 và P_2 .

Khi đó, $U(P_0, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ và $L(P_0, f) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3)

Giả sử $\alpha > 0$ là một số thực dương sao cho $|f(x, y)| \leq \alpha$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Kí hiệu:

n_0 : là số điểm lưới của phân hoạch P_0 nằm trong $[a, b] \times [c, d]$,

$l := 2(b - a + d - c)$ là chu vi của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$,

$\delta := \varepsilon / 2\alpha n_0$.

Giả sử $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $\mu(P) < \delta$. Giả sử P^* là phép mịn hóa chung của P và P_0 .

Khi đó, $U(P^*, f) \leq U(P, f)$ và $U(P^*, f) \leq U(P_0, f)$. (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3)

Nhận thấy rằng những đóng góp vào hiệu $U(P, f) - U(P^*, f)$ chỉ có thể phát sinh khi có một điểm (x^*, y^*) của phân hoạch P_0 nằm trong một hình chữ nhật con $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ gây ra bởi phân hoạch P .

Từ Kết quả 1.2), tổng những đóng góp gây ra bởi việc bổ sung điểm (x^*, y^*) vào $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ tối đa không vượt quá $\alpha\mu(P)$.

Do tổng số điểm của phân hoạch P_0 nằm trong $[a, b] \times [c, d]$ là n_0 nên chúng ta có

$$U(P, f) - U(P^*, f) \leq n_0\alpha\mu(P) < \alpha n_0\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như vậy, nếu P là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$ thì

$$U(P, f) < U(P^*, f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(P_0, f) + \frac{\varepsilon}{2} < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = U(f) + \varepsilon.$$

Lập luận tương tự, nếu P là một phân hoạch bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(P, f) > L(f) - \varepsilon$.

Hơn nữa, nếu $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$ thì $L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon$. $\square$

Kết quả 1.20. (Định Darboux cho tích phân Riemann hai lớp)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, nếu f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ thì, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|S(P, f) - \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y)| < \varepsilon$, với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P .

Ngược lại, giả sử tồn tại một số thực $r \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: “Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch $P \in [a, b] \times [c, d]$ sao cho $|S(P, f) - r| < \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$.”

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d]$ bằng r .

Chứng minh kết quả 1.20.

Giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ Kết quả 1.19), tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon$ với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$.

Do $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) - \varepsilon = L(f) - \varepsilon < S(P, f) < U(f) + \varepsilon = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) + \varepsilon$ nên chúng ta suy ra điều phải chứng minh.

Ngược lại, giả sử tồn tại số thực $r \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$ và $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $|S(P, f) - r| < \varepsilon$, trong đó $S(P, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$.

Nếu $S(P, f)$ và $T(P, f)$ là các tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ thì

$$|S(P, f) - T(P, f)| \leq |S(P, f) - r| + |T(P, f) - r| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.18).

Để chứng minh tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d]$ bằng r , chúng ta lưu ý rằng tồn tại các điểm $(s_i, t_j), (\tilde{s}_i, \tilde{t}_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$) sao cho nếu chúng ta đặt

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(s_i, t_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \text{ và } T(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\tilde{s}_i, \tilde{t}_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

thì $U(P, f) < S(P, f) + \varepsilon$ và $T(P, f) - \varepsilon < L(U, f)$. (xem lại phép chứng minh của Kết quả 1.18)

Do $L(U, f) \leq \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) \leq U(P, f)$ nên

$$r - 2\varepsilon < T(P, f) - \varepsilon < \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) < S(P, f) + \varepsilon < r + 2\varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có giá trị nhỏ tùy ý nên tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d]$ phải bằng r . $\square$

Kết quả 1.21.

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và (P_n) là một dãy các phân hoạch của $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $\mu(P_n) \rightarrow 0$. Khi đó, $S(P_n, f) \rightarrow \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y)$, trong đó $S(P_n, f)$ là một tổng Riemann hai lớp bất kì của f tương ứng với phân hoạch P_n .

Chứng minh kết quả 1.21.

Kí hiệu $I(f)$ là tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ Kết quả 1.20), tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|S(P, f) - I(f)| < \varepsilon$ với mọi phân hoạch P của $[a, b] \times [c, d]$ với $\mu(P) < \delta$. Do $\mu(P_n) \rightarrow 0$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\mu(P_n) < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $|S(P_n, f) - I(f)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$, nên $S(P_n, f) \rightarrow I(f)$. $\square$

2. Tích phân hai lớp trên các tập bị chặn.

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ ra cách để mở rộng các kết quả lý thuyết về tích phân hai lớp trên các hình chữ nhật đã được phát triển trong mục 1) cho các tích phân hai lớp trên một tập con bị chặn D bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$.

Ý tưởng ở đây của chúng ta là sẽ mở rộng hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ lên thành một hàm $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $D \subseteq R$ với R là một hình chữ nhật nào đó như sau:

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Xét một hình chữ nhật $R := [a, b] \times [c, d]$ sao cho $D \subseteq R$ và hàm $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f^*(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Hàm f được gọi là **khả tích Riemann trên D** nếu f^* là một hàm khả tích Riemann trên R và **tích phân Riemann của hàm f trên D** được định nghĩa bằng tích phân Riemann của hàm f^* trên R , nghĩa là

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) := \iint_R f^*(x, y) d(x, y)$$

Mặc dù có đôi chút khác biệt trong cách chúng ta định nghĩa khái niệm tích phân Riemann trên một tập bị chặn D so với cách chúng ta định nghĩa khái niệm tích phân Riemann trên một hình chữ nhật R như ở mục 1).

Tuy nhiên, chúng ta có thể chứng minh được tích khả tích của hàm f trên D và giá trị của tích phân Riemann hai lớp $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ hoàn toàn không phụ thuộc vào cách chọn hình chữ nhật R nêu trong định nghĩa ở trên.

Kí hiệu:

$$a_1 := \inf\{x \in \mathbb{R}: (x, y) \in D \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}\},$$

$$b_1 := \sup\{x \in \mathbb{R}: (x, y) \in D \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}\},$$

$$c_1 := \inf\{y \in \mathbb{R}: (x, y) \in D \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\},$$

$$d_1 := \sup\{y \in \mathbb{R}: (x, y) \in D \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\}.$$

Xét hình chữ nhật $R_1 := [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$. Hiển nhiên, R_1 được xác định duy nhất từ tập bị chặn D .

Giả sử $R = [a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mở rộng của $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó, $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ và $c \leq c_1 \leq d_1 \leq d$, nghĩa là $R_1 \subseteq R$.

Để chứng minh tính đúng đắn của cách định nghĩa trên, chúng ta sẽ chứng minh rằng f^* là một hàm khả tích Riemann trên R khi và chỉ khi $f_1^* := f|_{R_1}^*$ là một hàm khả tích Riemann trên R_1 .

$$\text{Hơn nữa, } \iint_R f^*(x, y) d(x, y) = \iint_{R_1} f_1^*(x, y) d(x, y).$$

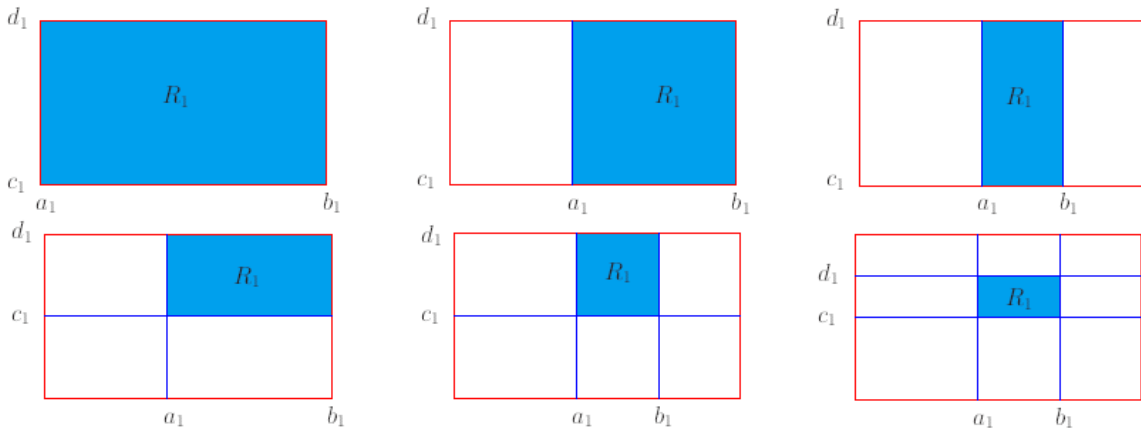
Trường hợp 1. $a_1 = b_1$ hoặc $c_1 = d_1$.

Khi đó, $f^*(x, y) = 0$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ngoại trừ trường hợp $x = a_1$ hoặc $y = c_1$. Hiển nhiên, f^* là một hàm khả tích Riemann trên R và $\iint_R f^*(x, y)d(x, y) = 0$. Đồng thời, f_1^* cũng là một hàm khả tích Riemann trên R_1 và $\iint_{R_1} f_1^*(x, y)d(x, y) = 0$.

Trường hợp 2. $a_1 < b_1$ và $c_1 < d_1$.

Nếu $R_1 = R$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử hình chữ nhật R_1 chia hình chữ nhật R thành p hình chữ nhật con khác nhau trong đó $p = 2, 3, 4, 6$ hoặc 9 phụ thuộc vào việc $a = a_1, b = b_1, c = c_1, d = d_1$. Hiển nhiên, R_1 là một trong p hình chữ nhật con này.



Hình vẽ minh họa.

Từ Kết quả 1.6), f^* khả tích Riemann trên R khi và chỉ khi f^* khả tích Riemann trên mỗi hình chữ nhật con này và tích phân Riemann của f^* trên R bằng tổng các tích phân Riemann của f^* trên các hình chữ nhật con này. Giả sử R_2 là một hình chữ nhật con nào đó của R khác R_1 . Khi đó, $f^*(x, y) = 0$, với mọi $(x, y) \in R_2$ ngoại trừ các điểm nằm trên biên của hình chữ nhật R_2 . Như vậy, f^* khả tích Riemann trên R_2 và tích phân Riemann của f trên R_2 bằng 0. Điều này chứng minh tính đúng đắn của định nghĩa tích phân nêu ở trên. $\square$

Tiếp theo, chúng ta sẽ khảo sát các tính chất đại số và thứ tự của các tích phân Riemann hai lớp trên các tập bị chặn bất kì (xem lại phép chứng minh của các Kết quả 1.9) và 1.10):

Kết quả 2.1.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann. Khi đó:

i) $f + g$ là một hàm khả tích Riemann trên D và $\iint_D (f + g) = \iint_D f + \iint_D g$.

ii) rf là một hàm khả tích Riemann trên D với mọi $r \in \mathbb{R}$ và $\iint_D (rf) = r \iint_D f$.

iii) fg là một hàm khả tích Riemann trên D .

iv) nếu tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y)| \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in D$ thì $1/f$ là một hàm khả tích Riemann trên D .

v) nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì $f^{\frac{1}{k}}$ là một hàm khả tích Riemann trên D với mọi $k \in \mathbb{N}$.

vi) nếu $f \leq g$ trên D thì $\iint_D f \leq \iint_D g$.

vii) hàm $|f|$ khả tích Riemann trên D và $\left| \iint_D f \right| \leq \iint_D |f|$.

Chứng minh kết quả 2.1.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và $f^*, g^*, (f+g)^*, (rf)^*, (fg)^*$ lần lượt là các hàm mở rộng của $f, g, f+g, rf, fg$ lên R bằng cách đặt các hàm $f^*, g^*, (f+g)^*, (rf)^*, (fg)^*$ bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Hiển nhiên, $(f+g)^* = f^* + g^*, (rf)^* = rf^*, (fg)^* = f^*g^*$ trên R .

Khi đó, các khẳng định (i), (ii), (iii) của Kết quả 2.1) là hệ quả trực tiếp của Kết quả 1.9).

iv) Giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y)| \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in D$ và $h := 1/f$ trên D .

Xét hàm $h^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ thu được bằng cách mở rộng hàm $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ theo cách sau

$$h^*(x, y) := \begin{cases} h(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Phép chứng minh cho khẳng định iv) được sửa đổi lại từ phép chứng minh cho khẳng định iv) của Kết quả 1.9) như sau:

Giả sử $P := \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của hình chữ nhật R .

Nhận thấy rằng, với mỗi $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ và $(x, y), (u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$,

$$h^*(x, y) - h^*(u, v) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Thật vậy, chúng ta sẽ xét bốn trường hợp có thể xảy ra sau đây:

Trường hợp 1. $(x, y) \in D$ và $(u, v) \in D$.

Khi đó, $f^*(x, y) = f(x, y) \leq M_{i,j}(f^*)$ và $f^*(u, v) = f(u, v) \geq m_{i,j}(f^*)$, nên

$$h^*(x, y) - h^*(u, v) = \frac{f(u,v) - f(x,y)}{f(x,y)f(u,v)} \leq \frac{|f(u,v) - f(x,y)|}{|f(x,y)||f(u,v)|} \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Trường hợp 2. $(x, y) \notin D$ và $(u, v) \notin D$.

Khi đó, $h^*(x, y) = h^*(u, v) = 0$ và $M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*) \geq 0$, nên

$$h^*(x, y) - h^*(u, v) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Trường hợp 3. $(x, y) \in D$ và $(u, v) \notin D$.

Khi đó, $h^*(x, y) - h^*(u, v) = 1/f(x, y)$.

Nếu $f(x, y) < 0$ thì $h^*(x, y) - h^*(u, v) = 1/f(x, y) < 0 \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)]$.

Nếu $f(x, y) > 0$ thì $f(x, y) \geq \delta$, nên $M_{i,j}(f^*) \geq \delta$. Hơn nữa, do $(u, v) \notin D$ nên $m_{i,j}(f^*) \leq 0$.

Như vậy,

$$h^*(x, y) - h^*(u, v) \leq \frac{1}{\delta} \leq \frac{M_{i,j}(f^*)}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Trường hợp 4. $(x, y) \notin D$ và $(u, v) \in D$.

Khi đó, $h^*(x, y) - h^*(u, v) = -1/f(u, v)$.

Nếu $f(u, v) > 0$ thì $h^*(x, y) - h^*(u, v) = -1/f(u, v) < 0 \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)]$.

Nếu $f(u, v) < 0$ thì $f(u, v) \leq -\delta$, nên $m_{i,j}(f^*) \leq -\delta$. Hơn nữa, do $(x, y) \notin D$ nên $M_{i,j}(f^*) \geq 0$.

