

Lý thuyết đồ thị hiện đại (cơ bản)

Trương Phước Nhân, 27/10/2019

- Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản
- Chủ đề 02. Cặp ghép
- Chủ đề 03. Tính liên thông
- Chủ đề 04. Đồ thị phẳng
- Chủ đề 05. Bài toán tô màu đồ thị
- Chủ đề 06. Mạng vận tải
- Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc
- Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị thưa
- Chủ đề 09. Dạng đồ thị của lý thuyết Ramsey
- Chủ đề 10. Đồ thị Hamilton
- Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên
- Chủ đề 12. Cây khung - Tập sắp thứ tự tốt

Nội dung của bài viết này nhằm mục đích giới thiệu một số kết quả lý thuyết mang tính thông dụng nhất trong các ứng dụng của lý thuyết đồ thị hiện đại.

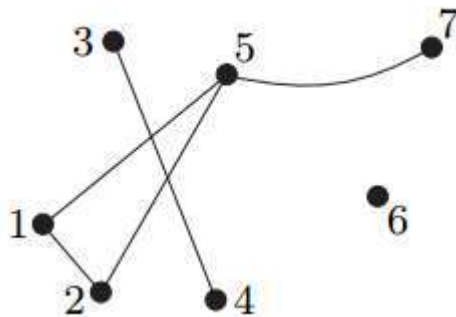
Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản

1.1. Đồ thị

Đồ thị G là một cặp (V, E) gồm một tập đỉnh V và một tập cạnh E sao cho $E \subseteq [V]^2$, tức là các phần tử của E là các 2-tập con của tập V .

Các phần tử của tập V được gọi là các đỉnh của đồ thị G , còn các phần tử của E được gọi là các cạnh của G .

Đồ thị G thường được biểu diễn trực quan bằng cách sử dụng các chấm tròn để biểu diễn cho các đỉnh và nối hai chấm tròn lại bằng một cung nếu như chúng tạo thành một cạnh của đồ thị G .



Đồ thị trên tập đỉnh $V = \{1, \dots, 7\}$ với tập cạnh

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}.$$

Tập các đỉnh của đồ thị G thường được kí hiệu là $V(G)$, còn tập các cạnh thì được kí hiệu là $E(G)$.

Số các đỉnh của đồ thị G được gọi là **bậc** của nó, kí hiệu bởi $|G|$; còn số các cạnh của nó được kí hiệu là $\|G\|$.

Đồ thị G được gọi là **hữu hạn** hoặc **vô hạn** tùy thuộc vào bậc $|G|$ của nó.

Lưu ý rằng trong toàn bộ nội dung bài viết này nếu không có giải thích gì thêm thì mặc định là đang khảo sát các đồ thị hữu hạn.

Đỉnh v được gọi là **liên thuộc** với cạnh e nếu $v \in e$, tức là đỉnh v là một đầu mút nào đó của cạnh e .

Cạnh $\{x, y\}$ thường được kí hiệu lại dưới dạng xy (hoặc yx). Nếu $x \in X$ và $y \in Y$ thì xy được gọi là một $X - Y$ cạnh. Tập hợp gồm tất cả các $X - Y$ cạnh trong tập E được kí hiệu là $E(X, Y)$.

Để thuận tiện trong quá trình trình bày, thông thường ta kí hiệu $E(x, X)$ và $E(X, y)$ thay cho $E(\{x\}, X)$ và $E(X, \{y\})$. Tập hợp gồm tất cả các cạnh trong E nhận v làm một đầu mút được kí hiệu là $E(v)$.

Hai đỉnh x, y được gọi là **liên hợp** (hoặc **láng giềng**) nếu xy là một cạnh của đồ thị G .

Hai cạnh phân biệt e, f được gọi là liên hợp nếu chúng có chung một đầu mút.

Nếu tất cả các đỉnh của một đồ thị G đều liên hợp đôi một với nhau thì đồ thị G được gọi là **đầy đủ**.

Một đồ thị đầy đủ trên n đỉnh thường được kí hiệu là K_n ; đồ thị K_3 thường được gọi là một **tam giác**.

Một tập hợp các đỉnh (hoặc các cạnh) đôi một không liên hợp với nhau được gọi là **độc lập** (hoặc **ổn định**).

Cho trước hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$.

Đồ thị G và G' được gọi là đẳng cấu, kí hiệu $G \simeq G'$, nếu tồn tại một song ánh $\varphi: V \rightarrow V'$ sao cho $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ với mọi $x, y \in V$.

Ánh xạ φ được gọi là một phép **đẳng cấu**; nếu $G = G'$ thì φ được gọi là một **tự đẳng cấu**.

Thực tế nếu một kết quả suy luận nào đó của ta đúng trên một đồ thị thì lập luận đó cũng sẽ đúng trên các đồ thị đẳng cấu với nó nên thường ta không quá đặt nặng việc phải phân biệt các đồ thị đẳng cấu với nhau.

Do đó ta thường kí hiệu $G = G'$ hơn so với cách kí hiệu $G \simeq G'$.

Cho trước hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$.

Đặt $G \cup G' := (V \cup V'; E \cup E')$ và $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$.

Nếu $G \cap G' = \emptyset$ thì G và G' được gọi là **phân biệt**.

Nếu $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$ thì G' là một **đồ thị con** của G (hoặc đồ thị G **chứa** đồ thị G').

Nếu $G' \subseteq G$ và G' chứa tất cả các cạnh $xy \in E$ với $x, y \in V'$ thì G' được gọi là một **đồ thị con cảm sinh** của G ; tập V' được gọi là **khung** G' trong G , kí hiệu $G' = G[V']$.

Do đó, nếu $U \subseteq V$ là một tập các đỉnh thì $G[U]$ chính là đồ thị con trên tập đỉnh U với các cạnh chính là các cạnh của G mà có cả hai đầu mút đều nằm trong U .

Nếu $G' \subseteq G$ và V' là khung của G , tức là $V' = V$, thì G' được gọi là **đồ thị con khung** của G .

Nếu U là một tập đỉnh bất kì của đồ thị G thì ta kí hiệu $G - U := G[V \setminus U]$.

Nói cách khác, $G - U$ chính là đồ thị thu được từ đồ thị G bằng cách xóa đi tất cả các đỉnh nằm trong U và các cạnh liên thuộc với chúng.

Nếu $U = \{v\}$ thì để thuận tiện trong trình bày ta thường kí hiệu $G - v$ thay cho $G - \{v\}$.

Nếu $F \subseteq [V]^2$ thì ta kí hiệu $G - F := (V, E \setminus F)$ và $G + F := (V, E \cup F)$.

Tương tự như ở trên, để thuận tiện khi trình bày các kết quả, ta thường kí hiệu $G - e$ và $G + e$ thay cho cách viết $G - \{e\}$ và $G + \{e\}$.

Đồ thị G được gọi là **tối đại – cạnh** (hoặc **tối tiểu – cạnh**) theo một tính chất P nào đó nếu bản thân G thỏa mãn tính chất P nhưng không có đồ thị $G + xy$ (hoặc $G - xy$) nào thỏa mãn tính chất P trong đó x, y là hai đỉnh không liên hợp bất kì của đồ thị G .

Lưu ý rằng trong cách định nghĩa khái niệm **tối đại** (hoặc **tối tiểu**) theo một tính chất P nêu trên thật ra chính là ta đang xem xét phần tử tối đại và tối tiểu trên quan hệ đồ thị con đã được định nghĩa trước đó; còn khi ta nói một tập các đỉnh (hoặc tập các cạnh) là tối đại (hoặc tối tiểu) thì ta đang xem xét trên quan hệ bao hàm thông thường.

Nếu G và G' là hai đồ thị phân biệt thì $G * G'$ kí hiệu cho đồ thị nhận được từ $G \cup G'$ bằng cách nối tất cả các đỉnh của G với tất cả các đỉnh của đồ thị G' .

Phần bù $\overline{G}$ của G là một đồ thị trên tập đỉnh V có tập cạnh là $[V]^2 \setminus E$.

Đồ thị tuyến tính $L(G)$ của G là một đồ thị có tập đỉnh là E sao cho hai đỉnh $x, y \in E$ liên hợp với nhau khi và chỉ khi x, y là hai đỉnh liên hợp trong G .

1.2. Bậc của một đỉnh

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$.

Kí hiệu $N_G(v)$ (hoặc đơn giản là $N(v)$) là tập tất cả các láng giềng của đỉnh v trong đồ thị G .

Với mọi tập $U \subseteq V$, tập các láng giềng của tập đỉnh U , kí hiệu là $N(U)$, là tập tất cả các láng giềng nằm trong $V \setminus U$ của các đỉnh nằm trong tập U .

Bậc $d_G(v)$ (hoặc đơn giản là $d(v)$) của một đỉnh v chính là số $|N(v)|$, tức là bằng số các đỉnh láng giềng của đỉnh v . Một đỉnh có bậc bằng 0 được gọi là đỉnh cô lập.

Số $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$ được gọi là **bậc nhỏ nhất** của G , số $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$ được gọi là **bậc lớn nhất** của G .

Nếu tất cả các đỉnh của G đều có bậc k thì G được là k - **đều** (hoặc đơn giản là **đều**).

Một đồ thị 3- đều được gọi là một **khối lập phương**.

Số $d(G) := \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|}$ được gọi là **bậc trung bình** của đồ thị G .

Dễ dàng nhận thấy rằng $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

Bậc trung bình của một đồ thị là thước đo giúp ta đánh giá sự phân bố của các cạnh trên từng đỉnh của một đồ thị.

Thật vậy, bằng cách kí hiệu $\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}$ là tỉ số giữa số cạnh trên số đỉnh của đồ thị G ,

ta nhận thấy rằng $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$.

(Nếu tính tổng $\sum_{v \in V} d(v)$ theo tất cả các bậc đỉnh của G thì mỗi cạnh chúng ta tính lặp lại chính xác hai lần: mỗi lần cho mỗi đầu mút của cạnh này)

Do đó $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G)|V|$, nên $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$.

