

Chủ đề 03. Tính liên thông

Nhận xét rằng cách ta đưa ra định nghĩa về khái niệm k – liên thông chưa thật sự trực quan. Bản thân cách định nghĩa này không giải thích được ý nghĩa của cụm từ “liên thông” trong khái niệm k – liên thông: tất cả những gì ta biết từ cách định nghĩa này là nếu ta xóa đi tối thiểu k đỉnh trong một đồ thị k – liên thông thì đồ thị thu được bị mất đi tính liên thông.

Để giải quyết sự hạn chế này ta sẽ giới thiệu thêm một cách định nghĩa thứ hai trực quan và dễ sử dụng hơn:

“Đồ thị G được gọi là k – liên thông nếu hai đỉnh bất kì của nó đều có thể được nối bởi một hệ gồm k đường đi độc lập nhau.”

Tính tương đương giữa hai cách định nghĩa này sẽ được trình bày một cách tỉ mỉ trong mục 3.3.

Trong các mục 3.1. và 3.2, ta sẽ đưa ra các mô tả chi tiết về cấu trúc cho lớp các đồ thị 2 – liên thông và 3 – liên thông. Điều này đóng vai trò như một bước đệm trước đi trình bày mục 3.3. Một sự mô tả chi tiết như vậy chỉ có thể thực hiện được cho các giá trị đơn giản của chỉ số k .

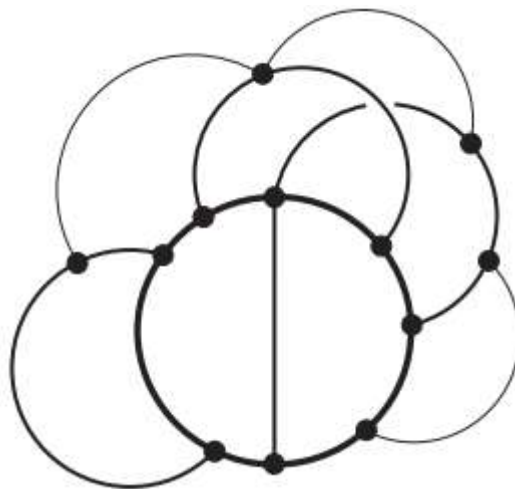
Trong phần còn lại của “Chủ đề 03. Tính liên thông” ta sẽ trình bày thêm những mở rộng hiện đại có liên quan đến chủ đề liên thông mà ta đang khảo sát: tính toán số các H – đường đi trong một đồ thị cho trước; tính toán số các cây khung trong một đồ thị cho trước; khảo sát sự tồn tại của hệ các đường đi phân biệt nối giữa các cặp đỉnh cho trước.

3.1. Cấu trúc của đồ thị 2 – liên thông

Kết quả 3.1.1.

Điều kiện cần và đủ để G là đồ thị 2 – liên thông là G có thể được tạo thành từ một chu trình cho trước bằng cách bổ sung liên tiếp các H – đường đi vào đồ thị H được xây dựng trước đó.

Chứng minh kết quả 3.1.1.



Hình ảnh minh họa.

Nhận thấy rằng mọi đồ thị được xây dựng bằng phương pháp mô tả như trên đều là 2 – liên thông.

Ngược lại, giả sử cho trước một đồ thị 2 – liên thông G .

Khi đó, G phải chứa một chu trình nào đó, nên nó cũng sẽ có chứa một đồ thị tối đại H được xây dựng theo phương pháp trình bày ở trên.

Nhận xét rằng bất kì cạnh $xy \in E(G) \setminus E(H)$ ($x, y \in H$) cũng đóng vai trò như một H – đường đi nên H là một đồ thị con khung trong G .

Do đó, nếu $H \neq G$ thì từ tính liên thông của G ta suy ra phải tồn tại một cạnh vw với $v \in G - H$ và $w \in H$.

Hơn nữa, từ tính chất 2 – liên thông của G ta cũng suy ra được rằng $G - w$ phải chứa một $v - H$ đường đi P nào đó.

Khi đó, wvP đóng vai trò như một H – đường đi trong G , nên $H \cup wvP$ cũng là một đồ thị con của G xây dựng được theo phương pháp trình bày ở trên nhưng lại “lớn hơn” H .

Điều này mâu thuẫn với tính tối đại của H . □

3.2. Cấu trúc của đồ thị 3 – liên thông

Kết quả 3.2.1.

Nếu G là đồ thị 3 – liên thông và $|G| > 4$ thì G phải chứa một cạnh e sao cho G/e cũng là đồ thị 3 – liên thông.

Chứng minh kết quả 3.2.1.

Giả sử không tồn tại bất kì cạnh e nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó, với mọi cạnh $xy \in G$, G / xy chứa một tập tách S với tối đa 2 phần tử.

Nhận xét rằng do $\kappa(G) \geq 3$ nên đỉnh co v_{xy} của đồ thị G / xy sẽ phải nằm trong S và $|S| = 2$, tức là

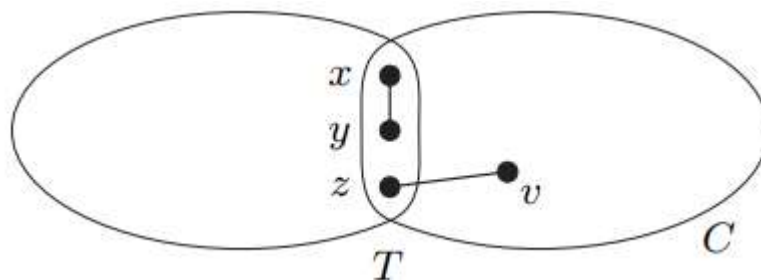
G phải chứa một đỉnh z sao cho G / xy được tách bởi tập $\{v_{xy}, z\}$.

Khi đó, nếu hai đỉnh bất kì nào đó được tách bởi $\{v_{xy}, z\}$ trong G / xy thì chúng cũng được tách bởi $T := \{x, y, z\}$ trong G .

Nhận xét thêm rằng do không thể tách G bởi bất kì một tập con thực sự nào của T nên mọi đỉnh chứa trong T đều có ít nhất một lát giềng nằm trong mỗi thành phần liên thông C của $G - T$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, bằng cách chọn cạnh xy , đỉnh z , và thành phần liên thông C một cách phù hợp, ta có thể giả sử thêm rằng kích thước $|C|$ là nhỏ nhất có thể.

Giả sử v là một đỉnh lát giềng nào đó của z nằm trong C như trong hình vẽ minh họa:



Từ cách xây dựng nêu trên, G / zv cũng không thể là một đồ thị 3 – liên thông, nên tồn tại một đỉnh w sao cho G được tách bởi tập $\{z, v, w\}$.

Điều này chỉ ra rằng mỗi đỉnh nằm trong tập $\{z, v, w\}$ đều có một lát giềng trong mỗi thành phần liên thông của $G - \{z, v, w\}$.

Hơn nữa, do hai đỉnh x và y liên hợp nên $G - \{z, v, w\}$ phải chứa một thành phần liên thông D sao cho $D \cap \{x, y\} = \emptyset$.

Khi đó, mọi láng giềng của v trong D cũng nằm trong C (do $v \in C$), nên $D \cap C \neq \emptyset$ và $D \subsetneq C$ (suy ra từ cách xây dựng tập D).

Điều này mâu thuẫn với cách chọn xy, z và C . □

Kết quả 3.2.2 (Tutte)

Điều kiện cần và đủ để G là đồ thị 3 – liên thông nếu tồn tại một dãy các đồ thị $G_0, \dots, G_n$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i) $G_0 = K_4$ và $G_n = G$;
- ii) Với mọi $i = 1, \dots, n - 1$, G_{i+1} chứa một cạnh xy sao cho $d(x), d(y) \geq 3$ và $G_i = G_{i+1} / xy$.

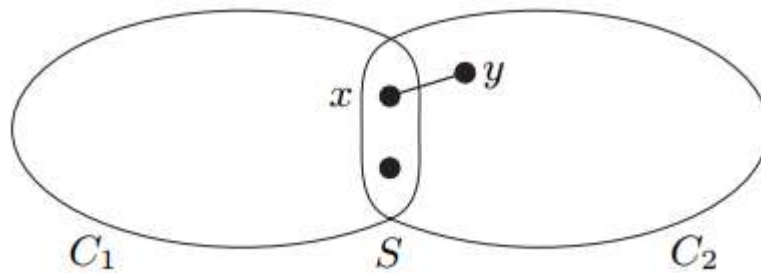
Chứng minh kết quả 3.2.2.

Nếu G là đồ thị 3 – liên thông thì từ kết quả 3.2.1) sự tồn tại của một dãy các đồ thị $G_0, \dots, G_n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là hiển nhiên. Hơn nữa, tất cả các đồ thị trong dãy $G_0, \dots, G_n$ đều là các đồ thị 3 – liên thông.

Ngược lại giả sử tồn tại một dãy các đồ thị $G_0, \dots, G_n$ thỏa mãn các yêu cầu nêu trong bài toán, ta sẽ chỉ ra rằng nếu $G_i = G_{i+1} / xy$ là một đồ thị 3 – liên thông thì tương tự G_{i+1} cũng là một đồ thị 3 – liên thông.

Giả sử đồ thị G_{i+1} có chứa một tập tách S với tối đa 2 phần tử, và C_1, C_2 là hai thành phần liên thông nào đó của $G_{i+1} - S$.

Nhận xét rằng do hai đỉnh x và y liên hợp nhau nên có thể giả sử thêm rằng $V(C_1) \cap \{x, y\} = \emptyset$:



Khi đó, C_2 không chứa đồng thời cả hai đỉnh x, y và cũng không chứa bất kì đỉnh $v \notin \{x, y\}$: trường hợp ngược lại đỉnh v_{xy} (hoặc v) sẽ bị tách ra khỏi C_1 trong G_i bởi tối đa hai đỉnh, mâu thuẫn.