Như vậy,

$$h^*(x, y) - h^*(u, v) \leq \frac{1}{\delta} \leq -\frac{m_{i,j}(f^*)}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Phần tiếp theo của phép chứng minh được thực hiện tương tự như phép chứng minh của khẳng định (iv) của Kết quả 1.9):

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và infimum $(u, v) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, chúng ta thu được

$$M_{i,j}(h^*) - m_{i,j}(h^*) \leq \frac{1}{\delta^2} [M_{i,j}(f^*) - m_{i,j}(f^*)].$$

Bằng cách nhân cả hai vế đánh giá trên với $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ và lấy tổng hai lớp từ $i = 1$ đến $i = n$ và từ $j = 1$ đến $j = n$, chúng ta thu được

$$U(P, h^*) - L(P, h^*) \leq \frac{1}{\delta^2} [U(P, f^*) - L(P, f^*)].$$

Do f^* khả tích Riemann trên R nên h^* cũng sẽ khả tích Riemann trên R . Nói cách khác, h là một hàm khả tích Riemann trên D .

Phép chứng minh cho khẳng định (v) có thể được suy ra từ khẳng định (v) của Kết quả 1.9) bằng cách nhận xét rằng nếu $f \geq 0$ trên D thì $f^* \geq 0$ trên R và $(f^{\frac{1}{k}})^* = (f^*)^{\frac{1}{k}}$.

Phép chứng minh cho các khẳng định (vi) và (vii) có thể được suy ra từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.10) bằng cách nhận xét rằng nếu $f \leq g$ trên D thì $f^* \leq g^*$ và $|f|^* = |f^*|$. □

Nhận xét rằng không có cách nào đơn giản để có thể biểu diễn tích phân Riemann của hàm fg theo tích phân Riemann của f và g . Nếu chúng ta muốn có được một dạng biểu diễn như vậy thì một điều tất yếu là chúng ta buộc phải bổ sung thêm một số điều kiện phụ cho các hàm f và g . Phương pháp biểu diễn sẽ được trình bày chi tiết hơn trong một bài viết khác.

Với cách kí hiệu và các giả thiết nêu ở trên, chúng ta có thể chứng minh được rằng hàm $(f - g)$ cũng là một khả tích Riemann trên D và $\iint_D (f - g) = \iint_D f - \iint_D g$ (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.1). Hơn nữa, với mọi $n \in \mathbb{N}$, f^n là một hàm khả tích Riemann trên D (điều này suy ra từ việc áp dụng liên tiếp khẳng định (iii) của Kết quả 2.1). Tương tự, nếu tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|g(x, y)| \geq \delta$ với mọi $(x, y) \in D$ thì f/g cũng là một hàm khả tích Riemann trên D (điều này suy ra từ sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (iv)). Đồng thời, nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì, với mọi $r \in \mathbb{Q}_+$, f^r là một hàm khả tích Riemann trên D (điều này suy ra từ việc mọi số hữu tỉ dương $r \in \mathbb{Q}_+$ đều biểu diễn được dưới dạng $r = n/k$ với $n, k \in \mathbb{N}$ và sự kết hợp của các khẳng định (iii) và (v)).

Từ Kết quả 2.1), tính khả tích Riemann được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ tương tự như việc tính liên tục và tính khả vi được bảo toàn qua các toán tử $+$, $-$, $\cdot$, $/$ đã được biết đến từ trước. Tuy nhiên, phép hợp thành của hai hàm khả tích Riemann không nhất thiết phải là một hàm khả tích Riemann trong khi phép hợp thành của hai hàm liên tục (hoặc hai hàm khả vi) thì luôn là một hàm liên tục (hoặc hàm khả vi).

Nhận thấy rằng mọi hàm số $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ đều có thể biểu diễn lại dưới dạng $f = f^+ - f^-$, trong đó

$f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ và $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ là các hàm số không âm xác định trên D bởi công thức $f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$ và $f^-(x, y) = -\min\{f(x, y), 0\}$ với mọi $(x, y) \in D$. Các hàm f^+ và f^- lần lượt được gọi là **phần dương** và **phần âm** của hàm f . Từ khẳng định (i), (ii) và (vii) của Kết quả 2.1), hàm f sẽ khả tích Riemann khi và chỉ khi f^+ và f^- đều là các hàm khả tích Riemann trên D và

$$\iint_D f = \iint_D f^+ - \iint_D f^- \quad \text{và} \quad \iint_D |f| = \iint_D f^+ + \iint_D f^-.$$

Tính chất này đóng một vai trò quan trọng trong quá trình mở rộng từ khái niệm tích phân Riemann lên tích phân Lebègue (dạng khái quát thông dụng nhất của tích phân Riemann trong các vấn đề về khoa học – kỹ thuật).

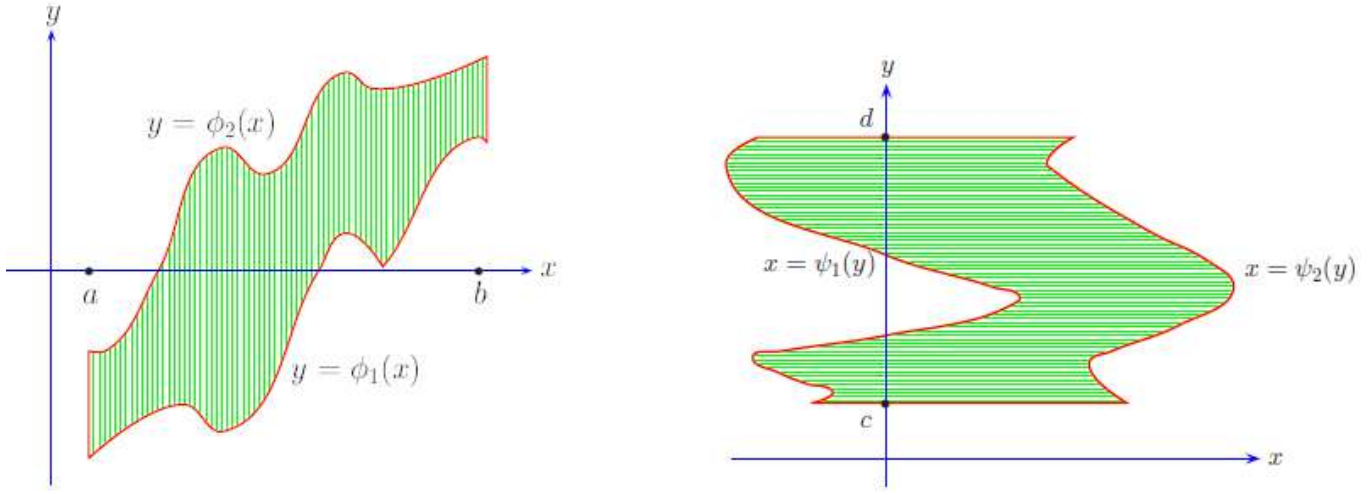
Định lí Fubini trên các miền sơ cấp

Trong mục 1), chúng ta đã giới thiệu định lí Fubini để tính toán tích phân hai lớp trên các hình chữ nhật bằng cách chuyển nó thành một tích phân lặp. Trong mục 2), chúng ta sẽ mở rộng phương pháp tính toán nêu trên để áp dụng cho một số tập bị chặn đặc biệt thường gặp trong ứng dụng.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$. D được gọi là một **miền sơ cấp** nếu tồn tại các hàm khả tích Riemann $\phi_1, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\phi_1 \leq \phi_2$ và $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$

hoặc tồn tại các hàm khả tích Riemann $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\psi_1 \leq \psi_2$ và $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \text{ và } c \leq y \leq d\}$.

Nói một cách nôm na, D được gọi là một miền sơ cấp nếu tồn tại các số thực $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi $x \in [a, b]$, lát cắt dọc của D tại x là một khoảng đóng và bị chặn hoặc tồn tại các số thực $c, d \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi $y \in [c, d]$, lát cắt ngang của D tại y là một khoảng đóng và bị chặn.



Hình ảnh minh họa các miền sơ cấp.

Kết quả 2.2. (Định lí Fubini trên các miền sơ cấp)

Giả sử D là một miền sơ cấp nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann. Khi đó:

i) Nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ trong đó $\phi_1, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann sao cho $\phi_1 \leq \phi_2$ và, với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ thì

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

ii) Nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \text{ và } c \leq y \leq d\}$ trong đó $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann sao cho $\psi_1 \leq \psi_2$ và, với mọi $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx$ thì

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Chứng minh kết quả 2.2.

i) Giả sử $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, $\phi_1, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann. Hơn nữa, với mọi $x \in [a, b]$, tích phân Riemann $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ tồn tại.

Nếu chúng ta kí hiệu $c := \inf\{\phi_1(x): x \in [a, b]\}$ và $d := \sup\{\phi_2(x): x \in [a, b]\}$ thì $c \leq d$.

Xét hình chữ nhật $R := [a, b] \times [c, d]$ và, với mỗi $x \in [a, b]$, hàm $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f^*(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)], \\ 0, & \text{nếu } y \in [c, \phi_1(x)) \cup (\phi_2(x), d]. \end{cases}$$

Từ tính chất cộng miền của tích phân Riemann cho các hàm một biến, với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_c^d f^*(x, y) dy$ và

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\phi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\phi_2(x)}^d f^*(x, y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) dy.$$

Áp dụng định lí Fubini trên các hình chữ nhật cho f^* ,

$$\begin{aligned}\iint_R f^*(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx \\ \Rightarrow \iint_R f^*(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) dy \right) dx. \\ \Rightarrow \iint_D f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) dy \right) dx\end{aligned}$$

ii) Phép chứng minh được thực hiện tương tự như trong khẳng định (i) của Kết quả 2.2). □

Tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^2$.

Nhắc lại rằng tập bị chặn $C \in \mathbb{R}$ được gọi là một **tập có độ đo bằng không** nếu, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập hữu hạn các khoảng con đóng phủ kín tập C và tổng độ dài của chúng nhỏ hơn ε .

Ta có thể chứng minh được kết quả sau:

“Nếu tập các điểm gián đoạn của một hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là không quá đếm được thì f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.”

(xem lại phép chứng minh Kết quả 2.2 trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann hàm một biến**”)

Tổng quát hơn, chúng ta cũng có thể chứng minh được:

“Nếu tập các điểm gián đoạn của một hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một tập có độ đo bằng không thì f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.”

Bây giờ, chúng ta sẽ giới thiệu một dạng tương tự của khái niệm tập có độ đo bằng không cho các tập con của $\mathbb{R}^2$:

Tập bị chặn $E \in \mathbb{R}^2$ được gọi là một **tập có độ đo bằng không** nếu, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập hữu hạn các hình chữ nhật đóng phủ kín tập E và tổng diện tích của chúng nhỏ hơn ε .

Đầu tiên, chúng ta sẽ liệt kê một số tính chất cơ bản của các tập con có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^2$:

Kết quả 2.3.

Giả sử E là một tập con trong $\mathbb{R}^2$. Khi đó:

- i) Nếu E là một tập có độ đo bằng không thì mọi tập con của E cũng là một tập có độ đo bằng không.
- ii) Nếu E là hợp hữu hạn của các tập có độ đo bằng không thì E cũng là một tập có độ đo bằng không.
- iii) Nếu E là một tập có độ đo bằng không thì bao đóng $\bar{E}$ cũng là một tập có độ đo bằng không.
- iv) E là một tập có độ đo bằng không khi và chỉ khi E không có chứa điểm trong và biên ∂E là một tập có độ đo bằng không.
- v) Nếu $E = C \times D$ với $C \subseteq \mathbb{R}$ là một tập có độ đo bằng không và $D \subseteq \mathbb{R}$ là một tập bị chặn thì E là cũng một tập có độ đo bằng không.

Chứng minh kết quả 2.3.

Khẳng định i) và ii) là các hệ quả đơn giản có thể được suy ra trực tiếp từ định nghĩa về một tập có độ đo bằng không.

iii) Nhận thấy rằng các hình chữ nhật con đóng đều là các tập đóng trong $\mathbb{R}^2$ nên E được chứa trong hợp hữu hạn của các hình chữ nhật đóng nào đó thì $\bar{E}$ cũng được chứa trong hợp hữu hạn này. Điều này chỉ ra rằng nếu E là một tập có độ đo bằng không thì bao đóng $\bar{E}$ của nó cũng là một tập có độ đo bằng không

iv) Giả sử E là một tập có độ đo bằng không. Khi đó, $\bar{E}$ cũng là một tập có độ đo bằng không.

Do $\bar{E} = E \cup \partial E$ nên ∂E cũng là một tập có độ đo bằng không (điều này suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 2.3). Hơn nữa, nếu (x_0, y_0) là một điểm trong của E thì tồn tại một hình chữ nhật đóng R sao cho $(x_0, y_0) \in R \subseteq E$. Nếu chúng ta chọn số thực dương $\varepsilon > 0$ có giá trị nhỏ hơn diện tích của hình chữ nhật R thì chúng ta không thể phủ E bởi một hợp hữu hạn các hình chữ nhật có tổng diện tích nhỏ hơn ε . Như vậy, E không có chứa điểm trong.

Ngược lại, giả sử E không có chứa điểm trong và biên ∂E là một tập có độ đo bằng không. Do mọi điểm của E hoặc là một điểm trong của E hoặc là một điểm biên của E nên $E \subseteq \partial E$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.3), E là một tập có độ đo bằng không.

v) Giả sử $E = C \times D$ với $C \subseteq \mathbb{R}$ là một tập có độ đo bằng không và $D \subseteq \mathbb{R}$ là một tập bị chặn.

Khi đó, tồn tại các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ sao cho $D \subseteq [\alpha, \beta]$.

Giả sử cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại các đoạn con đóng $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ sao cho hợp của chúng chứa C và tổng độ dài của chúng nhỏ hơn $\varepsilon/(\beta - \alpha)$.

Khi đó, hợp của các hình chữ nhật $[a_1, b_1] \times [\alpha, \beta], \dots, [a_n, b_n] \times [\alpha, \beta]$ sẽ phủ kín E và tổng diện tích các hình chữ nhật này sẽ nhỏ hơn ε , nghĩa là E là một tập có độ đo bằng không. $\square$

Kết quả 2.4.

Giả sử E_1 và E_2 là các tập con của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂E_1 và ∂E_2 là các tập có độ đo bằng không.

Khi đó, $\partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2), \partial(E_1/E_2)$ là các tập có độ đo bằng không.

Chứng minh kết quả 2.4.

Nhận thấy rằng $\partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2), \partial(E_1/E_2)$ đều là các tập con của $\partial E_1 \cup \partial E_2$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.3), $\partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2), \partial(E_1/E_2)$ sẽ là các tập có độ đo bằng không. $\square$

Sau đây, chúng ta sẽ trình bày một dạng mở rộng của Kết quả 2.2) trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**” cho các hàm hai biến:

Kết quả 2.5.

Giả sử R là một hình chữ nhật đóng trong $\mathbb{R}^2$ và $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Khi đó, nếu tập các điểm gián đoạn của một hàm $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ là một tập có độ đo bằng không thì f là một hàm khả tích Riemann trên R .

