

Chủ đề 02. Cặp ghép

Trong nhiều trường hợp, một câu hỏi thường được đặt ra là tìm trong đồ thị cho trước một số các cạnh độc lập (nếu có thể).

Như vậy chúng ta phải giải quyết ba câu hỏi phụ sau:

- 1) Vấn đề này phải được đặt lại như thế nào cho đúng ?
- 2) Lời giải của vấn đề này sẽ thu được bằng phương pháp như thế nào ?
- 3) Nếu như không thể thực hiện được thì liệu có một điều kiện đơn giản nào để giúp ta nhận biết hay không ?

Đáng ngạc nhiên là mặc dù xuất phát điểm của bài toán này là từ ứng dụng nhưng nó đồng thời cũng mang lại những hiểu biết đáng kể cho lý thuyết đồ thị:

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$.

Tập M gồm một số cạnh độc lập trong đồ thị G được gọi là một **cặp ghép**.

Tập M được gọi là một **cặp ghép của tập** $U \subseteq V$ nếu mọi đỉnh trong U đều liên thuộc với một cạnh trong M .

Các đỉnh trong U được gọi là **ghép cặp được** (bởi M); các đỉnh không liên thuộc với bất kì cạnh nào của M được gọi là **không ghép cặp được**.

Đồ thị con khung k – đều của G thường được gọi là **k – nhân tử**.

Khi đó, đồ thị con $H \subseteq G$ là 1 – nhân tử của G nếu và chỉ nếu $E(H)$ là một cặp ghép của V .

Như vậy, bài toán đặt ra chính là :

“Tìm ra các đặc trưng để đồ thị G chứa 1 – nhân tử ?”

2.1. Cặp ghép trong đồ thị lưỡng phân

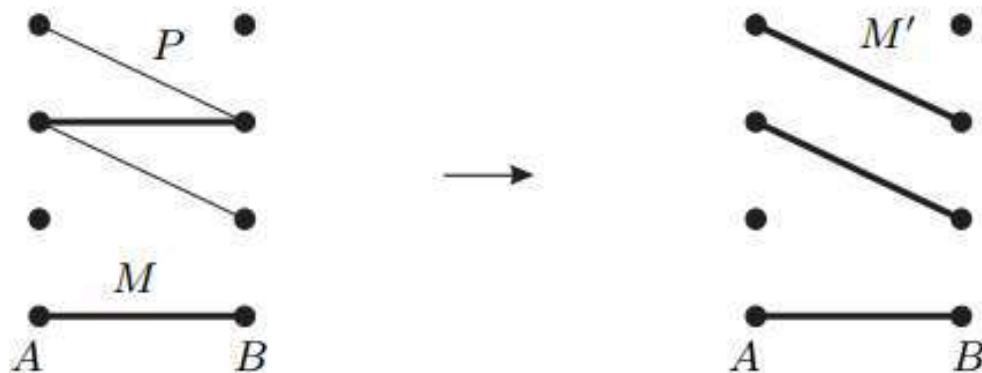
Giả sử cho trước đồ thị lưỡng phân $G = (V, E)$ với phân hoạch tương ứng $\{A, B\}$.

Đầu tiên, xét một cặp ghép bất kì M trong G .

Đường đi P trong G được gọi là **đường đi thay phiên** nếu nó bắt đầu tại một đỉnh không ghép cặp được trong A và lần lượt thay phiên nhau chứa các cạnh thuộc $E \setminus M$ và M .

Đường đi thay phiên P được gọi là **đường đi augment** nếu nó kết thúc tại một đỉnh không ghép cặp được trong B .

Cách gọi tên này xuất phát từ lý do là ta có thể sử dụng các đường đi này để tạo ra một cặp ghép M' lớn hơn cặp ghép M ban đầu như sau:



Khái niệm đường đi augment đóng một vai trò hết sức quan trọng trong việc xác định các cặp ghép có kích thước lớn trong thực hành.

Bằng cách thực hiện liên tiếp quá trình cải tiến trình bày ở trên (nếu có thể), ta luôn nhận được một cặp ghép với số cạnh lớn nhất có thể sau một số hữu hạn bước từ một cặp ghép ban đầu bất kì.

Như vậy, bài toán tìm cặp ghép với số cạnh lớn nhất được chuyển về thành bài toán tìm các đường đi augment.

Đầu tiên ta sẽ trình bày một đặc trưng mang tính chất đối ngẫu rất quan trọng liên quan đến kích thước lớn nhất có thể đạt được của một cặp ghép:

Tập $U \subseteq V$ được gọi là một **tập phủ đỉnh** của E (hoặc **phủ** của E) nếu mọi cạnh của đồ thị G đều liên thuộc với một đỉnh thuộc U .

Kết quả 2.1.1. (König)

Cho trước một đồ thị lưỡng phân G bất kì.

