

Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị

Để tiếp tục phát triển lý thuyết đồ thị thì một điều không thể thiếu là cần chỉ ra những ứng dụng thiết thực của lý thuyết này trong những vấn đề phát sinh trong cuộc sống hằng ngày. Chính vì lý do này mà trong hai mục “Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị” và “Chủ đề 06. Mạng vận tải” sẽ tập trung trình bày các ứng dụng thực tiễn của lý thuyết đồ thị trong những vấn đề thực tế của cuộc sống.

Những vấn đề thực tế quan trọng có thể được giải quyết bằng phương pháp tô màu đồ thị có thể được kể đến là:

Bài toán 1. Cần tô màu các quốc gia trên bản đồ như thế nào để hai thành phố bất kỳ có chung đường biên giới sẽ được tô bởi hai màu khác nhau ?

Bài toán 2. Cần thiết kế các cuộc họp ủy ban của quốc hội như thế nào để mỗi ủy ban chỉ cần tổ chức họp trong một ngày ? (giả thiết các thành viên của quốc hội có thể phục vụ trong nhiều ủy ban khác nhau)

Bài toán 3. Cần thiết kế thời khóa biểu giảng dạy của trường đại học như thế nào để tổng thời gian sử dụng là nhỏ nhất ? (giả thiết đã biết thời gian cần thiết mà mỗi giảng viên sử dụng cho mỗi lớp học)

...

Một số khái niệm cơ bản về phương pháp tô màu đồ thị cần nắm bắt:

Phép tô màu đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ là một ánh xạ $c: V \rightarrow S$ sao cho nếu hai đỉnh v, w liên hợp với nhau thì $c(v) \neq c(w)$.

Phép tô màu cạnh của đồ thị $G = (V, E)$ là một ánh xạ $c: E \rightarrow S$ sao cho nếu hai cạnh e, f liên hợp với nhau thì $c(e) \neq c(f)$.

Phần lớn những gì ta thường quan tâm khi khảo sát các bài toán liên quan đến phép tô màu đồ thị là về kích thước của S , nên để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả khảo sát ta cần kí hiệu lại phép tô màu đỉnh $c: V \rightarrow S$ (hoặc phép tô màu cạnh $c: E \rightarrow S$) lại dưới dạng $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ (hoặc $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$).

Nếu G có một phép k – tô màu đỉnh (hoặc phép k – tô màu cạnh) thì G được gọi là **k – tô màu đỉnh** (hoặc **k – tô màu cạnh**). Số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho G có một phép k – tô màu đỉnh (hoặc một phép k – tô màu cạnh) được gọi là **sắc số đỉnh** (hoặc **sắc số cạnh**) của G ; kí hiệu là $\chi(G)$ (hoặc $\chi'(G)$).

5.1. Phép tô màu đỉnh

Nhằm tạo ra sự định hướng rõ ràng cho việc khảo sát các tính chất của một phép tô màu đồ thị nên trong phần đầu của bài viết này ta sẽ trình bày sơ lược một số tính chất cơ bản quan trọng của một phép tô màu đỉnh.

Một số vấn đề sẽ được quan tâm giải quyết trong phần đầu của bài viết này bao gồm:

1. Làm thế nào để xác định sắc số đỉnh của một đồ thị cho trước ?
2. Làm thế nào để xây dựng phép tô màu đỉnh của một đồ thị cho trước sao cho số màu cần sử dụng là nhỏ nhất có thể được ?
3. Mối liên hệ giữa khái niệm sắc số đỉnh với các khái niệm bậc trung bình, liên thông, girth ?

Đầu tiên xuất phát trực tiếp từ định nghĩa sắc số đỉnh ta dễ dàng chứng minh được đánh giá trên sau cho độ lớn của $\chi(G)$:

Kết quả 5.1.1.

Mọi đồ thị G với m cạnh đều có $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Chứng minh kết quả 5.1.1.

Giả sử $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ là một phép tô màu đỉnh của G với $k = \chi(G)$.

Nhận thấy rằng hai đầu mút của cùng một cạnh của G phải được tô bởi hai màu khác nhau (điều này suy ra từ định nghĩa của phép k – tô màu đỉnh), nên $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$.

Như vậy, $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ (điều này suy ra từ việc xem đánh giá trên như một bất phương trình bậc hai trên theo biến k). □

Để cải tiến lại đánh giá vừa trình bày ở trên trong trường hợp số màu không quá lớn, ta chỉ cần sử dụng thuật toán tham lam đơn giản sau: đánh số thứ tự các đỉnh của G lại dưới dạng $v_1, \dots, v_n$; tô màu lần lượt các đỉnh v_i bởi màu thứ j đầu tiên chưa được sử dụng khi tô các đỉnh láng giềng của v_i trong tập $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ thì số màu tối thiểu để thuật toán có thể thực hiện được là $\Delta(G) + 1$.

Tổng quát hơn, số màu tối thiểu để thuật toán có thể thực hiện được cũng bằng $\Delta(G) + 1$.

Thật vậy, do thuật toán này bỏ qua mọi đỉnh láng giềng v_j của v_i với $j > i$ nên để tô đỉnh v_i chỉ cần $d_{G[v_1, \dots, v_i]}(v_i) + 1$ thay vì $d_G(v_i) + 1$ màu. Hơn nữa, $d_{G[v_1, \dots, v_i]}(v_i) + 1$ sẽ có giá trị nhỏ nhất nếu v_i là đỉnh có bậc nhỏ nhất trong $G[v_1, \dots, v_i]$, nên nếu đánh số thứ tự các đỉnh sao cho các đỉnh có bậc lớn được đánh số thứ tự trước còn các đỉnh có bậc nhỏ được đánh số thứ tự sau thì dãy thứ tự đỉnh thu được sẽ là sự lựa chọn tối ưu nhất cho thuật toán, nghĩa là chọn v_n là đỉnh có bậc nhỏ nhất trong G , v_{n-1} là đỉnh có bậc nhỏ nhất trong $G - v_n, \dots, v_2$ là đỉnh có bậc nhỏ nhất trong $G - v_n - \dots - v_3$. Như vậy, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ thì sẽ xảy ra dấu " $=$ " trong đánh giá $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Kết quả sau sẽ chỉ ra rằng chiều ngược lại của khẳng định trên cũng đúng, nghĩa là nếu dấu " $=$ " xảy ra trong đánh giá trên thì G phải là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ.

Kết quả 5.1.2. (Brooks)

Cho trước đồ thị liên thông G .

Khi đó, nếu G không phải là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ thì $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Chứng minh kết quả 5.1.2.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$.

Nhận thấy rằng nếu $\Delta(G) \leq 2$ thì G là một đường đi hoặc một chu trình, nên khẳng định là hiển nhiên.

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $\Delta(G) \geq 3$ và khẳng định đã được chứng minh cho mọi đồ thị có bậc nhỏ hơn $|G|$.

Giả sử $\chi(G) > \Delta(G)$; kí hiệu v là một đỉnh bất kì của G và $H := G - v$.

Khi đó, $\chi(H) \leq \Delta(G)$. (áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán, mọi thành phần liên thông H' của H không phải là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ đều thỏa mãn đánh giá $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta(G)$; nếu H' là một đồ thị đầy đủ hoặc một chu trình lẻ thì $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta(G)$ (do mọi đỉnh của H' đều có bậc lớn nhất trong H' và một trong số các đỉnh này liên hợp với đỉnh v trong G)).

Khẳng định 1.

Mọi phép $\Delta(G)$ – tô màu đỉnh của H sẽ sử dụng tất cả các màu $1, \dots, \Delta(G)$ để tô các đỉnh láng giềng của v . Hơn nữa, mỗi màu chỉ được sử dụng để tô một đỉnh láng giềng duy nhất của v .

Chứng minh khẳng định 1.

Khẳng định được suy ra trực tiếp từ việc H có ít nhất một phép $\Delta(G)$ – tô màu đỉnh ($\chi(H) \leq \Delta(G)$) nhưng G không có bất kì một phép $\Delta(G)$ – tô màu đỉnh nào ($\chi(G) > \Delta(G)$). Nhận thấy rằng các đỉnh láng giềng của v được tô bởi tất cả các màu $1, \dots, \Delta(G)$, nên $d(v) = \Delta(G)$. Điều này chỉ ra rằng mỗi màu chỉ được sử dụng để tô một đỉnh láng giềng duy nhất của v . $\square$

Giả sử c là một phép $\Delta(G)$ – tô màu đỉnh của H .

Kí hiệu:

v_i là đỉnh láng giềng của v tô bởi màu i ;

$H_{i,j}$ là đồ thị con khung của H sinh ra bởi các đỉnh tô bởi màu i hoặc j ($i \neq j$).

Khẳng định 2.

Với mọi $i \neq j$, hai đỉnh v_i, v_j sẽ nằm trong cùng một thành phần liên thông $C_{i,j}$ của $H_{i,j}$.

Chứng minh khẳng định 2.

Giả sử hai đỉnh v_i, v_j nằm trong hai thành phần liên thông khác nhau của $H_{i,j}$.

Khi đó, các đỉnh của G có thể được tô màu lại sao cho hai đỉnh v_i, v_j được tô bởi cùng một màu (bằng cách hoán đổi hai màu i, j trong một thành phần liên thông và giữ nguyên hai màu i, j trong thành phần liên thông còn lại). Điều này mâu thuẫn với khẳng định 1). $\square$

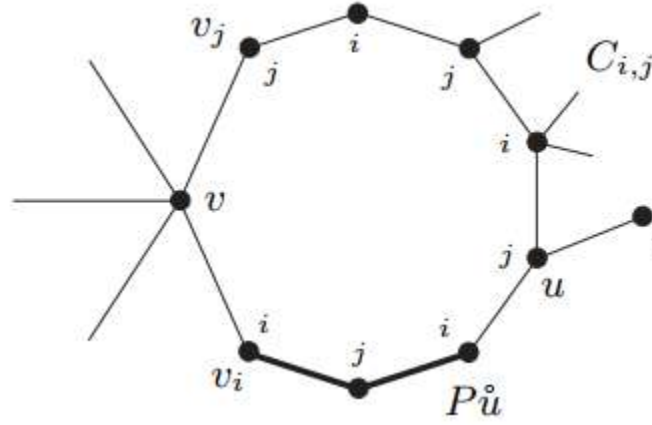
Khẳng định 3.

$C_{i,j}$ là một $v_i - v_j$ đường đi.

Chứng minh khẳng định 3.

Giả sử P là một $v_i - v_j$ đường đi nào đó trong $C_{i,j}$. Do $d_H(v_i) \leq \Delta - 1$ nên các đỉnh láng giềng của v_i trong H sẽ được tô bởi các màu khác nhau (nếu có hai đỉnh láng giềng nào đó của v_i trong H được tô bởi cùng một màu thì v_i có thể được tô lại bởi một màu mới, điều này mâu thuẫn với khẳng định 1). Như vậy, các đỉnh láng giềng của v_i trong P cũng chính là các đỉnh láng giềng của nó trong $C_{i,j}$; tương tự, các đỉnh láng giềng của v_j trong P cũng chính là các đỉnh láng giềng của nó trong $C_{i,j}$.