Chứng minh kết quả 2.5.

Kí hiệu E là tập các điểm gián đoạn của f . Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Do E là một tập có độ đo bằng không nên tồn tại các hình chữ nhật $R_1, \dots, R_m$ sao cho $E \subseteq \bigcup_{i=1}^m R_i$ và $\sum_{i=1}^m A(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

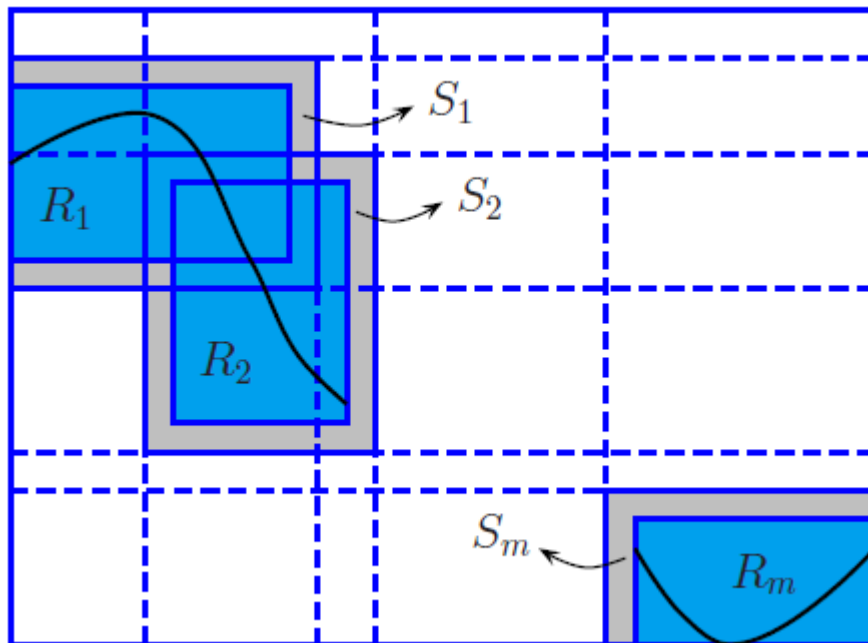
Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử các hình chữ nhật $R_1, \dots, R_m$ đều được chứa trong hình chữ nhật R .

Đầu tiên, với mỗi $i = 1, \dots, m$, nếu chúng ta phóng to các hình chữ nhật R_i theo tất cả các cạnh của nó (ngoại trừ các cạnh của R_i có nằm trên một cạnh của hình chữ nhật R) thì chúng ta có thể nhận được các hình chữ nhật $S_1, \dots, S_m$ sao cho

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^m R_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m S_i \subseteq R \text{ và } \sum_{i=1}^m A(S_i) < \varepsilon.$$

Sau đó, chúng ta mở rộng tất cả các cạnh của các hình chữ nhật $S_1, \dots, S_m$ cho đến khi có giao với các cạnh của hình chữ nhật R .

Phép xây dựng này tạo ra một phân hoạch P_ε của P sao cho mỗi hình chữ nhật con cảm sinh bởi phân hoạch P_ε hoặc được chứa trong hợp $\bigcup_{i=1}^m S_i$ của các hình chữ nhật S_i hoặc bị tách khỏi hợp $\bigcup_{i=1}^m R_i$ của các hình chữ nhật R_i .



Hình ảnh minh họa.

Do tổng diện tích của các hình chữ nhật cảm sinh bởi phân hoạch P_ε có giao với E sẽ nhỏ hơn hoặc bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật $S_1, \dots, S_m$, nên tổng diện tích này sẽ nhỏ hơn ε .

Kí hiệu D_0 là hợp của tất cả các hình chữ nhật cảm sinh bởi phân hoạch P_ε không có giao với E .

Khi đó, f là một hàm liên tục trên E .

Do E là một tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ nên f là một hàm liên tục đều trên D_0 , nghĩa là tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y), (u, v) \in D_0, |x - u| \text{ và } |y - v| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon.$$

Giả sử $P_\varepsilon^* := \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phép mịn hóa của P_ε sao cho $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ ($i = 1, \dots, n$) và $|y_j - y_{j-1}| < \delta$ ($j = 1, \dots, k$).

Ta sẽ sử dụng phân hoạch P_ε^* để chứng minh hàm f thỏa mãn điều kiện Riemann.

Nhắc lại rằng, với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, các hình chữ nhật $R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ cảm sinh bởi phân hoạch P_ε^* có thể được chia thành hai loại khác nhau tùy thuộc vào việc chúng có giao với tập E hay không.

Kí hiệu $\Lambda := \{(i, j) : i = 1, \dots, n \text{ và } j = 1, \dots, k\}$ là hợp của hai tập rời nhau Λ_1 và Λ_2 , với

$$\Lambda_1 := \{(i, j) \in \Lambda : R_{i,j} \cap E = \emptyset\} \text{ và } \Lambda_2 := \{(i, j) \in \Lambda : R_{i,j} \cap E \neq \emptyset\}.$$

Hiển nhiên, $\bigcup_{(i,j) \in \Lambda_1} R_{i,j} \subseteq D_0$.

Do f là một hàm liên tục đều trên D_0 nên, với mọi $(i, j) \in \Lambda_1$,

$$f(x, y) - f(u, v) < \varepsilon, \text{ với mọi } (x, y), (u, v) \in R_{i,j}.$$

Bằng cách lấy supremum $(x, y) \in R_{i,j}$ và infimum $(u, v) \in R_{i,j}$, chúng ta thu được

$$M_{ij}(f) - m_{ij}(f) \leq \varepsilon, \text{ với mọi } (i, j) \in \Lambda_1.$$

Mặt khác, do f là một hàm bị chặn trên R nên tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $-\alpha \leq f(x, y) \leq \alpha$ với mọi $(x, y) \in R$.

Như vậy, $M_{ij}(f) \leq \alpha$ và $m_{ij}(f) \geq -\alpha$, với mọi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, nên

$$M_{ij}(f) - m_{ij}(f) \leq 2\alpha \text{ với mọi } (i, j) \in \Lambda_2.$$

Nhắc lại rằng $\sum_{(i,j) \in \Lambda_2} A(R_{i,j}) < \varepsilon$, nên

$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon^*, f) - L(P_\varepsilon^*, f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [M_{ij}(f) - m_{ij}(f)] (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leq \varepsilon(b - a)(d - c) + 2\alpha\varepsilon \\ &= [(b - a)(d - c) + 2\alpha]\varepsilon. \end{aligned}$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có giá trị nhỏ tùy ý nên f là một hàm khả tích Riemann trên R . □

Tiếp theo, chúng ta sẽ giới thiệu một dạng mở rộng của Kết quả 2.5) cho các tập con bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ có biên đủ mỏng, nghĩa là tập biên của nó là một tập có độ đo bằng không:

Kết quả 2.6.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Khi đó:

- i) Nếu ∂D có độ đo bằng không và tập các điểm gián đoạn của f cũng có độ đo bằng không thì f là một hàm khả tích Riemann trên D .
- ii) Nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một liên tục và biên ∂D có độ đo bằng không thì f khả tích Riemann trên D .
- iii) Nếu D là một tập có độ đo bằng không thì mọi hàm f bị chặn trên D đều khả tích Riemann và $\iint_D f = 0$.

Chứng minh kết quả 2.6.

i) Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và f^* là hàm mở rộng của f lên R bằng cách đặt hàm f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Kí hiệu E và E^* lần lượt là tập các điểm gián đoạn của hàm f và f^* . Nhận thấy rằng do $E^* \subseteq E \cup \partial D$ nên nếu E và ∂D là các tập có độ đo bằng không thì E^* cũng là một tập có độ đo bằng không (điều này suy ra từ khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.3)). Từ Kết quả 2.5), f^* là một hàm khả tích Riemann trên R , nên f là một hàm khả tích Riemann trên D .

ii) Nếu f là một hàm liên tục trên D thì E là một tập rỗng, nên f khả tích Riemann trên D .

iii) Giả sử D là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và f^* là hàm mở rộng của f lên R bằng cách đặt hàm f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Do D là một tập có độ đo bằng không nên tồn tại một phân hoạch P_ε của R sao cho tổng diện tích các hình chữ nhật cảm sinh bởi P_ε có giao với D nhỏ hơn ε (xem lại phép chứng minh của Kết quả 2.5). Đồng thời, do hàm f^* triệt tiêu trên các hình chữ nhật cảm sinh còn lại nên

$$-\alpha\varepsilon < L(P_\varepsilon, f^*) < U(P_\varepsilon, f^*) < \alpha\varepsilon, \text{ với } \alpha = \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên f^* khả tích Riemann trên R và $\iint_R f^* = 0$, nghĩa là f là một hàm khả tích Riemann trên D và $\iint_D f = \iint_R f^* = 0$. □

Kết quả 2.7.

Giả sử D là một miền sơ cấp nằm trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

trong đó $\phi_1, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của ϕ_1 cũng như của ϕ_2 đều có độ đo bằng không. Khi đó, ∂D là một tập có độ đo bằng không.

Hơn nữa, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f có độ đo bằng không thì f khả tích Riemann trên D .

Nếu, với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ thì

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Chứng minh kết quả 2.7.

Kí hiệu C_1 và C_2 lần lượt là tập các điểm gián đoạn của ϕ_1 và ϕ_2 . Do C_1 và C_2 là các tập có độ đo bằng không nên ϕ_1 và ϕ_2 là các hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$.

Như vậy, đồ thị của ϕ_1 và ϕ_2 cũng là các tập có độ đo bằng không, nghĩa là

$E_1 := \{(x, \phi_1(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$ và $E_2 := \{(x, \phi_2(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$ là các tập có độ đo bằng không.

Tiếp theo, do ϕ_1, ϕ_2 là các hàm bị chặn và $\phi_1 \leq \phi_2$ nên tồn tại các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ sao cho $\alpha \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \beta$ với mọi $x \in [a, b]$.

Như vậy, $D \subseteq R$, với $R := [a, b] \times [\alpha, \beta]$.

Kí hiệu $E_3 := \{(x, y) \in R : x = a \text{ hoặc } x = b\}$ và $E_4 := \{(x, y) \in R : \phi_1 \text{ hoặc } \phi_2 \text{ không liên tục tại } x\}$.

Khi đó, E_3 là hợp của hai đoạn thẳng và $E_4 \subseteq (C_1 \times [\alpha, \beta]) \cup (C_2 \times [\alpha, \beta])$.

Từ khẳng định (ii) và (v) của Kết quả 2.3), E_3 và E_4 là các tập có độ đo bằng không.

Như vậy, để chứng minh ∂D là một tập có độ đo bằng không, chúng ta chỉ cần chứng minh hợp của bốn tập E_1, E_2, E_3, E_4 phủ kín ∂D .

Giả sử $(u, v) \in \partial D$. Khi đó, tồn tại một dãy các điểm $((u_n, v_n))$ nằm trong D sao cho $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$.

Do $a \leq u_n \leq b$ và $\phi_1(u_n) \leq v_n \leq \phi_2(u_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, nên $a \leq u \leq b$ và $\alpha \leq v \leq \beta$.

Nhận thấy rằng nếu $u = a$ hoặc $u = b$ thì $(u, v) \in E_3$ và nếu ϕ_1 hoặc ϕ_2 không liên tục tại u thì $(u, v) \in E_4$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $a < u < b$ và ϕ_1, ϕ_2 đều liên tục tại u .

Khi đó, $\phi_1(u_n) \rightarrow \phi_1(u)$ và $\phi_2(u_n) \rightarrow \phi_2(u)$, nên $\phi_1(u) < v < \phi_2(u)$.

Nhận thấy rằng nếu $v = \phi_1(u)$ (hoặc $v = \phi_2(u)$) thì $(u, v) \in E_1$ (hoặc $(u, v) \in E_2$).

Giả sử $a < u < b$, $\phi_1(u) < v < \phi_2(u)$ và ϕ_1, ϕ_2 đều liên tục tại u .

Kí hiệu $\varepsilon := \min\{(v - \phi_1(u))/2, (\phi_2(u) - v)/2\}$.

Khi đó, tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $(u - \delta, u + \delta) \subseteq [a, b]$ và

$$x \in (u - \delta, u + \delta) \Rightarrow |\phi_1(x) - \phi_1(u)| < \varepsilon \text{ và } |\phi_2(x) - \phi_2(u)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x \in (u - \delta, u + \delta) \Rightarrow \phi_1(x) < \phi_1(u) + \varepsilon \leq v - \varepsilon \leq v + \varepsilon \leq \phi_2(u) - \varepsilon < \phi_2(x).$$

Do đó, $(u - \delta, u + \delta) \times (v - \varepsilon, v + \varepsilon) \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$.

Nói cách khác, (u, v) là một điểm trong của D . Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(u, v) \in \partial D$.

Như vậy, hợp của bốn tập E_1, E_2, E_3, E_4 phủ kín ∂D .

Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.6), f khả tích Riemann trên D .

Nếu, với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$.

Từ Kết quả 2.2), $\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$. □

Kết quả 2.8.

Giả sử D là một miền sơ cấp nằm trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \text{ và } c \leq y \leq d\}$$

trong đó $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của ψ_1 cũng như của ψ_2 đều có độ đo bằng không. Khi đó, ∂D là một tập có độ đo bằng không.

Hơn nữa, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f có độ đo bằng không thì f khả tích Riemann trên D .

Nếu, với mỗi $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân Riemann $\int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx$ thì

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Chứng minh kết quả 2.8.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như Kết quả 2.7). □

Tập đo được trong $\mathbb{R}^2$.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$. D được gọi là **đo được** nếu hàm $1_D: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $1_D(x, y) := 1$ với mọi $(x, y) \in D$ khả tích Riemann trên D .

Diện tích $A(D)$ của miền D được xác định bởi công thức $A(D) := \iint_D 1_D(x, y) d(x, y)$.

Kết quả 2.9.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$.

Khi đó, D là một tập đo được $\Leftrightarrow \partial D$ là một tập có độ đo bằng không.

Hơn nữa, D là một tập đo được và $A(D) = 0 \Leftrightarrow D$ là một tập có độ đo bằng không.

Chứng minh kết quả 2.9.

Giả sử ∂D là một tập có độ đo bằng không. Do 1_D là một hàm liên tục trên D nên 1_D là một hàm khả tích Riemann trên D (điều này suy ra từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.6), nghĩa là D là một tập đo được.

Ngược lại, giả sử D là một tập đo được, nghĩa là $1_D: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann trên D .

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và 1_D^* là hàm mở rộng của 1_D lên R bằng cách đặt hàm 1_D^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D , nghĩa là

$$1_D^*(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$.

Từ điều kiện Riemann, tồn tại một phân hoạch $P := \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của R sao cho

$$U(P, 1_D^*) - L(P, 1_D^*) \leq \varepsilon/2.$$

Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, kí hiệu $R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ là hình chữ nhật thứ (i, j) cảm sinh bởi phân hoạch P .