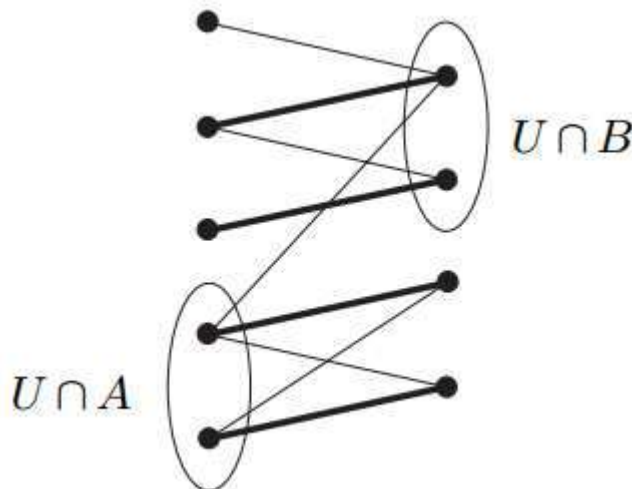
Khi đó, số cạnh lớn nhất có thể đạt được của một cặp ghép bằng với số đỉnh nhỏ nhất của một tập phủ đỉnh.

Chứng minh kết quả 2.1.1.

Giả sử M là cặp ghép với số cạnh lớn nhất có thể đạt được của đồ thị G .

Tiếp theo, ta xây dựng tập phủ đỉnh U từ cặp ghép M theo quy tắc sau:

“Với mọi cạnh thuộc cặp ghép M , ta chọn đầu mút trong B của cạnh đó nếu có một đường đi thay phiên nào đó nhận đỉnh này làm đầu mút và chọn đầu mút trong A trong trường hợp ngược lại.”



Tập phủ đỉnh U .

Khi đó, tập U gồm $|M|$ đỉnh mà ta vừa xây dựng ở trên thật sự là một tập phủ của G .

Để chứng minh khẳng định trên, ta cần chỉ ra rằng:

“Nếu cạnh $ab \in E$ thì $a \in U$ hoặc $b \in U$.”

Thật vậy, nếu cạnh $ab \in M$ thì khẳng định trên là hiển nhiên theo cách ta xây dựng tập U .

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $ab \notin M$.

Theo giả thiết của bài toán, M là cặp ghép với số cạnh lớn nhất có thể đạt được của đồ thị G , ta suy ra rằng M sẽ chứa một cạnh $a'b'$ nào đó sao cho $a = a'$ hoặc $b = b'$.

Bây giờ, giả sử rằng $a' = a \notin U$.

Khi đó, $b' \in U$, nghĩa là tồn tại một đường đi thay phiên P nhận b' làm một đầu mút.

Nhưng điều này cũng dẫn đến sự tồn tại của một đường đi thay phiên P' nhận b làm một đầu mút: $P' := Pb$ (nếu $b \in P$) và $P' := Pb'a'b$ (nếu $b \notin P$).

Theo tính chất cực đại của cặp ghép M , P' không thể là một đường đi augment.

Do đó, b phải là một đỉnh ghép cặp được.

Như vậy, $b \in U$, theo cách xây dựng của tập U . □

Bây giờ quay lại chủ đề chính cần thảo luận đó là:

“Tìm ra một điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của 1 – nhân tử ?”.

Trong trường hợp đồ thị lưỡng phân, vấn đề trên được đơn giản về thành khảo sát xem khi nào G sẽ chứa một cặp ghép của tập A .

Nhận thấy rằng:

“Điều kiện cần để tồn tại một cặp ghép của tập A là mọi tập con của A đều phải có đủ số lân cận cần thiết trong B ; tức là $|N(S)| \geq |S|$ với mọi $S \subseteq A$.”

Khẳng định sau đây cũng chứng minh rằng đây cũng chính là điều kiện đủ mà ta đang cần tìm kiếm:

Kết quả 2.1.2. (Hall)

Điều kiện cần và đủ để đồ thị lưỡng phân $G = (A \cup B, E)$ chứa một cặp ghép của tập A là:
 $|N(S)| \geq |S|$ với mọi $S \subseteq A$.

Do tính quan trọng của kết quả này mà ta sẽ chưa ra 3 cách chứng minh khác nhau cho khẳng định trên: chứng minh thứ nhất dựa trên định lý König; chứng minh thứ chính là phương pháp xây dựng trực tiếp cặp ghép bằng đường đi augment; chứng minh thứ ba là phép suy luận hình thức dựa trên nguyên lý quy nạp toán học.

Chứng minh thứ nhất của kết quả 2.1.2.

Giả sử đồ thị lưỡng phân $G = (A \cup B, E)$ không chứa bất kỳ một ghép cặp nào của tập A .

Bằng cách áp dụng định lý König, tồn tại một tập phủ đỉnh U chứa không quá $|A|$ đỉnh.