Do đó, C_2 chỉ có thể chứa duy nhất một trong hai đỉnh x (hoặc y).

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $d(x), d(y) \geq 3$ của bài toán. □

Kết quả 3.2.2 là phần cốt lõi thiết yếu của một kết quả nổi tiếng của nhà toán học Tutte được biết đến với tên gọi định lý Wheel. Tương tự như kết quả 3.2.1 cho các đồ thị 2 – liên thông, nó chỉ cho ta cách thức để xây dựng một đồ thị 3 – liên thông bất kì bằng cách thực hiện liên tiếp một quy trình đơn giản: bắt đầu từ đồ thị đầy đủ K_4 , ta chọn ra một đỉnh v bất kì trong đồ thị đã được xây dựng trước đó, tách đỉnh này thành hai đỉnh liên hợp v', v'' và nối chúng với các đỉnh láng giềng cũ của v – điều này nói lên rằng mỗi đỉnh v' và v'' đều có tối thiểu 3 cạnh liên thuộc với nó, còn mỗi đỉnh láng giềng cũ của v sẽ liên hợp với tối thiểu một trong hai đỉnh v', v'' .

Kết quả 3.2.3 (Tutte)

Không gian chu trình của một đồ thị 3 – liên thông được sinh ra bởi tập các chu trình khung không tách được của nó.

Chứng minh kết quả 3.2.3.

Để chứng minh tính đúng đắn cho kết quả này ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số bậc $|G|$ của đồ thị G .

Trong trường hợp đồ thị đầy đủ K_4 , mỗi chu trình hoặc là một tam giác hoặc là hiệu đối xứng của các tam giác. Dễ dàng kiểm chứng rằng các đồ thị này đều là đồ thị khung và không thể tách được nên khẳng định của bài toán là hiển nhiên cho trường hợp $|G| = 4$.

Đối với bước quy nạp của bài toán, giả sử cạnh $e = xy$ là một cạnh nào đó của G sao cho $G' := G / e$ cũng là một đồ thị 3 – liên thông (suy ra từ kết quả 3.2.1).

Khi đó, mỗi cạnh $e' \in E(G') \setminus E(G)$ đều có dạng $e' = uv_e$, trong đó có ít nhất một trong hai cạnh ux hoặc uy phải nằm trong G ; bằng cách chọn cạnh này và đồng nhất kí hiệu nó giống với cạnh e' , e' vừa dùng để kí hiệu cạnh uv_e vừa dùng để chỉ một trong hai cạnh ux, uy .

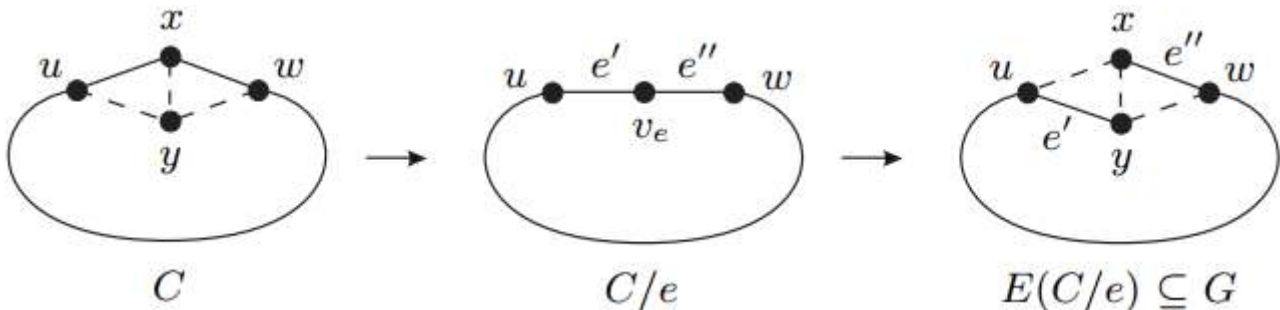
Theo cách quy ước trình bày ở trên, có thể xem $E(G')$ như một tập con của $E(G)$ và $\mathcal{E}(G')$ như một không gian con của $\mathcal{E}(G)$.

Bây giờ xét một chu trình khung C bất kì nằm trong G . Nếu $e \in C$ và $C = C_3$, C được gọi là một **tam giác cơ sở**, thì $C/e = K_2$. Nếu $e \in C$ nhưng $C \neq C_3$ thì C/e là một chu trình trong G' .

Cuối cùng nếu $e \notin C$ thì chỉ có tối đa một trong hai đỉnh x, y nằm trên C (trong trường hợp ngược lại cạnh e sẽ đóng vai trò như một dây cung của C), nên nếu thay đỉnh x (hoặc y) bởi đỉnh v_e trong C thì kết quả thu được cũng là một chu trình trong G' và ta cũng kí hiệu chu trình này bởi C/e .

Do đó, nếu C không phải là một tam giác cơ sở trong G thì C/e luôn là một chu trình trong G' .

Hơn nữa, trong trường hợp $e \notin C$, tập cạnh của chu trình C/e cũng có thể được xem như một tập con của $E(G)$ và không nhất thiết phải đồng nhất với tập cạnh $E(C)$.



Hình vẽ minh họa.

Để thuận tiện cho việc trình bày lời giải của bài toán ta quy ước gọi các chu trình khung không tách được trong G (hoặc G') là chu trình cơ sở. Nếu một phần tử của $\mathcal{C}(G)$ có thể được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính các chu trình cơ sở trong G thì phần tử này được gọi là **tốt**.

Do đó, để giải quyết được bài toán ban đầu, ta cần chỉ ra rằng mọi phần tử của $\mathcal{C}(G)$ đều là tốt.

Ý tưởng cốt lõi của phép chứng minh này nằm ở chỗ từ một chu trình $C \in \mathcal{C}(G)$ ta thực hiện phép co về thành chu trình C/e , sử dụng giả thiết quy nạp để khai triển C/e thành các chu trình cơ sở và sau cùng là suy ra phép biểu diễn cần tìm cho chu trình C trong G .

Để hoàn thành được ý tưởng vừa nêu ở trên ta cần đến sự hỗ trợ từ 3 kết quả phụ sau:

Khẳng định 1.

Mọi tam giác cơ sở đều là một chu trình cơ sở.

Chứng minh khẳng định 1.

Xét một tam giác cơ sở $wxyw$ bất kì trong G . Dễ dàng nhận thấy rằng tam giác này là một đồ thị con khung trong G . Nếu G được tách bởi tam giác $wxyw$ thì tập $\{v_e, w\}$ cũng sẽ tách G' .

Điều này mâu thuẫn với cách chọn cạnh e . □

Khẳng định 2.

Nếu C là một chu trình khung trong G và không phải là một tam giác cơ sở thì tồn tại một chu trình tốt $D \in \mathcal{C}(G)$ sao cho $C + C/e + D \in \{\emptyset, \{e\}\}$.

Chứng minh khẳng định 2.

Về mặt bản chất khẳng định trên phát biểu rằng:

“ C và C/e chỉ sai khác nhau một hạng tử có dạng D (hoặc $D + e$)”.

Nhận xét rằng chỉ có tối đa là một trong hai cạnh $e_u = uv_e$ (hoặc $e_w = v_e w$) là liên thuộc với đỉnh v_e trong C/e , nên “khoảng cách” giữa hai tập cạnh của C/e và C sẽ được lấp đi nếu như ta bổ sung một cách phù hợp các tam giác uxy , xyw .

Kí hiệu D_u là tam giác uxy nếu $e_u \notin C$, và $\emptyset$ trong trường hợp ngược lại; D_w là tam giác xyw nếu $e_w \notin C$, và $\emptyset$ trong trường hợp ngược lại.

Khi đó, $D := D_u + D_w$ chính là chu trình cần tìm. □

Khẳng định 3.

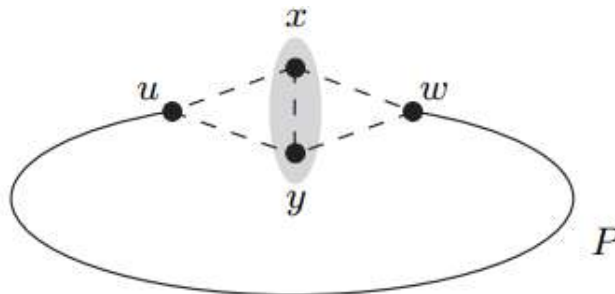
Với mọi chu trình cơ sở C' trong G' , luôn tồn tại một chu trình cơ sở $C = C(C')$ trong G sao cho $C/e = C'$.

Chứng minh khẳng định 3.

Nhận xét rằng nếu $v_e \notin C'$ thì khẳng định trên là hiển nhiên nếu ta đặt $C := C'$.

Không mất tính tổng quát của bài toán ta có thể giả thiết thêm rằng $v_e \in C'$.

Kí hiệu u, w là hai đỉnh láng giềng của v_e trên C' , và P là $u - v$ đường đi trong C' tránh qua v_e :



Khi đó, $P \subseteq G$.

Nếu $\{ux, uy, wx, wy\} \subseteq E(G)$ thì $C_x := uPwxu$, $C_y := uPwxu$ đều là các chu trình khung trong G (bởi vì C' là một chu trình khung trong G'), và hiển nhiên $C_x/e = C_y/e = C'$.

Nhận xét thêm rằng không có bất kì chu trình nào trong hai chu trình này tách hai đỉnh của $G - (V(P) \cup \{x, y\})$ trong G (do C' không tách bất kì đỉnh nào trong G').

Do đó, nếu C_x là một chu trình tách trong G thì phải có một thành phần liên thông nào đó của $G - C_x$ chỉ bao gồm duy nhất đỉnh y ; nếu C_y là một chu trình tách trong G thì cũng phải có một thành phần liên thông nào đó của $G - C_y$ chỉ bao gồm duy nhất đỉnh x .