Khi đó,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [M_{i,j}(1_D^*) - m_{i,j}(1_D^*)] A(R_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Nhận thấy rằng } M_{i,j}(1_D^*) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } R_{i,j} \cap D \neq \emptyset \\ 0, & \text{nếu } R_{i,j} \cap D = \emptyset \end{cases} \text{ và } m_{i,j}(1_D^*) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } R_{i,j} \not\subseteq D \\ 0, & \text{nếu } R_{i,j} \subseteq D. \end{cases}$$

Kí hiệu $R_1, \dots, R_p$ là các hình chữ nhật con nào đó trong số các hình chữ nhật $R_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$) sao cho $R_{i,j} \cap D \neq \emptyset$ và $R_{i,j} \not\subseteq D$.

$$\text{N như vậy, } \sum_{l=1}^p A(R_l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kí hiệu E là hợp của các biên $\partial R_{i,j}$ của các hình chữ nhật $R_{i,j}$ ($i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$). Do mọi đoạn thẳng đều là một tập có độ đo bằng không và hợp hữu hạn của các tập có độ đo bằng không cũng là một tập có độ đo bằng không nên E là một tập có độ đo bằng không.

Khi đó, tồn tại các hình chữ nhật $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_q$ sao cho hợp của $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_q$ phủ kín E và $\sum_{l=1}^q A(\widetilde{R}_l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ta sẽ chứng minh rằng ∂D được chứa trong hợp của các hình chữ nhật $R_1, \dots, R_p, \widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_q$.

Thật vậy, giả sử $(x, y) \in \partial D$. Do R là một hình chữ nhật đóng và $D \subseteq R$ nên $\partial D \subseteq R$, nghĩa là tồn tại các chỉ số i và j sao cho $(x, y) \in R_{i,j}$.

Giả sử (x, y) là một điểm trong của $R_{i,j}$. Từ định nghĩa của tập biên, phần trong của $R_{i,j}$ sẽ chứa một điểm nằm trong D cũng như một điểm không nằm trong D , nghĩa là $R_{i,j} \cap D \neq \emptyset$ và $R_{i,j} \not\subseteq D$. Như vậy, $R_{i,j}$ phải là một trong các hình chữ nhật $R_1, \dots, R_p$.

Mặt khác, nếu $(x, y) \in \partial R_{i,j}$ thì $(x, y) \in E$, nên (x, y) thuộc một trong các hình chữ nhật $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_q$.

$$\text{N như vậy, } \partial D \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_p \cup \widetilde{R}_1 \cup \dots \cup \widetilde{R}_q \text{ và } \sum_{l=1}^p A(R_l) + \sum_{l=1}^q A(\widetilde{R}_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Điều này chỉ ra rằng ∂D là một tập có độ đo bằng không.

Giả sử D là một tập đo được và $A(D) = 0$, nghĩa là hàm 1_D khả tích Riemann trên D và $\iint_D 1_D = 0$.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và 1_D^* là hàm mở rộng của 1_D lên R bằng cách đặt hàm 1_D^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D .

Khi đó, $\inf\{U(P, 1_D^*): P \text{ là một phân hoạch của } R\} = \iint_R 1_D^* = \iint_D 1_D = 0$.

Như vậy, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P_ε của R sao cho $U(P_\varepsilon, 1_D^*) < \varepsilon$.

Kí hiệu $R_1, \dots, R_p$ là các hình chữ nhật con cảm sinh bởi phân hoạch P_ε có giao với D .

Khi đó, $D \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_p$ và $\sum_{l=1}^p A(R_l) = U(P_\varepsilon, 1_D^*) < \varepsilon$, nghĩa là D là một tập có độ đo bằng không.

Ngược lại, giả sử D là một tập có độ đo bằng không.

Như vậy, 1_D là một khả tích Riemann trên D và $\iint_D 1_D = 0$ (điều này suy ra từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.6), nghĩa là D là một tập đo được và $A(D) = 0$. □

Kết quả 2.10.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ với ∂D là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

Khi đó, nếu tồn tại các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta \leq f \leq \alpha$ thì $\beta A(D) \leq \iint_D f(x, y) d(x, y) \leq \alpha A(D)$.

Hơn nữa, nếu $|f| \leq \alpha$ thì $\left| \iint_D f(x, y) d(x, y) \right| \leq \alpha A(D)$.

Chứng minh kết quả 2.10.

Giả sử tồn tại các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta \leq f \leq \alpha$.

Từ Kết quả 2.9), D là một tập đo được, nghĩa là $1_D: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann trên D .

Từ khẳng định (ii) và (vi) của Kết quả 2.1), $\beta A(D) \leq \iint_D f(x, y) d(x, y) \leq \alpha A(D)$.

Giả sử tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|f| \leq \alpha$. Khi đó, $-\alpha \leq f \leq \alpha$.

Như vậy, $-\alpha A(D) \leq \iint_D f(x, y) d(x, y) \leq \alpha A(D)$, nghĩa là $\left| \iint_D f(x, y) d(x, y) \right| \leq \alpha A(D)$. □

Kết quả 2.11.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann.

Khi đó, nếu D_0 là một tập con của D với ∂D_0 là một tập có độ đo bằng không thì f là một hàm khả tích Riemann trên D_0 .

Chứng minh kết quả 2.11.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và f^* là hàm mở rộng của f lên R bằng cách đặt hàm f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Giả sử g là thu hẹp của hàm f trên D_0 . Do $D_0 \subseteq D \subseteq R$ nên chúng ta có thể mở rộng các hàm $g, 1_{D_0}: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lên thành các hàm $g^*, 1_{D_0}^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ bằng cách đặt $g^*, 1_{D_0}^*$ bằng 0 tại các điểm R/D_0 . Nhận thấy rằng do $g^* = f^* \cdot 1_{D_0}^*$ nên để chứng minh g^* là một hàm khả tích Riemann trên R chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng f^* và $1_{D_0}^*$ là các hàm khả tích Riemann trên R .

Thật vậy, do f là một hàm khả tích Riemann trên D nên f^* là một hàm khả tích Riemann trên R . Hơn nữa, do ∂D_0 là một tập có độ đo bằng không nên $1_{D_0}: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann (điều này suy ra từ Kết quả 2.9). Như vậy, $1_{D_0}^*$ cũng là một hàm khả tích Riemann trên R . Từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.1), $g^* = f^* \cdot 1_{D_0}^*$ là một hàm khả tích Riemann trên R , nghĩa là g là một hàm khả tích Riemann trên D_0 . $\square$

Tính chất cộng miền trên các tập bị chặn.

Nhắc lại rằng nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $(s, t) \in [a, b] \times [c, d]$ thì f cũng khả tích Riemann trên các hình chữ nhật $[a, s] \times [c, t]$, $[a, s] \times [t, d]$, $[s, b] \times [c, t]$, $[s, b] \times [t, d]$ và

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,s] \times [c,t]} f + \iint_{[a,s] \times [t,d]} f + \iint_{[s,b] \times [c,t]} f + \iint_{[s,b] \times [t,d]} f.$$

Tổng quát hơn, nếu f khả tích Riemann trên một miền D và D có thể phân tách thành một số “miền con đặc biệt” $D_1, D_2, \dots, D_n$ thì f cũng khả tích Riemann trên các miền con $D_1, D_2, \dots, D_n$ và

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \dots + \iint_{D_n} f.$$

Khẳng định này thường được gọi là **tính chất cộng miền của tích phân**. Trong mục 1), chúng ta đã chứng minh một trường hợp đặc biệt của tính chất này cho các tích phân Riemann trên các hình chữ nhật. Sau đây, chúng ta sẽ chứng minh một số phiên bản tổng quát hơn của khẳng định này cho các tập bị chặn có biên đủ mỏng trong $\mathbb{R}^2$:

Kết quả 2.12.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, D_1, D_2 là các tập con của D sao cho $D = D_1 \cup D_2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn. Khi đó, nếu f là một hàm khả tích Riemann trên $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ thì f cũng là một hàm khả tích Riemann trên D và

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f.$$

Ngược lại, nếu f là một hàm khả tích Riemann trên D và $\partial D_1, \partial D_2$ là các tập có độ đo bằng không thì f cũng khả tích Riemann trên $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$.

Chứng minh kết quả 2.12.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và f^* là hàm mở rộng của f lên R bằng cách đặt hàm f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Giả sử f_1, f_2, g lần lượt là thu hẹp của hàm f trên $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$. Do tất cả các tập $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ đều nằm trong hình chữ nhật R nên chúng ta có thể mở rộng các hàm $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}, g: D_1 \cap D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ lên thành các hàm $f_1^*, f_2^*, g^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ bằng cách đặt f_1^*, f_2^*, g^*

bằng 0 tại các điểm thuộc $R/D_1, R/D_2, R/(D_1 \cap D_2)$. Nhận thấy rằng do $f^* = f_1^* + f_2^* - g^*$ nên nếu f là một hàm khả tích Riemann trên $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ thì f_1^*, f_2^*, g^* sẽ là các hàm khả tích Riemann trên R . Từ khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.1), f^* sẽ là một hàm khả tích Riemann trên R và

$$\begin{aligned}\iint_R f^* &= \iint_R f_1^* + \iint_R f_2^* - \iint_R g^* \\ \Rightarrow \iint_D f &= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f.\end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử f là một hàm khả tích Riemann trên D và $\partial D_1, \partial D_2$ là các tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.4), $\partial(D_1 \cap D_2)$ sẽ là một tập có độ đo bằng không. Từ Kết quả 2.11), f sẽ là một hàm khả tích Riemann trên $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$. $\square$

Kết quả 2.13.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, D_1, D_2 là các tập con của D sao cho $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann trên D_1, D_2 .

Khi đó, f là một hàm khả tích Riemann trên D và

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_{D_1} f(x, y) d(x, y) + \iint_{D_2} f(x, y) d(x, y).$$

Chứng minh kết quả 2.13.

Từ Kết quả 2.6), f là một hàm khả tích Riemann trên $D_1 \cap D_2$ và $\iint_{D_1 \cap D_2} f = 0$. Từ Kết quả 2.12), f cũng là một hàm khả tích Riemann trên $D = D_1 \cup D_2$ và $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$. $\square$

Kết quả 2.14.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho $\{(x, y): g(x, y) \neq f(x, y)\}$ là một tập có độ đo bằng không.

Khi đó, g là một hàm khả tích Riemann trên D và $\iint_D g(x, y) d(x, y) = \iint_D f(x, y) d(x, y)$.

Chứng minh kết quả 2.14.

Kí hiệu $D_1 := \{(x, y) \in D: g(x, y) \neq f(x, y)\}$ và $D_2 := D/D_1$. Xét hàm $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $h := g - f$. Giả sử h_1 và h_2 lần lượt là thu hẹp của hàm h trên D_1 và D_2 . Do h_1 là một hàm bị chặn trên D_1 và D_1 là một tập có độ đo bằng không nên h_1 là một hàm khả tích Riemann trên D_1 và $\iint_{D_1} h_1 = 0$.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và h_2^* là hàm mở rộng của h_2 lên R bằng cách đặt hàm h_2^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D .

Do hàm h_2 triệt tiêu trên D_2 nên hàm h_2^* cũng triệt tiêu trên R .

Như vậy, h_2 khả tích Riemann trên D_2 và $\iint_{D_2} h_2 = 0$.

Hơn nữa, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ là một tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.13), h là một hàm khả tích Riemann trên $D = D_1 \cup D_2$ và

$$\iint_D h = \iint_{D_1} h + \iint_{D_2} h = 0 + 0 = 0.$$

Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1), $g = h + f$ là một hàm khả tích Riemann trên D và

$$\iint_D g = \iint_D h + \iint_D f = \iint_D f.$$

□

Công thức đổi biến cho tích phân hai lớp.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Một vấn đề được đặt ra đó là: “Nếu chúng ta thay đổi các biến x, y thành các biến u, v theo công thức $x = \phi_1(u, v)$ và $y = \phi_2(u, v)$ thì tích phân Riemann hai lớp $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ sẽ được biểu diễn lại theo u, v, ϕ_1, ϕ_2 như thế nào?”

Kí hiệu:

$E := \Phi^{-1}(D)$ là nghịch ảnh của tập D qua phép biến đổi Φ ,

$g: E \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi công thức $g(u, v) := f(\Phi(u, v))$ với mọi $(u, v) \in E$.

Câu hỏi ban đầu có thể được phát biểu lại dưới dạng sau:

Bài toán xác định công thức đổi biến cho hàm hai biến.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann. Giả sử $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một phép biến đổi nào đó sao cho $\Phi(D) = E$. Xác định các điều kiện cần thiết của phép biến đổi Φ để chúng ta có thể biểu diễn lại tích phân Riemann hai lớp $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ theo E, Φ .

(xem lại Kết quả 3.5) trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”)

Bài toán xác định công thức đổi biến cho các hàm một biến là tương đối đơn giản và chúng ta có thể tham khảo trong bài viết “**Phép tính tích phân Riemann cho hàm một biến**”:

Công thức đổi biến cho các hàm một biến.

Giả sử $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann. Giả sử $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ và $\phi'(t)$ với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó, $(f \circ \phi)|\phi'|$ là một hàm khả tích Riemann trên $[\alpha, \beta]$ và $\int_{[a, b]} f = \int_{[\alpha, \beta]} (f \circ \phi)|\phi'|$.

Trong trường hợp hàm hai biến, vấn đề sẽ trở nên khó khăn hơn do hai yếu tố sau gây ra:

Thứ nhất, nếu chỉ biết vi phân của một hàm hai biến khác không thì không thể đảm bảo chắc chắn rằng nó sẽ là một hàm tăng thực sự hoặc một hàm giảm thực sự.

Thứ hai, chúng ta phải tính toán tích phân Riemann hai lớp trên một miền D bất kì của $\mathbb{R}^2$ thay vì trên các hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$.

Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ bắt đầu khảo sát với một phép biến đổi đơn giản: phép tịnh tiến. Tiếp theo, chúng ta sẽ khảo sát vấn đề cho các phép biến đổi affin. Sau cùng, chúng ta sẽ giới thiệu ý tưởng để mở rộng công thức đổi biến cho trường hợp tổng quát.

Phép tịnh tiến

Nhắc lại rằng một **phép tịnh tiến trong $\mathbb{R}^2$** là một phép biến đổi xác định bởi công thức

$$\Phi(u, v) := (x_0 + u, y_0 + v) \text{ trong đó } (x_0, y_0) \text{ là một điểm cố định bất kì nằm trong } \mathbb{R}^2.$$

Một cách tự nhiên, chúng ta có kết quả sau:

Kết quả 2.15. (Công thức đổi biến cho các phép tịnh tiến)

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann. Với điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cố định, xét tập $E := \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in D\}$ và hàm $g: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$g(u, v) := f(x_0 + u, y_0 + v), \text{ với mọi } (u, v) \in E.$$

Khi đó, E là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, g là một hàm khả tích Riemann trên E .

$$\text{Hơn nữa, } \iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E g(u, v) d(u, v).$$

Chứng minh kết quả 2.15.