Nếu $C_{i,j} \neq P$ thì P sẽ chứa ít nhất một đỉnh trong nào đó có ba đỉnh láng giềng được tô bởi cùng một màu; kí hiệu u là đỉnh đầu tiên có ba đỉnh láng giềng được tô bởi cùng một màu trên P .



Khi đó, u có thể được tô lại bởi một màu mới (điều này suy ra từ việc các đỉnh láng giềng của u được tô bởi tối đa không quá $\Delta(G) - 2$ màu). Điều này chỉ ra rằng Pu^0 là một thành phần liên thông nào đó của $H_{i,j}$, mâu thuẫn với khẳng định 2. $\square$

Khẳng định 4.

Nếu i, j, k là các chỉ số phân biệt thì $C_{i,j}$ và $C_{i,k}$ giao nhau tại duy nhất đỉnh v_i .

Chứng minh khẳng định 4.

Giả sử $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$. Như vậy, u sẽ có hai đỉnh láng giềng nào đó tô màu j và hai đỉnh láng giềng khác tô màu k , nên u có thể được tô lại bởi một màu mới. Điều này chỉ ra rằng hai đỉnh v_i và v_j sẽ nằm trong hai thành phần liên thông khác nhau của $H_{i,j}$, mâu thuẫn với khẳng định 2. $\square$

Phép chứng minh của định lí Brooks được thực hiện như sau:

“Nhận thấy rằng nếu các đỉnh láng giềng của v đôi một liên hợp nhau thì mỗi đỉnh này đều có $\Delta(G)$ đỉnh láng giềng nằm trong $N(v) \cup \{v\}$, nên $G = G[N(v) \cup \{v\}] = K_{\Delta(G)+1}$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $v_1 v_2 \notin G$ (cách đánh số thứ tự $v_1, \dots, v_{\Delta(G)}$ lấy từ phép tô màu đỉnh c của H đang xét); kí hiệu $u \neq v_2$ là đỉnh láng giềng của v_1 trong $C_{1,2}$, nên $c(u) = 2$.

Giả sử c' là phép tô màu mới thu được từ phép tô màu c bằng cách hoán đổi hai màu 1 và 3 trong $C_{1,3}$.

Kí hiệu:

v'_i là đỉnh láng giềng của v tô bởi màu i ;

$H'_{i,j}$ là đồ thị con khung của H sinh ra bởi các đỉnh tô bởi màu i hoặc j ($i \neq j$);

$C'_{i,j}$ là thành phần liên thông của $H_{i,j}$ chứa cả v_i và v_j .

Do $v_1 = v'_3$ nên $u \in C'_{2,3}$ (điều này suy ra từ việc $c'(u) = c(u) = 2$). Bằng cách áp dụng khẳng định 4) cho phép tô màu c , $u \in v_1^0 C_{1,2} \subseteq C'_{1,2}$ (bao hàm thức này được suy ra từ việc $v_1^0 C_{1,2}$ vẫn giữ nguyên cách tô màu ban đầu). Điều này chỉ ra rằng $u \in C'_{2,3} \cap C'_{1,2}$, mâu thuẫn với khẳng định 4) cho phép tô màu c' . $\square$

Kí hiệu $col(G)$ là số nguyên dương k nhỏ nhất để tồn tại một dãy sắp thứ tự các đỉnh $v_1, \dots, v_n$ của G sao cho mọi đỉnh v_i đều có không quá k đỉnh láng giềng nằm dãy sắp thứ tự $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$.

Bằng cách sử dụng cùng cách lập luận như trên, $col(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$.

Hơn nữa, nếu $H \subseteq G$ thì $col(G) \geq col(H)$ và $col(H) \geq \delta(H) + 1$ (điều này suy ra từ sự kiện bậc khi đánh số thứ tự của đỉnh cuối cùng trong dãy sắp thứ tự đỉnh của H trùng với bậc thông thường của điểm đó trong H).

Kết hợp các phân tích ở trên lại với nhau, ta sẽ nhận được đánh giá tổng quát:

Kết quả 5.1.3.

$$\chi(G) \leq col(G) = \max\{\delta(H) | H \subseteq G\} + 1$$

Chứng minh kết quả 5.1.3.

Tính đúng đắn của khẳng định được suy ra trực tiếp từ các phân tích ở trên. □

Kết quả 5.1.4.

Mọi đồ thị G đều chứa một đồ thị con H có bậc nhỏ nhất $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

Chứng minh kết quả 5.1.4.

Tính đúng đắn của khẳng định được suy ra trực tiếp từ các phân tích ở trên. □

Nhận thấy rằng nếu G có sắc số đỉnh $\chi(G)$ đủ lớn thì sẽ kéo theo chỉ số $\delta(G)$ cũng sẽ có giá trị lớn: tối thiểu cũng sẽ bằng $\chi(G) - 1$.

Câu hỏi được đặt ra ở đây đó là : “Nếu $\chi(G) \geq k$ thì G sẽ có cấu trúc như thế nào?”.

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu $\chi(G) \geq k$ thì G sẽ chứa một đồ thị con có dạng K_k . Đây là một tính chất địa phương quan trọng của lớp các đồ thị có sắc số lớn – nó thể hiện mối tương quan về giá trị của các chỉ số ε, κ . Bản thân giả thiết $\chi(G) \geq k$ không cung cấp bất kì thông tin nào về giá trị của các chỉ số ε, κ của G . Tuy nhiên, nó lại chỉ ra sự tồn tại của một đồ thị con của G với các giá trị ε, κ lớn: đầu tiên, G sẽ chứa một đồ thị con H với $\delta(H) \geq k - 1$ (điều này suy ra từ Kết quả 5.1.3); hơn nữa, đồ thị H sẽ chứa một đồ thị con H' với $\kappa(H') \geq \left\lfloor \frac{k-1}{4} \right\rfloor$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.4.2).

Một loạt các câu hỏi xuất hiện thêm ở đây đó là:

1. Liệu đồ thị con H' này có phải là nguyên nhân làm cho sắc số đỉnh χ của G có giá trị $\geq k$?
2. Liệu đồ thị con H' này có thể chứa thêm một đồ thị con H'' cũng có sắc số đỉnh χ có giá trị $\geq k$?
3. Liệu có tồn tại một đồ thị con H' sao cho sắc số đỉnh χ của nó có giá trị $\geq k$ và nó không chứa bất kì đồ thị con H'' nào cũng có sắc số đỉnh χ có giá trị $\geq k$, ngoại trừ K_k – tạm gọi các đồ thị này là các **đồ thị con chuẩn tắc**?”.

Nhận thấy rằng giá trị của chỉ số δ của H' sẽ chỉ phụ thuộc vào k chứ không phụ thuộc vào $|G|$ – giá trị này bị chặn dưới bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào k nhưng không phụ thuộc vào $|G|$ – nên H' sẽ không đủ dày đặc để có thể chứa thêm một đồ thị con H'' cũng có sắc số đỉnh χ có giá trị lớn, ngoại trừ K_k .

Ngay cả khi đồ thị H' không thật sự có các cấu trúc dày đặc địa phương như trên thì nó vẫn có thể chứa được các đồ thị con chuẩn tắc nào đó có sắc số đỉnh lớn: chẳng hạn, $K_{n,n}$ là một đồ thị như vậy. Hiện tượng này cũng chính là một trong những kết quả quan trọng nhất trong Chủ đề 11: “Luôn tồn tại những đồ thị có sắc số đỉnh và girth có giá trị lớn tùy ý” (phép chứng minh của khẳng định này được giới thiệu lần đầu tiên bởi nhà toán học Erdos bằng phương pháp xác suất và sẽ được trình bày kỹ hơn trong “Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên”). Từ Kết quả 5.1.4) và Kết quả 1.5.4), mọi đồ thị G có sắc số đỉnh χ có giá trị đủ lớn sẽ luôn chứa một rừng H cho trước, nên nếu H không phải là một rừng thì sẽ tồn tại một đồ thị G với $\chi(G) \geq k$ nhưng $H \not\subseteq G$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

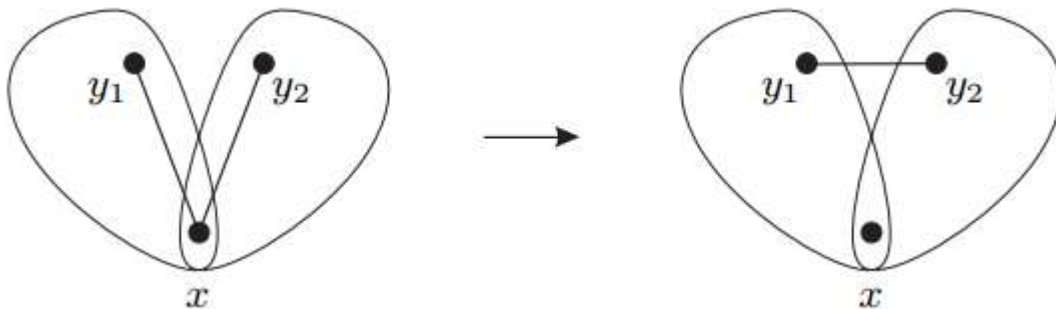
Ngược lại với phỏng đoán ban đầu cho rằng chỉ có những đồ thị có sắc số đỉnh đủ lớn mới có thể có các cấu trúc địa phương dày đặc, hiện tượng này lại xảy ra khá phổ biến: chẳng hạn, những đồ thị có girth lớn trông gần giống như là một cây, nên chúng cũng sẽ là các 2 – colourable!

Như vậy, nếu một đồ thị có sắc số đỉnh lớn thì nó sẽ có tác động lên các chỉ số $\delta, d, \Delta, \kappa$ của một số đồ thị con nào đó, nhưng nó không thật sự chỉ ra sự tồn tại cụ thể của bất kì một đồ thị con nào có sắc số đỉnh lớn.

Vấn đề nảy sinh ra ở đây đó là: “Nguyên nhân nào khiến cho sắc số đỉnh của một đồ thị cho trước có giá trị $\geq k$?”. Nhắc lại rằng việc tìm một điều kiện ràng buộc đơn giản trên các chỉ số cấu trúc cho đồ thị con H' để từ đó suy ra một đánh giá dạng $\chi \geq k$ cho đồ thị G là điều không thể: không có chỉ số nào trong các chỉ số $\delta, d, \Delta, \kappa$ có thể dùng chỉ ra đánh giá $\chi \geq k$.

Câu trả lời cho vấn đề này trên thực tế lại khá là đơn giản – nhà toán học Hajós đã đề xuất một điều kiện “đơn giản” tất cả các đồ thị có sắc số đỉnh χ có giá trị $\geq k$ dựa trên khái niệm đồ thị k – construct được xây dựng bằng phương pháp truy hồi như sau:

- i) K_k được là một đồ thị k – construct;
- ii) Nếu G là một đồ thị k – construct và $x, y \in V(G)$ không liên hợp với nhau thì $(G + xy)/xy$ cũng là một đồ thị k – construct;
- iii) Nếu G_1, G_2 là các đồ thị k – construct và x, y_1, y_2 là các đỉnh sao cho $G_1 \cap G_2 = \{x\}, xy_1 \in E(G_1), xy_2 \in E(G_2)$ thì $(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$ cũng là một đồ thị k – construct.