Nếu một đồ thị có bậc nhỏ nhất đủ lớn thì nó cũng sẽ có nhiều cạnh trên một đỉnh, bởi vì $\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G) \geq \frac{1}{2} \delta(G)$.

Nhưng ngược lại một đồ thị có thể có bậc trung bình rất lớn mặc dù bậc nhỏ nhất của nó là khá nhỏ.

Tuy nhiên các đỉnh có bậc đủ lớn không hoàn toàn phân tán giữa các đỉnh có bậc nhỏ, tức là mọi đồ thị G đều sẽ chứa ít nhất một đồ thị con có bậc trung bình không nhỏ hơn bậc trung bình của đồ thị G và bậc nhỏ nhất của nó cũng không nhỏ hơn phân nửa lần bậc nhỏ nhất của đồ thị G :

Kết quả 1.2

Mọi đồ thị G có ít nhất một cạnh đều chứa một đồ thị con H sao cho $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Ý tưởng để xây dựng H từ đồ thị G rất đơn giản: ta sẽ xóa dần đi tất cả các đỉnh có bậc nhỏ cho đến khi chỉ còn lại các đỉnh có bậc đủ lớn của đồ thị G .

Một câu hỏi mà ta phải giải quyết trước khi trình bày phép chứng minh của ta đó là :

“Điều kiện của bậc đỉnh $d(v)$ là gì để khi ta xóa đi đỉnh v thì không làm giảm giá trị của $\varepsilon(G)$?”

Câu trả lời cho câu hỏi này đó chính là $d(v) \leq \varepsilon(G)$.

Thật vậy, khi ta xóa đi đỉnh v mà $d(v) \leq \varepsilon(G)$ thì số các đỉnh bị giảm đi 1 còn số các cạnh giảm đi tối đa không vượt quá $d(v)$.

Khi đó,

$$d(G) = \frac{2|E(G)|}{|V|} \leq d(G-v) = \frac{2(|E(G)| - d(v))}{|V| - 1}$$
$$\Leftrightarrow d(v) \leq \frac{1}{2} d(G)$$

Do đó, tỉ số ε giữa số cạnh trên số đỉnh sẽ không bị giảm.

Chứng minh kết quả 1.1.

Đầu tiên ta xây dựng một dãy các đồ thị con cảm sinh $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ bằng như sau:

“Nếu G_i có một đỉnh v_i có bậc $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$ thì ta đặt $G_{i+1} := G_i - v_i$; trong trường hợp ngược lại, ta kết thúc quá trình xây dựng và đặt $H := G_i$ ”.

Theo cách chọn đỉnh v_i , $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$ với mọi i .

Do đó, $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Mặt khác, $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$, nên không có bất kì đồ thị nào trong dãy đồ thị con mà ta xây dựng theo phương pháp trình bày ở trên là đồ thị rỗng, tức là $H \neq \emptyset$.

Điều đó có nghĩa đồ thị H có chứa ít nhất một đỉnh không phù hợp với điều kiện nêu trong thuật toán, tức là $\delta(H) > \varepsilon(H)$. □

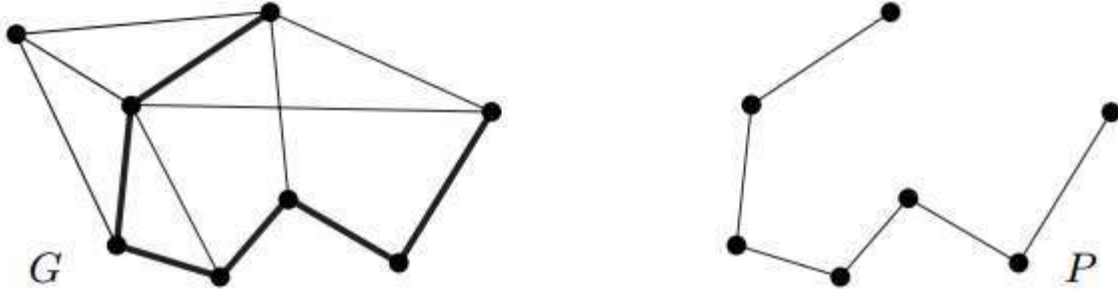
1.3. Đường đi và chu trình

Đường đi $P = (V, E)$ là một đồ thị với tập đỉnh $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ và tập cạnh $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ trong đó tất cả các đỉnh v_i đều đôi một phân biệt.

Khi đó, hai đỉnh x_0 và x_k gọi là **được liên kết bởi đường đi** P và được gọi là các **đầu mút** của P ; các đỉnh $x_1, \dots, x_{k-1}$ được gọi là các **đỉnh trong** của đường đi P .

Số các cạnh của một đường đi được gọi là **chiều dài** của nó và đường đi có độ dài k được kí hiệu là P_k .

Lưu ý rằng k có thể nhận giá trị bằng 0, tức là $P_0 = K^1$.



Đường đi $P = P_5$ trong đồ thị G .

Thông thường ta kí hiệu một đường đi bởi các đỉnh của nó, chẳng hạn $P = x_0x_1\dots x_k$, và P gọi là một **đường đi từ** x_0 **đến** x_k (hoặc **giữa** x_0 **và** x_k).

Với $0 \leq i \leq j \leq k$, kí hiệu:

$$Px_i := x_0 \dots x_i$$

$$x_iP := x_i \dots x_k$$

$$x_iPx_j := x_i \dots x_j$$

và

$$\overset{o}{P} := x_1x_2\dots x_{k-1}$$

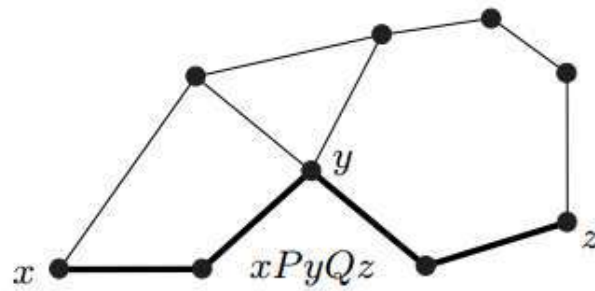
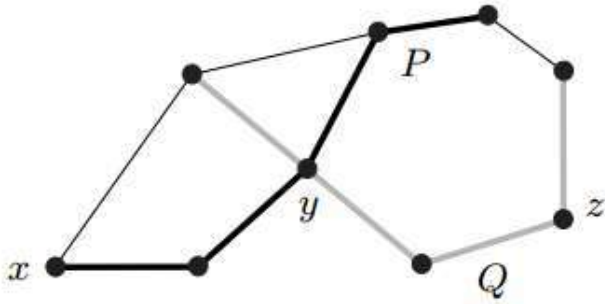
$$\overset{o}{P}x_i := x_0\dots x_{i-1}$$

$$\overset{o}{x_i}P := x_{i+1}\dots x_k$$

$$\overset{o}{x_i}P\overset{o}{x_j} := x_{i+1}\dots x_{j-1}.$$

Để thuận tiện trong việc trình bày các phép chứng minh ta thường đơn giản hóa các cách kí hiệu các đường đi.

Chẳng hạn, nếu hợp $Px \cup xQy \cup yR$ của ba đường đi Px , xQy , yR cũng là một đường đi thì ta có thể đơn giản hóa cách kí hiệu thành $PxQyR$.



Đường P, Q và $xPyQz$.

Cho trước hai tập đỉnh A, B , đường đi $P = x_0 \dots x_k$ được gọi là một **đường đi** $A - B$ nếu $V(P) \cap A = \{x_0\}$ và $V(P) \cap B = \{x_k\}$.

Để đơn giản hóa cách kí hiệu ta thường kí hiệu một đường đi $\{a\} - B$ bởi $a - B$.

Hai hay nhiều đường đi được gọi là **độc lập** nếu không có đường đi nào trong số chúng chứa đỉnh trong của một trong các đường đi còn lại.

Hai đường đi $a - b$ được gọi là độc lập khi và chỉ a, b là cặp đỉnh chung duy nhất của chúng.

Cho trước một đồ thị con H , đường đi P được gọi là **H -đường đi** nếu P khác rỗng và giao của đường đi P với đồ thị H chính là các đầu mút của nó.

Cho trước một đường đi $P = x_0 \dots x_{k-1}$ ($k \geq 3$).

Khi đó, đồ thị $P + x_{k-1}x_0$ được gọi là một **chu trình**.

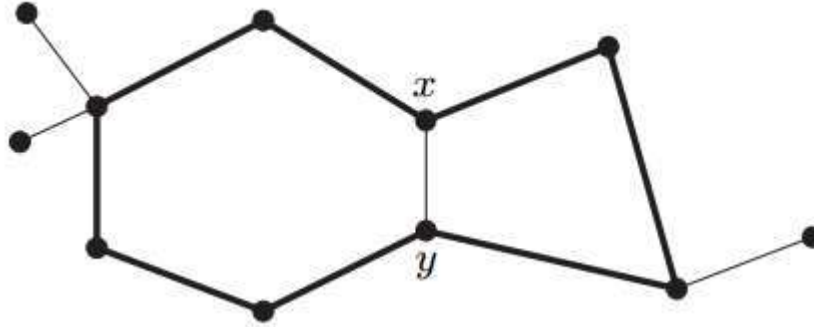
Bằng cách kí hiệu tương tự như đã đối với các đường đi, thông thường để giảm bớt tính phức tạp ta thường kí hiệu một chu trình bởi dãy các đỉnh của nó. Chẳng hạn, chu trình C thường được kí hiệu lại dưới dạng $x_0 \dots x_{k-1}x_0$.

Chiều dài của một chu trình chính là số cạnh (hoặc số đỉnh) của chính chu trình đó; một chu trình có độ dài k thường được gọi là một k -**chu trình** và kí hiệu bởi C_k .

Độ dài nhỏ nhất của một chu trình chứa trong đồ thị G được gọi là **girth** của đồ thị G và kí hiệu là $g(G)$; độ dài lớn nhất của một chu trình chứa trong đồ thị G được gọi là **circumference**.

Cạnh nối hai đỉnh không liên hợp nhau của chu trình được gọi là một **dây cung** của chu trình đó.

Đồ thị con cảm sinh của đồ thị G có dạng một chu trình được gọi là một chu trình cảm sinh của đồ thị G .