Nhận thấy rằng do D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ nên $E = \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in D\}$ cũng là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$.

Giả sử $R := [a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$.

Khi đó, $E \subseteq S$ với $S := [a - x_0, b - x_0] \times [c - y_0, d - y_0]$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$.

Kí hiệu:

$f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mở rộng của $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ thu được bằng cách đặt f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D ,

$g^*: S \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mở rộng của $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ thu được bằng cách đặt g^* bằng 0 tại các điểm thuộc S/E .

Giả sử $P := \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của R ,

$Q := \{(u_i, v_j) : i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là phân hoạch tương ứng của S xác định bởi các

công thức $u_i = x_i - x_0$ ($i = 0, 1, \dots, n$) và $v_j = y_j - y_0$ ($j = 0, 1, \dots, k$).

Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, kí hiệu $R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ và $S_{i,j} := [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ lần lượt là các hình chữ nhật thứ (i, j) cảm sinh bởi các phân hoạch P và Q .

$$\text{Khi đó, } A(R_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) = A(S_{i,j}).$$

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta chứng minh được $L(P, f^*) = L(Q, g^*)$ và $U(P, f^*) = U(Q, g^*)$, nên $L(f^*) = L(g^*)$ và $U(f^*) = U(g^*)$. Do f là một hàm khả tích Riemann trên D nên $L(f^*) = U(f^*)$.

Điều này chỉ ra rằng $L(g^*) = U(g^*)$, nghĩa là hàm g khả tích Riemann trên E . Hơn nữa, $\iint_D f = \iint_E g$. $\square$

Kết quả 2.16.

Giả sử $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là ba điểm không thẳng hàng nằm trong $\mathbb{R}^2$, D là một hình bình hành nhận $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ làm các đỉnh và có một đỉnh nằm đối diện với (x_0, y_0) qua đường thẳng đi qua $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Khi đó, D là một tập đo được và

$$A(D) = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \right| = |(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)|.$$

Chứng minh kết quả 2.16.

Nhận thấy rằng do ∂D là hợp của bốn đoạn thẳng hữu hạn nên ∂D là một tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.9), D là một tập đo được.

Giả sử $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Ta sẽ chứng minh $A(D) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Ý tưởng tính diện tích $A(D)$ ở đây đó là biểu diễn lại hình bình hành D dưới dạng một miền sơ cấp và sử dụng định lý Fubini để biểu diễn lại $A(D)$ dưới dạng một tích phân lặp. Tuy nhiên, do việc biểu diễn lại D như vậy sẽ phụ thuộc rất nhiều vào vị trí tương đối giữa các đỉnh của D .

Kí hiệu:

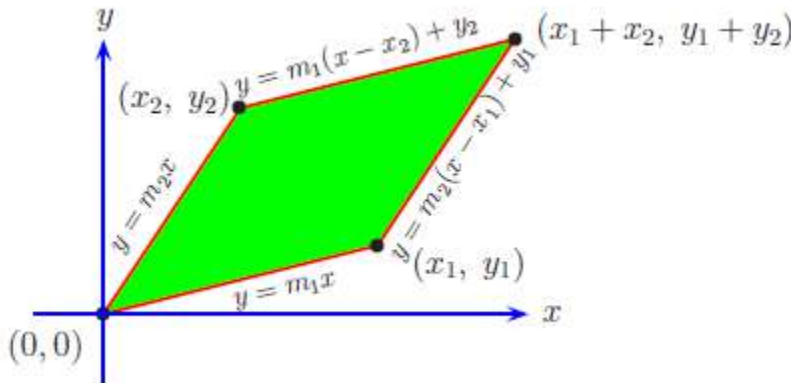
m_1 là độ dốc của đoạn thẳng nối giữa $(0, 0)$ và (x_1, y_1) ,

m_2 là độ dốc của đoạn thẳng nối giữa $(0, 0)$ và (x_2, y_2) .

Nhận thấy rằng do $(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là ba điểm không thẳng hàng trong $\mathbb{R}^2$ nên $m_1 \neq m_2$.

Trường hợp 1. x_1 và x_2 đều khác không và có cùng dấu.

Giả sử $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $m_1 < m_2$.



Hình ảnh minh họa.

Xét các hàm $\phi_1, \phi_2: [x_1 + x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi các công thức

$$\phi_1(x) := \begin{cases} m_1 x, & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_1, \\ m_2(x - x_1) + y_1, & \text{nếu } x_1 < x \leq x_1 + x_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(x) := \begin{cases} m_2 x, & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_2, \\ m_1(x - x_2) + y_2, & \text{nếu } x_2 < x \leq x_1 + x_2. \end{cases}$$

Khi đó, ϕ_1, ϕ_2 là các hàm liên tục, $\phi_1 \leq \phi_2$ và

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq x_1 + x_2 \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

Nhận thấy rằng do 1_D là một hàm liên tục trên D nên

$$A(D) = \iint_D 1_D = \int_0^{x_1+x_2} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right) dx = \int_0^{x_1+x_2} [\phi_2(x) - \phi_1(x)] dx.$$

Hơn nữa, do $\int_0^{x_1+x_2} \phi_2(x) dx = \int_0^{x_2} m_2 x dx + \int_{x_2}^{x_1+x_2} [m_1(x - x_2) + y_2] dx$ và

$$\int_0^{x_1+x_2} \phi_1(x) dx = \int_0^{x_1} m_1 x dx + \int_{x_1}^{x_1+x_2} [m_2(x - x_1) + y_1] dx, \text{ nên}$$

$$A(D) = \left[m_2 \frac{x_2^2}{2} + m_1 \frac{x_1^2}{2} + y_2 x_1 \right] - \left[m_1 \frac{x_1^2}{2} + m_2 \frac{x_2^2}{2} + y_1 x_2 \right] = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Nếu chúng ta thay giả thiết $m_1 < m_2$ bằng giả thiết $m_1 > m_2$ thì $\phi_2 \leq \phi_1$ và

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq x_1 + x_2 \text{ và } \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}.$$

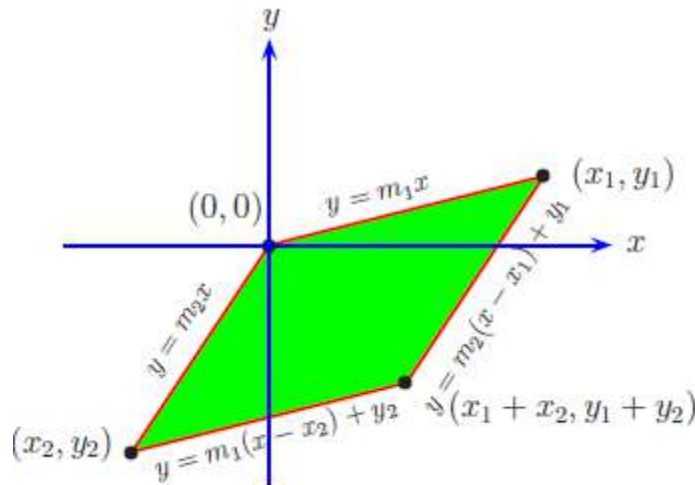
Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta dễ dàng tính được rằng $A(D) = x_2 y_1 - x_1 y_2$.

Nhận thấy rằng do $m_1 < m_2$ khi và chỉ khi $x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$ nên $A(D) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Lập luận tương tự, nếu $x_1 < 0, x_2 < 0$ thì $A(D) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Trường hợp 2. x_1 và x_2 đều khác không và khác dấu nhau.

Giả sử $x_1 > 0, x_2 < 0$ và $m_1 < m_2$.



Hình vẽ minh họa.

Xét các hàm $\phi_1, \phi_2: [x_2, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi các công thức

$$\phi_1(x) := \begin{cases} m_1(x - x_2) + y_2, & \text{nếu } x_2 \leq x \leq x_2 + x_1, \\ m_2(x - x_1) + y_1, & \text{nếu } x_2 + x_1 < x \leq x_1, \end{cases}$$

$$\phi_2(x) := \begin{cases} m_2x, & \text{nếu } x_2 \leq x \leq 0, \\ m_1x, & \text{nếu } 0 < x \leq x_1. \end{cases}$$

Khi đó, ϕ_1, ϕ_2 là các hàm liên tục, $\phi_1 \leq \phi_2$ và

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x_2 \leq x \leq x_1 \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

Nhận thấy rằng do 1_D là một hàm liên tục trên D nên

$$A(D) = \iint_D 1_D = \int_{x_2}^{x_1} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right) dx = \int_{x_2}^{x_1} [\phi_2(x) - \phi_1(x)] dx.$$

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta dễ dàng tính được rằng

$$A(D) = \left[-m_2 \frac{x_2^2}{2} + m_1 \frac{x_1^2}{2} \right] - \left[m_1 \frac{x_1^2}{2} + y_2 x_1 + m_2 \frac{x_2^2}{2} - y_1 x_2 \right] = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Nếu chúng ta thay giả thiết $m_1 < m_2$ bằng giả thiết $m_2 < m_1$ thì $\phi_2 \leq \phi_1$ và

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x_2 \leq x \leq x_1 \text{ và } \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}.$$

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta dễ dàng tính được rằng $A(D) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Nhận thấy rằng do $m_1 < m_2$ khi và chỉ khi $x_2 y_1 - x_1 y_2 > 0$ nên $A(D) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Lập luận tương tự, nếu $x_1 < 0, x_2 > 0$ thì $A(D) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Trường hợp 3. $x_1 x_2 = 0$.

Giả sử $x_2 = 0$ và $x_1 > 0$. Khi đó, $x_1 \neq 0$ và $y_2 \neq 0$.

Xét các hàm $\phi_1, \phi_2: [x_2, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi các công thức

$$\phi_1(x) := m_1 x \text{ và } \phi_2(x) := m_1 x + y_2 \text{ với mọi } 0 \leq x \leq x_1.$$

Khi đó, ϕ_1, ϕ_2 là các hàm liên tục.

Nếu $y_2 > 0$ thì $\phi_1 \leq \phi_2$ và $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq x_1 \text{ và } \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$.

Nhận thấy rằng do 1_D là một hàm liên tục trên D nên

$$A(D) = \iint_D 1_D = \int_0^{x_1} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right) dx = \int_0^{x_1} y_2 dx = x_1 y_2 = |x_1 y_2|.$$

Nếu $y_2 < 0$ thì $\phi_2 \leq \phi_1$ và $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq x_1 \text{ và } \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}$.

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta dễ dàng tính được rằng $A(D) = -x_1 y_2 = |x_1 y_2|$.

Lập luận tương tự, nếu $x_2 = 0$ và $x_1 < 0$ thì bằng cách thay đoạn $[0, x_1]$ bởi $[x_1, 0]$ trong các lập luận trên, chúng ta cũng tính được rằng $A(D) = |x_1 y_2|$. Như vậy, nếu $x_2 = 0$ thì $A(D) = |x_1 y_2| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Lập luận tương tự, nếu $x_1 = 0$ thì $A(D) = |x_2 y_1| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Trong trường hợp $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, xét $E := \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in D\}$.

Từ Kết quả 1.15), E là một tập đo được và $A(D) = \iint_D 1_D = \iint_E 1_E = A(E)$.

Nhận thấy rằng $E := \{(x - x_0, y - y_0) : (x, y) \in D\}$ là một hình bình hành nhận $(0,0)$, $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$ làm các đỉnh và nhận $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$ làm một đường chéo.

Từ kết quả đạt được trong trường hợp $(x_0, y_0) = (0,0)$,

$$A(D) = A(E) = |(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)|.$$

□

Phép biến đổi affine

Nhắc lại rằng một **phép biến đổi affine trong $\mathbb{R}^2$** là một phép biến đổi xác định bởi công thức

$$\Phi(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v, y_0 + a_2 u + b_2 v) \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $x_0, y_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ là các số thực cho trước bất kì.

Theo ngôn ngữ ma trận, phương trình trên có thể biểu diễn lại dưới dạng

$$\Phi \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Giả sử Φ là một phép biến đổi affine.

Nhận thấy rằng, với mọi $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(\sum_{i=1}^n t_i (u_i, v_i)) = \sum_{i=1}^n t_i \Phi(u_i, v_i) + (1 - \sum_{i=1}^n t_i) \Phi(x_0, y_0).$$

Như vậy, Φ sẽ là một phép biến đổi bảo toàn các tổ hợp lồi.

Thật vậy, Φ sẽ biến tổ hợp lồi $\sum_{i=1}^n t_i (u_i, v_i)$, $t_i \geq 0, (i = 1, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ của các điểm $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$ thành tổ hợp lồi $\sum_{i=1}^n t_i \Phi(u_i, v_i)$ $t_i \geq 0, (i = 1, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ của các điểm $\Phi(u_1, v_1), \dots, \Phi(u_n, v_n)$ tương ứng.

Phép biến đổi Φ được gọi là **phép biến đổi affine khả nghịch** nếu Φ là một song ánh.

Kết quả 2.17.

Giả sử cho trước một phép biến đổi affine $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$\Phi(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v, y_0 + a_2 u + b_2 v) \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $x_0, y_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ là các số thực cho trước bất kì.

Khi đó, Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch $\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Chứng minh kết quả 2.17.

Giả sử Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch.

Khi đó, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tồn tại duy nhất $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho
$$\begin{cases} x_0 + a_1u + b_1v = x \\ y_0 + a_2u + b_2v = y \end{cases}.$$

Từ điều kiện Cramer, hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$.

Ngược lại, nếu hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất thì

$$u = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [(b_1y_0 - b_2x_0) + (b_2x - b_1y)] \text{ và } v = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [(a_2x_0 - a_1y_0) + (a_1y - a_2x)]$$

Xét phép biến đổi affine $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [(b_1y_0 - b_2x_0) + b_2x - b_1y], \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [(a_2x_0 - a_1y_0) - a_2x + a_1y] \right)$$

với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta có thể chứng minh được rằng

$$(\Phi \circ \Psi)(x, y) = (x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ và } (\Psi \circ \Phi)(u, v) = (u, v) \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Điều này chỉ ra rằng Φ là một song ánh và $\Psi = \Phi^{-1}$. □

Phép chứng minh trên cũng chỉ ra rằng nếu Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch thì phép biến đổi ngược Φ^{-1} cũng là một phép biến đổi affine.

Nhận thấy rằng biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ nêu trong khẳng định chính là Jacobian $J(\Phi)(u, v)$ của phép biến đổi Φ .