Hình vẽ minh họa.

Nhận thấy rằng mọi đồ thị k – construct đều là đồ thị k – colourable (phép chứng minh của khẳng định này có thể thu được nhờ vào phép quy nạp toán học: $(G + xy)/xy$ không có bất kì phép tô màu đỉnh nào có ít hơn k màu (trường hợp ngược lại, G sẽ có ít nhất một phép tô màu đỉnh có ít hơn k màu, mâu thuẫn giả thiết G là một đồ thị k – chromatic); $(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$ cũng không có bất kì phép

tô màu đỉnh nào có ít hơn k màu (trường hợp ngược lại, do hai đỉnh y_1, y_2 không thể tô bởi màu đã dùng tô đỉnh x nên G_1 (hoặc G_2) sẽ có ít nhất một phép tô màu đỉnh có ít hơn k màu, mâu thuẫn giả thiết G_1 và G_2 là các đồ thị k – chromatic).

Nhận thấy thêm rằng chiều đảo của nhận xét trên cũng đúng:

Kết quả 5.1.5. (Hajós)

Cho trước đồ thị G và $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó, $\chi(G) \geq k$ khi và chỉ khi G có chứa một đồ thị con k – construct.

Chứng minh kết quả 5.1.5.

Giả sử G là một đồ thị có sắc số đỉnh χ có giá trị $\geq k$; ta sẽ chứng minh rằng G có chứa một đồ thị con k – construct. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $k \geq 3$ và G là một đồ thị tối đại – cạnh không chứa bất kì đồ thị con k – construct nào. Nhận thấy rằng G không thể là một đồ thị r – phần đầy đủ: trường hợp ngược lại, nếu G là một đồ thị r – phần đầy đủ thì $r \geq k$, nên G sẽ chứa một đồ thị con đầy đủ K_k nào đó, điều này mâu thuẫn với giả thiết G không chứa bất kì một đồ thị con k – construct nào.

Do G không phải là một đồ thị r – đầy đủ nên quan hệ liên hợp cũng không thể là một quan hệ tương đương $V(G)$, nghĩa là tồn tại các đỉnh x, y_1, y_2 sao cho $xy_1, xy_2 \notin E(G)$ nhưng $y_1y_2 \notin E(G)$. Hơn nữa, do G là đồ thị tối đại – cạnh không có chứa đồ thị con k – construct nên mỗi cạnh xy_i ($i = 1, 2$) sẽ phải nằm trong một đồ thị con k – construct H_i nào đó của $G + xy_i$ ($i = 1, 2$).

Kí hiệu H'_2 là ảnh của H_2 qua một phép đẳng cấu φ nào đó, có chứa x và $H_2 - H_1$; ảnh H'_2 này có thể không nằm trong đồ thị G .

Khi đó, $H_1 \cap H'_2 = \{x\}$, nên $H := (H_1 \cup H'_2) - xy_1 - xy'_2 + y_1y'_2$ sẽ là một đồ thị k – construct (điều này suy ra từ điều kiện thứ iii) trong định nghĩa). Nếu ta đồng nhất các đỉnh $v' \in H'_2 - G$ trong H với các đỉnh v' tương ứng thì $(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G$ cũng sẽ là một đồ thị con k – construct, mâu thuẫn giả thiết G không có chứa đồ thị con k – construct. $\square$

5.2. Phép tô màu cạnh

Kết quả 5.2.1. (Vizing)

Mọi đồ thị G đều thỏa mãn $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Chứng minh kết quả 5.2.1.

Hiển nhiên, “ $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, với mọi đồ thị G ”.

Đánh giá “ $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, với mọi đồ thị G ” sẽ được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo $\|G\|$ như sau:

“Nhận thấy rằng nếu $\|G\| = 0$ thì khẳng định là hiển nhiên.

Cho trước đồ thị $G = (V, E)$ với $\Delta(G) > 0$, giả sử mọi đồ thị G' có số cạnh nhỏ hơn $\|G\|$ đều có ít nhất một phép $(\Delta(G') + 1)$ – tô màu cạnh.

Ta sẽ chứng minh rằng G cũng sẽ có ít nhất một phép $(\Delta(G) + 1)$ – tô màu cạnh nào đó.

Khẳng định 1.

Với mọi cạnh e , $G - e$ sẽ luôn có ít nhất một phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh nào đó.

Chứng minh khẳng định 1.

Điều này được suy ra trực tiếp từ giả thiết quy nạp và $\Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$. $\square$

Trong phép tô màu cạnh này, các cạnh có chung một đầu mút v cho trước được tô bởi $d(v) \leq \Delta(G)$ màu nên phải có ít nhất một màu $\beta \in \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ chưa được sử dụng đến, β được gọi là một màu bị khuyết tại đỉnh v . Với mỗi màu α khác β , tồn tại duy nhất một dây chuyền tối đại xuất phát từ đỉnh v với các cạnh được tô màu thay phiên bởi α, β . Dễ dàng chứng minh được rằng dây chuyền này cũng một đường đi nên nó còn được gọi là α/β - đường đi.

Giả sử G không có phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh nào.

Khẳng định 2.

Giả sử G không có phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh nào và xy là một cạnh nào đó của G .

Khi đó, với mọi phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh của $G - xy$, mọi α/β - đường đi xuất phát tại x sẽ luôn kết thúc tại y , trong đó α là một màu bị khuyết tại x còn β là một màu bị khuyết tại y .

Chứng minh khẳng định 2.

Nếu tồn tại một α/β - đường đi xuất phát tại x nhưng không kết thúc tại y thì, bằng cách hoán đổi hai màu α và β trên α/β - đường đi này và tô màu lại cạnh xy bởi α , ta sẽ thu được một phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh của G . Điều này mâu thuẫn với giả thiết G không có phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh nào. $\square$

Giả sử xy_0 là một cạnh nào đó của G .

Khi đó, $G_0 := G - xy_0$ sẽ có ít nhất một phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh c_0 nào đó (điều này suy ra từ Khẳng định 1). Kí hiệu $y_1, \dots, y_k$ là một dãy tối đại các đỉnh láng giềng phân biệt khác y_0 của x trong G sao cho $c_0(xy_i)$ là một màu bị khuyết tại y_{i-1} ($i = 1, \dots, k$) trong phép tô màu c_0 .

Lập luận tương tự, $G_i := G - xy_i$ ($i = 1, \dots, k$) cũng sẽ có ít nhất một phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh c_i nào đó. Phép tô màu c_i này có thể thu được từ phép tô màu c_0 bằng công thức như sau:

$$c_i(e) := \begin{cases} c_0(xy_{j+1}), & \text{nếu } e = xy_j \text{ với } j \in \{0, \dots, i-1\}; \\ c_0(e), & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Hơn nữa, các phép tô màu c_i đều có cùng tập các màu bị khuyết tại x giống như phép tô màu c_0 .

Giả sử α là một màu bị khuyết tại x còn β là một màu bị khuyết tại y_k trong phép tô màu c_0 .

Hiển nhiên, β là một màu bị khuyết tại y_k trong phép tô màu c_k (điều này suy trực tiếp từ cách định nghĩa của phép tô màu c_k).

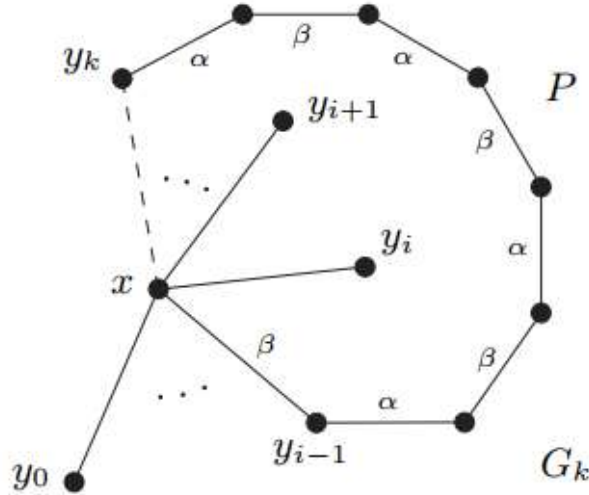
Nhận thấy rằng nếu β cũng là một màu bị khuyết tại x thì phép tô màu c_k có thể được mở rộng thành một phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu của G bằng cách tô cạnh xy_k bởi màu β , mâu thuẫn với giả thiết G không có phép $(\Delta(G) + 1) -$ tô màu cạnh nào. Như vậy, x sẽ liên thuộc với một β - cạnh nào đó.

Từ tính tối đại của dãy $y_1, \dots, y_k$, tồn tại một chỉ số $i_0 \in \{1, \dots, k-1\}$ sao cho $c_0(xy_{i_0}) = \beta$.

Kí hiệu P là α/β – đường đi xuất phát tại y_k trong phép tô màu c_k của G_k .

Từ Khẳng định 2), P sẽ kết thúc tại x và cạnh cuối cùng của P phải là một β – cạnh (điều này suy ra từ việc α là một màu bị khuyết tại x).

Từ cách định nghĩa của phép tô màu c_k , $c_k(xy_{i_0-1}) = c_0(xy_{i_0}) = \beta$, nên xy_{i_0-1} sẽ là cạnh cuối cùng của P .



Hình ảnh minh họa α/β – đường đi P trong G_k .

Nhận thấy rằng β cũng là một màu bị khuyết tại y_{i_0-1} trong phép tô màu c_{i_0-1} của G_{i_0-1} (điều này suy ra từ cách định nghĩa phép tô màu c_{i_0-1} và cách chọn y_{i_0}).

Kí hiệu P' là α/β – đường đi xuất phát tại y_{i_0-1} trong phép tô màu c_{i_0-1} của G_{i_0-1} .

Nhận thấy rằng P' được xác định duy nhất, nên $y_{i_0-1}Py_k$ sẽ là phần đầu của P' (điều này suy ra từ việc các cạnh của Px^0 được tô màu giống nhau trong cả hai phép tô màu c_{i_0-1} và c_k) và không có β – cạnh nào liên thuộc với y_k trong phép tô màu c_{i_0-1} (điều này suy ra từ cách chọn màu β và cách định nghĩa phép tô màu c_{i_0-1}). Như vậy, P' kết thúc tại y_k , mâu thuẫn với việc P' phải kết thúc tại y_{i_0-1} (điều này được suy ra từ Khẳng định 2). □

Kết quả 5.2.2. (König)

Mọi đồ thị lưỡng phân G đều thỏa mãn hệ thức $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Chứng minh kết quả 5.2.2.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $\|G\|$.

Với $\|G\| = 0$, tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử $\|G\| > 1$ và khẳng định đã được chứng minh cho mọi đồ thị có số cạnh nhỏ hơn $\|G\|$.

Kí hiệu $\Delta := \Delta(G)$, cố định một cạnh xy nào đó của G , và một phép Δ – tô màu cạnh của $G - xy$ (phép tô màu này được suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán).

Nhận thấy rằng mỗi đỉnh x và y đều liên thuộc với tối đa $\Delta - 1$ cạnh khác nhau trong $G - xy$.

Như vậy, tồn tại hai màu $\alpha, \beta \in \{1, \dots, \Delta\}$ sao cho x không liên thuộc với bất kì một cạnh nào được tô bởi màu α còn y không liên thuộc với bất kì một cạnh nào được tô bởi màu β .