Hơn nữa, không thể xảy ra trường hợp cả hai chu trình C_x và C_y đều là chu trình tách trong G : trường hợp ngược lại, $N_G(\{x, y\}) \subseteq V(P)$ nên $N_G(\{x, y\}) = \{u, w\}$ (do chu trình khung C' không có chứa bất kì dây cung nào), mâu thuẫn với giả thiết $\kappa(G) \geq 3$.

Như vậy, ít nhất phải có một trong hai chu trình C_x, C_y đóng vai trò là một chu trình cơ sở trong G .

Phần việc còn lại là khảo sát trường hợp $\{ux, uy, wx, wy\} \not\subseteq E(G)$, không mất tính tổng quát của vấn đề, ta có thể giả sử thêm rằng $ux \notin E(G)$.

Khi đó, một trong hai chu trình $uPwyu$ hoặc $uPwxyu$ sẽ đóng vai trò là một chu trình cơ sở trong G tùy thuộc vào việc wy có phải là một cạnh của đồ thị G . □

Bây giờ ta quay trở lại nội dung chính của bài toán là chứng minh rằng mọi phần tử $C \in \mathcal{C}(G)$ đều tốt. Từ kết quả 1.9.1) ta suy ra rằng có thể giả sử thêm rằng C là một chu trình khung trong G để giảm nhẹ bài toán. Từ khẳng định 1), ta cũng có thể nhận thấy rằng chu trình C không phải là một tam giác cơ sở; nên C/e là một chu trình. Từ khẳng định 2), C và C/e sai khác nhau một hạng tử D (hoặc $D + e$) trong đó D là một chu trình tốt nào đó; từ khẳng định 3), nếu chu trình C có thể biểu diễn thành một tổ hợp các chu trình cơ sở C'_i trong G' thì mỗi chu trình này đều là kết quả khi thực hiện phép co từ một chu trình cơ sở C_i nào đó trong G . Tương tự như trên, C_i và C'_i cũng sai khác nhau một hạng tử có dạng D_i (hoặc $D_i + e$); nên tổ hợp tuyến tính gồm tất cả các chu trình cơ sở C_i và tất cả các hạng tử D_i (hoặc $D_i + e$) sẽ có tổng bằng C .

Để dễ hình dung vấn đề ta sẽ trình bày chi tiết lại các phân tích vừa nêu ở trên:

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, C/e có thể được biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính các chu trình cơ sở C'_i trong G' như sau

$$C/e = C'_1 + \dots + C'_k.$$

Từ khẳng định 3), với mỗi chỉ số i , tồn tại một chu trình cơ sở $C(C'_i)$ nằm trong G thỏa mãn

$$C(C'_i)/e = C'_i.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng các chu trình $C(C'_i)$ này cũng không thể là tam giác cơ sở được nên từ khẳng định 2) ta suy ra tồn tại các chu trình tốt $D_i \in \mathcal{C}(G)$ sao cho $C(C'_i) + C'_i + D_i \in \{\emptyset, \{e\}\}$.

Nếu kí hiệu $C_i := C(C'_i) + C'_i + D_i$ thì C_i là một chu trình tốt và nó chỉ sai khác C'_i tối đa cạnh e .

Từ khẳng định 2), tồn tại một chu trình tốt $D \in \mathcal{C}(G)$ sao cho $C + C/e + D \in \{\emptyset, \{e\}\}$,
nên $C + D$ sai khác C/e tối đa cạnh e .

Điều này chỉ ra rằng tổ hợp $C + D + C_1 + \dots + C_k$ cũng sai khác tổ hợp $C/e + C'_1 + \dots + C'_k = \emptyset$ tối đa cạnh e , nên $C + D + C_1 + \dots + C_k \in \{\emptyset, \{e\}\}$.

Do đó, $C = D + C_1 + \dots + C_k$. □

3.3. Định lí Menger

Trong mục này của chủ đề 03) ta sẽ nói về các phép chứng minh khác nhau cho định lí Menger – một kết quả nổi tiếng trong lý thuyết đồ thị hiện đại.

Kết quả 3.3.1. (Menger)

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ và $A, B \subseteq V$.

Khi đó, số tối thiểu các đỉnh cần thiết để tách A với B trong G bằng số tối đại các $A - B$ đường đi phân biệt chứa trong G .

Đề đơn giản hóa phép chứng minh ta kí hiệu $k := k(G, A, B)$ là số tối thiểu các đỉnh cần thiết để tách A với B trong G .

Nhận thấy rằng G không thể chứa nhiều hơn k $A - B$ đường đi phân biệt, nên để hoàn tất phép chứng minh cho bài toán ta cần chỉ ra một hệ gồm k $A - B$ đường đi phân biệt nào đó chứa trong G .

Chứng minh thứ nhất cho kết quả 3.3.1.

Để chứng minh khẳng định nêu trên ta sẽ giải quyết bài toán tổng quát hơn như sau:

“Nếu $\mathcal{P}$ là một hệ gồm không quá $k - 1$ $A - B$ đường đi phân biệt trong G thì tồn tại một hệ $\mathcal{Q}$ gồm $|\mathcal{P}| + 1$ $A - B$ đường đi phân biệt sao cho tập các đầu mút của hệ $\mathcal{P}$ chứa trong tập các đầu mút của hệ $\mathcal{Q}$ ”.

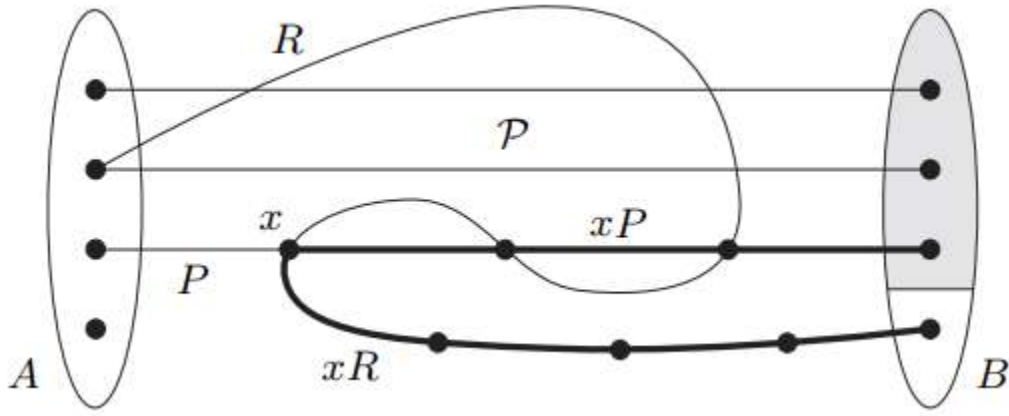
Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G - B|$, trong đó G, A cố định còn B thay đổi.

Giả sử R là một $A - B$ đường đi nào đó tránh qua các đỉnh của B có nằm trên một đường đi nào đó trong $\mathcal{P}$.

Nhận xét rằng nếu R tránh qua tất cả các đường đi chứa trong $\mathcal{P}$ thì $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \cup \{R\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Không mất tính tổng quát của bài toán có thể giả sử thêm rằng R có giao với một đường đi nào đó trong $\mathcal{P}$.

Kí hiệu x là đỉnh cuối cùng của R có nằm trên một đường đi $P \in \mathcal{P}$, $B' := B \cup V(xP \cup xR)$ và $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$.



Khi đó, $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ và $k(G, A, B') \geq k(G, A, B')$.

Áp dụng giả thiết quy nạp cho hệ G, A, B' , tồn tại hệ $\mathcal{Q}'$ gồm $|\mathcal{P}| + 1$ $A - B'$ đường đi phân biệt sao cho tập các đầu mút của hệ $\mathcal{P}'$ chứa trong tập các đầu mút của hệ $\mathcal{Q}'$.

Nhận xét rằng $\mathcal{Q}'$ phải chứa một đường đi Q nhận x làm đầu mút và một đường đi Q' sao cho đỉnh cuối cùng y của nó không nằm trong tập các đỉnh cuối cùng của các đường đi chứa trong $\mathcal{P}'$.

Nếu $y \notin xP$ thì ta thu được hệ $\mathcal{Q}$ từ hệ $\mathcal{Q}'$ bằng cách bổ sung thêm xP vào Q và yR vào Q' nếu $y \notin B$; trường hợp $y \in x^0P$, hệ $\mathcal{Q}$ thu được từ hệ $\mathcal{Q}'$ bằng cách bổ sung thêm xR vào Q và yP vào Q' .

Chứng minh thứ hai cho kết quả 3.3.1.

Để giải quyết bài toán ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G| + \|G\|$ và giả sử rằng G có chứa k $A - B$ đường đi phân biệt.

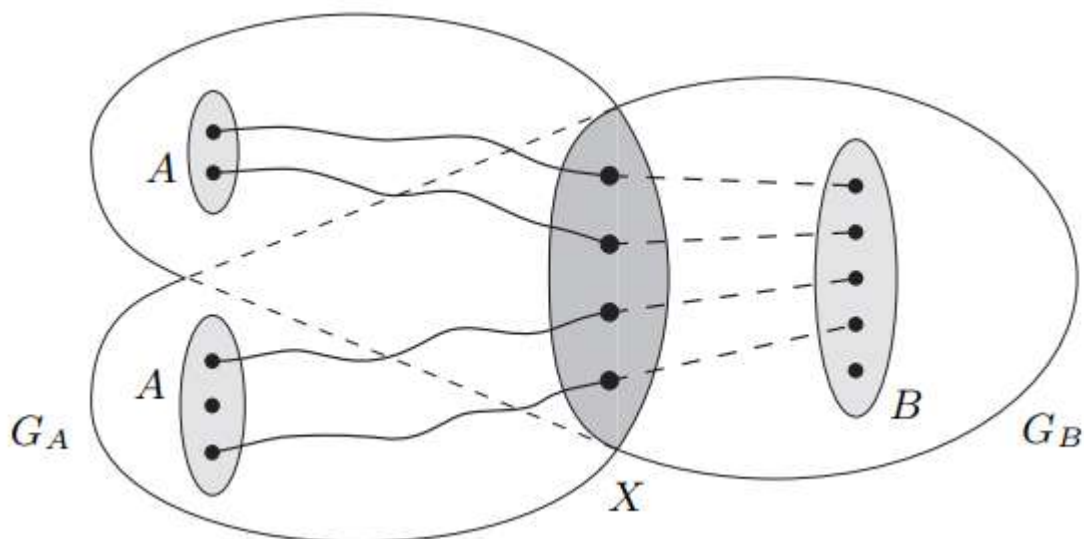
Nhận xét rằng nếu $k \in \{0, 1\}$ thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên, nên không giảm tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử rằng bài toán đã được chứng minh với mọi đồ thị có số đỉnh hoặc số cạnh ít hơn của G và $k \geq 2$.