Thật vậy, nếu chúng ta biểu diễn phép biến đổi Φ lại dưới dạng $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ trong đó $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\phi_1(u, v) := x_0 + a_1u + b_1v$ và $\phi_2(u, v) := y_0 + a_2u + b_2v$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Khi đó, ϕ_1 và ϕ_2 đều có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$J(\Phi)(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Như vậy, Jacobian của một phép biến đổi affine Φ bất kì luôn là một hằng số, nên chúng ta có thể kí hiệu $J(\Phi)$ thay cho cách kí hiệu $J(\Phi)(u, v)$.

Khi đó, Kết quả 2.17) có thể được phát biểu lại dưới dạng:

$$\Phi \text{ là một phép biến đổi tuyến tính khả nghịch} \Leftrightarrow J(\Phi) \neq 0.$$

Giả sử Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch. Khi đó, Φ sẽ biến các điểm phân biệt $(u, v), (s, t)$ thành các điểm ảnh $\Phi(u, v), \Phi(s, t)$ phân biệt. Do Φ bảo toàn các tổ hợp lồi nên nó sẽ biến đoạn thẳng nối hai

điểm $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ thành đoạn thẳng nối hai điểm $\Phi(u_1, v_1), \Phi(u_2, v_2)$ tương ứng. Như vậy, ảnh qua Φ của một đường thẳng cũng sẽ là một đường thẳng. Hơn nữa, nếu hai đường thẳng song song thì ảnh qua Φ của chúng cũng là hai đường thẳng song song.

Thật vậy, xét một đường thẳng L trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = rt + s \\ y = pt + q \end{cases}, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R},$$

trong đó $r, s, p, q \in \mathbb{R}, (r, p) \neq (0, 0)$.

Khi đó, độ dốc của đường thẳng L sẽ được cho tương ứng với cặp (r, p) . Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta sẽ nhận thấy rằng ảnh L' của L qua Φ sẽ là một đường thẳng xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = r't + s' \\ y = p't + q' \end{cases}, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R},$$

trong đó $r', s', p', q' \in \mathbb{R}$ là các số thực được xác định bởi các công thức

$$\begin{bmatrix} r' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} s' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ q \end{bmatrix}.$$

Hơn nữa, do Φ khả nghịch nên $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$, nghĩa là nếu $(r, p) \neq (0, 0)$ thì $(r', p') \neq (0, 0)$.

Giả sử L_1 là một đường thẳng khác nằm trong $\mathbb{R}^2$ và L'_1 là ảnh của L_1 qua Φ lần lượt xác định bởi các phương trình tham số

$$\begin{cases} x = r_1t + s_1 \\ y = p_1t + q_1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = r'_1t + s'_1 \\ y = p'_1t + q'_1 \end{cases}, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R},$$

trong đó $r, s, p, q, r', s', p', q', r_1, s_1, p_1, q_1, r'_1, s'_1, p'_1, q'_1 \in \mathbb{R}$ được liên hệ với nhau theo các công thức

$$\begin{bmatrix} r'_1 \\ p'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} s'_1 \\ q'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ q_1 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, nếu (r, p) tỉ lệ với (r_1, p_1) thì (r', p') cũng sẽ tỉ lệ với (r'_1, p'_1) , nghĩa là nếu L song song với L_1 thì L' song song với L'_1 . □

Một vấn đề rất tự nhiên được đặt ra cho chúng ta ở đây đó là:

“Khảo sát ảnh hưởng của một phép biến đổi affine khả nghịch lên số đo diện tích của một hình bình hành hoặc tổng quát hơn là lên số đo diện tích của một tập đo được bất kì chứa trong $\mathbb{R}^2$ ”.

Kết quả 2.18.

Giả sử cho trước một phép biến đổi affine $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ với $J(\Phi) \neq 0$.

Khi đó, nếu E là một tập bị chặn đo được trong $\mathbb{R}^2$ thì $D := \Phi(E)$ cũng là một tập bị chặn đo được trong $\mathbb{R}^2$ với $A(D) = |J(\Phi)|A(E)$.

Chứng minh kết quả 2.18.

Giả sử cho trước một phép biến đổi affine $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$\Phi \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ với mọi } (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

trong đó $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ với $J(\Phi) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Đầu tiên, giả sử E là một hình bình hành bất kì trong $\mathbb{R}^2$. Khi đó, $D := \Phi(E)$ cũng là một hình bình hành trong $\mathbb{R}^2$. Từ Kết quả 2.16), E và D đều là các tập đo được.

Giả sử $(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ là các đỉnh của hình bình hành E sao cho đỉnh (u_0, v_0) liền kề với các đỉnh $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$. Kí hiệu $(x_i, y_i) := \Phi(u_i, v_i)$ với $i = 0, 1, 2$.

Khi đó, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là các đỉnh của hình bình hành $D := \Phi(E)$ và đỉnh (x_0, y_0) cũng sẽ liền kề với các đỉnh $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Với mỗi $i = 1, 2$,

$$\begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i - u_0 \\ v_i - v_0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy,

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_0 & u_2 - u_0 \\ v_1 - v_0 & v_2 - v_0 \end{bmatrix}.$$

Do định thức của tích hai ma trận sẽ bằng tích các định thức của chúng, nên

$$\left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \det \begin{bmatrix} u_1 - u_0 & u_2 - u_0 \\ v_1 - v_0 & v_2 - v_0 \end{bmatrix} \right|.$$

Từ Kết quả 2.16), $A(D) = |J(\Phi)|A(E)$.

Tiếp theo, giả sử E là một tập bị chặn đo được bất kì trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử S là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $E \subseteq S$. Khi đó, $D = \Phi(E) \subseteq \Phi(S)$ và $\Phi(S)$ là một hình bình hành trong $\mathbb{R}^2$. Do $\Phi(S)$ là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ nên D cũng là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$.

Để chứng minh D là một tập đo được và $A(D) = |J(\Phi)|A(E)$, chúng ta sẽ lập luận như sau:

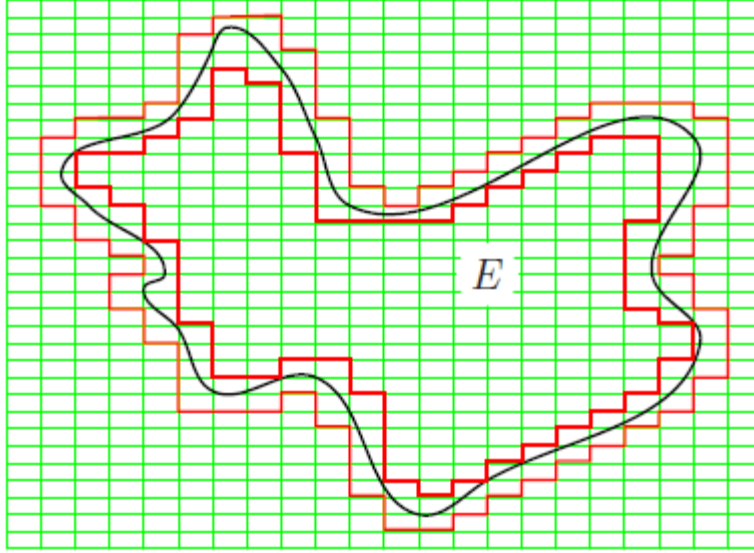
Kí hiệu $1_E^*: S \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mở rộng của hàm $1_E: E \rightarrow \mathbb{R}$ bằng cách đặt 1_E^* bằng 0 tại các điểm thuộc S/E .

Do E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^2$ nên 1_E^* là một hàm khả tích Riemann trên S . Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$ bất kì. Kí hiệu $\delta := |J(\Phi)| > 0$.

Từ điều kiện Riemann, tồn tại một phân hoạch $Q := \{(u_i, v_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ của S sao cho

$$A(E) - L(Q, 1_E^*) < \frac{\varepsilon}{2\delta} \text{ và } U(Q, 1_E^*) - A(E) < \frac{\varepsilon}{2\delta}.$$

Kí hiệu E_0 là hợp của tất cả các hình chữ nhật con cảm sinh bởi phân hoạch Q và chứa trong E , E_1 là hợp của tất cả các hình chữ nhật con cảm sinh bởi phân hoạch Q và có giao với E . Khi đó, $E_0 \subseteq E \subseteq E_1$.



Hình ảnh minh họa.

Kí hiệu $D_0 := \Phi(E_0)$ và $D_1 := \Phi(E_1)$. Khi đó, $D_0 \subseteq D \subseteq D_1$.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D_1 \subseteq R$ và $1_{D_0}^*, 1_D^*, 1_{D_1}^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ lần lượt là hàm mở rộng của các hàm $1_{D_0}: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $1_D: D \rightarrow \mathbb{R}$, $1_{D_1}: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ lên R bằng cách đặt hàm $1_{D_0}^*, 1_D^*, 1_{D_1}^*$ bằng 0 tại các điểm thuộc $R/D_0, R/D, R/D_1$. Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, k$, kí hiệu $S_{i,j}$ là hình chữ nhật con thứ (i, j) cảm sinh bởi phân hoạch Q . Từ Kết quả nhận được trong trường hợp E là một hình bình hành, phép biến đổi Φ biến hình chữ nhật con $S_{i,j}$ thành một hình bình hành có diện tích bằng $|J(\Phi)|A(S_{i,j})$.

Từ Kết quả 2.9) và Kết quả 2.13),

$$A(D_0) = \delta \sum_{S_{i,j} \subseteq E} A(S_{i,j}) = \delta L(Q, 1_E^*) > \delta A(E) - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$A(D_1) = \delta \sum_{S_{i,j} \cap E \neq \emptyset} A(S_{i,j}) = \delta U(Q, 1_E^*) < \delta A(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do $1_{D_0}^* \leq 1_D^* \leq 1_{D_1}^*$ nên

$$\delta A(E) - \frac{\varepsilon}{2} < A(D_0) = L(1_{D_0}^*) \leq L(1_D^*),$$

$$U(1_D^*) \leq U(1_{D_1}^*) = A(D_1) < \delta A(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như vậy,

$$0 \leq U(1_D^*) - L(1_D^*) \leq \left(\delta A(E) + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\delta A(E) - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

Do số thực dương $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tùy ý nên $U(1_D^*) = L(1_D^*) = \delta A(E)$. Điều này chỉ ra rằng 1_D^* khả tích Riemann trên R , nghĩa là D là một tập đo được. Hơn nữa, $A(D) = \iint_R 1_D^* = \delta A(E) = |J(\Phi)|A(E)$. $\square$

Kết quả 2.19. (Công thức đổi biến cho các phép biến đổi affine)

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f là một tập có độ đo bằng không. Giả sử $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một phép biến đổi affine với $J(\Phi) \neq 0$.

Khi đó, nếu tồn tại một tập con $E \subseteq \mathbb{R}^2$ sao cho $\Phi(E) = R$ thì E cũng là một tập bị chặn và ∂E cũng là một tập có độ đo bằng không.

Hơn nữa, $f \circ \Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một hàm bị chặn với tập các điểm gián đoạn của hàm $f \circ \Phi$ là một tập có độ đo bằng không và

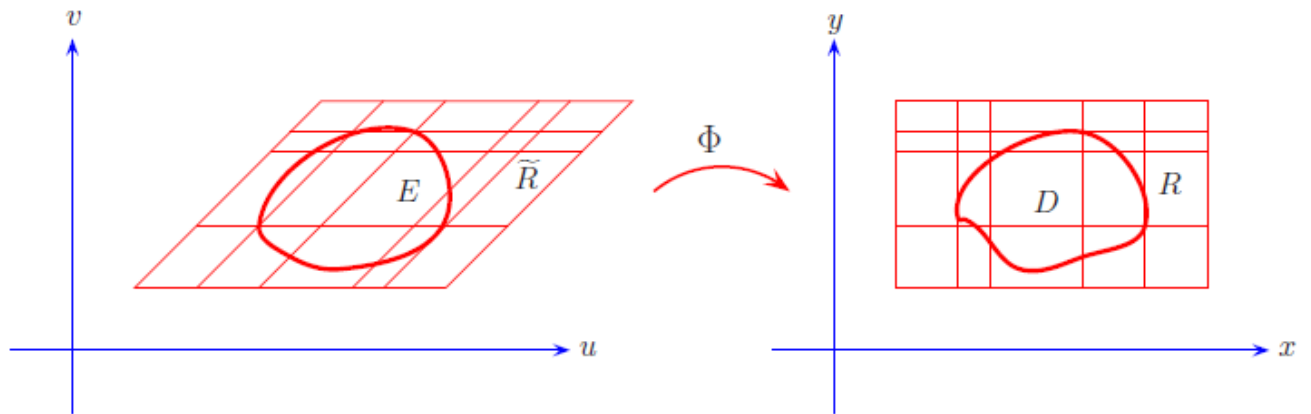
$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E f(\Phi(u, v)) |J(\Phi)| d(u, v).$$

Chứng minh kết quả 2.19.

Do $\Phi(E) = R$ nên chúng ta có thể xem E như ảnh của R qua phép biến đổi affine nghịch Φ^{-1} . Như vậy, E cũng là một tập bị chặn với ∂E là một tập có độ đo bằng không (điều này suy ra từ các Kết quả 2.9) và Kết quả 2.18).

Hơn nữa, $f \circ \Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một hàm bị chặn. Kí hiệu $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$. Do $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục nên nếu kí hiệu C là tập các điểm gián đoạn của hàm f thì $\Phi^{-1}(C)$ chính là tập các điểm gián đoạn của hàm $f \circ \Phi$. Từ Kết quả 2.9) và Kết quả 2.18), $\Phi^{-1}(C)$ là một tập có độ đo bằng không.

Giả sử R là một hình chữ nhật bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \subseteq R$ và $f^*: R \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mở rộng của $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ lên R bằng cách đặt f^* bằng 0 tại các điểm thuộc R/D . Kí hiệu $\tilde{R} := \Phi^{-1}(R)$.



Hình ảnh minh họa.

Xét hàm $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ và $\tilde{g}: \tilde{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$g(u, v) := (f \circ \Phi)(u, v) \text{ với mọi } (u, v) \in E \text{ và } \tilde{g}(u, v) := (f^* \circ \Phi)(u, v) \text{ với mọi } (u, v) \in \tilde{R}$$

Hiển nhiên, $\tilde{g}|_E = g$ và $\tilde{g}$ bằng 0 trên $\tilde{R}/E$, nên tập các điểm gián đoạn của hàm $\tilde{g}$ phải chứa trong hợp của ∂E và tập các điểm gián đoạn của hàm g . Điều này chỉ ra rằng tập các điểm gián đoạn của hàm $\tilde{g}$ cũng là một

tập có độ đo bằng không. Đồng thời, do $\partial\tilde{R}$ là một tập có độ đo bằng không nên $\tilde{g}$ là một hàm khả tích Riemann trên R (điều này suy ra từ Kết quả 2.8).