Nếu $\alpha = \beta$ thì ta có thể tô màu cạnh xy bởi màu này và ta sẽ thu được phép tô màu cần tìm, tạm giả sử $\alpha \neq \beta$ và x liên thuộc với một cạnh được tô bởi màu β .

Kí hiệu W là dãy chuyển tối đại với các cạnh được tô màu thay phiên nhau bởi α và β . Nhận thấy rằng W không thể đi qua cùng một đỉnh quá hai lần nên W sẽ là một đường đi.

Hơn nữa, W không thể đi qua y : nếu W đi qua y thì cạnh liên thuộc với y trên W được tô bởi màu α (điều này suy ra từ cách chọn màu β) nên W sẽ có độ dài chẵn, nên $W + xy$ sẽ là một chu trình lẻ với các cạnh được tô thay phiên bởi α và β trong G , mâu thuẫn với Kết quả 1.6.1.

Tiếp theo, ta sẽ tô màu lại tất cả các cạnh trên W bằng cách hoán đổi hai màu α và β trên W . Từ cách chọn màu α và tính tối đại của W , các cạnh liên thuộc của $G - xy$ cũng sẽ được tô lại bởi một màu khác, ta nhận được một phép Δ – tô màu cạnh của $G - xy$ sao cho cả hai đỉnh x và y đều không liên thuộc với cạnh nào được tô bởi màu β . Nếu ta tô cạnh xy bởi màu β thì ta sẽ mở rộng phép tô màu này thành một phép Δ – tô màu cạnh của G . □

5.3. Mối liên hệ giữa phép tô màu đỉnh và tính khả phẳng của đồ thị

Một trong những kết quả nổi tiếng của lý thuyết đồ thị được “ngoại giới” biết đến nhiều nhất có thể kể đến là **định lý bốn màu** (kết quả này khẳng định rằng: “mọi bản đồ đều có thể được tô bởi tối đa không quá 4 màu khác nhau”):

Kết quả 5.3.1. (Định lý bốn màu)

Mọi đồ thị khả phẳng đều là 4 – colourable.

Phép chứng minh của định lý bốn màu có thể được tìm thấy trên mạng internet và ta sẽ không trình bày nó trong bài viết này bởi vì nó khá dài và phức tạp để có thể giới thiệu trong một bài viết hạn chế như thế này.

Trong giới hạn của bài viết này, ta sẽ chỉ chứng minh một dạng yếu hơn thường gặp của định lý bốn màu đó là **định lý năm màu** được phát biểu như sau:

Kết quả 5.3.2. (Định lý năm màu)

Mọi đồ thị khả phẳng đều là 5 – colourable.

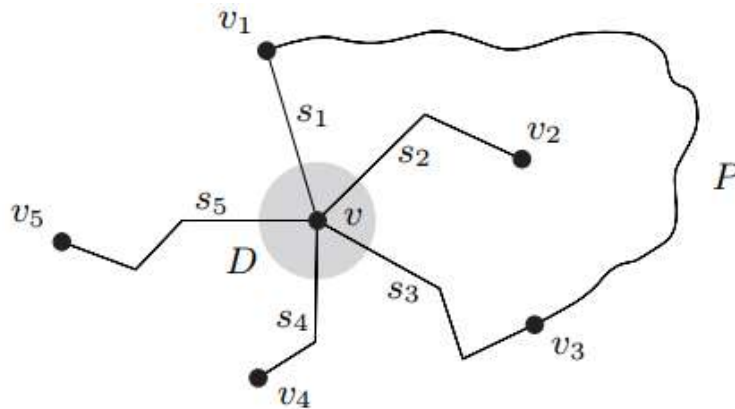
Chứng minh kết quả 5.3.2.

Giả sử G là một đồ thị phẳng với $n \geq 6$ đỉnh và m cạnh, và mọi đồ thị phẳng có số đỉnh nhỏ hơn n đều là 5 – colourable. Từ Kết quả 4.2.8), $d(G) = \frac{2m}{n} \leq \frac{2(3n-6)}{n} < 6$; nên tồn tại một đỉnh v nào đó của G có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $H := G - v$ sẽ có một phép tô màu $c: V(H) \rightarrow \{1, \dots, 5\}$. Nếu v có tối đa 4 đỉnh láng giềng thì c có thể mở rộng lên thành một phép 5 – tô màu đỉnh của G (bằng cách tô v bởi màu thứ 5 mà c chưa sử dụng đến khi tô các đỉnh láng giềng của v).

Giả sử v có đúng 5 đỉnh láng giềng và các đỉnh láng giềng này được tô bởi các màu khác nhau, D là một hình tròn mở có bán kính đủ nhỏ bao quanh v sao cho D chỉ có giao với 5 cạnh của G nhận v làm

một đầu mút. Đánh số thứ tự $s_1, \dots, s_5$ cho các phân đoạn của các cạnh này theo vị trí của chúng trong D như trong hình vẽ; kí hiệu vv_i ($i = 1, \dots, 5$) là cạnh tương ứng của G có chứa phân đoạn s_i .

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $c(v_i) = i$, với mọi chỉ số i .



Hình ảnh minh họa.

Khẳng định.

Mọi $v_1 - v_3$ đường đi $P \subseteq H$ đều sẽ tách v_2 khỏi v_4 trong H .

Chứng minh khẳng định.

Nhận thấy rằng khẳng định này tương đương với việc chu trình $C := vv_1Pv_3v$ sẽ tách v_2 khỏi v_4 trong G , nên nếu có thể chỉ ra rằng v_2 và v_4 nằm trong hai mặt khác nhau của chu trình C thì xem như ta đã chứng minh được tính đúng đắn của khẳng định nêu trên.

Khi đó, một trong hai miền liên thông của $D/(s_1 \cup s_3)$ sẽ giao với phân đoạn s_2 , còn miền liên thông còn lại có giao với phân đoạn s_4 .

Do $C \cap D \subseteq s_1 \cup s_3$ nên mỗi miền liên thông của $D/(s_1 \cup s_3)$ sẽ được chứa trong một mặt nào đó của C . Hơn nữa, các mặt này sẽ phải khác nhau: trường hợp ngược lại, D sẽ chỉ có giao với một mặt duy nhất của C , mâu thuẫn với giả thiết v nằm trên đường biên của hai mặt này. Do đó, $D \cap s_2$ và $D \cap s_4$ sẽ nằm trong các mặt khác nhau của C .

Như vậy, C chỉ có giao với cạnh $vv_2 \supseteq s_2$ và cạnh $vv_4 \supseteq s_4$ tại v , nên C sẽ tách v_2 khỏi v_4 trong G . $\square$

Với mọi $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, kí hiệu $H_{i,j}$ là đồ thị con khung của H sinh bởi các đỉnh tô bởi màu i hoặc j .

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng tồn tại một thành phần liên thông C_1 nào đó của $H_{1,3}$ chứa đồng thời cả v_1 và v_3 . (cơ sở của việc giả sử này dựa trên hai nhận xét cơ bản sau: nếu hoán đổi hai màu 1 và 3 cho tất cả các đỉnh của C_1 và giữ nguyên cách tô màu của các đỉnh còn lại thì kết quả nhận được cũng vẫn là một phép 5 – tô màu đỉnh của H ; nếu xảy ra trường hợp $v_3 \notin C_1$ thì cả v_1 và v_3 phải được tô bởi màu 3 trong phép 5 – tô màu đỉnh mới này, nên ta có thể tạm giả sử rằng v được tô màu 1)

Khi đó, $H_{1,3}$ sẽ phải chứa một $v_1 - v_3$ đường đi P nào đó.

Từ khẳng định chứng minh ở trên, P sẽ tách v_2 khỏi v_4 trong H . Do $P \cap H_{2,4} = \emptyset$ nên v_2 và v_4 sẽ phải nằm trong hai thành phần liên thông khác nhau của $H_{2,4}$. Nếu hoán đổi hai màu 2 và 4 cho tất cả các đỉnh nằm trong thành phần liên thông của $H_{2,4}$ có chứa v_2 thì v_2 sẽ được tô lại bởi màu 4. Do đó, v không còn

đỉnh láng giềng nào được tô bởi màu 2 nữa. Như vậy, nếu tô v bởi màu 2 thì kết quả nhận được sẽ là một phép 5 – tô màu đỉnh của G . $\square$

Một kết quả nổi tiếng khác giữa cũng được giới thiệu nhiều trong các giáo trình chuyên khảo có thể kể đến là:

Kết quả 5.3.3. (Grötzsch)

Mọi đồ thị con triangle của đồ thị khả phẳng bất kì đều không thể là 3 – colourable.

Phép chứng minh của khẳng định này sẽ không được giới thiệu đến trong bài viết này. Những bạn nào quan tâm về vấn đề này có thể tham khảo thêm trong các tài liệu chuyên khảo về lý thuyết đồ thị hiện đại.

5.4. Phép tô màu có tính đến điều kiện hạn chế

Trong mục này của bài viết, ta sẽ xem xét một dạng tổng quát tương đối mới của khái niệm phép tô màu được nghiên cứu khá sôi nổi trong gần một thập niên gần đây. Dạng tổng quát này thoạt nhìn có vẻ hơi rắc rối và xa lạ, nhưng thật ra nó có thể cung cấp cho ta những hiểu biết quan trọng về mối liên hệ cơ bản giữa sắc số của một đồ thị với các đại lượng bất biến khác của nó.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ và danh sách $(S_v)_{v \in V}$ các màu cho phép tô tại mỗi đỉnh v của G .

Phép tô màu đỉnh c của G được gọi là một **phép tô màu đỉnh của G với danh sách hạn chế $(S_v)_{v \in V}$** nếu $c(v) \in S_v$, với mọi $v \in V$.

Đồ thị G được gọi là **k – list – colourable đỉnh** (hoặc **k – choosable đỉnh**) nếu với mọi danh sách $(S_v)_{v \in V}$ với $|S_v| = k$ cho trước luôn tồn tại một phép tô màu đỉnh của G với danh sách hạn chế $(S_v)_{v \in V}$.

Số nguyên k nhỏ nhất sao cho G là một đồ thị k – choosable đỉnh được gọi là **chỉ số list – chromatic đỉnh** (hoặc **chỉ số choice đỉnh**) của G ; kí hiệu $ch(G)$.

Khái niệm về một phép tô màu cạnh của G với danh sách hạn chế $(S_e)_{e \in E}$ cũng được xây dựng theo cách thức tương tự như trên. Số nguyên k nhỏ nhất để đồ thị G có ít nhất một phép tô màu k – choosable cạnh được gọi là chỉ số list – chromatic cạnh (hoặc chỉ số choice cạnh) của G ; kí hiệu $ch'(G)$.

Từ định nghĩa của $ch'(G) := ch(L(G))$ trong đó $L(G)$ là đồ thị tuyến tính của G .

Về mặt nguyên tắc không quá khó khăn để chỉ ra rằng nếu một đồ thị là k – choosable đỉnh (hoặc k – choosable cạnh) thì nó cũng là một đồ thị k – colourable (khái niệm đồ thị k – choosable là một trường hợp riêng của khái niệm k – colourable), nên $ch(G) \geq \chi(G)$ và $ch'(G) \geq \chi'(G)$ với mọi G .