Nhận xét thêm rằng nếu tồn tại một đỉnh $x \in A \cap B$ thì $G - x$ chứa một hệ gồm $k - 1$ $A - B$ đường đi phân biệt (suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán). Kết hợp hệ trên với đường đi tầm thường $\{x\}$ ta thu được một hệ gồm $k - 1$ $A - B$ đường đi phân biệt trong G . Không giảm tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử rằng $A \cap B = \emptyset$.

Đầu tiên ta sẽ giải quyết bài toán trong trường hợp đặc biệt khi cả A và B đều được tách bởi cùng một tập $X \subseteq V$ với $|X| = k$ và $X \neq A, B$.

Kí hiệu C_A là hợp tất cả các thành phần liên thông của $G - X$ có giao với A ; hiển nhiên $C_A \neq \emptyset$, do $|A| \geq k = |X|$ nhưng $A \neq X$. Đồ thị con C_B cũng được định nghĩa tương tự như trên, và $C_A \cap C_B = \emptyset$.

Kí hiệu $G_A := G[V(C_A) \cup X]$, $G_B := G[V(C_B) \cup X]$.



Nhận xét rằng do mỗi $A - B$ đường đi trong G đều có chứa một $A - X$ đường đi trong G_A nên ta không thể tách A với X trong G_A bởi không quá k đỉnh.

Áp dụng giả thiết quy nạp cho hệ G_A, A, X , G_A chứa một hệ gồm k $A - X$ đường đi phân biệt.

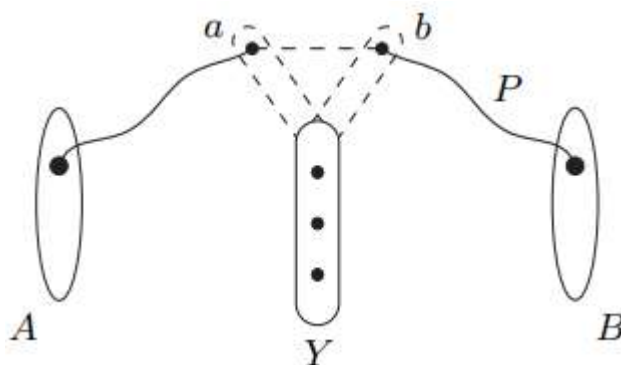
Bằng cách lập luận tương tự như trên, G_B cũng chứa một hệ gồm k $X - B$ đường đi phân biệt.

Do $|X| = k$ nên bằng cách kết hợp hai hệ trên lại ta thu được một hệ gồm k $A - B$ đường đi phân biệt trong G , đpcm.

Trong trường hợp tổng quát hơn, giả sử P là một $A - B$ đường đi chứa trong G .

Từ giả thiết $A \cap B = \emptyset$, P phải chứa một cạnh ab sao cho $a \notin B$ và $b \notin A$.

Kí hiệu Y là tập gồm ít nhất các đỉnh cần thiết tách A với B trong $G - ab$.



Khi đó, $Y_a := Y \cup \{a\}$ và $Y_b := Y \cup \{b\}$ đều tách A với B trong G , nên $|Y_a|, |Y_b| \geq k$ (suy ra từ định nghĩa của chỉ số k).

Nếu xảy ra đẳng thức trong cả hai đánh giá nêu trên thì từ trường hợp đã xử lý ở trên ta có thể giả sử thêm rằng $\{Y_a, Y_b\} \subseteq \{A, B\}$, nên $\{Y_a, Y_b\} = \{A, B\}$ (do $a \notin B$ và $b \notin A$).

Điều này chỉ ra rằng $Y = A \cap B$, mâu thuẫn với giả thiết $A \cap B = \emptyset$ do $|Y| \geq k - 1 \geq 1$.

Như vậy, $|Y_a| > k$ hoặc $|Y_b| > k$, nên $|Y| \geq k$.

Áp dụng giả thiết quy nạp, $G - ab \subseteq G$ chứa một hệ gồm k $A - B$ đường đi phân biệt. □

Khác với hai cách chứng minh trước, phép chứng minh thứ ba cho định lí Menger chính là sự mở rộng từ phép chứng minh của định lí König cho trường hợp đồ thị lưỡng phân.

Giả sử cho trước hệ G, A, B .

Kí hiệu:

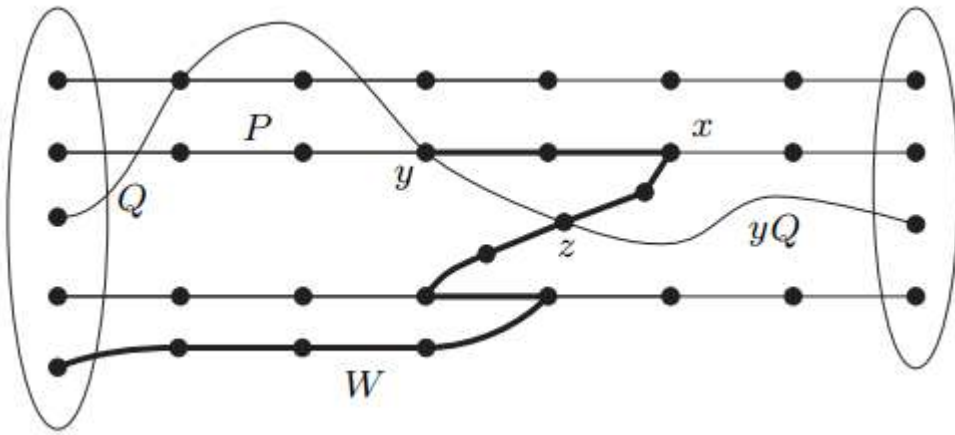
$\mathcal{P}$ là một tập nào đó gồm các $A - B$ đường đi chứa trong G ;

$V[\mathcal{P}] := \cup \{V(P) | P \in \mathcal{P}\}$;

$E[\mathcal{P}] := \cup \{E(P) | P \in \mathcal{P}\}$.

Dãy chuyển $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n \subseteq G$ ($e_i \neq e_j$ nếu $i \neq j$) được gọi là **thay phiên** đối với $\mathcal{P}$ nếu ba điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- i) Nếu $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$ thì W chuyển cạnh e quay ngược chiều lại so với hướng ban đầu, tức là nếu $x_{i+1} \in P x_i^0$ với một đường đi P nào đó nằm trong tập $\mathcal{P}$;
- ii) Nếu $x_i = x_j$ ($i \neq j$) thì $x_i \in V[\mathcal{P}]$;
- iii) Nếu $x_i \in V[\mathcal{P}]$ thì $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$.



Xét $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n$ là một dãy chuyển thay phiên đối với $\mathcal{P}$ từ $A \setminus V[\mathcal{P}]$ vào $B \setminus V[\mathcal{P}]$

Từ điều kiện ii), mọi đỉnh bất kì không nằm trong tập $V[\mathcal{P}]$ xuất hiện tối đa không quá một lần trên W . Do tất cả các cạnh e_i nằm trong W đều phân biệt nên từ điều kiện iii) ta suy ra mọi đỉnh bất kì nằm trong $V[\mathcal{P}]$ xuất hiện tối đa không quá hai lần trên W .

Điều nhận xét này chỉ có thể xảy ra theo một trong hai cách sau:

“Nếu $x_i = x_j$ với $0 < i < j < n$ thì $e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}]$ và $e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}]$,

hoặc $e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}]$ và $e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]$ ”.

Bổ đề 3.3.2.

Điều kiện cần và đủ để tồn tại một dãy chuyển W như nêu ở trên là G phải chứa một hệ gồm $|\mathcal{P}| + 1$ $A - B$ đường đi phân biệt.

Chứng minh bổ đề 3.3.2.

Kí hiệu H là đồ thị xây dựng trên tập $V[\mathcal{P}] \cup \{x_0, \dots, x_n\}$ trong đó tập cạnh là hiệu đối xứng của $E[\mathcal{P}]$ với $\{x_0, \dots, x_n\}$.

Theo cách xây dựng nêu trên, tập các đầu mút của các đường đi nằm trong $\mathcal{P}$ và của dây chuyền W phải có bậc bằng 1 (hoặc 0, nếu đường đi này hoặc dây chuyền W là tầm thường), còn tất cả các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 0 hoặc 2.

Nhận xét rằng, với mỗi đỉnh $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$, tồn tại một thành phần liên thông của H chứa a , tức là tồn tại một đường đi $P = v_0 \dots v_k$ xuất phát tại a và kết thúc trong A hoặc B .

Từ các điều kiện i) và iii), P chuyển mỗi cạnh $e = v_i v_{i+1}$ nằm trên nó quay ngược chiều lại so với hướng ban đầu trong $\mathcal{P}$ hoặc W .