Chu trình C_8 với dây cung xy và các chu trình cảm sinh C_6, C_4 .

Nếu một đồ thị có bậc nhỏ nhất đủ lớn thì nó sẽ chứa một đường đi và một chu trình có chiều dài khá lớn:

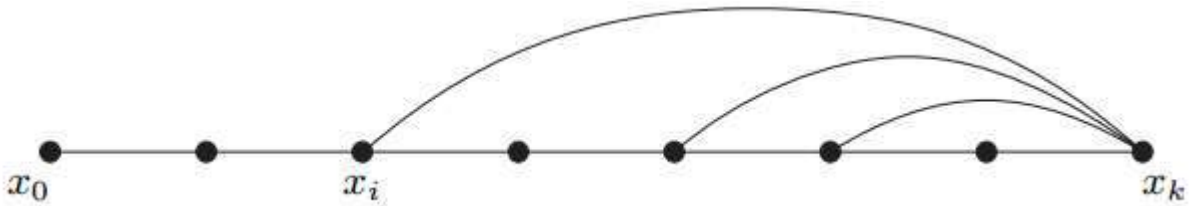
Kết quả 1.3.1.

Mọi đồ thị G đều chứa một đường đi có chiều dài bằng $\delta(G)$ và một chu trình có chiều dài tối thiểu bằng $\delta(G)+1$.

Chứng minh kết quả 1.3.1.

Giả sử $x_0 \dots x_k$ là đường đi có chiều dài cực đại trong đồ thị G .

Khi đó, tất cả các láng giềng của đỉnh x_k đều phải nằm trên đường đi này.



Do đó, $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$.

Đồng thời, nếu gọi i ($0 \leq i \leq k-1$) là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_i x_k \in E(G)$.

Khi đó, $x_i \dots x_k x_i$ là một chu trình và chiều dài của nó tối thiểu là bằng $\delta(G)+1$. □

Khoảng cách $d_G(x, y)$ (hoặc $d(x, y)$) giữa hai đỉnh x, y được định nghĩa là chiều dài của đường đi $x-y$ nhỏ nhất chứa trong đồ thị G ; trong trường hợp không có một đường đi $x-y$ nào như thế thì ta đặt $d_G(x, y) := \infty$.

Khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh bất kì của đồ thị G được gọi là **đường kính của G** , kí hiệu bởi $diam(G)$.

Kết quả 1.3.2.

Mọi đồ thị G có chứa ít nhất một chu trình đều thỏa mãn đánh giá $g(G) \leq 2diam(G)+1$.

Chứng minh kết quả 1.3.2.

Giả sử C là chu trình có độ dài nhỏ nhất được chứa trong đồ thị G .

Nếu $g(G) \geq 2diam(G)+2$ thì C chứa hai đỉnh mà khoảng cách giữa hai đỉnh này trong C là lớn hơn hoặc bằng $diam(G)+1$.

Theo định nghĩa về đường kính, khoảng cách giữa hai đỉnh này trong đồ thị G phải nhỏ hơn so với khoảng cách của chúng khi tính trong đồ thị C nên đường đi ngắn nhất P nối hai đỉnh trên không thể là một đồ thị con của C .

Do đó, đường đi P phải chứa một C - đường đi có dạng xPy .

Bằng cách với đường đi có độ dài nhỏ trong số hai đường đi $x - y$ trong C , ta thu được một chu trình có chiều dài còn nhỏ hơn cả chu trình C , mâu thuẫn với giả thiết C là chu trình có độ dài nhỏ nhất được chứa trong đồ thị G . $\square$

Đỉnh v được gọi là **tâm** của đồ thị G nếu khoảng cách lớn nhất từ đỉnh v đến tất cả các đỉnh còn lại là nhỏ nhất.

Khoảng cách này được gọi là **bán kính** của đồ thị G , kí hiệu bởi $rad(G)$.

Do đó, $rad(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$. Hiển nhiên, $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$.

Đường kính và bán kính không có mối liên hệ trực tiếp với bậc nhỏ nhất hoặc bậc trung bình.

Tuy nhiên, đường kính và bán kính lại có liên hệ mật thiết với bậc lớn nhất:

“Đồ thị có bậc lớn chỉ có thể có đường kính và bán kính nhỏ nếu bậc lớn nhất của nó là đủ lớn”.

Kết quả 1.3.3.

Cho trước đồ thị G có bán kính nhỏ hơn hoặc bằng k và bậc lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng d .

Khi đó, G chứa không quá $1 + kd^k$ đỉnh.

Chứng minh kết quả 1.3.3.

Giả sử z là tâm của G và kí hiệu D_i là tập tất cả các đỉnh của đồ thị G có khoảng cách đến đỉnh z đúng bằng i .

Khi đó, $V(G) = \bigcup_{i=0}^k D_i$ và $|D_0| = 1$.

Mặt khác, từ giả thiết $\Delta(G) \leq d$, $|D_i| \leq d|D_{i-1}|$ với mọi $i = 1, \dots, k$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh rằng $|D_i| \leq d^i$ với mọi $i = 1, \dots, k$.

Do đó, $|G| \leq 1 + \sum_{i=1}^k d^i \leq 1 + kd^k$. $\square$

Đây truyền có độ dài k trong đồ thị G là một dãy $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$ gồm các đỉnh và các cạnh của G sắp xếp luân phiên nhau sao cho $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ với mọi $i = 1, \dots, k-1$; trong trường hợp $v_0 = v_k$ thì xích được gọi là **đóng**.

Nếu tất cả các đỉnh của một xích đôi một phân biệt thì xích đó chính là một đường đi trong G .

1.4. Tính liên thông

Đồ thị G được gọi là **liên thông** nếu hai đỉnh bất kì của nó đều được nối với nhau bởi một đường đi nào đó trong G .

Nếu $U \subseteq V(G)$ và $G[U]$ là đồ thị liên thông thì U được gọi là **tập liên thông trong G** .

Kết quả 1.4.1.

Cho trước đồ thị liên thông G .

Khi đó, tồn tại một phép đánh số lại các đỉnh của đồ thị dưới dạng $v_1, \dots, v_n$ sao cho $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ luôn là đồ thị liên thông với mọi i .

Chứng minh kết quả 1.4.1.

Ta sẽ chỉ ra một cách xây dựng phép đánh số các đỉnh thỏa mãn yêu cầu đề bài bằng phương pháp đệ quy.

Nhận xét $G_1 = G[v_1]$ luôn là một đồ thị liên thông.

Giả sử đã tìm được các đỉnh $v_1, \dots, v_i$ của đồ thị G sao cho $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ luôn là đồ thị liên thông với mọi $i = 1, \dots, n-2$.

Khi đó, tồn tại một đỉnh $v \in G - G_i$.

Mặt khác, do G là một đồ thị liên thông nên tồn tại một đường đi $v - v_1$.

Đặt v_{i+1} là đỉnh cuối cùng của đường đi P nằm trong $G - G_i$.

Khi đó, đỉnh v_{i+1} có ít nhất là một láng giềng nằm trong G_i .

Dễ dàng chứng minh được rằng đồ thị $G_{i+1} = G[v_1, \dots, v_{i+1}]$ cũng là một đồ thị liên thông. $\square$

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$.

Đồ thị con H của G được gọi là **thành phần liên thông** nếu H là đồ thị con liên thông cực đại được chứa trong G .

Tập $X \subseteq V \cup E$ được gọi là **tách** các tập đỉnh A, B nếu với mọi đường đi $A - B$ chứa trong G đều chứa ít nhất một đỉnh hoặc một cạnh thuộc tập X .

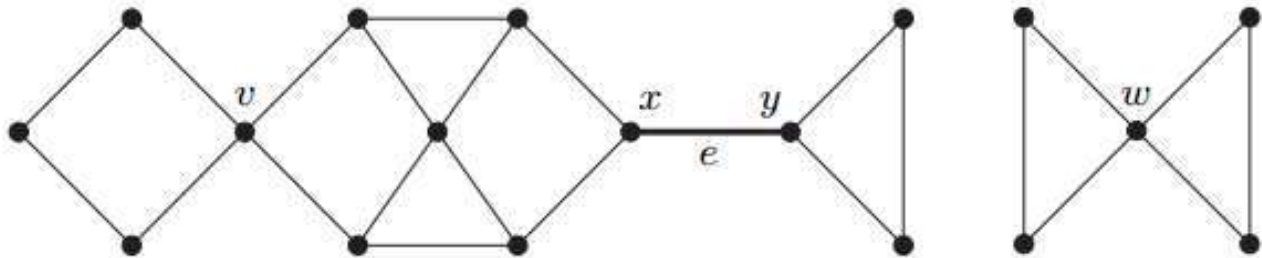
Điều này chứng tỏ rằng $A \cap B \subseteq X$.

Hơn nữa, tập X được gọi là **tách** G (hoặc X là **tập tách** của G) nếu X tách hai đỉnh nào đó của $G - X$ trong G .

Một đỉnh được gọi là **đỉnh khớp** nếu nó tách hai đỉnh nào đó trong cùng một thành phần liên thông.

Một cạnh được gọi là **cạnh cầu** nếu nó tách hai đầu mút của chính mình.

Điều này chứng tỏ rằng cạnh cầu không thể nằm trên bất kỳ một chu trình trong một đồ thị.



Đồ thị với các đỉnh khớp v, x, y, w và cạnh cầu $e = xy$.

Đồ thị G được gọi là k -**liên thông** nếu $|G| > k$ và $G - X$ là đồ thị liên thông với mọi tập $X \subseteq V$ sao cho $|X| < k$, tức là không có hai đỉnh nào của đồ thị G được tách bởi ít hơn k đỉnh còn lại.

Đồ thị bất kỳ luôn là 0- liên thông; đồ thị 1- liên thông chính là đồ thị liên thông thông thường.