Giả sử $P = \{(x_i, y_j): i = 0, 1, \dots, n \text{ và } j = 0, 1, \dots, k\}$ là một phân hoạch bất kì của R .

Với mỗi $i = 1, \dots, n$ và $j = 1, \dots, n$, kí hiệu $R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ là hình chữ nhật thứ (i, j) cảm sinh bởi phân hoạch P và $\widetilde{R}_{i,j} := \Phi^{-1}(R_{i,j})$ là hình bình hành tương ứng trong $\tilde{R}$. Do $\partial\widetilde{R}_{i,j}$ là một tập có độ đo bằng không nên $\tilde{g}$ là một hàm khả tích Riemann trên $\widetilde{R}_{i,j}$ (điều này suy ra từ Kết quả 2.8).

Với mọi $(u, v) \in \widetilde{R}_{i,j}$, $\Phi(u, v) \in R_{i,j}$ và $f^*(\Phi(u, v)) = \tilde{g}(u, v)$, nên

$$m_{i,j}(f^*) \leq \tilde{g}(u, v) \leq M_{i,j}(f^*) \text{ với mọi } (u, v) \in \widetilde{R}_{i,j}.$$

Lấy tích phân trên $\widetilde{R}_{i,j}$ và sử dụng khẳng định (vi) của Kết quả 2.1),

$$\begin{aligned} \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} m_{i,j}(f^*) d(u, v) &\leq \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) \leq \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} M_{i,j}(f^*) d(u, v) \\ \Rightarrow m_{i,j}(f^*) \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} d(u, v) &\leq \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) \leq M_{i,j}(f^*) \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} d(u, v) \end{aligned}$$

Do $\iint_{\widetilde{R}_{i,j}} d(u, v) = A(\widetilde{R}_{i,j})$ và $A(R_{i,j}) = |J(\Phi)|A(\widetilde{R}_{i,j})$ (điều này suy ra từ Kết quả 2.18), nên nếu chúng ta cả hai vế của đánh giá trên với $|J(\Phi)|$ thì

$$m_{i,j}(f^*)A(R_{i,j}) \leq |J(\Phi)| \iint_{\widetilde{R}_{i,j}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) \leq M_{i,j}(f^*)A(R_{i,j}).$$

Bằng cách lấy tổng từ $i = 1$ đến n , từ $j = 1$ đến k và sử dụng Kết quả 2.13),

$$L(P, f^*) \leq |J(\Phi)| \iint_{\tilde{R}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) \leq U(P, f^*).$$

Lấy supremum và infimum trên tập các phân hoạch P của R ,

$$L(f^*) \leq |J(\Phi)| \iint_{\tilde{R}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) \leq U(f^*).$$

Do f^* khả tích Riemann trên R nên $U(f^*) = L(f^*) = \iint_R f^* = \iint_D f$, nên

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = |J(\Phi)| \iint_{\tilde{R}} \tilde{g}(u, v) d(u, v).$$

Do ∂E và $\partial\tilde{R}$ là các tập có độ đo bằng không nên $\partial(\tilde{R}/E)$ cũng là một tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.13),

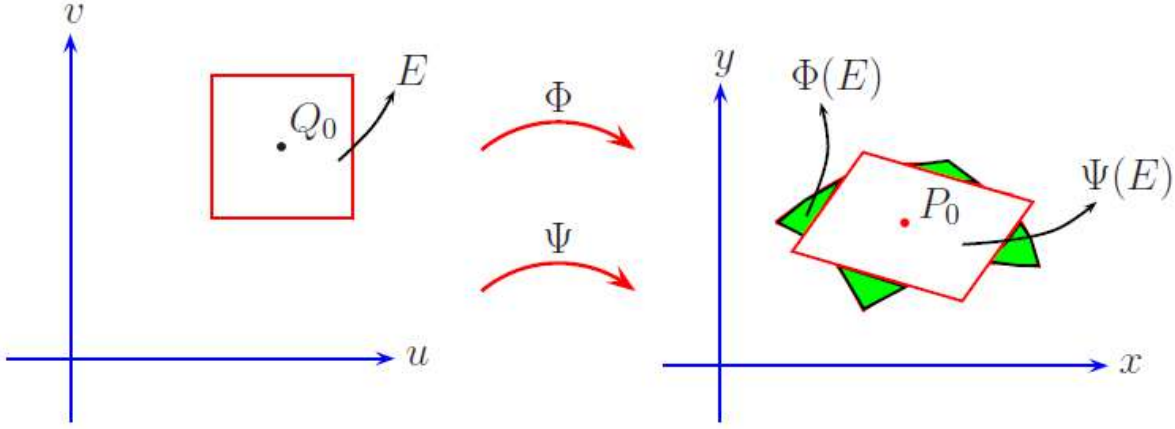
$$\iint_{\tilde{R}} \tilde{g} = \iint_{\tilde{R}/E} \tilde{g} + \iint_E \tilde{g} = 0 + \iint_E \tilde{g} = \iint_E g.$$

Như vậy,

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = |J(\Phi)| \iint_{\tilde{R}} \tilde{g}(u, v) d(u, v) = |J(\Phi)| \iint_E g(u, v) d(u, v) = \iint_E g(u, v) |J(\Phi)| d(u, v). \quad \square$$

Trường hợp tổng quát

Mặc dù chúng ta đã hoàn chỉnh được công thức đổi biến cho các phép biến đổi affine nhưng việc sử dụng nó trên thực tế vẫn rất hạn chế. Như vậy, chúng ta sẽ tìm kiếm công thức đổi biến cho một trường hợp tổng quát hơn. Ý tưởng ở đây của chúng ta là sẽ khảo sát các phép biến đổi $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ có thể xấp xỉ bởi một phép biến đổi affine $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nào đó.



Hình ảnh minh họa ý tưởng mở rộng công thức đổi biến.

Giả sử $Q_0 := (u_0, v_0)$ là một điểm bất kì nằm trong $\mathbb{R}^2$ và E là một hình vuông lân cận đủ nhỏ bao quanh điểm Q_0 . Xét phép biến đổi $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$. Kí hiệu $\Phi := (\phi_1, \phi_2)$. Giả sử ϕ_1 và ϕ_2 đều có đạo hàm riêng cấp một trên E , các đạo hàm riêng này đều liên tục tại Q_0 . Hơn nữa, $J(\Phi)(Q_0) \neq 0$. Kí hiệu $P_0 := \Phi(u_0, v_0)$.

Với mọi $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, kí hiệu

$\psi_1(u, v) := \phi_1(u_0, v_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} (u - u_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} (v - v_0)$ là xấp xỉ tuyến tính của ϕ_1 trong lân cận đủ nhỏ quanh điểm (u_0, v_0) ,

$\psi_2(u, v) := \phi_2(u_0, v_0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} (u - u_0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} (v - v_0)$ là xấp xỉ tuyến tính của ϕ_2 trong lân cận đủ nhỏ quanh điểm (u_0, v_0) .

Khi đó,

$$\phi_1(u, v) = \psi_1(u, v) + \varepsilon_1(u, v) \text{ và } \phi_2(u, v) = \psi_2(u, v) + \varepsilon_2(u, v), \text{ với mọi } (u, v) \in E,$$

trong đó $\varepsilon_1(u, v) \rightarrow 0$ và $\varepsilon_2(u, v) \rightarrow 0$ khi $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$.

Như vậy, phép biến đổi $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $\Psi := (\psi_1, \psi_2)$ là một phép biến đổi affine biến Q_0 thành P_0 và Ψ xấp xỉ với phép biến đổi Φ trong lân cận đủ nhỏ quanh điểm Q_0 .

Hơn nữa,

$$J(\Psi) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)} = J(\Phi)(u_0, v_0).$$

Do $J(\Psi) \neq 0$ nên $\Psi(E)$ là một tập đo được và $A(\Psi(E)) = |J(\Psi)| = |J(\Phi)(u_0, v_0)|A(E)$.

Như vậy, nếu chúng ta chọn hình vuông lân cận E của điểm (u_0, v_0) đủ nhỏ thì diện tích $A(\Phi(E))$ sẽ xấp xỉ với diện tích $A(\Psi(E)) = |J(\Phi)(u_0, v_0)|A(E)$.

Lập luận tương tự, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng:

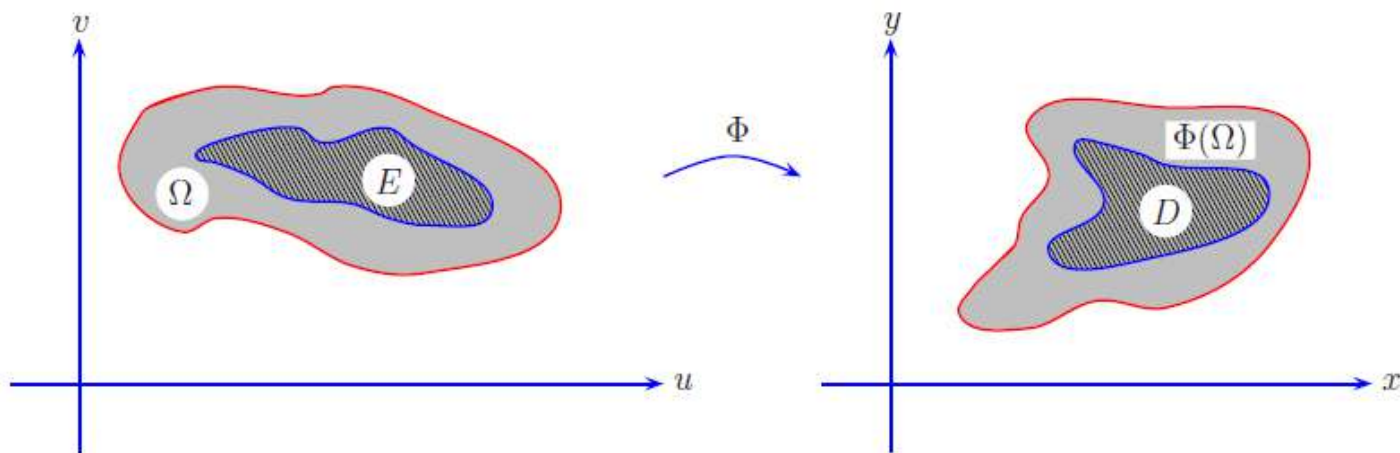
Kết quả 2.20. (Công thức đổi biến cho hàm hai biến)

Giả sử D là một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f có độ đo bằng không. Giả sử Ω là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một phép biến đổi 1 – 1 sao cho $D \subseteq \Phi(\Omega)$. Kí hiệu $\Phi := (\phi_1, \phi_2)$. Giả sử ϕ_1, ϕ_2 là các hàm có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên Ω và $J(\Phi)(u, v) \neq 0$ với mọi $(u, v) \in \Omega$. Giả sử $E \subseteq \Omega$ sao cho $\Phi(E) = D$.

Khi đó, E là một tập con đóng và bị chặn của Ω sao cho ∂E là một tập có độ đo bằng không.

Hơn nữa, $f \circ \Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một hàm bị chặn có tập các điểm gián đoạn là một tập có độ đo bằng không và

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_E (f \circ \Phi)(u, v) |J(\Phi)(u, v)| d(u, v).$$



Hình vẽ minh họa.

3. Tích phân ba lớp

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ mở rộng các phân tích đã thực hiện trong mục 1) và mục 2) cho các tích phân ba lớp. Tất cả các kết quả đã đạt được trong mục 1) và mục 2) đều có thể mở rộng cho các tích phân ba lớp mà không cần phải bổ sung thêm bất kỳ một ý tưởng mới nào khác.

Tích phân ba lớp trên các hình chữ nhật.

Nhắc lại rằng một **hình hộp chữ nhật** là một hình hộp chữ nhật đóng không rỗng trong $\mathbb{R}^3$.

Nói cách khác, một hình hộp chữ nhật là một tập con của $\mathbb{R}^3$ có dạng:

$$[a, b] \times [c, d] \times [p, q] := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \text{ và } p \leq z \leq q\},$$

trong đó $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ với $a < b, c < d$ và $p < q$.

Giả sử $K := [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ là một hình hộp chữ nhật trong $\mathbb{R}^3$ và $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn bất kỳ.

Kí hiệu:

$$m(f) := \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in K\} \text{ và } M(f) := \sup\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in K\}.$$

Giả cho trước một phân hoạch $P := \{(x_i, y_j, z_l) : i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, k \text{ và } l = 0, 1, \dots, r\}$ của K sao cho $a = x_0 < \dots < x_n = b, c = y_0 < \dots < y_k = d, p = z_0 < \dots < z_r = q$. Mỗi điểm (x_i, y_j, z_l) được gọi là một **điểm lưới** của phân hoạch P . Hình hộp chữ nhật $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{l-1}, z_l]$ được gọi là **hình hộp con chữ nhật thứ (i, j, k) cảm sinh bởi P** .

Kí hiệu:

$$m_{i,j,l}(f) := \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{l-1}, z_l]\},$$

$$M_{i,j,l}(f) := \sup\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{l-1}, z_l]\}.$$

Hiển nhiên, $m(f) \leq m_{i,j,l}(f) \leq M_{i,j,l}(f) \leq M(f)$, với mọi $i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, k$ và $l = 0, 1, \dots, r$.

Khi đó,

$L(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^r m_{i,j,l}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_l - z_{l-1})$ được gọi là **tổng Riemann ba lớp dưới của hàm f ứng với phân hoạch P** ,

$U(P, f) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^r M_{i,j,l}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_l - z_{l-1})$ được gọi là **tổng Riemann ba lớp trên của hàm f ứng với phân hoạch P** .

Luận tương tự, chúng ta chứng minh được:

$$m(f)(b-a)(d-c)(q-p) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(f)(b-a)(d-c)(q-p). (\text{xem lại Kết quả 1.1})$$

Kí hiệu:

$L(f) := \sup\{L(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d] \times [p, q]\}$ là **tổng Riemann ba lớp dưới của hàm f** ,

$U(f) := \inf\{L(P, f): P \text{ là một phân hoạch của } [a, b] \times [c, d] \times [p, q]\}$ là **tổng Riemann ba lớp trên của hàm f** .

Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được $L(f) \leq U(f)$. (xem lại Kết quả 1.3)

Hàm f được gọi là **khả tích Riemann** (hoặc **khả tích**) trên $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ nếu $L(f) = U(f)$.