(Về mặt hình thức, phát biểu này có nghĩa là: “Nếu $e = v_i v_{i+1} \in P'$ với $P' \in \mathcal{P}$ thì $v_i \in P' v_{i+1}^0$; nếu $e = e_j \in W$ thì $v_i = x_j$ và $v_{i+1} = x_{j+1}$ ”.)

Do đó, P phải kết thúc trong B .

Điều này chỉ ra cho ta một hệ gồm $|\mathcal{P}| + 1$ đường đi phân biệt P trong G , đpcm. □

Chứng minh thứ ba cho kết quả 3.3.1.

Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp tối đại các $A - B$ đường đi phân biệt chứa trong G . Nếu không giải thích gì thêm thì ta có thể mặc định ngầm hiểu là tất cả các dây chuyền xét trong phép chứng minh này đều là dây chuyền thay phiên đối với $\mathcal{P}$.

Đặt:

$$A_1 := A \cap V[\mathcal{P}], A_2 := A \setminus A_1,$$

$$B_1 := B \cap V[\mathcal{P}], B_2 := B \setminus B_1.$$

Với mỗi đường đi $P \in \mathcal{P}$, kí hiệu x_P là đỉnh cuối cùng của P có nằm trên một dây chuyền thay phiên nào đó xuất phát từ trong A_2 ; nếu không tồn tại bất kì đỉnh nào thỏa mãn yêu cầu trên thì ta quy ước x_P chính là đỉnh đầu tiên của P .

Nhận xét rằng tập $X := \{x_P | P \in \mathcal{P}\}$ gồm $|\mathcal{P}|$ phần tử, nên ta chỉ cần chứng minh rằng tập X tách A với B trong G .

Để chứng minh tập X tách A với B trong G , ta chỉ cần chứng minh rằng mọi $A - B$ đường đi Q chứa trong G đều có giao với tập X .

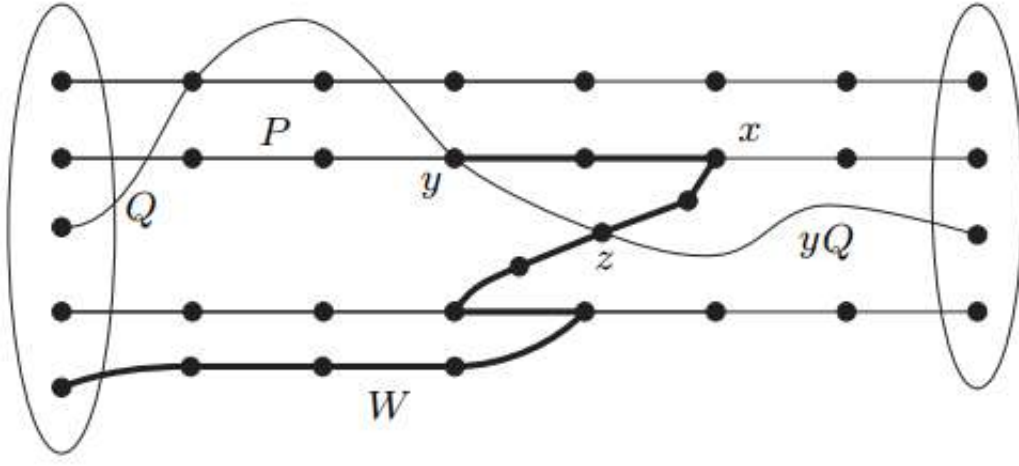
Ngược lại, giả sử tồn tại một $A - B$ đường đi Q không có giao với tập X .

Từ tính tối đại của $\mathcal{P}$, Q có giao với $V[\mathcal{P}]$. Hơn nữa, do mọi $A - V[\mathcal{P}]$ đường đi trong Q đều là một dây chuyền thay phiên nên Q cũng phải có giao với tập đỉnh $V[\mathcal{P}']$ của $\mathcal{P}' := \{Px_P | P \in \mathcal{P}\}$.

Đặt y là đỉnh cuối cùng của Q nằm trong $V[\mathcal{P}']$, P là đường đi trong $\mathcal{P}$ chứa y , $x := x_P$, và W là một dây chuyền thay phiên nào đó từ A_2 vào x nêu trong định nghĩa của x_P .

Theo cách xây dựng, Q tránh X nên nó cũng tránh x , nên $y \in Px^0$.

Khi đó, $W \cup xPyQ$ là một dây chuyền từ A_2 vào B .



Hình vẽ minh họa.

Nếu $W \cup xPyQ$ là một dây chuyền thay phiên từ A_2 vào B_2 thì từ bổ đề 3.3.2) ta suy ra rằng G sẽ chứa một hệ gồm $|\mathcal{P}| + 1$ $A - B$ đường đi phân biệt, điều này mâu thuẫn với tính tối đại của $\mathcal{P}$.

Nếu $W \cup xPyQ$ không phải là dây chuyền thay phiên thì lập luận của ta sẽ được điều chỉnh lại đôi chút để có thể tận dụng được những ý tưởng của trường hợp trước đó như sau:

Đặt x' là đỉnh đầu tiên của W nằm trên xPy^0 , $W' := Wx'Py$ là một dây chuyền thay phiên từ A_2 đến y .

Nhận xét rằng W' có thể có giao với y^0Q nên $W'yQ$ cũng không nhất thiết là một dây chuyền thay phiên nên ta sẽ cải tiến lại lập luận một lần nữa như sau:

Đầu tiên, nhận thấy rằng từ cách định nghĩa của $\mathcal{P}'$, W , cách chọn y trên Q .

$$V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[\mathcal{P}'] \text{ và } V(y^0Q) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset.$$

Điều này chỉ ra rằng W' và y^0Q chỉ có thể có giao nằm ngoài $\mathcal{P}$.

Như vậy:

Nếu $W' \cap y^0Q \neq \emptyset$ thì, bằng cách đặt z là đỉnh đầu tiên của W' trên y^0Q , z nằm ngoài $V[\mathcal{P}]$ và z chỉ xuất hiện duy nhất một lần trên W' (suy ra từ điều kiện ii), nên ta có thể đặt $W'' := W'zQ$;

Nếu $W' \cap y^0Q = \emptyset$ thì $W'' := W' \cup yQ$.

Dễ dàng nhận thấy rằng do W' và y^0Q đều tránh $V[\mathcal{P}']$ nên W' luôn là một dây chuyền thay phiên đối với $\mathcal{P}$.

Theo cách định nghĩa của $\mathcal{P}'$, W'' tránh $V[\mathcal{P}] \setminus V[\mathcal{P}']$, nên $V(y^0Q) \cap V[\mathcal{P}] = \emptyset$.

Do đó, W'' cũng là một dây chuyền thay phiên đối với $\mathcal{P}$ và W'' kết thúc trong B_2 .

Hơn nữa, W'' bắt đầu trong A_2 , bởi vì W bắt đầu trong A_2 .

Điều này mâu thuẫn với tính tối đại của $\mathcal{P}$, suy ra bằng cách áp dụng bổ đề 3.3.2) cho W'' . $\square$

Một hệ các $a - B$ đường đi được gọi là $a - B$ fan nếu hai đường đi bất kì chỉ chung nhau duy nhất đỉnh a .

Hệ quả 3.3.3.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$, $B \subseteq V$, $a \in V \setminus B$.

Khi đó, số tối thiểu các đỉnh $\neq a$ tách a với B trong G bằng số tối đại các đường đi chứa trong G lập thành một $a - B$ fan.

Chứng minh hệ quả 3.3.3.

Áp dụng kết quả 3.3.1) với $A := N(a)$. □

Hệ quả 3.3.4.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$, a, b là hai đỉnh phân biệt nào đó trong G .

- i) Nếu $ab \notin E$ thì số tối thiểu các đỉnh $\neq a, b$ tách a với b trong G bằng số tối đại các $a - b$ đường đi phân biệt chứa trong G .
- ii) Số tối thiểu các cạnh tách a với b trong G bằng số tối đa các $a - b$ đường đi phân biệt cạnh chứa trong G .

Chứng minh hệ quả 3.3.4.

i) Áp dụng kết quả 3.3.1) với $A := N(a)$ và $B := N(b)$.

ii) Áp dụng kết quả 3.3.1) cho đồ thị tuyến tính của G với $A := E(a)$ và $B := E(b)$. □

Kết quả 3.3.5. (Dạng toàn cục của định lý Menger)

- i) Điều kiện cần và đủ để một đồ thị G là k - liên thông là G chứa một hệ gồm k đường đi độc lập giữa hai đỉnh bất kì của nó.
- ii) Điều kiện cần và đủ để một đồ thị G là k - liên thông cạnh là G chứa một hệ gồm k đường đi phân biệt giữa hai đỉnh bất kì của nó.

Chứng minh kết quả 3.3.5.

i) Nếu G chứa một hệ gồm k đường đi độc lập giữa hai đỉnh bất kì của nó thì $|G| > k$ và không thể tách G bởi ít hơn k đỉnh. Do đó, G là k - liên thông.

Ngược lại, giả sử G là một đồ thị k - liên thông có chứa hai đỉnh a, b sao cho ta không thể nối hai đỉnh này với nhau bởi k đường đi độc lập.

Nhận xét rằng, từ hệ quả 3.3.4 (i), a và b là hai đỉnh liên hợp với nhau.

Kí hiệu $G' := G - ab$.

Khi đó, G' chỉ chứa tối đa không quá $k - 2$ $a - b$ đường đi phân biệt.

Nhận xét thêm rằng, từ hệ quả 3.3.4 (i), có thể tách a với b trong G' bởi một tập X gồm tối đa không quá $k - 2$ đỉnh.

Do $|G| > k$ nên G phải chứa ít nhất một đỉnh $v \notin X \cup \{a, b\}$; nên X sẽ tách v với a (hoặc b) trong G' .

Không giảm tính tổng quát của bài toán có thể giả sử rằng X tách v với a trong G' .