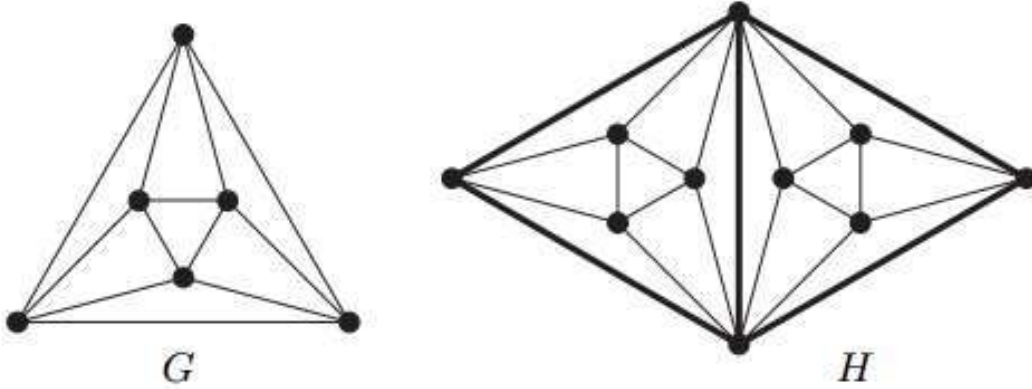
Số nguyên k lớn nhất sao cho G là một đồ thị k - liên thông được gọi là **chỉ số liên thông** $\kappa(G)$ của đồ thị G .

Khi đó, $\kappa(G) = 0$ nếu và chỉ nếu G là đồ thị không liên thông hoặc $G = K_1$, và $\kappa(K_n) = n - 1$ với $n \geq 1$.

Nếu $|G| > 1$ và $G - F$ là đồ thị liên thông với mọi tập $F \subseteq E$ sao cho $|F| < l$ thì G được gọi là l -**liên thông cạnh**.

Số nguyên l lớn nhất sao cho G là một đồ thị l - **liên thông cạnh** $\lambda(G)$ của đồ thị G .

Khi đó, $\lambda(G) = 0$ nếu và chỉ nếu G là đồ thị không liên thông.



Đồ thị G với $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$; đồ thị H với $\kappa(H) = 2$ và $\lambda(H) = 4$.

Dễ dàng chứng minh được rằng, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ với mọi đồ thị G .

Do đó một đồ thị có chỉ số liên thông lớn sẽ kéo theo bậc nhỏ nhất của đồ thị đó càng lớn.

Ngược lại, một đồ thị có bậc nhỏ nhất lớn không kéo theo chỉ số liên thông (hoặc chỉ số liên thông cạnh) của nó phải lớn.

Nhưng tuy nhiên giả thiết này lại dẫn đến sự tồn tại của một đồ thị con có chỉ số liên thông lớn của nó:

Kết quả 1.4.2. (Mader)

Mọi đồ thị có bậc trung bình lớn hơn hoặc bằng $4k$ đều chứa ít nhất một đồ thị con k - liên thông.

Chứng minh kết quả 1.4.2.

Nếu $k \in \{0, 1\}$ thì khẳng định là hiển nhiên.

Không mất tính tổng quát ta có thể xét $k \geq 2$ và xét một đồ thị $G = (V, E)$ thỏa mãn giả thiết của bài toán với $|V| =: n$ và $|E| =: m$.

Để đơn giản hóa phép chứng minh quy nạp của bài toán, ta sẽ chứng minh một khẳng định tổng quát hơn:

“Giả sử đồ thị $G = (V, E)$ thỏa mãn:

- i) $n \geq 2k - 1$;
- ii) $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$.

Khi đó, G chứa ít nhất một đồ thị con k - liên thông.”

(Khẳng định này thật sự mạnh hơn khẳng định cần chứng minh, tức là các điều kiện (i) và (ii) có thể được suy ra dễ dàng từ $d(G) \geq 4k$:

- i) vì $n > \Delta(G) \geq d(G) \geq 4k$,
- ii) vì $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn$

Ta chứng minh khẳng định vừa nêu bằng phương pháp quy nạp toán học theo số đỉnh n .

Nếu $n = 2k - 1$ thì $k = \frac{1}{2}n(n + 1)$, nên $m \geq \frac{1}{2}n(n - 1)$ (theo điều kiện ii).

Do đó, $G = K_n \supseteq K_{k+1}$ (đpcm).

Giả sử $n \geq 2k$. Nếu v là một đỉnh thỏa điều kiện $d(v) \leq 2k - 3$ thì bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp cho đồ thị $G - v$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\delta(G) \geq 2k - 2$.

Nếu G là một đồ thị k -liên thông thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên.

Như vậy ta có thể giả sử rằng đồ thị G có dạng $G = G_1 \cup G_2$ sao cho mọi cạnh của G đều nằm trong G_1 hoặc G_2 ; và không có cạnh nào nằm giữa $G_1 - G_2$ và $G_2 - G_1$ trong đó $|G_1 \cap G_2| < k$, $|G_1|, |G_2| < n$.

Do mỗi đỉnh trong các đồ thị con G_1, G_2 đều có bậc thấp nhất lớn hơn $\delta(G) \geq 2k - 2$ nên $|G_1|, |G_2| \geq 2k - 1$.

Do đó có ít nhất là một trong hai đồ thị G_1 hoặc G_2 phải thỏa mãn giả thiết của bài toán:

“Nếu cả hai đều không thỏa thì ta có $\|G_i\| \leq (2k - 3)(|G_i| - k + 1)$ với $i = 1, 2$, nên

$$\begin{aligned} m &\leq \|G_1\| + \|G_2\| \\ &\leq (2k - 3)(|G_1| + |G_2| - 2k + 2) \\ &\leq (2k - 3)(n - k + 1), \quad (\text{do } |G_1 \cap G_2| \leq k - 1) \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết ii).”

1.5. Rừng và cây

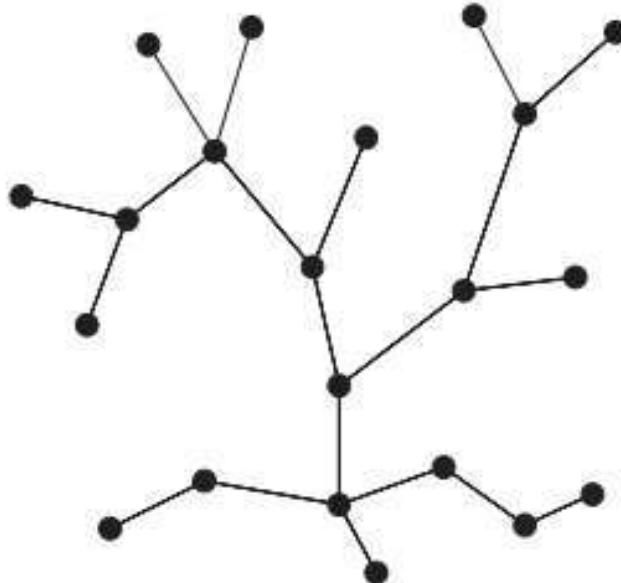
Rừng là một đồ thị *acyclic*: nghĩa là một đồ thị không chứa bất kì chu trình nào.

Cây là một rừng liên thông.

Nhận xét: các thành phần liên thông của một rừng chính là các cây.

Các đỉnh có bậc đúng bằng 1 của một cây được gọi là các **lá**.

Nhận xét: nếu ta xóa một lá ra khỏi một cây thì đồ thị thu được vẫn là một cây.



Cây

Kết quả 1.5.1.

Cho trước một đồ thị T . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương với nhau:

- i) T là một cây;
- ii) Hai đỉnh bất kì của T đều được nối bởi duy nhất một đường đi trong T ;
- iii) T là đồ thị liên thông tối thiểu, nghĩa là T là đồ thị liên thông nhưng $T - e$ không phải là đồ thị liên thông với mọi cạnh $e \in T$;
- iv) T là đồ thị acyclic tối đại, nghĩa là T là đồ thị acyclic nhưng $T + xy$ không phải là đồ thị acyclic với mọi đỉnh $x, y \in T$.

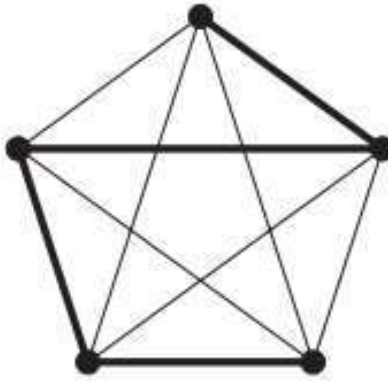
Phép chứng minh của kết quả 1.5.1 tương đối dài và có thể được suy ra một cách đơn giản từ định nghĩa cây nên ta sẽ lược bỏ qua không đi sâu vào trình bày.

Bằng cách mở rộng cách kí hiệu mà đã trình bày trong mục 1.3, ta dùng kí hiệu xTy để chỉ đường đi duy nhất trong T nối hai đỉnh x, y .

Một hệ quả đơn giản suy ra từ kết quả 1.5.1:

“Mọi đồ thị liên thông đều chứa ít nhất một cây khung.”

(điều này được suy ra đơn giản từ sự tương đương của (i) và (iii))

**Kết quả 1.5.2.**

Các đỉnh của một cây bất kì luôn có thể được đánh số thứ tự lại dưới dạng $v_1, \dots, v_n$ sao cho đỉnh i chỉ có duy nhất một lân cận nằm trong tập các đỉnh $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

Chứng minh kết quả 1.5.2.

Điều này suy ra trực tiếp bằng cách áp dụng kết quả 1.4.1 vào lý thuyết cây. □

Kết quả 1.5.3.

Một đồ thị liên thông có n đỉnh là cây khi và chỉ khi nó có đúng $n - 1$ cạnh.

Chứng minh kết quả 1.5.3.

Bằng cách thực hiện quy nạp theo n , ta dễ dàng chứng minh được rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh chứa đúng $n - 1$ cạnh.

Ngược lại, giả sử G là một đồ thị liên thông với n đỉnh và $n - 1$ cạnh.

Khi đó, nếu gọi G' là một cây khung của đồ thị liên thông G thì G' chứa đúng $n - 1$ cạnh.