Mặc dù giá trị của các sắc số luôn yếu giá trị của các chỉ số choice nhưng hầu hết các đánh giá đã biết cho sắc số cũng vẫn đúng cho các chỉ số choice tương ứng. Một ví dụ đơn giản cho khẳng định vừa nêu chính là định lý Brook và Kết quả 5.1.3). Mặt khác, ta cũng có thể xây dựng được những đồ thị sao cho sắc số và chỉ số choice có giá trị cách xa nhau. Kết hợp các khẳng định này lại với nhau ta dần đoán ra được chặn trên của sắc số trong trường hợp tổng quát nhất.

Kết quả sau sẽ chỉ ra rằng các chỉ số choice về cơ bản khác hoàn toàn với các sắc số. Như đã đề cập ở trên, tồn tại những đồ thị 2 – chromatic có bậc nhỏ nhất có giá trị lớn, chẳng hạn $K_{n,n}$. Giá trị của chỉ số choice cũng sẽ bị ảnh hưởng nhất định bởi độ lớn của các chỉ số δ , ε hoặc κ :

Kết quả 5.4.1. (Alon)

Tồn tại một hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho, với mọi số nguyên k cho trước bất kì, mọi đồ thị G có bậc trung bình $d(G) \geq f(k)$ đều thỏa mãn $ch(G) \geq k$.

Phép chứng minh của Kết quả 5.4.1) sử dụng đến phương pháp xác suất sẽ được trình bày một cách chi tiết hơn trong “Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên”.

Dựa vào kinh nghiệm thực tế, những đặc trưng còn lại của chỉ số choice cũng được thể hiện thông qua những đặc trưng tương ứng của sắc số: những đánh giá đã biết cho sắc số đều có thể được chuyển đổi thành các đánh giá tương ứng cho chỉ số choice và phép chứng minh của những kết quả này có thể thu được bằng cách mở rộng phép chứng minh của những kết quả tương ứng.

Một trong những ví dụ đơn giản và ấn tượng nhất cho khẳng định trên chính là dạng list của định lý năm màu: mọi đồ thị khả phẳng đều là 5 – choosable. Khẳng định này đã từng được xem như một giả thuyết toán học khó nhằn trong suốt gần 20 năm cho đến khi nhà toán học Thomassen đưa ra một phép chứng minh đơn giản cho nó dựa trên nguyên lý quy nạp toán học. Điều khá lí thú là mặc dù nó là một dạng mở rộng của định lý năm màu nhưng phép chứng minh của nó thì lại tiếp cận vấn đề theo một hướng khác hoàn toàn so với phép chứng minh của định lý năm màu gốc.

Kết quả 5.4.2. (Thomassen)

Mọi đồ thị khả phẳng đều là 5 – choosable.

Chứng minh kết quả 5.4.2.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh kết quả phụ sau cho lớp các đồ thị khả phẳng G có ít nhất 3 đỉnh:

Khẳng định.

Giả sử G là một đồ thị khả phẳng trong đó mọi mặt trong đều có biên là các tam giác còn mặt ngoài có biên là chu trình $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$, hai đỉnh v_1 và v_2 được tô màu bởi hai màu phân biệt nào đó, các đỉnh còn lại của C có list liên kết có tối thiểu 3 màu, còn các đỉnh còn lại của $G - C$ có list liên kết có tối thiểu 5 màu.

Khi đó, mọi phép tô màu của hai đỉnh v_1 và v_2 đều có thể mở rộng thành một phép tô màu đỉnh của G với danh sách màu cho trước.

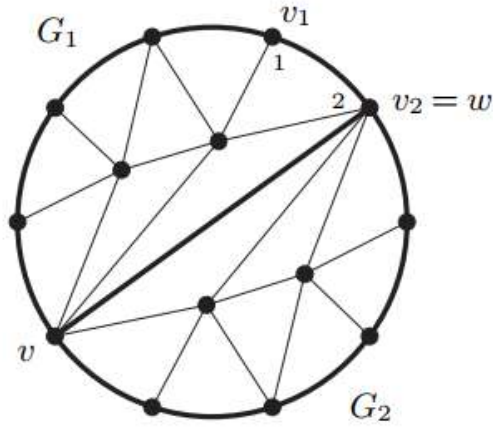
Chứng minh khẳng định.

Ta sẽ chứng minh khẳng định nêu trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo $|G|$. Nếu $|G| = 3$ thì $G = C$, nên tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên.

Giả sử $|G| \geq 4$ và khẳng định đã được chứng minh cho mọi đồ thị có số đỉnh bé hơn.

Trường hợp 1. C có một dây cung vw .

Khi đó, vw chỉ có thể nằm trên hai chu trình $C_1, C_2 \subseteq C + vw$ trong đó $v_1 v_2 \in C_1$ và $v_1 v_2 \notin C_2$; kí hiệu G_i ($i = 1, 2$) là đồ thị con của G cảm sinh bởi các đỉnh nằm trên C_i hoặc các đỉnh thuộc mặt trong của C_i .

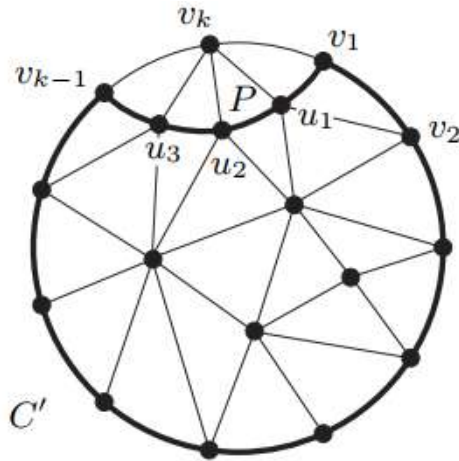


Áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán cho G_1 và G_2 , mọi phép tô màu của hai đỉnh v_1 và v_2 đều có thể mở rộng thành một phép tô màu đỉnh của G_1 (hoặc G_2) với danh sách màu cho trước. Kết hợp các phép tô màu đỉnh này lại với nhau ta sẽ thu được phép tô màu đỉnh cần tìm của G .

Trường hợp 2. C không có dây cung.

Kí hiệu $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$ là tất cả các đỉnh láng giềng của v_k .

Khi đó, các đỉnh láng giềng u_i sẽ thuộc mặt trong của C .



Do các mặt trong của C có biên là tam giác nên $P := v_1 u_1 \dots u_m v_{k-1}$ là một đường đi trong G còn $C' := P \cup (C - v_k)$ là một chu trình. Bằng cách chọn hai màu phân biệt $j, l \neq 1$ từ trong danh sách màu hạn chế của u_i và xóa tên chúng khỏi danh sách màu hạn chế của tất cả các đỉnh láng giềng u_i , mọi danh sách màu hạn chế của tất cả các đỉnh trong C' sẽ luôn có ít nhất 3 màu, nên theo giả thiết quy nạp của bài toán ta có thể tô màu chu trình C' và phần trong của nó, nghĩa là có thể tô màu đồ thị $G - v_k$. Hơn nữa, có ít nhất một trong hai màu j và l chưa được sử dụng để tô màu đỉnh v_{k-1} , nên ta sẽ sử dụng màu này để tô màu đỉnh v_k . $\square$

Trong trường hợp đồ thị phẳng tổng quát, mỗi đỉnh của đồ thị đều có số lượng màu trong danh sách bằng 5. Không giảm tính tổng quát của bài toán, giả sử G là một đồ thị phẳng tối đại. Từ Kết quả 4.2.6), G là một đồ thị triangular; kí hiệu $v_1 v_2 v_3 v_1$ là đường biên của mặt ngoài của G . Đầu tiên, tô màu hai đỉnh v_1 và v_2 bởi hai màu phân biệt nào đó trong danh sách màu hạn chế của chúng và sử dụng kết quả nêu

trong khẳng định vừa chứng minh ở trên để mở rộng phép tô màu này thành một phép tô màu của G với danh sách màu hạn chế cho trước. □

Nhận thấy rằng phép tô màu trong chứng minh trên được xây dựng không dựa trên việc hoán đổi các màu dọc trên các đường đi trong phép chứng minh chuẩn cũng như không sử dụng đến công thức Euler trong phép chứng minh chuẩn của định lý năm màu. Điều này cho thấy rằng đối với những bài toán tô màu còn chưa tìm được lời giải thì dạng list của chúng có thể giải được với ích công sức hơn, chẳng hạn việc chứng minh một khẳng định có dạng $ch(G) \leq k$ sẽ dễ dàng hơn nhiều so với việc chứng minh một khẳng định có dạng $\chi(G) \leq k$. Nhưng thật không may mắn là cách tiếp cận vấn đề này lại không còn hiệu quả cho định lý bốn màu: một đồ thị khả phẳng bất kì không nhất thiết là 4 – choosable.

Như đã đề cập đến ở trên, sắc số và chỉ số choice đỉnh của cùng một đồ thị có thể giá trị chênh lệch nhau khá nhiều. Đáng ngạc nhiên là không có bất kì một ví dụ tương tự nào như vậy cho các phép tô màu cạnh. Điều này dẫn đến một giả thuyết toán học khá thú vị đến nay vẫn chưa tìm được lời giải đầy đủ:

Giả thuyết về phép tô màu cạnh dạng list.

Mọi đồ thị G đều thỏa mãn hệ thức $ch'(G) = \chi'(G)$.

Nội dung của bài viết sẽ trình bày phép chứng minh của giả thuyết cho lớp các đồ thị lưỡng phân dựa trên việc sử dụng công cụ đồ thị định hướng.

Giả sử D là một đồ thị định hướng và $v \in V(D)$, $N^+(v)$ là tập các đỉnh w sao cho D có chứa một cạnh định hướng từ v đến w ; kí hiệu $d^+(v) = |N^+(v)|$.

Để hình dung cách áp dụng đồ thị định hướng vào các vấn đề về phép tô màu đồ thị, ta cần xem xét lại một chút về thuật toán tham lam đã giới thiệu ở Mục 5.1. Đầu tiên để có thể áp dụng thuật toán cho G là chọn một dãy thứ tự đỉnh $v_1, \dots, v_n$ ban đầu cho G . Dãy thứ tự đỉnh này sẽ xác định một phép định hướng D cho G : nếu $i > j$ thì cạnh $v_i v_j$ sẽ được định hướng theo chiều từ v_i đến v_j . Khi đó, với mỗi đỉnh v_i đã được tô màu, thuật toán sẽ chỉ xem xét những cạnh tại đỉnh v_i hướng ra khỏi đỉnh v_i : nếu $d^+(v) < k$ với mọi đỉnh v thì chỉ cần sử dụng tối đa không vượt quá k màu để tô tất cả các đỉnh của đồ thị G . Khi đó, lớp màu thứ nhất U tìm bởi thuật toán trên sẽ là một tập đỉnh độc lập trong G , lớp màu thứ hai cũng sẽ có cùng tính chất như vậy trong $G - U$, tương tự cho các lớp màu còn lại.