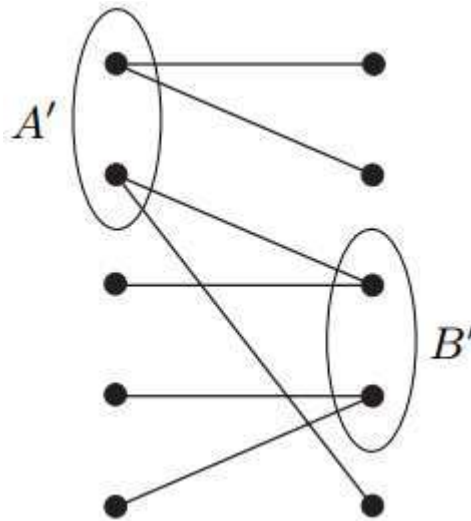
Giả sử $U = A' \cup B'$ với $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.

Khi đó,

$$|A'| + |B'| = |U| < |A|.$$

Do đó,

$$|B'| < |A| - |A'| = |A \setminus A'|.$$



Tập phủ đỉnh $U = A' \cup B'$.

Theo cách xây dựng tập phủ đỉnh U , G không chứa cạnh nối nào giữa $A \setminus A'$ và $B \setminus B'$, nên

$$|N(A \setminus A')| \leq |B'| < |A \setminus A'|.$$

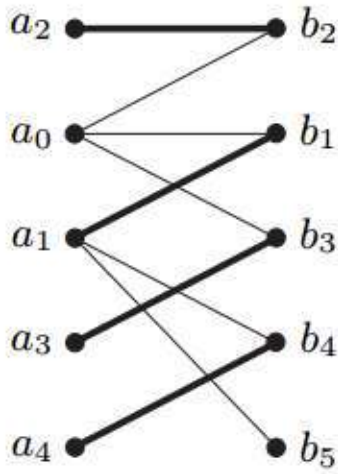
Như vậy, điều kiện nêu trong khẳng định bị vi phạm đối với tập con $S := A \setminus A'$. □

Chứng minh thứ hai của kết quả 2.1.2.

Giả sử M là một cặp ghép của đồ thị G sao cho có ít nhất một đỉnh của tập A còn chưa được ghép cặp. Để giải quyết bài toán này, ta sẽ chỉ ra phương pháp xây dựng đường đi augment từ cặp ghép M :

Giả sử $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots$ là dãy cực đại gồm các đỉnh phân biệt $a_i \in A$ và $b_i \in B$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) a_0 không được ghép cặp;
- ii) b_i liên hợp với một đỉnh $a_{f(i)} \in \{a_0, a_1, \dots, a_{i-1}\}$;
- iii) $a_i b_i \in M$.



Phương pháp xây dựng cặp ghép từ đường đi augment

Theo giả thiết của bài toán, dãy đỉnh này không thể kết thúc tại một đỉnh nằm trong tập A : tập gồm i đỉnh $a_0, a_1, \dots, a_{i-1}$ có ít nhất i đỉnh láng giềng trong tập B , nên ta luôn có thể tìm được một đỉnh mới $b_i \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ thỏa mãn điều kiện ii).

Đặt $b_k \in B$ là đỉnh cuối cùng trong dãy đỉnh trên.

Khi đó, đường đi $P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} a_{f^3(k)} \dots a_{f^r(k)}$ với $f^r(k) = 0$ là một đường đi thay phiên.

Vấn đề tự nhiên được đặt ra đó là:

“Liệu đường đi P vừa xây dựng ở trên còn có thể được mở rộng tiếp nữa hay không?”

Nhận xét rằng:

Nếu đỉnh b_k được ghép cặp với một đỉnh $a = a_i$ với $0 < i < k$ thì, bằng cách đặt $a_k := a$, ta suy ra rằng $b_k = b_i$ (theo điều kiện iii).

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng đỉnh b_k không ghép cặp được, tức là P là một đường đi augment giữa a_0 và b_k . □

Chứng minh thứ ba của kết quả 2.1.3.

Ta sẽ chứng minh lại khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|A|$.

Với $|A| = 1$, khẳng định của bài toán là hiển nhiên.

Giả sử $|A| \geq 2$ và khẳng định của bài toán đúng cho mọi cặp ghép của tập A nhưng có chứa ít hơn $|A|$ cạnh.

Khi đó, có thể xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $|N(S)| \geq |S| + 1$, với mọi tập con không rỗng $S \subseteq A$.

Bằng cách chọn ra một cạnh $ab \in G$ bất kì và khảo sát đồ thị lưỡng phân $G' := G - \{a, b\}$:

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|, \text{ với mọi tập con } S \subseteq A \setminus \{a\}.$$

Theo giả thiết quy nạp toán học, đồ thị lưỡng phân G' chứa ít nhất một cặp ghép M' của tập $A \setminus \{a\}$.