Nếu f là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ thì giá trị $L(f) = U(f)$ được gọi là **tích phân Riemann ba lớp của hàm f trên $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$** và được kí hiệu bởi

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) d(x, y, z) \text{ (hoặc } \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} f).$$

Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được dạng mở rộng của các Kết quả 1.2), 1.4), 1.5), 1.6), 1.7), 1.8), 1.9), 1.10) cho các tích phân Riemann ba lớp. Dạng mở rộng của Định lí Fubini cho các hình hộp chữ nhật được phát biểu như sau:

Kết quả 3.1. (Định lí Fubini trên các hình hộp chữ nhật)

Giả sử $f: [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và kí hiệu I là tích phân Riemann của f trên $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

i) Nếu, với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân $\iint_{[c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) d(y, z)$ thì tồn tại tích phân lặp $\int_a^b \left(\iint_{[c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) d(y, z) \right) dx$ và bằng I .

ii) Nếu, với mỗi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, tồn tại tích phân $\int_p^q f(x, y, z) dz$ thì tồn tại tích phân lặp $\iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_p^q f(x, y, z) dz \right) d(x, y)$ và bằng I .

iii) Nếu các điều kiện (i) và (ii) đều thỏa mãn thì tồn tại tích phân lặp $\int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_p^q f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$ tồn tại và bằng I .

Chứng minh kết quả 3.1.

i) Giả sử với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân hai lớp $\iint_{[c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) d(y, z)$.

Xét hàm $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $A(x) := \iint_{[c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) d(y, z)$.

Do $m(f)(d - c)(q - p) \leq A(x) \leq M(f)(d - c)(q - p)$ với mọi $x \in [a, b]$ nên A là một hàm bị chặn trên $[a, b]$.

Bằng cách lặp lại phép chứng minh trong khẳng định (i) của Kết quả 1.11), áp dụng Kết quả 1.6) cho hình chữ nhật $[c, d] \times [p, q]$ và sử dụng điều kiện Riemann cho hàm một biến cho hàm A trên $[a, b]$, A là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và

$$I = \int_a^b A(x)dx.$$

ii) Giả sử với mỗi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, tồn tại tích phân $\int_p^q f(x, y, z)dz$.

Xét hàm $\mathcal{A}: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $\mathcal{A}(x, y) := \int_p^q f(x, y, z)dz$.

Do $m(f)(q - p) \leq \mathcal{A}(x, y) \leq M(f)(q - p)$ với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ nên $\mathcal{A}$ là một hàm bị chặn trên $[a, b] \times [c, d]$.

Bằng cách lặp lại phép chứng minh trong khẳng định (i) của Kết quả 1.11), áp dụng điều kiện Riemann cho hàm một biến cho đoạn $[p, q]$ và sử dụng điều kiện Riemann cho hàm hai biến (Kết quả 1.4) cho hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$, $\mathcal{A}$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b] \times [c, d]$ và

$$I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \mathcal{A}(x, y) d(x, y).$$

iii) Giả sử các điều kiện (i) và (ii) đều được thỏa mãn.

Với mỗi $x \in [a, b]$, xét hàm $g_x: [c, d] \times [p, q] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $g_x(y, z) := f(x, y, z)$.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 3.1), g_x là một hàm khả tích Riemann trên $[c, d] \times [p, q]$.

Từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.1), với mọi $y \in [c, d]$, tồn tại tích phân $\int_p^q g_x(y, z)dz$.

Áp dụng Định lý Fubini cho tích phân Riemann hai lớp của hàm g_x trên hình chữ nhật $[c, d] \times [p, q]$, xét hàm $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$A(x) := \iint_{[c,d] \times [p,q]} g_x(y, z) d(y, z) = \int_c^d \left(\int_p^q g_x(y, z) dz \right) dy.$$

Từ khẳng định (i) của Kết quả 3.1), $A(x)$ là một hàm khả tích Riemann trên $[a, b]$ và

$$I = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_p^q f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx. \quad \square$$

Tích phân ba lớp trên các tập bị chặn.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn.

Xét một hình hộp chữ nhật K bất kì nằm trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $D \subseteq K$ và hàm $f^*: K \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f^*(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z), & \text{nếu } (x, y, z) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y, z) \notin D. \end{cases}$$

Hàm f được gọi là **khả tích Riemann trên D** nếu f^* là một hàm khả tích Riemann trên K . Nếu f là một hàm khả tích Riemann trên D thì **tích phân Riemann của f trên D** được xác định bởi tích phân Riemann

của f^* trên K , nghĩa là $\iiint_D f := \iiint_K f^*$. Nhận thấy rằng định nghĩa về tính khả tích và giá trị của tích phân Riemann như trên hoàn toàn không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp chữ nhật K . Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được dạng mở rộng của các Kết quả 2.1) cho các tích phân Riemann ba lớp. Dạng mở rộng của Định lí Fubini cho các tập bị chặn được phát biểu như sau:

Kết quả 3.2. (Nguyên lí Cavalieri)

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann và kí hiệu I là tích phân Riemann của f trên D .

i) Nếu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: a \leq x \leq b \text{ và } (y, z) \in D_x\}$ trong đó, với mọi $x \in [a, b]$, D_x là một tập con của $\mathbb{R}^2$ với ∂D_x là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^2$ và, với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại tích phân $\iint_{D_x} f(x, y, z) d(y, z)$ thì tồn tại tích phân lặp $\int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) d(y, z) \right) dx$ và bằng I .

ii) Nếu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D_0 \text{ và } \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$ trong đó D_0 là một tập con của $\mathbb{R}^2$ với ∂D là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^2$, $\phi_1, \phi_2: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích Riemann sao cho $\psi_1 \leq \psi_2$, với mọi $(x, y) \in D_0$, tồn tại tích phân $\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ thì tồn tại tích phân lặp $\iint_{D_0} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y)$ và bằng I .

Chứng minh kết quả 3.2.

Xét một hình hộp chữ nhật $K := [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ nằm trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $D \subseteq K$ và hàm $f^*: K \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f^*(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z), & \text{nếu } (x, y, z) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y, z) \notin D. \end{cases}$$

i) Từ khẳng định (i) của Kết quả 3.1), tồn tại tích phân lặp $\int_a^b \left(\iint_{[c, d] \times [p, q]} f^*(x, y, z) d(y, z) \right) dx$ tồn tại và bằng tích phân Riemann của hàm f^* trên K , nghĩa là

$$I = \int_a^b \left(\iint_{[c, d] \times [p, q]} f^*(x, y, z) d(y, z) \right) dx.$$

Nhận thấy rằng, với mỗi $x \in [a, b]$, $D_x \subseteq [c, d] \times [p, q]$. Hơn nữa, do $\partial([c, d] \times [p, q])$ và ∂D_x đều là các tập có độ đo bằng không nên $\partial([c, d] \times [p, q]/D_x)$ cũng là một tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.13),

$$\iint_{[c, d] \times [p, q]} f^*(x, y, z) d(y, z) = \iint_{D_x} f^*(x, y, z) d(y, z) + \iint_{[c, d] \times [p, q]/D_x} f^*(x, y, z) d(y, z).$$

Nhận thấy rằng, với mọi $x \in [a, b]$, $(y, z) \in [c, d] \times [p, q]/D_x$, $f^*(x, y, z) = 0$, nên

$$\iint_{[c, d] \times [p, q]} f^*(x, y, z) d(y, z) = \iint_{D_x} f^*(x, y, z) d(y, z).$$

Như vậy,

$$I = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f^*(x, y, z) d(y, z) \right) dx.$$

ii) Từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.1), tồn tại tích phân lặp $\iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y)$ tồn tại và bằng tích phân Riemann của hàm f^* trên K , nghĩa là

$$I = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Nhận thấy rằng $D_0 \subseteq [a, b] \times [c, d]$, $\partial([a, b] \times [c, d])$ và ∂D_0 đều là các tập có độ đo bằng không nên $\partial([a, b] \times [c, d]/D_0)$ cũng là một tập có độ đo bằng không.

Từ Kết quả 2.13),

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y) &= \iint_{D_0} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y) \\ &\quad + \iint_{[a,b] \times [c,d]/D_0} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y). \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng, với mọi $z \in [p, q]$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]/D_0$, $f^*(x, y, z) = 0$, nên

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y) = \iint_{D_0} \left(\int_p^q f^*(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Hơn nữa, do với mọi $(x, y) \in D_0$, $z \in [p, q]/[\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)]$, $f^*(x, y, z) = 0$, nên

$$\int_p^q f^*(x, y, z) dz = \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Như vậy,

$$I = \iint_{D_0} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y). \quad \square$$

Tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Nhắc lại rằng một tập bị chặn $E \in \mathbb{R}^3$ được gọi là một **tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$** nếu, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số hữu hạn các hình hộp chữ nhật đóng kín tập E và tổng thể tích của chúng nhỏ hơn ε . Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được dạng mở rộng của Kết quả 2.3) cho các tập E có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$. Như vậy, chúng ta cũng có thể chứng minh được dạng mở rộng của Kết quả 2.4) cho các tập E có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Lập luận tương tự, chúng ta cũng chứng minh được dạng mở rộng của Kết quả 2.5), nghĩa là nếu D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$ sao cho ∂D là một tập có độ đo bằng không và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f cũng là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ thì f là một hàm khả tích Riemann trên D .

Bằng cách sử dụng Kết quả 2.6) và khẳng định (ii) của Nguyên lí Cavalieri (Kết quả 3.2), chúng ta có thể chứng minh được dạng tương tự của Kết quả 2.7) cho các tích phân Riemann ba lớp như sau:

Kết quả 3.3.

Giả sử D_0 là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D_0 là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^2$ và D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$ có dạng $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D_0 \text{ và } \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$.

Khi đó, ∂D cũng là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Hơn nữa, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ thì f là một hàm khả tích Riemann trên D và

$$\iiint_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{D_0} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Tập đo được trong $\mathbb{R}^3$.

Giả sử D là một tập bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$. D được gọi là một tập **đo được** nếu hàm $1_D: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $1_D(x, y, z) := 1$ với mọi $(x, y, z) \in D$ khả tích Riemann trên D .

Thể tích $V(D)$ của tập D được xác định bởi công thức $V(D) := \iiint_D 1_D(x, y, z) d(x, y, z)$.

Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được dạng mở rộng của Kết quả 2.9) cho các tập D nằm trong $\mathbb{R}^3$ nghĩa là D là một tập đo được khi và chỉ khi ∂D là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$. Đồng thời, D là một tập đo được và $V(D) = 0$ khi và chỉ khi D là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$. Điều này chỉ ra rằng nếu D là một tập con bị chặn nằm trong $\mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích Riemann thì f khả tích Riemann trên mọi tập con D_0 của D sao cho ∂D_0 là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Công thức đổi biến cho tích phân ba lớp.

Nhắc lại rằng một **phép tịnh tiến** trong $\mathbb{R}^3$ là một phép biến đổi xác định bởi công thức

$$\Phi(u, v, w) := (x_0 + u, y_0 + v, z_0 + w) \text{ trong đó } (x_0, y_0, z_0) \text{ là một điểm cố định bất kì nằm trong } \mathbb{R}^3.$$

Lập luận tương tự, chúng ta cũng chứng minh được dạng mở rộng của Kết quả 2.15), nghĩa là tích phân Riemann ba lớp được bảo toàn qua các phép tịnh tiến. Điều này cũng giúp chúng ta tính toán công thức thể tích của các hình hộp chữ nhật tương tự như cách chúng ta đã dùng để tính toán công thức diện tích của các hình bình hành như trong Kết quả 2.16):

Kết quả 3.4.

Giả sử $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ là bốn điểm không đồng phẳng nằm trong $\mathbb{R}^3$, D là một hình hộp chữ nhật nhận $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ làm các đỉnh và có một đỉnh nằm đối diện với (x_0, y_0, z_0) qua mặt phẳng đi qua $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$.

Khi đó, D là một tập đo được và

$$V(D) = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{bmatrix} \right|.$$

Nhắc lại rằng một **phép biến đổi affine trong $\mathbb{R}^3$** là một phép biến đổi xác định bởi công thức

$$\Phi(u, v, w) = (x_0 + a_1u + b_1v + c_1w, y_0 + a_2u + b_2v + c_2w, z + a_3u + b_3v + c_3w)$$

với mọi $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Jacobian $J(\Phi)$ của phép biến đổi Φ xác định bởi công thức $J(\Phi) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$.

Phép biến đổi Φ được gọi là **phép biến đổi affine khả nghịch** nếu Φ là một song ánh.

Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch $\Leftrightarrow J(\Phi) \neq 0$.

Hơn nữa, phép biến đổi ngược $\Phi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một phép biến đổi affine.

Nếu Φ là một phép biến đổi affine khả nghịch thì Φ sẽ biến hình hộp chữ nhật E thành một hình hộp chữ nhật D khác sao cho $V(D) = |J(\Phi)|V(E)$. Hơn nữa, nếu E là một tập bị chặn bất kì đo được trong $\mathbb{R}^3$ thì $D := \Phi(E)$ cũng là một tập bị chặn đo được trong $\mathbb{R}^3$ và $V(D) = |J(\Phi)|V(E)$.

Lập luận tương tự, chúng ta chứng minh được dạng mở rộng sau của Kết quả 2.19):

Kết quả 3.5. (Công thức đổi biến cho các phép biến đổi affine)

Giả sử D là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ sao cho ∂D là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Giả sử $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là một phép biến đổi affine với $J(\Phi) \neq 0$.

Khi đó, nếu tồn tại một tập con $E \subseteq \mathbb{R}^3$ sao cho $\Phi(E) = D$ thì D cũng là một tập bị chặn và ∂D cũng là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Hơn nữa, $f \circ \Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một hàm bị chặn với tập các điểm gián đoạn của hàm $f \circ \Phi$ là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ và

$$\iiint_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_D f(\Phi(u, v, w)) |J(\Phi)| d(u, v, w).$$

Sau cùng, chúng ta dễ dàng chứng minh được dạng mở rộng sau của Kết quả 2.20):

Kết quả 3.6. (Công thức đổi biến cho hàm ba biến)

Giả sử D là một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}^3$ sao cho ∂D là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn sao cho tập các điểm gián đoạn của hàm f có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Giả sử Ω là một tập con mở của $\mathbb{R}^3$ và $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ là một phép biến đổi 1 – 1 sao cho $D \subseteq \Phi(\Omega)$.

Kí hiệu $\Phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Giả sử ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 là các hàm có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên Ω và $J(\Phi)(u, v, w) \neq 0$ với mọi $(u, v) \in \Omega$. Giả sử $E \subseteq \Omega$ sao cho $\Phi(E) = D$.

Khi đó, E là một tập con đóng và bị chặn của Ω sao cho ∂E là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$.

Hơn nữa, $f \circ \Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ cũng là một hàm bị chặn có tập các điểm gián đoạn là một tập có độ đo bằng không trong $\mathbb{R}^3$ và

$$\iiint_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_E (f \circ \Phi)(u, v, w) |J(\Phi)(u, v, w)| d(u, v, w).$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, A course in Multivariable Calculus and Analysis, ????
- [2]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 2 – GIẢI TÍCH 2, ??/??/????.
- [3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập II, ??/??/????
- [4]. Trương Phước Nhân, Phép tính tích phân Riemann cho hàm hai biến, 30/07/2021.