Điều đó chứng minh rằng $G = G'$. □

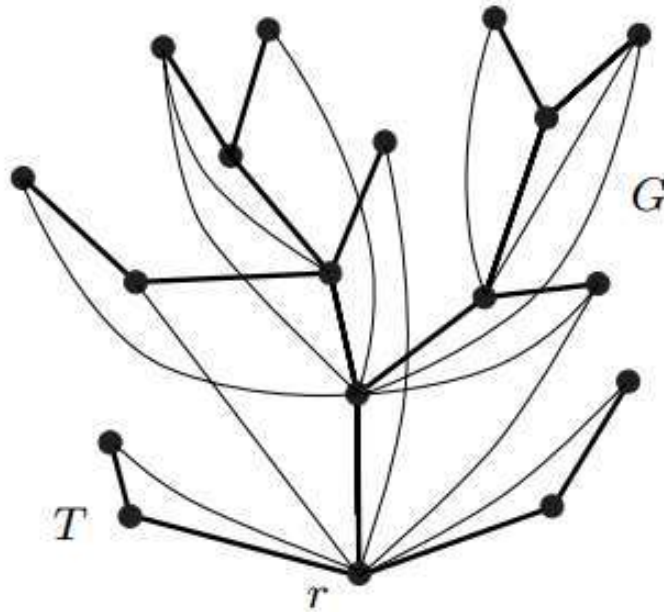
Cho trước cây T và chọn trước đỉnh r của cây T (đỉnh này thường được gọi là **gốc** của cây), ta định nghĩa quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập các đỉnh $V(T)$ như sau: $x \leq y$ khi và chỉ khi $x \in rTy$.

Nhận xét:

- Đỉnh r sẽ luôn là phần tử tối tiểu;
- Mọi lá $x \neq r$ của cây T đều là một phần tử tối đại;
- Hai đầu mút của một cạnh bất kì của cây T luôn so sánh được với nhau;
- Mọi tập có dạng $\{x \mid x \leq y\}$ (y là đỉnh cho trước) luôn là một xích.

Cho trước đồ thị T , cây con T với gốc cho trước được gọi là **chuẩn** trong G nếu tất cả các đầu mút của mọi T -đường đi chứa trong G đều so sánh được theo quan hệ thứ tự định nghĩa ở trên.

Nếu cây T vừa là chuẩn và vừa là đồ thị con khung của G , tức là hai đỉnh bất kì của T sẽ luôn so sánh được với nhau nếu như chúng liên hợp nhau, thì ta gọi T là một **cây khung chuẩn** hoặc **cây tìm kiếm theo chiều sâu**.



Cây khung chuẩn với gốc tại r .

Phép chứng minh sự tồn tại của cây khung chuẩn rất đơn giản nhưng lại được sử dụng rất thông dụng trong các phép chứng minh mang tính xây dựng trong lý thuyết đồ thị:

Kết quả 1.5.4.

Mọi đồ thị liên thông đều chứa một cây khung chuẩn với đỉnh gốc được chọn trước tùy ý.

Chứng minh kết quả 1.5.4.

Giả sử G là một đồ thị liên thông và $r \in G$ là một đỉnh cố định cho trước bất kì.

Gọi T là một cây chuẩn cực đại với gốc tại đỉnh r của đồ thị G .

Ta sẽ chứng minh rằng $V(T) = V(G)$.

Thật vậy, nếu gọi C là một thành phần liên thông của $G - T$ thì $N(C)$ là một xích trong cây T .

Gọi x là phần tử lớn nhất của xích $N(C)$ và $y \in C$ là một đỉnh liên hợp với x .

Khi đó, nếu gọi T' là cây thu được từ T bằng cách nối đỉnh y với đỉnh x thì T' sẽ đóng vai trò là thứ tự mở rộng liên kết với thứ tự trên cây T .

Nhận xét: “ T' cũng là một cây chuẩn của G .”

Thật vậy, giả sử P là một T' - đường đi trong đồ thị G .

Nếu các đầu mút của P đều nằm trong T thì chúng sẽ so sánh được theo thứ tự trên cây T (bởi vì P cũng là một T - đường đi và T là chuẩn trong G) nên hiển nhiên cũng so sánh được theo thứ tự trên cây T' .

Trong trường hợp ngược lại, đường đi P sẽ nằm trong C (do đỉnh y sẽ là một đầu mút nào đó của P) ngoài trừ đầu mút còn lại của nó, ta tạm gọi là z , là nằm trong $N(C)$.

Khi đó, $z \leq x$ (theo cách chọn của đỉnh x).

Để chứng minh y và z so sánh được với nhau ta chỉ cần chỉ ra rằng $x < y$, tức là $x \in rT'y$.

Do y là một lá của cây T' với đỉnh láng giềng là x nên điều này là hiển nhiên.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết T là cây chuẩn cực đại của G . □

1.6. Đồ thị lưỡng phân

Cho trước số nguyên $r \geq 2$. Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là r - **phần** nếu tập đỉnh V có thể được phân hoạch thành r lớp sao cho một cạnh bất kì đều có hai đầu mút nằm trong hai lớp phân biệt, tức là hai đỉnh bất kì nằm trong cùng một lớp phân hoạch sẽ không liên hợp với nhau.

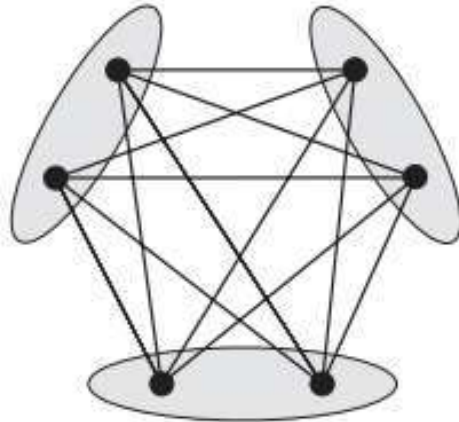
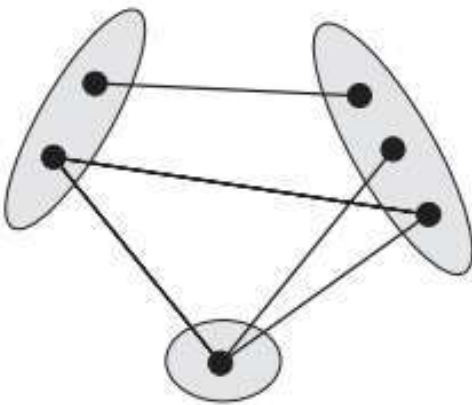
Thông thường để thay cho cách nói “đồ thị 2 – phần” ta thường gọi là **đồ thị lưỡng phân**.

Đồ thị r -phần và thỏa mãn điều kiện hai đỉnh bất kì thuộc hai phân lớp khác nhau đều liên hợp với nhau được gọi là đầy đủ.

Đồ thị đầy đủ r - phần $K_{n_1} * K_{n_2} * \dots * K_{n_r}$ thường được kí hiệu gọn lại dưới dạng $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$;

nếu $n_1 = \dots = n_r =: s$ thì ta thu gọn lại thành K_s^r , nghĩa là K_s^r là đồ thị r - phần đầy đủ thỏa mãn mỗi lớp phân hoạch của tập đỉnh chứa chính xác s đỉnh.

Đồ thị có dạng $K_{1,n}$ thường được gọi là **đồ thị sao**.



Hiển nhiên, đồ thị lưỡng phân không thể chứa chu trình lẻ, tức là chu trình có độ dài là một số lẻ.

Ngược lại, nếu đồ thị không chứa chu trình lẻ nào thì nó cũng phải là một đồ thị lưỡng phân và đây cũng chính là tính chất đặc trưng của lớp các đồ thị lưỡng phân:

Kết quả 1.6.1.

Một đồ thị là lưỡng phân khi và chỉ khi nó không có chứa chu trình lẻ.

Chứng minh kết quả 1.6.1.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị không có chứa chu trình lẻ.

Ta sẽ chứng minh rằng G là một đồ thị lưỡng phân.

Nhận xét 1:

“Nếu tất cả các thành phần liên thông của G đều là lưỡng phân thì bản thân G cũng là một đồ thị lưỡng phân.”

Như vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử đồ thị G là liên thông.

Gọi T là một cây khung trong G với gốc tại đỉnh $r \in T$ và $\leq_T$ là quan hệ thứ tự xây dựng trên cây T .

Nhận xét 2:

“Với mọi đỉnh $v \in V$, đường đi duy nhất rTv sẽ có độ dài chẵn hoặc lẻ”

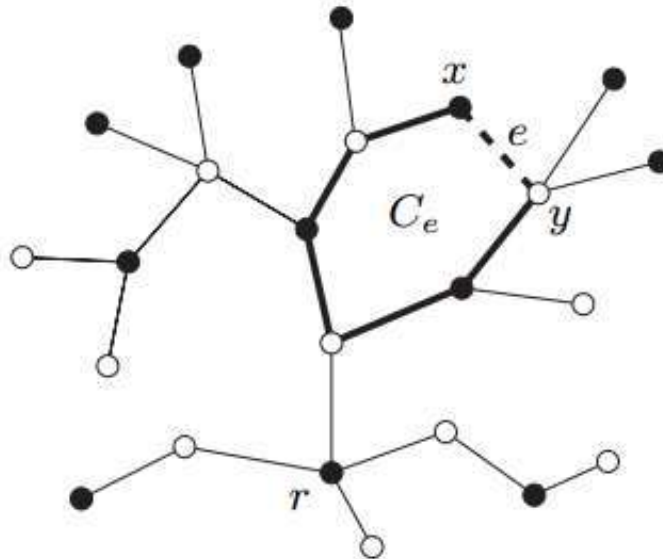
Từ nhận xét trên ta có cơ sở để phân hoạch tập các đỉnh V thành hai phân lớp tùy thuộc vào độ dài của đường đi tương ứng với đỉnh đó.

Phần việc còn lại là chứng minh rằng G là đồ thị lưỡng phân đối với phân hoạch vừa kể ở trên.

Thật vậy, giả sử $e = xy$ là một cạnh bất kì nào đó của đồ thị G .

Nếu $e \in T$ thì $rTy = rTxy$ (do $x <_T y$) nên x và y phải nằm trong hai phân lớp khác nhau của phân hoạch.