Khi đó, bằng cách bổ sung thêm cạnh ab , tập $M = M' + ab$ đóng vai trò là một cặp ghép của tập A .

Trường hợp 2: Tồn tại một tập con không rỗng A' , $|N(A')| = |A'|$.

Đặt $B' := N(A')$, bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp toán học, đồ thị $G' := G[A' \cup B']$ chứa ít nhất một cặp ghép của tập A' .

Mặt khác, $G - G'$ cũng thỏa mãn điều kiện Hall: nếu $|N_{G-G'}(S)| < |S|$ với một tập con $S \subseteq A \setminus A'$ nào đó thì $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$, mâu thuẫn giả thiết ban đầu.

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp, $G - G'$ chứa một cặp ghép của tập $A \setminus A'$.

Như vậy, bằng cách kết hợp các cặp ghép tìm được ở trên, ta nhận được một cặp ghép của tập A trong G . □

Kết quả 2.1.3.

Cho trước số tự nhiên d và đồ thị lưỡng phân $G = (A \cup B, E)$ thỏa mãn điều kiện: $|N(S)| \geq |S| - d$, với mọi tập $S \subseteq A$. Khi đó, G chứa một cặp ghép với đúng $|A| - d$ cạnh.

Chứng minh kết quả 2.1.3.

Đầu tiên bổ sung thêm d đỉnh mới vào tập B và nối mỗi đỉnh này với tất cả các đỉnh trong tập A , ta thu được đồ thị G' .

Bằng cách áp dụng kết quả 2.1.2 cho đồ thị lưỡng phân G' , G' chứa một cặp ghép của tập A , nghĩa là G chứa một cặp ghép với đúng $|A| - d$ cạnh. $\square$

Kết quả 2.1.4.

Cho trước $G = (A \cup B, E)$ là một đồ thị lưỡng phân k – đều với $k \geq 1$.

Khi đó, G chứa một 1 – nhân tử.

Chứng minh kết quả 2.1.4.

Để chứng minh G chứa một 1 – nhân tử, bằng cách áp dụng kết quả 2.1.2, ta chỉ cần chứng minh G chứa một cặp ghép của tập A và $|A| = |B|$.

Do G là k – đều nên $|A| = |B|$.

Mặt khác, mọi tập con $S \subseteq A$ đều được nối với $N(S)$ bởi tổng cộng $k|S|$ cạnh và có tổng cộng $k|N(S)|$ cạnh liên thuộc với $N(S)$ nên $k|N(S)| \geq k|S|$. $\square$

Mặc dù điều kiện để có thể áp dụng định lý Hall rất ngặt nghèo nhưng nó được đánh giá là một trong số những kết quả có nhiều ứng dụng nhất của lý thuyết đồ thị. Để áp dụng được định lý Hall đòi hỏi ta phải có một số điều chỉnh thông minh. Chẳng hạn, định lý Hall có thể được ứng dụng để giải thích lại một kết quả kinh điển trong lý thuyết đồ thị (chứng minh gốc của kết quả này đòi hỏi những suy luận khá phức tạp và khá dài):

Kết quả 2.1.5. (Petersen)

Mọi đồ thị đều có bậc chẵn đều chứa một 2 – nhân tử.

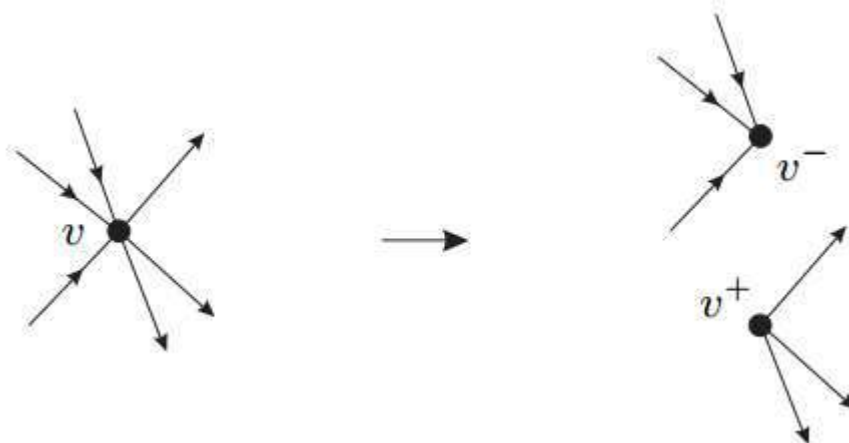
Chứng minh kết quả 2.1.5.

Cho trước G là một đồ thị $2k$ – đều ($k \geq 1$).

Không mất tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả thiết rằng G là đồ thị liên thông.

Bằng cách áp dụng kết quả 1.8.1, G chứa một chu trình Euler $v_0 e_0 \dots e_{l-1} v_0$.