Khi đó, $X \cup \{b\}$ là một tập gồm tối đa không quá $k - 1$ đỉnh tách v với a trong G , mâu thuẫn với giả thiết về tính k – liên thông của G .

ii) Lập luận tương tự như trên cho hệ quả 3.3.4 (ii), dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn của khẳng định 3.3.5 ii). □

3.4. Định lí Mader

Trong phần này của bài viết ta sẽ khảo sát sơ lược qua lời giải của một bài toán rất thú vị được nêu ra bởi nhà toán học Mader khi nghiên cứu cơ chế trong phép chứng minh định lí Menger:

Cho trước đồ thị G và H là một đồ thị con khung của H . Xác định số các H – đường đi độc lập có thể chứa trong G ?

Bài toán ta vừa nêu nảy sinh một cách rất tự nhiên do khi chứng minh định lí Menger ta cũng cần phải giải quyết được một vấn đề tương tự đó là:

“Cho trước đồ thị G và a, b là hai đỉnh bất kì trong G . Xác định số tối đại các $a - b$ đường đi độc lập chứa trong G ?”

Dựa trên các ý tưởng tiếp cận và kết quả đã đạt được trong chứng minh của định lí Menger ta nhận thấy rằng nếu $X \subseteq V(G - H)$ và $F \subseteq E(G - H)$ thì mọi H – đường đi chứa trong G đều có chứa ít nhất một đỉnh hoặc một cạnh trong $X \cup F$, nên không thể có nhiều hơn $|X \cup F|$ H – đường đi độc lập được chứa trong G .

Do đó, giá trị nhỏ nhất có thể đạt được của $X \cup F$ chính là một chặn trên cho số các H – đường đi độc lập chứa trong G .

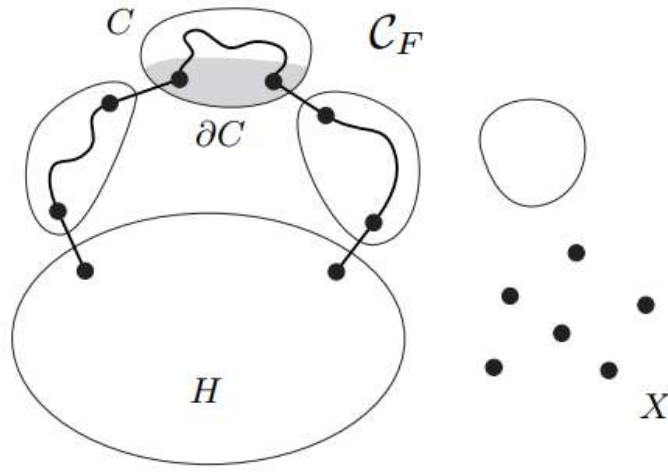
Lưu ý rằng mọi H – đường đi chứa trong G đều có giao với $G - H$, bởi vì H là một đồ thị khung trong G và các cạnh của H thì không được tính như một H – đường đi.

Mặc dù phương pháp xây dựng chặn trên mà ta vừa chỉ ra ở trên có khởi nguồn từ định lí Menger nhưng đối với trường hợp tổng quát chặn này còn có thể được cải tiến thêm như sau:

“Không giảm tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả rằng không có bất kì cạnh nào trong F liên thuộc với một đỉnh nào đó trong X , bởi trường hợp ngược lại cạnh này cũng sẽ không gây ra bất kì ảnh hưởng đáng kể nào trong lập luận.

Kí hiệu $Y := V(G - H) \setminus X$ và $\mathcal{C}_F$ là tập hợp gồm tất cả các thành phần liên thông của (Y, F) .

Nhận xét rằng do mọi H – đường đi tránh X trong G đều có chứa một cạnh nằm trong F nên nó phải chứa ít nhất hai đỉnh nằm trong một tập ∂C nào đó, trong đó $C \in \mathcal{C}_F$ và ∂C là tập hợp các đỉnh nằm trong C có ít nhất một đỉnh láng giềng nằm trong $G - X - C$.



Như vậy, $M_G(H) := \min \left(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \right)$ là một chặn trên của số các H – đường đi độc lập trong G , giá trị cực tiểu xét trên các cặp (X, F) với $X \subseteq V(G - H)$ và $F \subseteq E(G - H - X)$ sao cho mọi H – đường đi chứa trong G đều có chứa một đỉnh hoặc một cạnh nào đó trong $X \cup F$.

Ngược lại, nhà toán học Mader cũng đã chứng minh được rằng chặn trên này là chặn trên đúng của bài toán (do tính phức tạp của vấn đề nên ta sẽ chỉ giới thiệu kết quả này chứ không đi sâu vào trình bày phép chứng minh):

Kết quả 3.4.1. (Mader)

Giả sử cho trước đồ thị G và H là một đồ thị con khung.

Khi đó, G chứa một hệ gồm $M_G(H)$ H – đường đi độc lập.

Để có thể thu được dạng phát biểu cho cạnh và đỉnh tương tự như định lý Menger ta sẽ hạn chế khảo sát bài toán trong trường hợp khi F hoặc X là tập rỗng, và quy ước thêm một số kí hiệu mới:

“Cho trước một đồ thị con khung $H \subseteq G$, kí hiệu $\kappa_G(H)$ là số phần tử tối thiểu của một tập đỉnh $X \subseteq V(G - H)$ có giao với mọi H – đường đi chứa trong G ; $\lambda_G(H)$ là số phần tử tối thiểu của một tập cạnh $F \subseteq E(G)$ có giao với mọi H – đường đi chứa trong G .”

Hệ quả 3.4.2.

Giả sử cho trước đồ thị G với H là một đồ thị con khung.

Khi đó, G chứa tối thiểu $\frac{\kappa_G(H)}{2}$ H – đường đi độc lập và tối thiểu $\frac{\lambda_G(H)}{2}$ H – đường đi phân biệt cạnh.

Chứng minh hệ quả 3.4.2.

Đầu tiên ta sẽ trình bày phép chứng minh cho khẳng định đầu tiên của hệ quả 3.4.2):

Kí hiệu k là số tối đại các H – đường đi độc lập chứa trong G .

Bằng cách áp dụng kết quả 3.4.1) ta suy ra tồn tại một cặp (X, F) thỏa mãn:

$$k = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor$$

trong đó $X \subseteq V(G - H)$, $F \subseteq E(G - H - X)$, mọi H – đường đi chứa trong G đều chứa ít nhất một đỉnh trong X hoặc một cạnh trong F .

Xét một phần tử $C \in \mathcal{C}_F$, nếu $\partial C \neq \emptyset$ thì ta có thể chọn cố định một đỉnh $v \in \partial C$ và đặt $Y_C := \partial C$; nếu $\partial C = \emptyset$ thì ta chỉ cần đặt $Y_C := \emptyset$.

Do đó, $\left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \geq \frac{|Y_C|}{2}$, với mọi $C \in \mathcal{C}_F$.

Hơn nữa, nếu đặt $Y := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_F} Y_C$ thì mọi H – đường đi đều có chứa một đỉnh trong $X \cup Y$.

Điều này chỉ ra rằng $k \geq |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \frac{|Y_C|}{2} \geq \frac{|X \cup Y|}{2} \geq \frac{\kappa_G(H)}{2}$, đpcm.

Bằng cách áp dụng phương pháp lập luận tương tự cho đồ thị tuyến tính của G ta cũng dễ dàng chứng minh được tính đúng đắn cho khẳng định thứ hai của hệ quả 3.4.2. $\square$

Nhận xét thêm rằng chặn trên được nêu trong hệ quả 3.4.2) còn là chặn trên đúng cho bài toán, bởi vì nếu được cho trước một đồ thị ta hoàn toàn có thể xây dựng đồ thị con khung H sao cho G không chứa nhiều hơn $\frac{\kappa_G(H)}{2} H$ – đường đi độc lập và cũng không chứa nhiều hơn $\frac{\lambda_G(H)}{2} H$ – đường đi phân biệt.

3.5. Hệ cây khung phân biệt cạnh

Nhắc lại rằng dạng phát biểu cho cạnh của định lý Menger khẳng định rằng nếu đồ thị G là k – liên thông thì nó sẽ chứa một hệ gồm k đường đi phân biệt cạnh nối giữa hai đỉnh bất kì của nó.

Trên thực tế việc xác định hệ đường đi này phụ thuộc rất nhiều vào cách lựa chọn hai đỉnh, bởi vì nếu như ta đã tìm được một hệ đường đi nối giữa hai đỉnh cho trước nào đó thì để tìm được một hệ đường đi tương tự như vậy cho một cặp đỉnh khác nhau không phải là một công việc đơn giản.

Như vậy, nếu như việc xác định hệ k đường đi phân biệt cạnh nối giữa hai đỉnh bất kì này đơn giản hơn và không bị phụ thuộc quá nhiều vào cách lựa chọn các cặp đỉnh thì ta việc khảo sát các đồ thị sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Một ví dụ cụ thể cho ý tưởng vừa nêu ở trên là lớp các đồ thị G có chứa một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh. Khi đó, hai đỉnh bất kì luôn được nối với nhau bởi k đường đi phân biệt cạnh, mỗi cây khung cho ta một đường đi.

Câu hỏi nảy sinh ở đây là:

“Liệu một đồ thị cho trước phải thỏa mãn những điều kiện gì để nó có thể chứa một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh?”

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu đồ thị G có chứa một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh thì nó hiển nhiên là một đồ thị k liên thông. Tuy nhiên, chiều ngược lại của khẳng định trên lại hoàn toàn không đúng và thậm chí ta còn chưa biết rõ liệu tính k – liên thông cạnh có kéo theo sự tồn tại của một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh. Như vậy mục tiêu đầu tiên mà ta cần phải giải quyết đó là xác định các điều kiện cơ bản cần phải có mà theo đó đảm bảo sự tồn tại của một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh.