Nếu $e \notin T$ thì $C_e := xTy + e$ là một chu trình:



Từ giả thiết của bài toán ta suy ra chu trình C_e phải có độ dài chẵn, tức là các đỉnh nằm trên chu trình C_e phải được sắp xếp luân phiên nhau giữa hai phân lớp của phân hoạch.

Điều này có nghĩa là hai đỉnh x và y phải nằm trong hai phân lớp khác nhau.

□

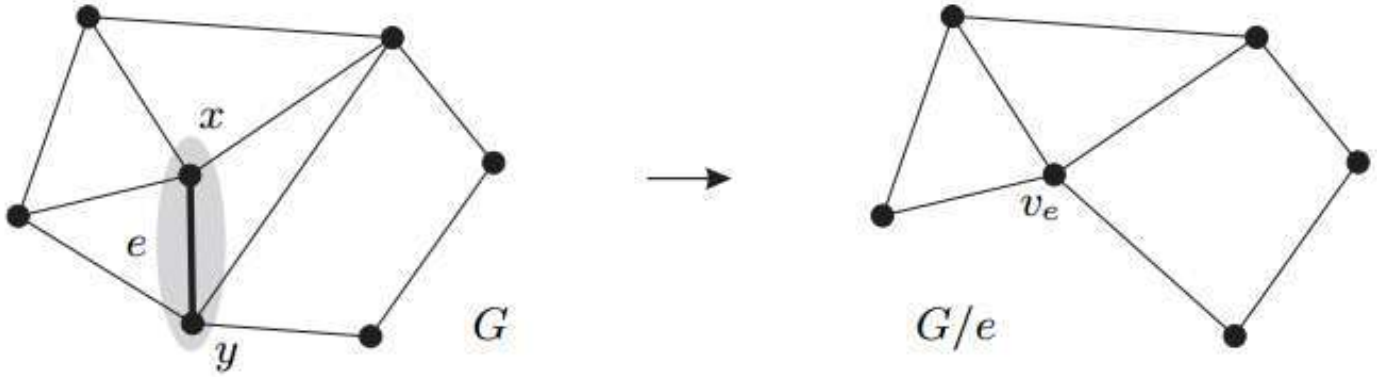
1.7. Phần bù

Trong mục 1.1 ta đã giới thiệu là hai loại quan hệ cơ bản trên lớp các đồ thị: quan hệ đồ thị con và quan hệ đồ thị con khung.

Trong mục 1.7 ta sẽ giới thiệu thêm một quan hệ quan trọng khác: quan hệ phần bù.

Giả sử $e = xy$ là một cạnh của đồ thị $G = (V, E)$.

Đặt G/e là đồ thị thu được từ G bằng **phép co** cạnh e thành một đỉnh mới v_e sao cho đỉnh này liên hợp với tất cả các đỉnh láng giềng của x và y .



Phép co cạnh $e = xy$.

Do đó, G/e là đồ thị (V', E') với tập đỉnh $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ ($v_e \notin V \cup E$ là đỉnh mới mà ta thêm vào) còn tập cạnh $E' := \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \text{ hoặc } yw \in E \setminus \{e\}\}$.

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$, X là một đồ thị khác. Nếu có một phép phân hoạch tập đỉnh V thành các tập con liên thông $\{V_x \mid x \in V(X)\}$ sao cho $xy \in E(X)$ khi và chỉ khi có một $V_x - V_y$ cạnh trong G với mọi đỉnh $x, y \in X$ thì G được gọi là một MX , kí hiệu $G = MX$.

(Lưu ý rằng về mặt hình thức để đơn giản hóa vấn đề ta thường kí hiệu là $G = MX$ nhưng trên thực tế thì với một đồ thị cho trước ta có cả một lớp các đồ thị khác cùng là đồ thị phụ của nó mà chúng lại không phải lúc nào cũng đẳng cấu với nhau nên ta phải hiểu kí hiệu $G = MX$ theo nghĩa tập hợp là G chỉ là một đồ thị trong lớp các đồ thị phụ của X)

Các tập V_x được gọi là các **tập nhánh** của MX .

Tóm lại, X có thể thu được từ G bằng cách thực hiện phép co các tập nhánh về thành một đỉnh và xóa đi các cạnh khuyên của đồ thị G .

Nếu $V_x = U \subseteq V$ là một tập nhánh và tất cả các tập nhánh còn lại của phân hoạch đều chỉ đơn giản gồm một đỉnh thì để đơn giản ta thường dùng kí hiệu G/U để chỉ đồ thị X và v_u để chỉ đỉnh thu được sau khi thực hiện phép co các đỉnh của tập nhánh U thành một đỉnh.

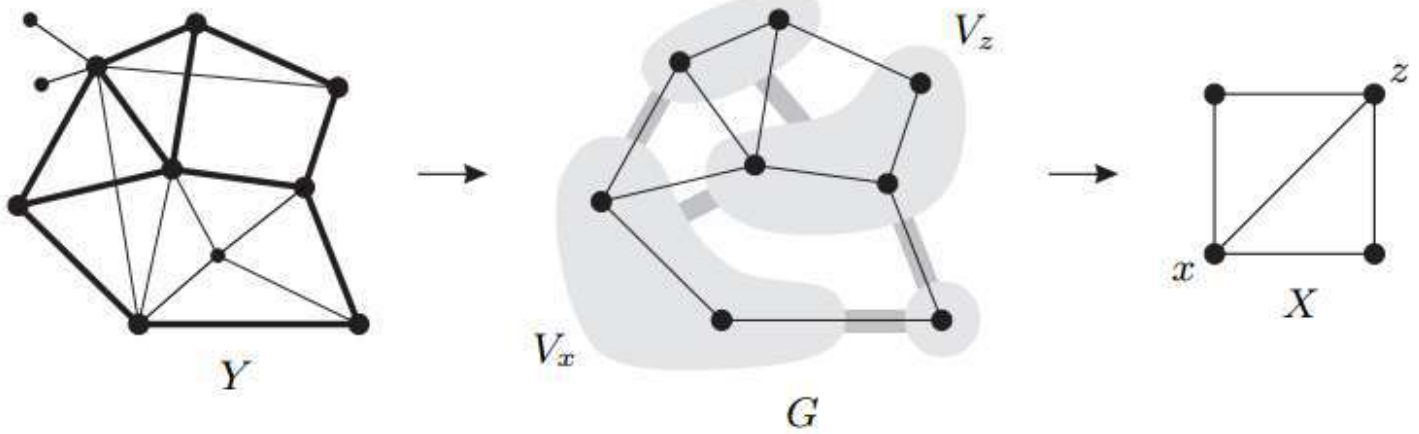
Như vậy, phép co một cạnh uu' được định nghĩa trước đó thật ra chỉ là trường hợp riêng khi $U = \{u, u'\}$.

Bằng cách áp dụng phương pháp quy nạp theo chỉ số $|G| - |X|$, ta dễ dàng chứng minh được:

Kết quả 1.7.1.

Điều kiện cần và đủ để G là một MX là X có thể thu được từ G bằng cách thực hiện liên tiếp các phép co theo cạnh, tức là nếu tồn tại một dãy các đồ thị $G_0, \dots, G_n$ và các cạnh $e_i \in G_i$ sao cho $G_0 = G, G_{i+1} = G_i / e_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) và $G_n \simeq X$.

Nếu $G = MX$ là một đồ thị con của một đồ thị Y khác thì X là một **phần bù** của Y , kí hiệu $X \leq Y$.



X là phần bù của Y .

Nhận xét:

- Mọi đồ thị con của một đồ thị cho trước đều là phần bù của nó; trường hợp riêng, mọi đồ thị đều là phần bù của chính nó.

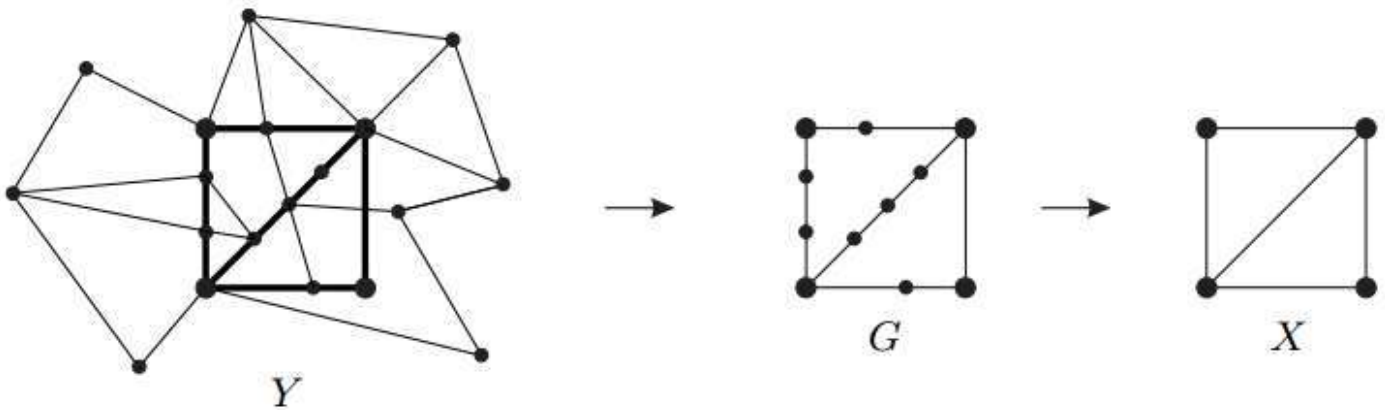
- Mọi phần bù của một đồ thị cho trước đều có thể nhận được bằng cách thực hiện liên tiếp việc xóa đi một số đỉnh và cạnh, và thực hiện phép co theo các cạnh nào đó.

Ngược lại, đồ thị thu được từ một đồ thị khác bằng cách thực hiện liên tiếp các phép xóa và phép co như trên cũng chính là một phần bù của nó. Điều này chỉ ra tính bắc cầu của quan hệ đồ thị bù.

Nếu ta thay các cạnh của đồ thị X bằng các đường đi độc lập giữa hai đầu mút của chúng thì đồ thị G nhận được gọi là **ước con** của X , kí hiệu $G = TX$.