Nếu thay mỗi đỉnh v bởi cặp đỉnh (v^-, v^+) và mỗi cạnh $e_i = v_i v_{i+1}$ bởi cạnh $v_i^+ v_{i+1}^-$ thì đồ thị G' thu được là một đồ thị lưỡng phân k – đều.



Quá trình tách đỉnh v thành cặp đỉnh (v^-, v^+) .

Dựa trên kết quả 2.1.4, G' chứa một 1 – nhân tử.

Sau cùng bằng cách kết hợp các cặp đỉnh (v^-, v^+) lại thành đỉnh v , ta nhận được 2 – nhân tử của G từ 1 – nhân tử của G' . $\square$

2.2. Cặp ghép trong đồ thị tổng quát

Giả sử cho trước đồ thị G .

Kí hiệu $\mathcal{C}_G$ là tập hợp gồm tất cả các thành phần liên thông của G , và $q(G)$ là số các thành phần liên thông lẻ (các thành phần liên thông có bậc lẻ) của G .

Nếu G chứa một 1 – nhân tử M và $S \subseteq V(G)$ thì mỗi thành phần liên thông lẻ của $G - S$ chứa ít nhất một đỉnh được nối với tất cả các đỉnh của S bởi một cạnh của nhân tử M này.

Do đó, $q(G - S) \leq |S|$.

Đồng thời, đây cũng chính là điều kiện đủ để đảm bảo sự tồn tại của một 1 – nhân tử :

Kết quả 2.2.1. (Tutte)

Điều kiện cần và đủ để đồ thị G chứa một 1 – nhân tử là $q(G - S) \leq |S|$ với mọi $S \subseteq V(G)$.

Chứng minh kết quả 2.2.1.

Để chứng minh điều kiện đủ của định lý Tutte ta thực hiện phép phản chứng như sau:

Giả sử G là một đồ thị thỏa mãn điều kiện $q(G - S) \leq |S|$ với mọi $S \subseteq V(G)$ nhưng không chứa một 1 – nhân tử M nào đó.

Đặt $G' = G + e$.

Khi đó, nếu G' không chứa bất kì một 1 – nhân tử M' nào thì G cũng sẽ không chứa bất kì một 1 – nhân tử M nào.

Đồng thời việc bổ sung thêm một cạnh e không tạo ra bất kì thành phần liên thông lẻ nào mới trong $G - S$ nên $q(G' - S) \leq q(G - S)$.

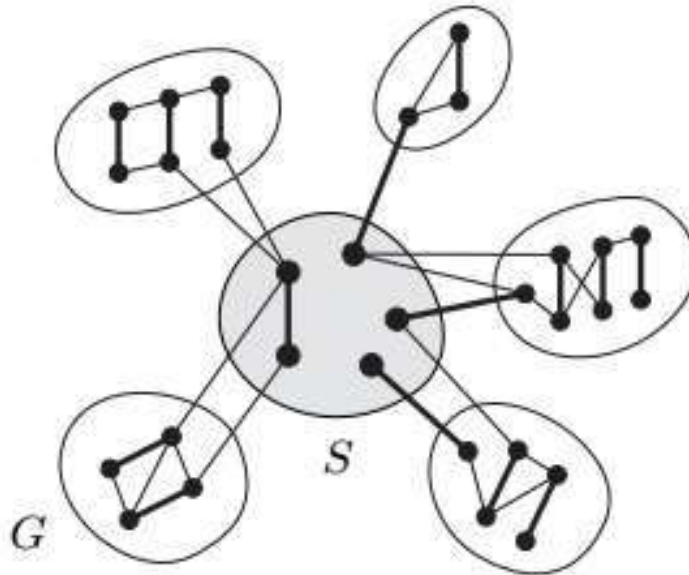
Không làm giảm tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử thêm rằng G là đồ thị tối đại – cạnh không có chứa bất kì một 1 – nhân tử M nào.

Xét S là một tập hợp các đỉnh sao cho mỗi đỉnh $s \in S$ đều liên hợp với tất cả các đỉnh thuộc $G - s$.

Trường hợp 1. $G - S$ bao gồm các đồ thị đầy đủ rời nhau.

Khi đó, $q(G - S) \leq |S|$ và trong mỗi thành phần liên thông chẵn ta luôn tìm được một 1 – nhân tử còn trong mỗi thành phần liên thông lẻ ta cũng luôn tìm được một cặp ghép sao cho tất cả các đỉnh đều được bão hòa chỉ ngoại trừ một đỉnh. Các đỉnh dư ra của mỗi thành phần liên thông lẻ này được ghép cặp với một đỉnh bất kì nào đó trong S .

Do số lượng các đỉnh còn chưa được ghép cặp của tập S bắt buộc phải chẵn nên ta cũng có thể ghép cặp được các đỉnh còn lại này.



Trường hợp 2. $G - S$ không phải là hợp của các đồ thị đầy đủ rời nhau.