Kết quả sau sẽ tổng quát hóa cách tô màu cho đồ thị G dựa trên phép định hướng D chứ không còn phụ thuộc vào dãy thứ tự đỉnh $v_1, \dots, v_n$ nữa:

Tập đỉnh độc lập $U \subseteq V(D)$ được gọi là hạt nhân của D nếu, với mọi đỉnh $v \in D - U$, tồn tại một cạnh định hướng trong D từ v vào một đỉnh trong U .

Kết quả 5.4.3.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$ và $(S_v)_{v \in V}$ là danh sách các màu cho phép tô tại mỗi đỉnh v của G .

Hơn nữa, G có một phép định hướng D sao cho $d^+(v) < |S_v|$ với mọi đỉnh v , và mọi đồ thị con khung của D đều có ít nhất một hạt nhân.

Khi đó, G có ít nhất một phép tô màu đỉnh với danh sách màu $(S_v)_{v \in V}$.

Chứng minh kết quả 5.4.3.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$.

Nếu $|G| = 0$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên.

Giả sử $|G| > 0$, α là một màu nào đó xuất hiện trong danh sách $(S_v)_{v \in V}$, D là phép định hướng được nêu trong giả thiết của đồ thị G .

Khi đó, các đỉnh v với $\alpha \in S_v$ cảm sinh một đồ thị con định hướng D' của D ; hiển nhiên D' sẽ có ít nhất một hạt nhân $U \neq \emptyset$.

Đầu tiên tô màu tất cả các đỉnh trong U bởi α và xóa α khỏi danh sách màu của tất cả các đỉnh của D' .

Do mỗi đỉnh trong $D - U$ đều có ít nhất một cạnh hướng vào U , danh sách màu đã sửa đổi S'_v cũng thỏa mãn điều kiện $d^+(v) < |S'_v|$ với mọi đỉnh $v \in D - U$. Đồng thời $D - U$ cũng là một phép định hướng của $G - U$, $G - U$ có ít nhất một phép tô màu đỉnh với danh sách màu $(S'_v)_{v \in V(G-U)}$ (điều này suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán). Do không có bất kì danh sách nào trong số chúng có chứa α nên việc làm trên sẽ mở rộng phép tô màu đỉnh của U với danh sách màu tầm thường $\{\alpha\}$ thành một phép tô màu đỉnh của G với danh sách màu $(S_v)_{v \in V}$ mong muốn. $\square$

Kết quả 5.4.4. (Galvin)

Mọi đồ thị lưỡng phân G đều thỏa mãn hệ thức $ch'(G) = \chi'(G)$.

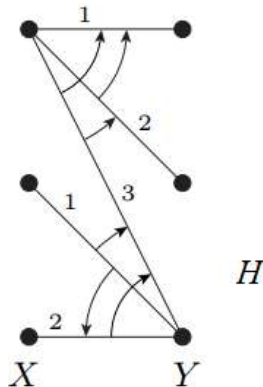
Chứng minh kết quả 5.4.4.

Giả sử cho trước đồ thị lưỡng phân $G = (X \cup Y, E)$ trong đó $\{X, Y\}$ là một phép phân hoạch đỉnh của đồ thị lưỡng phân G . Hai cạnh của G được gọi là **giao nhau trong** X nếu chúng có chung một đầu mút trong X , tương tự cho Y .

Kí hiệu $k := \chi'(G)$ và c là một phép k – tô màu cạnh của G .

Hiển nhiên $ch'(G) \geq k$; ta chỉ cần chứng minh $ch'(G) \leq k$.

Ý tưởng của phép chứng minh là sử dụng Kết quả 5.4.3) để chỉ ra đồ thị tuyến tính $H := L(G)$ của G là một đồ thị k – choosable. Để có thể áp dụng Kết quả 5.4.3), ta cần tìm một phép định hướng D của H sao cho $d^+(v) < k$ với mọi đỉnh v và mọi đồ thị con khung của D đều có ít nhất một hạt nhân. Để định nghĩa phép định hướng D , giả sử $e, e' \in E$ là hai cạnh liên hợp với nhau trong đó $c(e) < c(e')$. Nếu e và e' giao nhau trong X thì cạnh $ee' \in H$ được định hướng từ e' đến e ; nếu e và e' giao nhau trong Y thì cạnh ee' sẽ được định hướng từ e đến e' .



Hình vẽ minh họa cách định nghĩa phép định hướng D .

Đầu tiên ta tính $d^+(e)$ với mọi cạnh $e \in E = V(D)$.

Nếu $c(e) = i$ thì mọi cạnh $e' \in N^+(e)$ giao nhau với cạnh e trong X đều được tô bởi một màu nằm trong tập $\{1, \dots, i-1\}$, còn mọi cạnh $e' \in N^+(e)$ giao nhau với cạnh e trong Y đều được tô bởi một màu nằm trong tập $\{i+1, \dots, k\}$. Nhận thấy rằng nếu có hai đỉnh láng giềng e' của e cùng giao nhau với e trong X hoặc cùng giao nhau với e trong Y thì chúng sẽ liên hợp nhau và chúng cũng được tô bởi các màu khác nhau, nên $d^+(e) < k$.

Phần còn lại của phép chứng minh là chỉ ra rằng mọi đồ thị con khung D' của D đều có ít nhất một hạt nhân.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|D'|$.

Với $|D'| = \emptyset$, D' nhận $\emptyset$ làm một hạt nhân.

Giả sử $|D'| \geq 1$. Kí hiệu $E' := V(D') \subseteq E$. Với mọi đỉnh $x \in X$ liên thuộc với E' , kí hiệu $e_x \in E'$ là cạnh liên thuộc đỉnh x với c – giá trị nhận giá trị nhỏ nhất và U là tập tất cả các cạnh e_x .

Khi đó, mọi cạnh $e' \in E'/U$ đều giao với một cạnh $e \in U$ trong X và cạnh $ee' \in D'$ được định hướng theo chiều từ e' đến e . Nhận thấy rằng nếu U là một tập đỉnh độc lập trong H thì nó chính là hạt nhân cần tìm của D' , nên tạm giả sử U không phải một tập đỉnh độc lập trong H .

Giả sử hai đỉnh $e, e' \in U$ liên hợp nhau và $c(e) < c(e')$.

Từ định nghĩa của U , e và e' giao nhau trong Y , nên cạnh $ee' \in D'$ được định hướng từ e đến e' . Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $D' - e$ có một hạt nhân U' . Nếu $e' \in U'$ thì U' cũng là một hạt nhân của D' . Trường hợp ngược lại, tồn tại một đỉnh $e'' \in U'$ sao cho D' có một cạnh định hướng từ e' đến e'' . Nếu e' và e'' giao nhau trong X thì $c(e'') < c(e')$ (điều này suy ra từ định nghĩa của D), mâu thuẫn với giả thiết $e' \in U$. Như vậy, e' và e'' giao nhau trong Y , nên $c(e') < c(e'')$. Do e và e' giao nhau trong Y , e' và e'' giao nhau trong Y , và $c(e) < c(e') < c(e'')$ nên cạnh ee'' được định hướng từ e đến e'' , nên U' cũng là một hạt nhân của D' . □

Từ Kết quả 5.2.2), ta trực tiếp suy ra được kết quả sau:

Kết quả 5.4.5.

Mọi đồ thị lưỡng phân G đều thỏa mãn hệ thức $ch'(G) = \Delta(G)$.

5.5. Đồ thị hoàn hảo

Như đã thảo luận trong mục 5.1), một đồ thị có sắc số lớn là một hiện tượng toàn cục: ngay cả khi đồ thị có girth nhận giá trị lớn thì trên phương diện địa phương nó sẽ trông giống như một cây, sắc số của đồ thị này có thể sẽ nhận giá trị lớn. Do một sự ‘phụ thuộc toàn cục’ như vậy rõ ràng là rất khó để giải quyết nên để giảm bớt tính phức tạp của vấn đề ta thường quan tâm đến lớp các đồ thị mà hiện tượng này không xảy ra, nghĩa là những đồ thị mà ta sẽ khảo sát sẽ chỉ có giá trị lớn khi chúng phải có một cấu trúc địa phương đặc biệt nào đó.

Trước khi cụ thể hóa ý tưởng vừa trình bày ở trên, ta sẽ giới thiệu thêm hai chỉ số đặc trưng quan trọng khác của một đồ thị G . Số nguyên dương r lớn nhất sao cho $K_r \subseteq G$ được gọi là **chỉ số clique** của G , kí

hiệu bởi $\omega(G)$. Số nguyên dương r lớn nhất sao cho $\overline{K_r} \subseteq G$ được gọi là **chỉ số độc lập** của G , kí hiệu bởi $\alpha(G)$. Hiển nhiên, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ và $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Đồ thị G được gọi là **hoàn hảo** nếu mọi đồ thị con khung $H \subseteq G$ đều có sắc số $\chi(H) = \omega(H)$, nghĩa là chỉ cần $\omega(H)$ màu là đủ để tô các đỉnh của H .

Trong trường hợp tổng quát, việc chứng minh tính đúng đắn của một khẳng định $\chi(G) > k$ sẽ là rất khó. Đối với lớp các đồ thị hoàn hảo, ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại của một đồ thị con đầy đủ K_{k+1} là đủ để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định $\chi(G) > k$.

Thoạt nhìn ta có thể thấy cấu trúc của lớp các đồ thị hoàn hảo có vẻ như khá dễ nắm bắt: đồ thị con khung của một đồ thị hoàn hảo cũng sẽ là một đồ thị hoàn hảo, đồ thị con của một đồ thị hoàn hảo không nhất thiết là một đồ thị hoàn hảo,... Tính chất hoàn hảo là một trong những đặc trưng quan trọng nhất của lý thuyết đồ thị: lớp các đồ thị hoàn hảo có những tính chất đối ngẫu có liên hệ chặt chẽ với các bài toán tối ưu đồ thị và độ phức tạp của thuật toán.

Câu hỏi được đặt ra đó là: “Đồ thị phải thỏa mãn điều kiện gì để đảm bảo tính hoàn hảo của nó?”.

Câu trả lời cho vấn đề này chính là: “Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là hoàn hảo là phần bù của nó cũng hoàn hảo”. Chẳng hạn, đồ thị lưỡng phân là một đồ thị hoàn hảo và phần bù của một đồ thị lưỡng phân cũng hoàn hảo (khẳng định thứ hai này suy ra từ định lý König).

Để chứng minh tính đúng đắn của câu trả lời trên, ta sẽ chứng minh rằng các đồ thị chordal là hoàn hảo (một đồ thị được gọi là **chordal** nếu mọi chu trình có độ dài ≥ 4 đều có ít nhất một dây cung, nghĩa là nó không chứa chu trình cảm sinh nào khác triangle).

Để chứng minh các đồ thị chordal là hoàn hảo, ta sẽ cần chỉ ra một số tính chất đặc trưng về mặt cấu trúc của chúng.

Nếu G có hai đồ thị con cảm sinh G_1, G_2 sao cho $G = G_1 \cup G_2$ và $G_1 \cap G_2 = S$ thì ta nói là **G sinh ra từ G_1 và G_2 bằng cách dán các đồ thị này dọc theo S** .

Kết quả 5.5.1.

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là chordal là nó có thể được xây dựng đệ quy bằng cách dán dọc theo các đồ thị con đầy đủ, bắt đầu từ các đồ thị đầy đủ nào đó.