Nếu $G = TX$ là đồ thị con của một đồ thị Y thì X được gọi là một **phần bù topo** của Y .

(Lưu ý, một cách tương tự như trước, kí hiệu $G = TX$ được hiểu là đồ thị G nằm trong lớp các phần bù topo của X)



X là phần bù topo của Y .

Tập đỉnh $V(X)$ đóng vai trò như một tập con của $V(G)$ và các đỉnh này được gọi là các **đỉnh nhánh** của G ; các đỉnh còn lại của G được gọi là các **đỉnh ước con**.

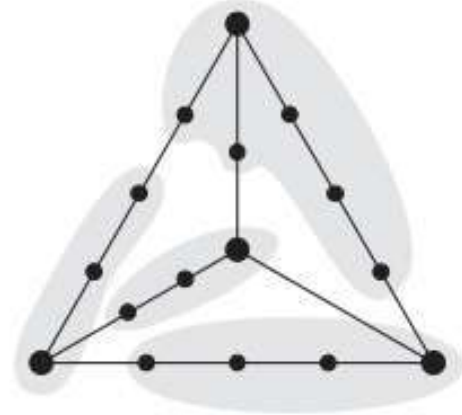
Do đó, tất cả các đỉnh ước con đều có bậc bằng 2 còn các đỉnh nhánh thì có bậc được giữ nguyên như trong X .

Dễ dàng chứng minh được hai tính chất quan trọng sau:

Kết quả 1.7.2.

i) Mọi TX cũng đồng thời là một MX , tức là mọi phần bù topo của một đồ thị cho trước cũng đồng thời là một phần bù của nó.

ii) Nếu $\Delta(X) \leq 3$ thì mọi MX đều có chứa một TX , tức là mọi phần bù có bậc lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng 3 của một đồ thị cho trước cũng đồng thời là phần bù topo của nó.



Một ước con của K_4 và cũng đồng thời là một MK_4 .

Kết quả 1.7.3.

Quan hệ phần bù $\preceq$ và phần bù topo đều là các quan hệ thứ tự trên lớp các đồ thị hữu hạn, tức là chúng phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

1.8. Chu trình Euler

Một dãy chuyển đóng được gọi là **chu trình Euler** nếu nó đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

Một đồ thị được gọi là **Eulerian** nếu nó chứa một chu trình Euler.

Kết quả 1.8.1. (Euler)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là Eulerian là bậc của tất cả các đỉnh của nó đều phải là số chẵn.

Chứng minh kết quả 1.8.1

Điều kiện đủ:

Nếu một đỉnh xuất hiện đúng k lần (hoặc $k+1$ lần) trong một chu trình Euler thì đỉnh này bắt buộc phải có bậc đúng bằng $2k$, bởi vì đỉnh này vừa đóng vai trò là đỉnh xuất phát mà cũng vừa là đỉnh đích của lộ trình nên được đếm lặp lại 2 lần.

Điều kiện cần:

Giả sử G là một đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn.

Gọi $W = v_0 e_0 \dots e_{l-1} v_l$ là dãy truyền lớn nhất chứa trong G sao cho không có bất kì cạnh nào bị lặp lại.

Do không thể tiếp tục mở rộng dãy chuyển W nên nó phải chứa tất cả các cạnh có đầu mút là đỉnh v_l . Theo giả thiết của bài toán số các cạnh nối trên phải là số chẵn, nên $v_l = v_0$.

Do đó W là một dãy truyền đóng.

Giả sử W không phải là một chu trình Euler.

Do đó, tồn tại một cạnh $e = uv_l$ không nằm trong chu trình W nhưng liên thuộc với một đỉnh nào đó nằm trên W .

Khi đó, dãy truyền $W' = uev_l e_l \dots e_{l-1} v_l e_0 \dots e_{i-1} v_i$ có độ dài lớn hơn cả W , mâu thuẫn. □

1.9. Không gian vector liên kết với đồ thị

Cho trước đồ thị $G=(V, E)$ với n đỉnh và m cạnh.

Đặt $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ và $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Không gian đỉnh $\mathcal{V}(G)$ của đồ thị G là không gian vector gồm tất cả các hàm $V \rightarrow \mathbb{F}_2$ trên trường $\mathbb{F}_2$.

Mỗi phần tử của $\mathcal{V}(G)$ được cho tương ứng một cách tự nhiên với một tập hợp con của V (tập hợp gồm các đỉnh tương ứng với giá trị 1), và mỗi tập hợp con của V cũng có một biểu diễn duy nhất trong $\mathcal{V}(G)$ bởi hàm đặc trưng của tập đó.

Như vậy, $\mathcal{V}(G)$ chính là tập hợp gồm tất cả các tập hợp con của V đã được trang bị các phép toán cần thiết để biến thành một không gian vector trong đó phép cộng $U+U'$ của hai tập đỉnh $U, U' \subseteq V$ chính là hiệu đối xứng theo nghĩa tập hợp và $U = -U$ với mọi $U \subseteq V$ còn phần tử không trong $\mathcal{V}(G)$ chính là tập rỗng $\emptyset$.

Dễ dàng chứng minh được rằng $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ chính là một cơ sở của $\mathcal{V}(G)$, nó chính là cơ sở chuẩn tắc, nên $\dim \mathcal{V}(G) = n$.

Một cách tương tự, ta cũng có:

Không gian cạnh $\mathcal{E}(G)$ của đồ thị G là không gian vector gồm tất cả các hàm $E \rightarrow \mathbb{F}_2$ trên trường $\mathbb{F}_2$: mỗi phần tử là một tập hợp con của E , phép cộng vector là phép lấy hiệu đối xứng, $\emptyset \subseteq E$ là phần không, $F = -F$ với mọi $F \subseteq E$. Tập $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathcal{E}(G)$, nên $\dim \mathcal{E}(G) = m$.

Trên thực tế các bài toán liên quan đến các cạnh đóng nhiều vai trò quan trọng trong các ứng dụng thực tế nên ta sẽ dành nhiều thời gian để khảo sát kĩ về không gian cạnh:

Cho trước hai tập cạnh $F, F' \in \mathcal{E}(G)$ với $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ và $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ lần lượt là các hệ số trong khai triển của chúng theo cơ sở chuẩn tắc.

Đặt $\langle F, F' \rangle := \lambda_1 \lambda'_1 + \dots + \lambda_m \lambda'_m \in \mathbb{F}_2$.

Khi đó, $\langle F, F' \rangle = 0$ khi và chỉ khi F và F' có chung nhau một số chẵn các cạnh.

Giả sử $\mathcal{F}$ là một không gian con cho trước của $\mathcal{E}(G)$.

Đặt $\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) | \langle F, D \rangle = 0 \text{ với mọi } F \in \mathcal{F}\}$.

Dễ dàng chứng minh được $\mathcal{F}^\perp$ cũng là không gian vector con của $\mathcal{E}(G)$ và $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m$.

Không gian chu trình $\mathcal{C}(G)$ của đồ thị G là không gian vector con của $\mathcal{E}(G)$ sinh bởi tập hợp các chu trình được chứa trong G , hay nói đúng hơn là sinh bởi tập hợp các cạnh của chu trình.

Số chiều của $\mathcal{C}(G)$ được gọi là **chu số** của đồ thị G .

Kết quả 1.9.1.

Tập hợp các chu trình cảm sinh trong G đóng vai trò tập sinh của không gian chu trình.

Chứng minh kết quả 1.9.1.

Từ định nghĩa của $\mathcal{C}(G)$, ta cần chứng minh rằng tập các chu trình cảm sinh trong G sinh ra mọi chu trình $C \subseteq G$ với một dây cung e . Điều này được suy ra bằng một phép quy nạp đơn giản theo chỉ số $|C|$. □

Kết quả 1.9.2.

Điều kiện cần và đủ để một tập cạnh $F \subseteq E$ nằm trong $\mathcal{C}(G)$ là mọi đỉnh của đồ thị (V, F) đều phải có bậc chẵn.

Chứng minh kết quả 1.9.2.

Phần thuận của khẳng định được suy ra phép chứng minh quy nạp dựa trên số các chu trình cần thiết để sinh ra tập cạnh F .

Phần đảo của khẳng định được suy ra phép chứng minh quy nạp dựa trên số các chu trình được chứa trong đồ thị (V, F) . □

Giả sử $\{V_1, V_2\}$ là một phân hoạch của tập đỉnh V . Khi đó, tập hợp $E(V_1, V_2)$ gồm tất cả các cạnh bất chéo giữa V_1 và V_2 được gọi là một **lát cắt** của đồ thị V ; trường hợp riêng $V_1 = \{v\}$, để đơn giản việc trình bày, ta thường kí hiệu lát cắt lại dưới dạng $E(v)$.

Kết quả 1.9.3.

Tập $\emptyset$ cùng với tất cả các lát cắt trong đồ thị G lập thành một không gian vector con $\mathcal{C}^*$ của $\mathcal{E}(G)$. Không gian này được sinh ra bởi các lát cắt có dạng $E(v)$.

Chứng minh kết quả 1.9.3.

Gọi $\mathcal{C}^*$ là tập hợp gồm $\emptyset$ cùng với tất cả các lát cắt trong đồ thị G .

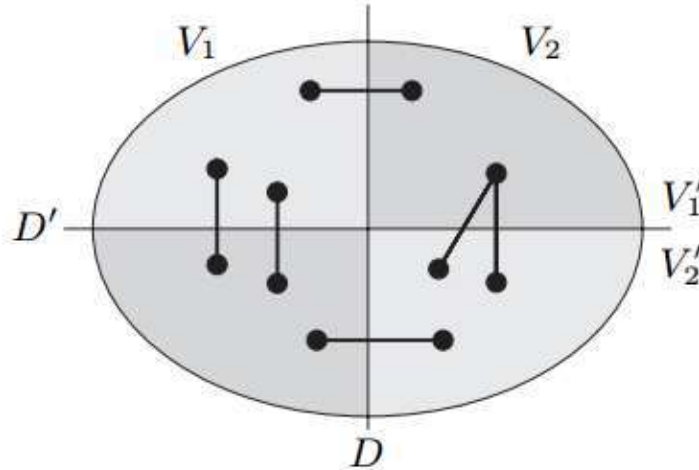
Để chứng minh $\mathcal{C}^*$ là một không gian vector con của $\mathcal{E}(G)$.