Khi đó, tồn tại một thành phần liên thông của $G - S$ không phải là một đồ thị đầy đủ, tức là thành phần liên thông này sẽ phải chứa hai đỉnh không liên hợp nhau a và a' .

Xét $a, b, c, \dots, a'$ là $a - a'$ đường đi ngắn nhất chứa trong thành phần liên thông này.

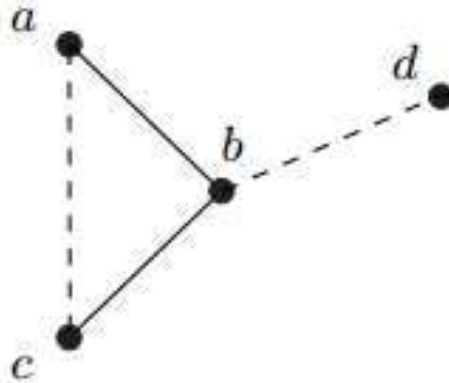
Khi đó, $ab, bc \in E$ và $ac \notin E$.

Nhận xét 1: “Tồn tại một đỉnh $d \in V$ không liên hợp với b .”

Thật vậy, trong trường hợp ngược lại đỉnh b sẽ liên hợp với tất cả các đỉnh trong $G - S$.

Theo định nghĩa của tập S , b sẽ liên hợp với tất cả các đỉnh thuộc S nên $b \in S$.

Như vậy, $G - S$ là hợp của các đồ thị đầy đủ rời nhau.



Theo tính chất tối đại – cạnh của G , $G + ac$ chứa một 1 – nhân tử M_1 và $G + bd$ cũng chứa một 1 – nhân tử M_2 .

Để hoàn tất phép chứng minh của định lý Tutte, ta chỉ cần chứng minh rằng $F := M_1 + M_2$ chứa một 1 – nhân tử M không có chứa các cạnh ac và bd .

Nhận xét 2: “Mỗi đỉnh của G đều có bậc trong F là 0 hoặc 2”

Do đó, mỗi thành phần liên thông của F sẽ là một chu trình chẵn hoặc một đỉnh cô lập.

Gọi C là thành phần liên thông của F có chứa ac .

Nếu C không chứa cạnh bd thì từ đây ta dễ dàng thu được một 1 – nhân tử M không có chứa các cạnh ac và bd .

Giả sử C chứa đồng thời cả ac và bd .

Lưu ý rằng $ab, bc \in E$, ta sẽ sử dụng các dữ kiện này để xây dựng 1 – nhân tử M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét các $a - b$ đường đi P_1 và $b - c$ đường đi P_2 trong C .

Khi đó, $C = P_1 + P_2 + ac$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả thiết rằng đỉnh d nằm trên đường đi P_2 .

Đặt $N_1 := M_1 \cap E(P_1)$, $N_2 := M_2 \cap E(P_2)$, $N := N_1 + N_2 + ab$.

Khi đó, $M := N + (M_1 - E(C))$ đóng vai trò là 1 – nhân tử của G . □

Kết quả 2.2.2. (Petersen)

Mọi khối lập phương không có chứa cạnh cầu đều có ít nhất một 1 – nhân tử.

Chứng minh kết quả 2.2.2.

Để chứng minh khẳng định trên, ta chỉ cần kiểm chứng lại rằng mọi khối lập phương $G = (V, E)$ đều thỏa mãn điều kiện Tutte:

Giả sử $S \subseteq V$ là một tập đỉnh bất kỳ và C là một thành phần liên thông lẻ của $G - S$.

Đặt m là số các cạnh của đồ thị G nối giữa S và C .

Bằng phương pháp đếm bằng hai cách ta dễ dàng chỉ ra rằng $\sum_{v \in V(C)} \deg_G(v) = 2|E(C)| + m$.

Đồng thời do G là một khối lập phương nên $\sum_{v \in V(C)} \deg_G(v) = 3|V(C)|$.

Do đó, m phải là một số lẻ.

Do G không có chứa cạnh cầu nên $m \geq 3$.

Như vậy, tổng số các cạnh của đồ thị G nối giữa S và $G - S$ tối thiểu phải bằng $3q(G - S)$.

Đễ dàng nhận thấy rằng do G là một khối lập phương nên tổng số các cạnh của đồ thị G nối giữa S và $G - S$ tối đa không thể vượt quá $3|S|$.

Bằng cách kết hợp các kết quả phân tích trên ta nhận được đánh giá $q(G - S) \leq |S|$. $\square$

Nhằm mục đích làm sáng tỏ về bản chất và các kỹ thuật toán học được sử dụng trong lý thuyết cặp ghép, ta sẽ trình bày thêm một cách chứng minh thứ hai cho định lý Tutte.

Trong phép chứng minh này, ta sẽ khảo sát một cấu trúc tinh vi hơn bắt nguồn từ khái niệm cặp ghép cho các đồ thị tùy ý.