Chứng minh kết quả 5.5.1.

Nhận thấy rằng nếu G thu được từ hai đồ thị chordal G_1, G_2 bằng cách dán dọc chúng theo một đồ thị đầy đủ nào đó thì G cũng là một đồ thị chordal: mọi chu trình cảm sinh trong G sẽ nằm trong G_1 hoặc G_2 , nên nó cũng sẽ là một triangle. Do các đồ thị đầy đủ đều là chordal nên tất cả các đồ thị được xây dựng bằng phương pháp đệ quy như trên đều là đồ thị chordal.

Giả sử G là một đồ thị chordal, ta sẽ chứng minh rằng bằng phương pháp quy nạp theo chỉ số $|G|$ rằng G có thể được xây dựng bằng phương pháp đệ quy như trên. Nếu G là một đồ thị đầy đủ thì khẳng định nêu trên là điều hiển nhiên. Giả sử G không phải là một đồ thị đầy đủ với $|G| > 1$, và tất cả các đồ thị chordal có số đỉnh nhỏ hơn $|G|$ đều có thể xây dựng được bằng phương pháp đệ quy nêu ở trên.

Giả sử $a, b \in G$ là hai đỉnh không liên hợp nhau và $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ là một tập tối tiểu gồm các đỉnh tách a với b ; kí hiệu C là thành phần liên thông của $G - X$ có chứa a , $G_1 := G[V(C) \cup X]$, $G_2 := G - C$.

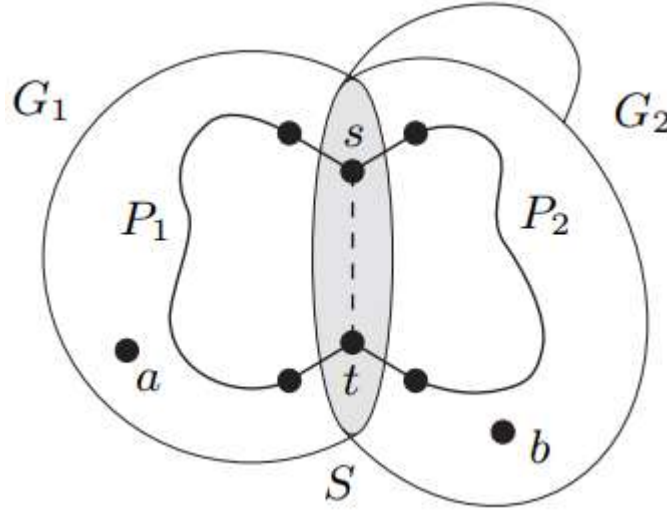
Khi đó, G được sinh ra từ G_1 và G_2 bằng cách dán chúng dọc theo $S := G[X]$.

Mặc khác, G_1 và G_2 đều là các đồ thị chordal (khẳng định này suy ra từ việc chúng đều là các đồ thị con cảm sinh của G) nên chúng đều có thể được xây dựng bằng phương pháp đệ quy như trên, nên ta chỉ cần chứng minh thêm rằng S là một đồ thị đầy đủ là đủ.

Giả sử $s, t \in S$ là hai đỉnh không liên hợp nhau.

Khi đó, s và t sẽ có chung một đỉnh láng giềng trong C .

(khẳng định này suy ra từ việc $X = V(S)$ là tập đỉnh tách a và b với số đỉnh tối thiểu)



Như vậy, tồn tại ít nhất một X – đường đi từ s đến t trong G_1 ; kí hiệu P_1 là đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi như trên. Lập luận tương tự, G_2 cũng sẽ chứa ít nhất một X – đường đi từ s đến t ; kí hiệu P_2 là đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi như trên.

Tuy nhiên, $P_1 \cup P_2$ lại là một chu trình có độ dài ≥ 4 và có ít nhất một dây cung như trong hình vẽ, mâu thuẫn với giả thiết G là một đồ thị chordal.

Kết quả 5.5.2.

Mọi đồ thị chordal đều hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 5.5.2.

Từ việc tất cả các đồ thị đầy đủ đều là hoàn hảo, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu G là đồ thị sinh ra bằng cách dán hai đồ thị hoàn hảo G_1, G_2 dọc theo một đồ thị đầy đủ S nào đó thì nó cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Giả sử $H \subseteq G$ là một đồ thị con cảm sinh nào đó, ta sẽ chứng minh rằng $\chi(H) \leq \omega(H)$.

Kí hiệu $H_i := H \cap G_i$ ($i = 1, 2$), $T := H \cap S$.

Khi đó, H được sinh ra từ H_1 và H_2 bằng cách dán dọc chúng theo T với T là một đồ thị đầy đủ.

Từ định nghĩa của một đồ thị hoàn hảo, mỗi đồ thị H_i đều có thể được tô bởi $\omega(H_i)$. (điều này suy ra từ việc mỗi đồ thị H_i tương ứng là một đồ thị con cảm sinh của đồ thị hoàn hảo G_i). Hơn nữa, T là một đồ thị

đầy đủ, nên T có thể được tô bởi một trong hai phép tô màu của H_1 và H_2 vừa liệt kê ở trên. Kết hợp các phép tô màu này, ta thu được một phép tô màu của H với $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$ màu. $\square$

Sau đây là kết quả quan trọng của lý thuyết đồ thị hoàn hảo – “định lý yếu về đồ thị hoàn hảo” được nêu ra ở nhà toán học Lovasz:

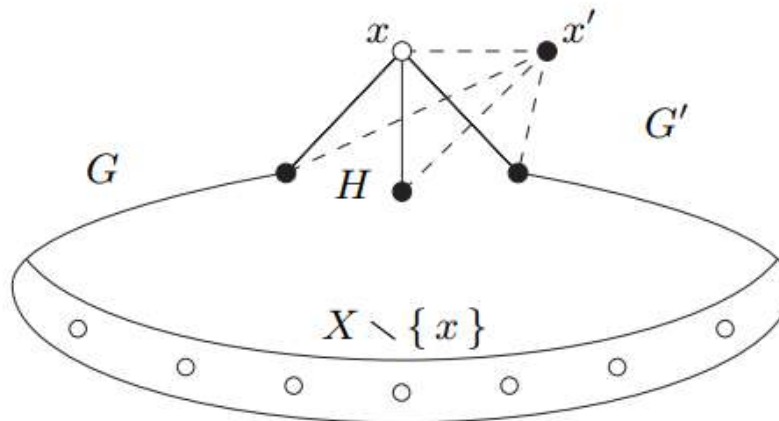
Kết quả 5.5.3. (Lovasz)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị hoàn hảo là phần bù của đồ thị này cũng hoàn hảo.

Ta sẽ chứng minh Kết quả 5.5.3) theo hai cách hoàn toàn khác nhau. Phép chứng minh thứ nhất được đề xuất lần đầu tiên bởi nhà toán học Lovasz với cách tiếp cận vấn đề trực quan. Phép chứng minh thứ hai được đề xuất bởi nhà toán học Gasparian dựa trên việc diễn giải lại ngắn gọn một kết quả khác của nhà toán học Lovasz (Kết quả 5.5.5) dưới dạng ngôn ngữ đại số tuyến tính để từ đó chứng minh được Kết quả 5.5.3).

Chứng minh thứ nhất của kết quả 5.5.3.

Giả sử cho trước đồ thị G , x là một đỉnh nào đó của G , G' là đồ thị nhận được từ G bằng cách bổ sung thêm đỉnh x' và nối nó với đỉnh x cũng như tất cả các đỉnh láng giềng của x ; ta nói rằng G' thu được từ G bằng cách mở rộng đỉnh x thành cạnh xx' .



Hình vẽ minh họa đồ thị G' thu được từ đồ thị G bằng cách mở rộng đỉnh x thành cạnh xx' .

Kết quả 5.5.4.

Mọi đồ thị thu được từ một đồ thị hoàn hảo bằng cách mở rộng một đỉnh bất kỳ nào đó cũng sẽ là đồ thị hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 5.5.4.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của kết quả trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số của các đồ thị hoàn hảo được xét.

Thật vậy, đồ thị mở rộng của K_1 chính là K_2 , nên cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Giả sử G là một đồ thị hoàn hảo và G' là đồ thị thu được từ G bằng cách mở rộng đỉnh $x \in G$ thành cạnh $xx' \in G'$.

Nhận thấy mọi đồ thị con cảm sinh thật sự H của G' hoặc đẳng cấu với một đồ thị con cảm sinh nào đó của G hoặc thu được từ một đồ thị con cảm sinh của G bằng cách mở rộng đỉnh x . Theo giả thiết quy nạp của bài toán, H cũng là một đồ thị hoàn hảo, nên H cũng có thể được tô bởi $\omega(H)$ màu.

Như vậy, để chứng minh G' là một đồ thị hoàn hảo, ta chỉ cần chứng minh rằng $\chi(G') \leq \omega(G')$.

Kí hiệu $\omega := \omega(G)$, $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$.

Nhận thấy rằng nếu $\omega(G') = \omega + 1$ thì $\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1 = \omega(G')$, khẳng định là hiển nhiên.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $\omega(G') = \omega$.

Khi đó, x không thể nằm trong bất kì đồ thị con nào của G có dạng K_ω : nếu x nằm trong một đồ thị con của G có dạng K_ω thì cùng với x' nó sẽ tạo thành một đồ thị con có dạng $K_{\omega+1}$ của G , mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Nhận thấy rằng mọi đồ thị con $K_\omega \subseteq G$ đều sẽ có giao với tập X gồm các đỉnh của G được tô bởi cùng một màu như đỉnh x nhưng K_ω lại không thể chứa x , nên $H := G - (X/\{x\})$ phải có chỉ số clique $\omega(H) < \omega$. Do G là một đồ thị hoàn hảo nên $H \subseteq G$ có thể được tô bởi $\omega - 1$ màu.

Hơn nữa, X là một tập đỉnh độc lập, nên $(X/\{x\}) \cup \{x'\} = V(G' - H)$ cũng sẽ là một tập đỉnh độc lập.

Như vậy, phép $(\omega - 1)$ - tô màu đỉnh này của H có thể mở rộng thành một phép ω - tô màu đỉnh của G' , nên $\chi(G') \leq \omega = \omega(G')$. $\square$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo chỉ số $|G|$ rằng phần bù $\bar{G}$ của mọi đồ thị hoàn hảo $G = (V, E)$ cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Với $|G| = 1$, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử $|G| \geq 2$ và phần bù $\bar{G}'$ của mọi đồ thị hoàn hảo $G' = (V', E')$ có $|G'| < |G|$ đều là đồ thị hoàn hảo.

Kí hiệu $\mathcal{K}$ là tập tất cả các tập đỉnh của tất cả các đồ thị con đầy đủ của G , $\alpha := \alpha(G)$, $\mathcal{A}$ là tập tất cả các tập đỉnh độc lập A trong G sao cho $|A| = \alpha$.

Nhận thấy rằng mọi đồ thị con cảm sinh thực sự của $\bar{G}$ đều là phần bù của một đồ thị con cảm sinh nào đó của G , nên nó cũng sẽ là một đồ thị hoàn hảo (điều này suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán).