Như trước đây thật dễ dàng để ta tìm ra một điều kiện đủ đơn giản để đảm bảo sự tồn tại của một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh. Nhận xét rằng nếu phân hoạch $V(G)$ thành r tập con thì mỗi cây khung của G sẽ chứa tối thiểu $r - 1$ cạnh bất chéo, **cạnh bất chéo** là một cạnh mà hai đầu mút của nó nằm trong hai tập phân hoạch khác nhau. Do đó, nếu G chứa một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh thì nó phải chứa tối thiểu $k(r - 1)$ cạnh bất chéo.

Ngược lại, điều kiện đủ này cũng đồng thời là điều kiện cần mà ta cần tìm:

Kết quả 3.5.1.(Tutte-Nash-Williams)

Điều kiện cần và đủ để đồ thị G chứa một hệ một gồm k cây khung phân biệt cạnh là mọi phân hoạch P của tập đỉnh của nó đều có chứa tối thiểu $k(|P| - 1)$ cạnh bắt chéo.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Đặt $\mathcal{F}$ là tập tất cả các k -bộ $F = (F_1, \dots, F_k)$ gồm các rừng khung phân biệt cạnh trong G sao cho tổng số cạnh là lớn nhất có thể, nghĩa là $\|F\| := |E[F]|$ với $E[F] := E(F_1) \cup \dots \cup E(F_k)$ là lớn nhất có thể được.

Nếu $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$ và $e \in E \setminus E[F]$ thì $F_i + e$ ($i = 1, \dots, k$) luôn chứa một chu trình: ngược lại, nếu thay F_i bởi $F_i + e$ trong F thì ta thu được một hệ mới với tổng số cạnh lớn hơn tổng số cạnh của hệ F , điều này mâu thuẫn với tính tối đại của $\|F\|$; với mỗi chỉ số i cố định, kí hiệu e' là một cạnh nào đó khác e trong chu trình này.

Đặt $F'_i := F_i + e - e'$ và $F'_j := F_j$ với mọi $j \neq i$.

Khi đó, $F' := (F'_1, \dots, F'_k)$ cũng là một phần tử trong $\mathcal{F}$; F' được gọi là thu được từ F bằng cách thay thế cạnh e' bởi e .

Nhận xét rằng nếu ta thực hiện phép thay thế như trên thì tập đỉnh của thành phần liên thông của F_i có chứa cạnh e' vẫn được giữ nguyên thành tập đỉnh của thành phần liên thông của F'_i ; nên, với mọi đường đi $x \dots y \subseteq F_i$, tồn tại duy nhất một đường đi $x F'_i y \subseteq F_i$.

Bây giờ xét một k -bộ $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$ cố định cho trước, $\mathcal{F}^0$ là tập tất cả các k -bộ trong $\mathcal{F}$ thu được từ F^0 bằng cách thực hiện một dãy liên tiếp các phép thay thế cạnh.

Đặt:

$$E^0 := \bigcup_{F \in \mathcal{F}^0} (E \setminus E[F]);$$

$$G^0 := (V, E^0).$$

Bổ đề 3.5.2.

Với mọi cạnh $e^0 \in E \setminus E[F^0]$, tồn tại một tập $U \subseteq V$ liên thông trong mỗi F_i^0 ($i = 1, \dots, k$) và chứa các đầu mút của cạnh e^0 .

Chứng minh bổ đề 3.5.2.

Do $F^0 \in \mathcal{F}^0$ nên $e^0 \in E^0$; kí hiệu C^0 là thành phần liên thông của G^0 chứa cạnh e^0 .

Ta sẽ chứng minh rằng $U := V(C^0)$ là tập cần tìm, tức là U liên thông trong mỗi F_i^0 ($i = 1, \dots, k$).

Nhận xét rằng:

“Cho trước $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}^0$ và $F' = (F'_1, \dots, F'_k)$ thu được từ F bằng cách thay thế một cạnh nào đó trong F_i .

Khi đó, nếu x, y là hai đầu mút của một đường đi nào đó nằm trong $F'_i \cap C^0$ thì $x F'_i y \subseteq C^0$.”

Giả sử $e = vw$ là một cạnh nào đó của F'_i nhưng không nằm trong F_i , tức là $e \in E(F'_i) \setminus E[F]$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử rằng $e \in xF'_iy$: ngược lại, $xF'_iy = xF'_iy$ nên khẳng định là hiển nhiên.

Nhận thấy nếu $vF_iw \subseteq C^0$ thì $(xF'_iy - e) \cup vF_iw$ là một đồ thị con liên thông của $F_i \cap C^0$; hơn nữa, do $(xF'_iy - e) \cup vF_iw$ có chứa hai đỉnh x, y nên nó cũng chứa đường đi xF_iy .

Sau đây ta sẽ đưa ra lời giải thích cho hệ thức $vF_iw \subseteq C^0$:

“Giả sử e' là một cạnh nào đó nằm trong vF_iw . Nhận thấy rằng nếu thay cạnh e' trong $F \in \mathcal{F}^0$ bởi cạnh e ta sẽ thu được một bộ $F' \in \mathcal{F}^0$ không chứa cạnh e' , nên không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử thêm rằng $e' \in E^0$. Như vậy $vF_iw \subseteq G^0$, nên $vF_iw \subseteq C^0$ bởi vì $v, w \in xF'_iy \subseteq C^0$.”

Để chứng minh $U = V(C^0)$ liên thông trong F_i^0 ta chỉ cần chỉ ra rằng:

“Với mọi cạnh $xy \in C^0$, đường đi xF_i^0y luôn tồn tại và nằm trong C^0 .”

Thật vậy, giả sử $e = xy \in C^0$ là một cạnh cho trước nào đó.

Do $e \in E^0$ nên tồn tại s bộ $F^r = (F_1^r, \dots, F_k^r)$ ($r = 1, \dots, s$) sao cho mỗi F^r đều thu được từ F^{r-1} bằng cách thực hiện phép thay thế và $e \in E \setminus E[F^s]$.

Nhận thấy rằng nếu áp dụng nhận xét cho $F := F^s$ thì $e = xy$ có thể được xem như là một đường đi có độ dài bằng 1 trong $F'_i \cap C^0$.

Như vậy, nếu áp dụng liên tiếp nhận xét cho $F = F^s, \dots, F^0$ thì ta cũng sẽ chứng minh được rằng $xF_i^0y \subseteq C^0$, đpcm. $\square$

Chứng minh kết quả 3.5.1.

Bây giờ quay trở lại phép chứng minh cho kết quả 3.5.1), ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của kết quả này bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$.

Trường hợp $|G| = 2$, khẳng định của bài toán là hiển nhiên. Đối với bước quy nạp của bài toán, giả sử rằng mọi phân hoạch P của tập đỉnh V đều có tối thiểu $k(|P| - 1)$ cạnh bắt chéo và ta sẽ chỉ ra cách xây dựng một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh trong G để hoàn tất lời giải cho bài toán.

Bằng cách cố định bộ $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$, nếu mọi thành phần F_i^0 đều có cấu trúc cây thì tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên.

Ngược lại, từ kết quả 1.5.3),

$$\|F^0\| = \sum_{i=1}^k \|F_i^0\| < k(|G| - 1).$$

Mặt khác, nếu phân hoạch tập V thành các đỉnh đơn thì,

$$\|G\| \geq k(|G| - 1).$$

Do đó, tồn tại một cạnh $e^0 \in E \setminus E[F^0]$.

Theo bổ đề 3.5.2), tồn tại một tập $U \subseteq V$ liên thông trong mỗi F_i^0 và chứa các đầu mút của cạnh e^0 , nên $|U| \geq 2$. Do mỗi phân hoạch của G / U đều thu được từ một phân hoạch nào đó trong G với cùng số cạnh bắt chéo nên G / U cũng chứa tối thiểu $k(|P| - 1)$ cạnh bắt chéo. Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp, G / U chứa một hệ gồm k cây khung phân biệt cạnh $T_1, \dots, T_k$.

Khi đó, bằng cách thay thế đỉnh v_U trong cây T_i bởi cây khung $F_i^0 \cap G[U]$ trong $G[U]$, ta thu được một hệ gồm k cây khung phân biệt trong G . □

Hệ các đồ thị con $G_1, \dots, G_k$ của G được gọi là một **phân hoạch** của G nếu tập các cạnh của chúng là một phân hoạch của $E(G)$.

Như vậy, bài toán hệ cây khung phân biệt có thể mở rộng lên như sau:

“Xác định số các đồ thị con khung liên thông cần thiết để phân hoạch một đồ thị liên thông cho trước?”

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên chính là:

“Xác định số các rừng khung con cần thiết để phân hoạch một đồ thị liên thông cho trước?”

Nhận thấy rằng nếu một đồ thị G phân hoạch được thành k rừng con khung thì mọi tập $U \subseteq V(G)$ chứa tối đa $k(|U| - 1)$ cạnh, mỗi rừng khung con chứa tối đa không quá $|U| - 1$ cạnh của tập U .

Ngược lại, bằng cách áp dụng bổ đề 3.5.3), ta cũng chứng minh được rằng đây cũng chính là điều kiện cần để đảm bảo cho sự tồn tại của một hệ gồm k rừng con khung:

Kết quả 3.5.4. (Nash – William)

Điều kiện cần và đủ để đồ thị $G = (V, E)$ có thể phân hoạch được thành k rừng con khung là:

“Với mọi tập con khác rỗng $U \subseteq V$, $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$ ”.

Chứng minh kết quả 3.5.4.

Từ các phân tích trình bày ở trên, nếu G phân hoạch được thành k rừng con khung thì:

“Với mọi tập con khác rỗng $U \subseteq V$, $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$ ”.

Ngược lại, ta sẽ chỉ ra rằng mọi k – bộ $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$ đều đóng vai trò như một phân hoạch của G , nghĩa là $E[F] = E$.