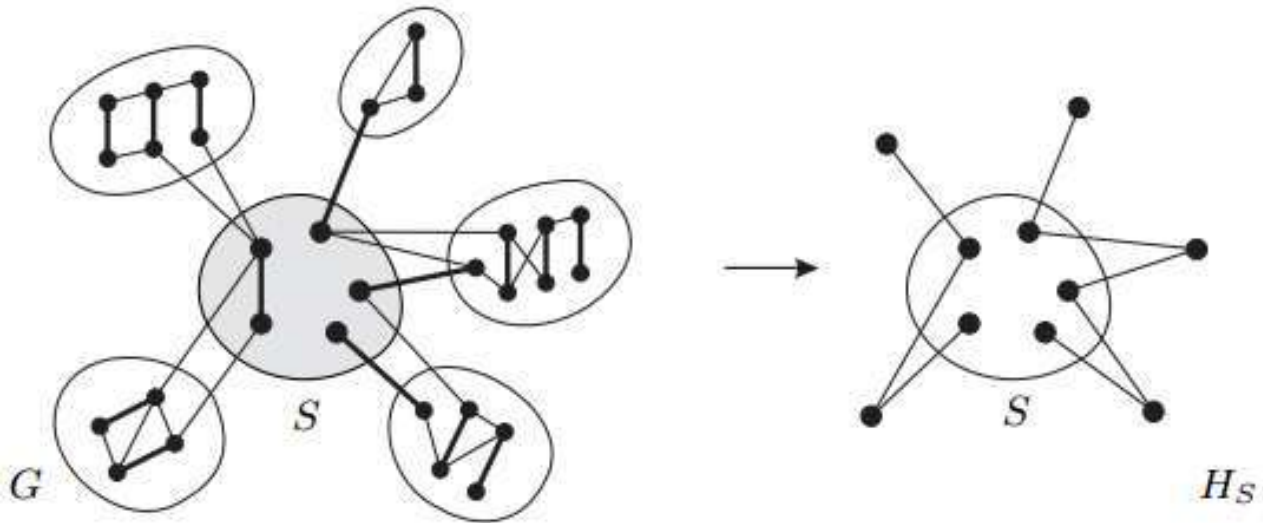
Nếu đồ thị thỏa mãn điều kiện Tutte thì từ cấu trúc này ta sẽ chỉ ra được sự tồn tại của một 1 – nhân tử thỏa mãn yêu cầu bài toán:

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là **nhân tử critical** nếu:

1) $G \neq \emptyset$.

2) Với mọi $v \in G$, $G - v$ có chứa một 1 – nhân tử.

Tập $S \subseteq V$ được gọi là **tương thích** với $G - S$ nếu đồ thị H_S có chứa một cặp ghép của tập S , trong đó H_S là đồ thị thu được từ G bằng cách co các thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ thành một đỉnh và xóa tất cả các cạnh nối giữa các đỉnh của tập S .



Kết quả 2.2.3.

Mọi đồ thị $G = (V, E)$ đều có chứa một tập đỉnh S thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) S tương thích với $G - S$;

ii) Mọi thành phần liên thông của $G - S$ đều là nhân tử critical.

Hơn nữa, G có chứa một 1 – nhân tử nếu và chỉ nếu $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$.

Chứng minh kết quả 2.2.3.

Đễ dàng chứng minh được rằng điều khẳng định cuối cùng của kết quả 2.2.3. có thể được suy ra đơn giản từ hai khẳng định (i) và (ii) như sau:

Nếu G có chứa một 1 – nhân tử thì $q(G - S) \leq |S|$.

Từ các khẳng định (i), (ii) và sự thật hiển nhiên là mọi nhân tử critical đều có bậc lẻ nên

$$|S| \leq |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G - S).$$

Do đó, $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$.

Ngược lại, nếu $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ thì từ hai khẳng định i) và ii) ta cũng sẽ có thể dễ dàng chỉ ra được một 1 – nhân tử.

Để chứng minh của kết quả 2.2.3, ta chỉ cần xây dựng một tập S thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng phương pháp truy hồi theo chỉ số $|S|$:

Với $|G| = 0$, ta có thể chọn $S = \emptyset$.

Giả sử G là một đồ thị cho trước với $|G| > 0$ và với mọi đồ thị G' có số đỉnh ít hơn so với G ta đều đã xây dựng thành công các nhân tử critical.

Kí hiệu d là số nguyên không âm nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện:

$$\text{“Với mọi } T \subseteq V, q(G - T) \leq |T| + d.”$$

Nhận xét rằng:

- Nếu $d = 0$ thì $q(G - \emptyset) \geq |\emptyset| + 0$, nên $q(G - \emptyset) = |\emptyset| + 0$;

- Trong trường hợp $d > 0$, từ tính chất tối thiểu của d , ta luôn luôn tìm được một tập T_0 sao cho $q(G - T_0) = |T_0| + d$.