Để chứng minh tính hoàn hảo của phần bù $\bar{G}$, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G}) (= \alpha)$, nghĩa là cần chứng minh tồn tại một tập $K \in \mathcal{K}$ sao cho $K \cap A \neq \emptyset$ với mọi $A \in \mathcal{A}$ (nếu tồn tại một tập K như vậy thì $\omega(\bar{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \omega(\bar{G})$, nên $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G})$).

Giả sử rằng không tồn tại bất kì tập K nào thỏa mãn điều kiện như trên, nghĩa là với mọi tập $K \in \mathcal{K}$ đều tồn tại ít nhất một tập $A_K \in \mathcal{A}$ sao cho $K \cap A_K = \emptyset$. Bằng cách thay thế mỗi đỉnh x trong X bằng một đồ thị đầy đủ G_x có bậc $k(x) = |\{K \in \mathcal{K} | x \in A_K\}|$, nối tất cả các đỉnh của G_x với tất cả các đỉnh của G_y nếu hai đỉnh x và y liên hợp nhau trong G . Đồ thị G' thu được như trên sẽ có tập đỉnh $\bigcup_{x \in V} V(G_x)$, hai đỉnh $v \in G_x$ và $w \in G_y$ liên hợp nhau trong G' nếu và chỉ nếu $x = y$ hoặc $xy \in E$. Do đó, G' có thể thu được bằng cách nhân đỉnh x trong $G[\{x \in V | k(x) > 0\}]$ lên $k(x)$ lần. Do $G[\{x \in V | k(x) > 0\}]$ là một đồ thị con cảm sinh của G nên $G[\{x \in V | k(x) > 0\}]$ là một đồ thị hoàn hảo, nghĩa là G' cũng là một đồ thị hoàn hảo (điều này suy ra từ Kết quả 5.5.4). Như vậy, $\chi(G') \leq \omega(G')$. (1)

Để chỉ ra điểm mâu thuẫn trong đánh giá (1), ta chỉ cần tính ra các giá trị của $\omega(G')$ và $\chi(G')$. Từ cách xây dựng đồ thị G' , mọi đồ thị con tối đại của G' đều có dạng $G'[U_{x \in X} G_x]$ trong đó $X \in \mathcal{K}$.

Như vậy, tồn tại ít nhất một tập $X \in \mathcal{K}$ sao cho

$$\omega(G') = \sum_{x \in X} k(x) = |\{(x, K): x \in X, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| = \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap A_K| \leq |\mathcal{K}| - 1; \quad (2)$$

đánh giá cuối suy ra từ việc $|X \cap A_K| \leq 1$ với mọi tập $K \in \mathcal{K}$ (điều này suy ra từ việc A_K là một tập đỉnh độc lập còn $G[X]$ là một đồ thị đầy đủ), và $|X \cap A_X| = 0$ (điều này suy ra từ cách chọn tập A_X).

Mặt khác,

$$|G'| = \sum_{x \in V} k(x) = |\{(x, K): x \in V, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| = \sum_{K \in \mathcal{K}} |A_K| = |\mathcal{K}| \cdot \alpha.$$

$$\text{Từ cách xây dựng đồ thị } G', \alpha(G') \leq \alpha, \text{ nên } \chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq \frac{|G'|}{\alpha} = |\mathcal{K}|. \quad (3)$$

Bằng cách kết hợp (2) và (3), $\chi(G') \geq |\mathcal{K}| > |\mathcal{K}| - 1 \geq \omega(G')$, mâu thuẫn với (1). $\square$

Chứng minh thứ hai của kết quả 5.5.3.

Ý tưởng chứng minh thứ hai cho Kết quả 5.5.3), ta cần đến kết quả sau đây của nhà toán học Lovász:

Kết quả 5.5.5. (Lovász)

Điều kiện cần và đủ để G là một đồ thị hoàn hảo là $|H| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$, với mọi đồ thị con cảm sinh $H \subseteq G$. (*)

Chứng minh kết quả 5.5.5.

Kí hiệu $V := V(G) := \{v_1, \dots, v_n\}$, $\alpha := \alpha(G)$, $\omega := \omega(G)$.

Nhận thấy rằng điều kiện cần của khẳng định (*) là hiển nhiên: nếu G là một đồ thị hoàn hảo thì mọi đồ thị con cảm sinh $H \subseteq G$ đều có thể phân hoạch thành tối đa $\omega(H)$ lớp màu trong đó mỗi lớp màu chứa tối đa $\alpha(H)$ đỉnh, nên $|H| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$.

Ta sẽ chứng minh chiều đảo của khẳng định (*) bằng quy nạp toán học theo chỉ số $n = |G|$.

Giả sử mọi đồ thị con cảm sinh H của G đều thỏa mãn (*) nhưng G không phải là đồ thị hoàn hảo.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, mọi đồ thị con cảm sinh thực sự của G đều sẽ là đồ thị hoàn hảo.

Như vậy, mọi tập đỉnh độc lập $U \subseteq V$ đều thỏa mãn $\chi(G - U) = \omega(G - U) = \omega$. (1)

Thật vậy, hệ thức thứ nhất suy ra từ tính hoàn hảo của $G - U$ còn hệ thức thứ hai thì còn đơn giản hơn rất nhiều: hiển nhiên $\chi(G - U) \leq \omega$, nếu $\chi(G - U) < \omega$ thì $\chi(G) \leq \omega$, nên G sẽ là một đồ thị hoàn hảo, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Bằng cách áp dụng (1) cho tập đỉnh $U = \{u\}$, xét một phép ω - tô màu đỉnh của $G - u$, và K là tập hợp tất cả các đỉnh của mọi đồ thị con đầy đủ K_ω chứa trong G .

Khi đó,

Nếu $u \notin K$ thì K sẽ có giao với mọi lớp màu của $G - u$; (2)

Nếu $u \in K$ thì K sẽ có giao với hầu hết mọi lớp màu của $G - u$ ngoại trừ một lớp màu nào đó. (3)

Kí hiệu $A_0 = \{u_1, \dots, u_\alpha\}$ là một tập đỉnh độc lập nào đó trong G với $|A_0| = \alpha$; $A_1, \dots, A_\omega$ là các lớp màu của một phép ω - tô màu đỉnh nào đó của $G - u_1$; $A_{\omega+1}, \dots, A_{2\omega}$ là các lớp màu phân biệt của một phép ω - tô màu đỉnh nào đó của $G - u_2$; ...; thực hiện tuần tự quy trình như trên ta thu được $\alpha\omega + 1$ tập đỉnh độc lập $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ trong G . Với mọi chỉ số $i = 0, \dots, \alpha\omega$, tồn tại ít nhất một đồ thị con đầy đủ có dạng $K_\omega \subseteq G - A_i$; kí hiệu K_i là tập đỉnh của đồ thị đầy đủ này.

Nhận thấy rằng: “Nếu K là tập hợp tất cả các đỉnh của mọi đồ thị con đầy đủ K_ω chứa trong G thì $K \cap A_i = \emptyset$ với chính xác một chỉ số $i \in \{0, 1, \dots, \alpha\omega\}$.” (4)

Thật vậy, nếu $K \cap A_0 = \emptyset$ thì $K \cap A_i \neq \emptyset$ với mọi chỉ số $i \neq 0$ (điều này suy ra từ định nghĩa của tập A_i và khẳng định (2)). Tương tự, nếu $K \cap A_0 \neq \emptyset$ thì $|K \cap A_0| = 1$, nên $K \cap A_i = \emptyset$ với chính xác một chỉ số $i \neq 0$: khẳng định (3) chỉ ra tồn tại duy nhất một đỉnh $u \in K \cap A_0$, khẳng định (2) chỉ ra rằng đỉnh u chỉ thuộc duy nhất một tập A_i nào đó với $i \neq 0$.

Kí hiệu:

J là ma trận vuông thực cấp $(\alpha\omega + 1)$ với các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 0 còn các phần tử còn lại đều bằng 1;

A là ma trận thực cấp $(\alpha\omega + 1) \times n$ với các hàng là các vector liên thuộc của các tập con $A_i \subseteq V$;

(nếu $a_{i1}, \dots, a_{in}$ là các phần tử của hàng thứ i của A thì $a_{ij} = 1$ nếu $v_j \in A_i$ và $a_{ij} = 0$ trong trường hợp còn lại)

B là ma trận thực cấp $n \times (\alpha\omega + 1)$ với các hàng là các vector liên thuộc của các tập con $K_i \subseteq V$.

Nhận thấy $|K_i \cap A_i| = 0$ với mọi chỉ số i (điều này suy ra từ cách xây dựng các tập K_i), $|K_i \cap A_j| = 1$ với mọi chỉ số $j \neq i$ (điều này suy ra từ khẳng định (4) và $K_i \cap A_j \neq \emptyset$).

Như vậy, $AB = J$, nên $\text{rank} A = \alpha\omega + 1$ (điều này suy ra từ việc J là một ma trận không suy biến).

Từ đây ta suy ra được rằng $n \geq \alpha\omega + 1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của khẳng định (*). □

Nhận thấy rằng Kết quả 5.5.5) có tính đối xứng giữa G và $\bar{G}$, nên Kết quả 5.5.3) là hiển nhiên. □

Từ định nghĩa của một đồ thị hoàn hảo, mọi đồ thị con cảm sinh của một đồ thị hoàn hảo cũng là một đồ thị hoàn hảo. Như vậy, tính hoàn hảo của một đồ thị hoàn toàn có thể được đặc trưng bởi một lớp các đồ thị con cảm sinh bị cấm nào đó: tồn tại một tập $\mathcal{H}$ gồm các đồ thị không hoàn hảo sao cho một đồ thị cho trước bất kì sẽ là đồ thị hoàn hảo nếu và chỉ nếu nó không chứa bất kì đồ thị con cảm sinh nào đẳng cấu với một phần tử của tập $\mathcal{H}$.

Một cách tự nhiên ta mong muốn giữ cho tập $\mathcal{H}$ là nhỏ nhất có thể được. Một trong những kết quả nổi tiếng nhất trong lý thuyết đồ thị chỉ ra rằng tập $\mathcal{H}$ này tối thiểu chỉ cần hai loại đồ thị: các chu trình lẻ có độ dài ≥ 5 và phân bù của chúng.

Định lý mạnh về đồ thị hoàn hảo. (Berge)

Một đồ thị G là hoàn hảo khi và chỉ khi cả G và $\bar{G}$ đều không chứa bất kì đồ thị con cảm sinh nào có dạng một chu trình lẻ có độ dài ≥ 5 .

Đồ thị G thỏa mãn điều kiện cả G và $\bar{G}$ đều không chứa bất kì đồ thị con cảm sinh nào có dạng một chu trình lẻ có độ dài ≥ 5 được gọi là **đồ thị Berge**.

Định lý mạnh về đồ thị hoàn hảo chỉ ra rằng lớp các đồ thị hoàn hảo và lớp các đồ thị Berge thật ra là một mà thôi. Hiển nhiên, kết quả này sẽ kéo theo tính đúng đắn của định lý yếu về đồ thị hoàn hảo của nhà toán học Lovász. Kết quả này được đề xuất bởi nhà toán học Berge vào năm 1961 nhưng chỉ mới được 4 nhà toán học Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas chứng minh vào năm 2002 và công bố rộng rãi vào năm 2006.