Thật vậy, giả sử $e \in E \setminus E[F]$.

Từ bổ đề 3.5.3, tồn tại một tập $U \subseteq V$ liên thông trong mỗi F_i và chứa các đầu mút của cạnh e .

Như vậy, $G[U]$ chứa $|U| - 1$ cạnh đối với mỗi cây khung F_i và chứa thêm cạnh e .

Điều này chỉ ra rằng $\|G[U]\| > k(|U| - 1)$, mâu thuẫn với giả thiết. □

3.6. Hệ các đường đi phân biệt nối giữa các cặp đỉnh cho trước

Một đồ thị với tối thiểu $2k$ đỉnh được gọi là k – link nếu với mọi $2k$ đỉnh phân biệt $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ luôn tồn tại một hệ gồm k đường đi phân biệt $P_1, \dots, P_k$ sao cho $P_i = s_i \dots t_i$.

Nhận thấy rằng mọi đồ thị k – link đều là một đồ thị k – liên thông.

Nhưng chiều ngược lại của khẳng định trên lại hoàn toàn không đúng, bởi vì tính chất k – link thì tổng quát và mạnh hơn rất nhiều tính chất k – liên thông.

Trong phần cuối cùng này của chủ đề này, ta sẽ khảo sát xem khi nào thì hai tính chất này là tương đương với nhau:

“Liệu có tồn tại một hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị $f(k)$ – liên thông đều là k – link?”

Để giải quyết bài toán nêu trên ta cần đến kết quả phụ sau:

Kết quả 3.6.1. (Mader)

Tồn tại một hàm $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho nếu một đồ thị có bậc trung bình lớn hơn hoặc bằng $h(r)$ thì nó sẽ chứa đồ thị K_r như một phân bù topo với mọi $r \in \mathbb{N}$.

Chứng minh kết quả 3.6.1.

Nếu $r = 0, 1, 2$ thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên với $h(r) = 1$; nên không giảm tính tổng quát của vấn đề có thể giả sử rằng $r \geq 3$.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng:

“Mọi đồ thị G có bậc trung bình $d(G) \geq 2^m$ đều chứa một phân bù topo X với r đỉnh và m cạnh, trong đó $m = r, \dots, \binom{r}{2}$.”

Thật vậy, nếu $m = r$ thì, từ Kết quả 1.2.1) và 1.3.1), G sẽ chứa một chu trình với độ dài bằng $\varepsilon(G) + 1 \geq 2^{r-1} + 1 \geq r + 1$, nên tính đúng đắn của khẳng định được chứng minh với $X = C^r$.

Giả sử $r < m \leq \binom{r}{2}$ và khẳng định đã được kiểm chứng với mọi chỉ số nhỏ hơn m .

Bây giờ giả sử G là một đồ thị bất kì nào đó có bậc trung bình $d(G) \geq 2^m$, nên $\varepsilon(G) \geq 2^{m-1}$.

Nhận thấy rằng do G có chứa một thành phần liên thông C với $\varepsilon(C) \geq \varepsilon(G)$ nên có thể giả sử thêm rằng G là một đồ thị liên thông.

Xét một tập tối đại $U \subseteq V(G)$ sao cho U liên thông trong G và $\varepsilon(G/U) \geq 2^{m-1}$.

Nhận thấy rằng do G liên thông nên $N(U) \neq \emptyset$.

Đặt $H := G[N(U)]$.

Khi đó, H không chứa bất kì đỉnh v có bậc nhỏ hơn 2^{m-1} .

(Nếu H chứa một đỉnh v có bậc nhỏ hơn 2^{m-1} , tức là $d_H(v) < 2^{m-1}$, thì tập $U \cup \{v\}$ sẽ thỏa mãn tất cả các điều kiện tương tự như tập U : nếu thực hiện phép co cạnh vv_U trong G/U thì $\varepsilon(G/U \cup \{v\}) \geq 2^{m-1}$, do $d_H(x) + 1 \leq 2^{m-1}$, điều này mâu thuẫn với tính tối đại của tập U .)

Như vậy, $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{m-1}$.

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp, H chứa một phân bù topo Y với $|Y| = r$ và $\|Y\| = m - 1$.

Giả sử x, y là hai đỉnh nhánh của phân bù topo Y nhưng không liên hợp với nhau trong Y .

Nhận thấy rằng do x, y đều nằm trong $N(U)$ và U liên thông trong G nên G chứa một $x - y$ đường đi sao cho tất cả các đỉnh của nó đều nằm trong U .

Như vậy, nếu bổ sung thêm $x - y$ đường đi này vào phân bù topo Y thì ta sẽ thu được một phân bù topo X thỏa mãn các yêu cầu nêu trong bài toán. □

Kết quả 3.6.2. (Jung-Larman-Mani)

Tồn tại một hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị $f(k)$ – liên thông đều là một đồ thị k – link, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Để giảm sự phức tạp của phép chứng minh nhưng vẫn đảm bảo được tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng đồ thị có chứa một ước con K của một đồ thị đầy đủ đủ lớn nào đó, điều này suy ra trực tiếp từ kết quả 3.6.1 và nhận xét rằng tính k – tính liên thông ảnh hưởng mạnh lên bậc trung bình của đồ thị và thậm chí lên cả bậc nhỏ nhất của đồ thị.

Ý tưởng chính của phép chứng minh của ta nằm ở việc nối hai đỉnh cho trước s_i, t_i với các đỉnh nhánh của K , và nối cặp đỉnh nhánh này bên trong K để thu được một hệ các $s_i - t_i$ đường đi:

Chứng minh kết quả 3.6.2.

Ta sẽ chứng minh rằng hàm số $f(k) := h(3k) + 2k$ thỏa mãn các yêu cầu nêu trong khẳng định của bài toán, trong đó h là một hàm số nào đó thỏa mãn yêu cầu nêu trong kết quả 3.6.1).

Thật vậy, giả sử G là một đồ thị $f(k)$ – liên thông.

Khi đó, $d(G) \geq \delta(G) \geq \kappa(G) \geq h(3k)$.

Bằng cách áp dụng kết quả 3.6.1), G chứa một phần bù topo $K := TK_{3k}$.

Đặt U là tập các đỉnh nhánh của phần bù topo K .

Để chứng minh G là một đồ thị k – link, giả sử $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ là k cặp đỉnh cho trước nào đó trong G .

Khi đó, $\kappa(G) \geq 2k$, suy ra từ định nghĩa của hàm $f(k)$.

Bằng cách áp dụng định lí Menger, G chứa một hệ các đường đi phân biệt $P_1, P_2, \dots, P_k$,

$Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ sao cho mỗi P_i xuất phát tại s_i , mỗi Q_i xuất phát tại t_i , và tất cả các đường đi này đều kết thúc trong U nhưng không có bất kì đỉnh nào khác nằm trong U .

Gọi $\mathcal{P}$ là một hệ con nào đó của hệ các đường đi vừa kể ở trên sao cho tổng số các cạnh nằm bên ngoài $E(K)$ của nó là nhỏ nhất có thể, $u_1, \dots, u_k$ là k đỉnh nào đó trong U sao cho không có đỉnh nào là đầu mút của một đường đi trong $\mathcal{P}$.

Kí hiệu:

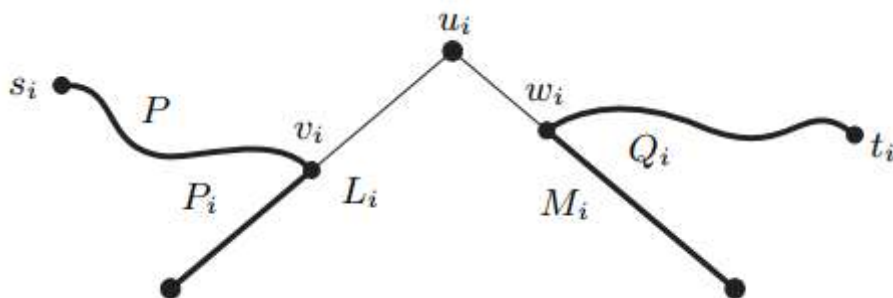
L_i là U – đường đi chứa trong K từ u_i đến đầu mút của P_i nằm trong U ;

v_i là đỉnh đầu tiên của L_i nằm trên một đường đi P nào đó trong $\mathcal{P}$.

Theo cách xây dựng hệ $\mathcal{P}$, P chứa số cạnh nằm ngoài $E(K)$ không nhiều hơn $Pv_iL_iu_i$.

Do đó, $v_iP = v_iL_i$, nên $P = P_i$.

Lập luận tương tự, nếu M_i là U – đường đi chứa trong K từ u_i đến đầu mút của Q_i nằm trong U và w_i là đỉnh đầu tiên của M_i nằm trên một đường đi P nào đó trong $\mathcal{P}$ thì $M_i = Q_i$.



Hình vẽ mô phỏng cách xây dựng $s_i - t_i$ đường đi đi qua u_i .

Như vậy, các đường đi $s_i P_i v_i L_i u_i M_i w_i Q_i t_i$ lập thành một hệ đường đi phân biệt thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Điều này cũng chỉ ra rằng G là đồ thị k – link. $\square$

Trong phép chứng minh trình bày ở trên ta đã chỉ ra một hàm số f cần thiết để khẳng định tính đúng đắn cho bài toán. Hàm số f được đưa ra ở đây tăng nhanh theo quy luật hàm mũ theo chỉ số k .

Tuy nhiên cần lưu ý rằng là đánh giá này chưa phải là tốt nhất có thể về mặt kĩ thuật cho bài toán.

Năm 1996, hai nhà toán học Bollobás và Thomason đã đưa một đánh giá tốt hơn chỉ ở mức tuyến tính cho bài toán trên:

“Mọi đồ thị $22k$ – liên thông đều là một đồ thị k – link”.