Do đó,

$$\text{“Tồn tại tập } T_0 \subseteq V, q(G - T_0) = |T_0| + d.”$$

Đặt S là tập T_0 có số phần tử lớn nhất và $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng mọi thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}$ đều lẻ.

Giả sử phản chứng rằng $|C|$ là số chẵn.

Bằng cách cố chọn một đỉnh $c \in C$, $S' := S \cup \{c\}$ và $C' := C - c$.

Khi đó, C' sẽ có ít nhất một thành phần liên thông lẻ, nên $q(G - S') \geq q(G - S) + 1$.

Bằng cách chọn $T := S$, $q(G - S') \geq q(G - S) + 1 = |S| + d + 1 = |S'| + 1$.

Do đó, $q(G - S') = |S'| + 1$, điều này mâu thuẫn với tính chất tối đại của tập S .

Tiếp theo ta chỉ cần kiểm chứng lại sự đúng đắn của các khẳng định i) và ii) trong kết quả 2.2.3:

i) S tương thích với $G - S$;

Nếu $S = \emptyset$ thì khẳng định trên là hiển nhiên, nên ta có thể giả sử $S \neq \emptyset$.

Nhận xét rằng $\mathcal{C} \neq \emptyset$, do $q(G - S) = |S| \neq 0$.

Giả sử cho trước $C' \subseteq \mathcal{C}$, $S' := N_H(C') \subseteq S$, trong đó $H := H_S$.

Do mỗi thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}'$ cũng đồng thời là một thành phần liên thông lẻ của $G - S'$ nên

$$|N_H(C')| = |S'| \geq q(G - S') - d \geq |C'| - d.$$

Bằng cách áp dụng kết quả 2.1.3 cho đồ thị $H := H_S$ và tập $A := \mathcal{C}$, H chứa một cặp ghép với đúng $|C| - d = q(G - S) - d = |S|$ cạnh, tức là một cặp ghép của tập S .

ii) Mọi thành phần liên thông của $G - S$ đều là nhân tử critical.

Giả sử tồn tại một thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}$ và một đỉnh $c \in C$ sao cho $C' := C - c$ không có chứa bất kì 1 – nhân tử nào.

Bằng cách áp dụng định lí Tutte cho C' , tồn tại một tập $T' \subseteq V(C')$ sao cho $q(C' - T') > |T'|$.

Do $|C|$ là số lẻ nên $|C'|$ là số chẵn.

Do đó, $q(C' - T')$ và $|T'|$ có cùng tính chẵn lẻ, tức là $q(C' - T') \geq |T'| + 2$.

Bằng cách chọn $S' := S \cup \{c\} \cup T'$,

$$\begin{aligned} q(G - S') &= q(G - S) - 1 + q(C' - T') \\ &\geq |S| + d - 1 + |T'| + 2 \\ &= |S'| + d. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $q(G - S') = |S'| + d$, mâu thuẫn với tính chất tối đại của S . □

Bây giờ ta sẽ khảo sát tiếp mối liên hệ giữa tập S được nói đến trong kết quả 2.2.3 với một cặp ghép M bất kì trong G :

Giả sử cho trước một cặp ghép M trong G .

Đặt:

- k_S là số các cạnh trong M có ít nhất một đầu mút trong S ;
- k_C là số các cạnh trong M có cả hai đầu mút trong $G - S$.

Do trong mỗi thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}$ ta đều tìm được một đỉnh không liên thuộc với bất kì một cạnh nào của M nên

$$k_S \leq |S| \text{ và } k_C \leq \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|).$$

Do đó,

$$|M| = k_S + k_C \leq |S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|).$$

Mặt khác, G có chứa một cặp ghép M_0 làm thỏa mãn cả hai đánh giá vừa nêu: đầu tiên từ (i), chọn ra $|S|$ cạnh nằm giữa S và $\cup \mathcal{C}$; và từ (ii), ta chọn ra tiếp $\frac{1}{2}(|\mathcal{C}| - 1)$ cạnh thích hợp trong mỗi thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}$.

Bằng cách kết hợp các kết quả phân tích trên ta nhận thấy rằng:

“Mọi cặp ghép M có lực lượng tối đa $|S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |\mathcal{C}|)$ ”.

Hơn nữa, cặp ghép M đạt được lực lượng tối đa sẽ có cấu trúc: mỗi đỉnh $s \in S$ đều là đầu mút của một cạnh $st \in M$ với $t \in G - S$; với các đỉnh s khác nhau, đầu mút t sẽ thuộc các thành phần liên thông C khác nhau; và mỗi thành phần liên thông $C \in \mathcal{C}$ có chính xác $\frac{1}{2}(|\mathcal{C}| - 1)$ cạnh thuộc cặp ghép M .