Nhận xét: " $D + D = \emptyset \in \mathcal{C}^*$ và $D + \emptyset = D \in \mathcal{C}^*$ "

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng D và D' là các tập hợp khác rỗng và khác nhau.

Giả sử $\{V_1, V_2\}$ và $\{V'_1, V'_2\}$ lần lượt là các phân hoạch của tương ứng của D và D' .

Khi đó, $D + D'$ bao gồm tất cả các cạnh bất chéo giữa các cặp của các phân hoạch.



Sơ đồ biểu diễn các cạnh của $D + D'$.

Thật ra chúng chính là các cạnh bất chéo giữa $(V_1 \cap V'_1) \cup (V_2 \cap V'_2)$ và $(V_1 \cap V'_1) \cup (V_2 \cap V'_2)$.

Nhưng do $D \neq D'$ nên các tập này lập thành một phân hoạch khác của tập V .

Như vậy, $D + D' \in \mathcal{C}^*$, nên $\mathcal{C}^*$ là một không gian con của $\mathcal{E}(G)$.

Khẳng định thứ hai được suy ra từ sự thật rằng:

“Mọi cạnh $xy \in G$ đều nằm trong lát cắt $E(x)$ (hoặc lát cắt $E(y)$)”.

Do đó, $E(V_1, V_2) = \sum_{v \in V_1} E(v)$. □

Không gian con $\mathcal{C}^*(G) := \mathcal{C}^*$ của $\mathcal{E}(G)$ được chỉ ra trong Kết quả 1.9.3 được gọi là **không gian lát cắt** của G .

Không quá khó để có thể tìm ra một số các lát cắt có dạng $E(v)$ để tạo thành một cơ sở cho không gian $\mathcal{C}^*(G)$:

Kết quả 1.9.4.

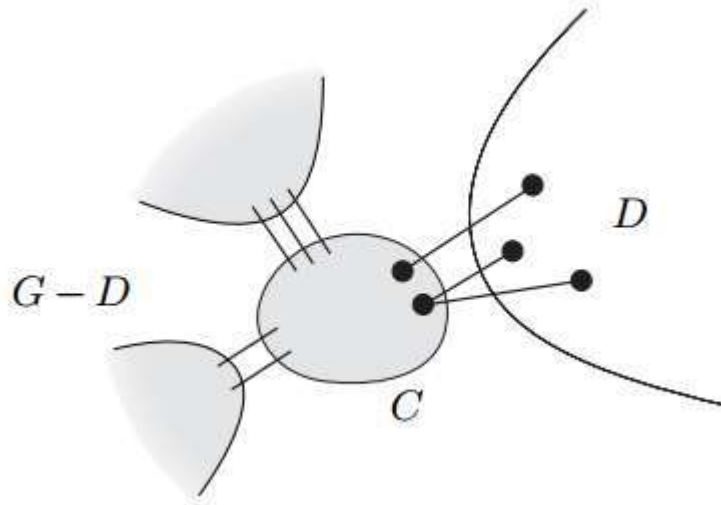
Trong đồ thị liên thông, tập hợp các lát cắt cực tiểu đóng vai trò là tập sinh của không gian lát cắt.

Chứng minh kết quả 1.9.4.

Nhận xét:

“Trong đồ thị liên thông $G = (V, E)$, một lát cắt là cực tiểu khi và chỉ khi các tập đỉnh tương ứng với phép phân hoạch của V là các tập liên thông trong G .”

Để cụ thể hơn, xét C là một đồ thị con liên thông bất kì của G và D là một thành phần liên thông của $G - C$ thì $G - D$ là một đồ thị liên thông và các cạnh nằm giữa D và $G - D$ có dạng một lát cắt cực tiểu. Đồng thời, theo cách chọn của D , lát cắt này chính là tập $E(C, D)$ gồm tất cả các $C - D$ cạnh chứa trong G .



Lát cắt cực tiểu $E(C, D)$.

Giả sử cho trước phân hoạch $\{V_1, V_2\}$ của tập V và C là một thành phần liên thông của $G[V_1]$.

Khi đó, $E(C, V_2) = E(C, G - C)$ là hợp của các tập cạnh phân biệt $E(C, D)$ trong đó D là một thành phần liên thông của $G - C$.

Mặt khác, hợp tất cả các tập cạnh $E(C, V_2)$ trong đó C là một thành phần liên thông của $G[V_1]$ chính là lát cắt $E(V_1, V_2)$.

Do đó, mọi lát cắt bất kì đều được sinh ra từ các lát cắt cực tiểu. □

Kết quả 1.9.5.

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}; \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp.$$

Chứng minh kết quả 1.9.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$. Hiển nhiên, mọi chu trình trong G đều có một số chẵn các cạnh nằm trong mỗi lát cắt. Điều đó chỉ ra rằng $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{*\perp}$.

Ngược lại, từ kết quả 1.9.2, ta nhận xét rằng:

“Với mọi tập đỉnh $F \notin \mathcal{C}$, tồn tại một đỉnh v liên thuộc với một số lẻ các đỉnh nào đó của tập F .”

Do đó, $\langle E(v), F \rangle = 1$, tức là $F \notin \mathcal{C}^{*\perp}$. Như vậy, nếu $F \notin \mathcal{C}$ thì $F \notin \mathcal{C}^{*\perp}$.

Điều này suy ra rằng $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$.

Để chứng minh $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp$, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$.

Từ định nghĩa về khái niệm không gian trực giao ta suy ra rằng $\mathcal{C}^* \subseteq (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$.

Do $\dim \mathcal{C}^* + \dim \mathcal{C}^{*\perp} = \dim \mathcal{C}^{*\perp} + \dim (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp (= m)$ nên $\mathcal{C}^*$ cũng có cùng số chiều với $(\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$.

Như vậy, $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$. □

Kết quả 1.9.6.

Cho trước đồ thị liên thông G với n đỉnh và m cạnh.

Khi đó, $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$ và $\dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1$.

Chứng minh kết quả 1.9.6.

Giả sử cho trước $G = (V, E)$. Nhận xét, từ kết quả 1.9.5, $\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^* = m$.

Như vậy, để chứng minh khẳng định của bài toán, ta cần chỉ ra $m - n + 1$ vector độc lập tuyến tính trong $\mathcal{C}$ và $n - 1$ vector độc lập tuyến tính trong $\mathcal{C}^*$.

Giả sử T là một cây khung của G .

Khi đó, từ kết quả 1.5.3, cây T có chính xác $n - 1$ cạnh, tức là có $m - n + 1$ cạnh của G nằm ngoài T .

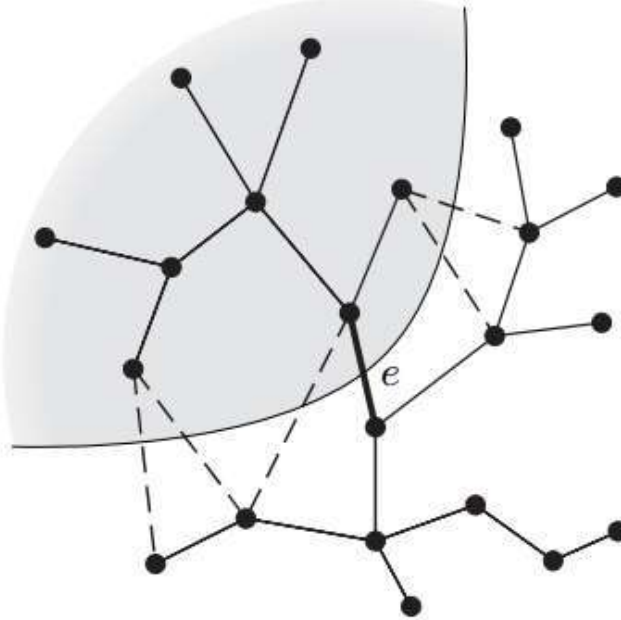
Với mỗi một trong $m - n + 1$ cạnh $e \in E \setminus E(T)$, đồ thị $T + e$ chứa ít nhất một chu trình C_e .

Nhận xét :

“Không có bất kì cạnh $e \neq e'$ nào nằm trên $C_{e'}$.”

Do đó, $m - n + 1$ chu trình này là độc lập tuyến tính.

Với mỗi một trong $n - 1$ cạnh $e \in T$, đồ thị $T - e$ có chính xác hai thành phần liên thông và kí hiệu D_e là lát cắt gồm tập hợp các cạnh của G nằm giữa hai thành phần liên thông này:



Nhận xét :

“Không có bất kì cạnh $e \neq e'$ nào nằm trên $D_{e'}$.”

Do đó, $n - 1$ chu trình này là độc lập tuyến tính. □

Ma trận liên thuộc $B = (b_{ij})_{n \times m}$ của đồ thị $G = (V, E)$ được định nghĩa trên trường $\mathbb{F}_2$ như sau:

$$b_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{nếu } v_i \in e_j \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

trong đó $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Kí hiệu B^T là ma trận chuyển vị của B .

Khi đó B và B^T xác định các ánh xạ tuyến tính $B : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$ và $B^T : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ với các cơ sở chuẩn tắc tương ứng.

Kết quả 1.9.7.

Cho trước đồ thị G .

Khi đó:

i) Hạt nhân của B chính là $\mathcal{C}(G)$.

ii) Ảnh của B^T chính là $\mathcal{C}^*(G)$.

Ma trận kề $A = (a_{ij})_{n \times n}$ của đồ thị $G = (V, E)$ được định nghĩa trên trường $\mathbb{F}_2$ như sau:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{nếu } v_i v_j \in E \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Kí hiệu $D = (d_{ij})_{n \times n}$ là ma trận chéo với

$$d_{ij} := \begin{cases} d(v_i), & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được rằng:

Kết quả 1.9.8.

Cho trước đồ thị G . Khi đó: $BB^T = A + D$.