

Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc

Trong “Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc” và “Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị thưa”, chúng ta sẽ nghiên cứu cách mà các tham số toàn cục của một đồ thị (chẳng hạn như bậc trung bình, mật độ cạnh, sắc số,...) tác động lên các cấu trúc địa phương của đồ thị ấy. Câu hỏi được đặt ra nghiên cứu ở đây đó là:

“Mật độ cạnh $\varepsilon(G)$ (hoặc sắc số $\chi(G)$) của một đồ thị G với n đỉnh phải bằng bao nhiêu để đảm bảo rằng G sẽ chứa một đồ thị con H cho trước nào đó, bất kể các cạnh này được sắp xếp như thế nào? chứa một đồ thị con là phần bù của H ? chứa một đồ thị con là phần bù topo của H ?”

Những vấn đề dạng này thường xuất hiện khá nhiều trong lý thuyết đồ thị. Lời giải cho các vấn đề này vì thế cũng rất được quan tâm khảo sát và chúng được gọi chung là **lý thuyết cực trị đồ thị**. Các bài toán cực trị đồ thị được khảo sát thường được chia thành hai loại:

Loại thứ nhất gồm các vấn đề yêu cầu ta xác định các điều kiện nhất định của các tham số toàn cục của G để đảm bảo rằng G sẽ chứa một đồ thị con là phần bù của đồ thị H (hoặc phần bù topo của đồ thị H) cho trước nào đó. Loại vấn đề này sẽ yêu cầu bậc trung bình $\varepsilon(G)$ của G phải có giá trị đủ lớn, nghĩa là $\|G\|$ phải tăng tuyến tính theo $|G|$ (điều này suy ra từ Kết quả 3.6.1). Hơn nữa, do việc $\varepsilon(G)$ có giá trị lớn mà dẫn đến việc phát sinh của một đồ thị con là phần bù của H (hoặc phần bù topo của H) nên nếu ta làm tăng một tham số toàn cục khác (chẳng hạn như κ hoặc χ) thì nó cũng sẽ dẫn đến việc phát sinh một đồ thị con tương tự. Các lập luận và tính toán chi tiết cho các nhận xét vừa nêu ở trên sẽ được trình bày cụ thể hơn trong “Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị thưa”.

Loại thứ hai gồm các vấn đề yêu cầu ta xác định các điều kiện nhất định của các tham số toàn cục của G để đảm bảo rằng G sẽ chứa một đồ thị con H cho trước nào đó. Loại vấn đề về cơ bản thì không yêu cầu các tham số toàn cục ε , κ hoặc χ phải nhận giá trị quá lớn (mỗi tham số toàn cục này đã được khảo sát riêng trong “Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản”). Như đã đề cập đến từ trước trong “Mục 5.1. Phép tô màu đỉnh”, nếu đồ thị H có chứa ít nhất một chu trình thì luôn tồn tại một đồ thị G có sắc số lớn tùy ý nhưng không chứa H (Kết quả 11.2.2). Từ Kết quả 5.1.3) và Kết quả 1.4.2), các đồ thị G như vậy sẽ chứa các đồ thị con liên thông có bậc trung bình lớn tùy ý, nên các tham số toàn cục ε , κ hoặc χ của G cũng có thể nhận giá trị lớn tùy ý mà không yêu cầu phải biết trước đồ thị H . Như vậy, nếu H không phải là một rừng thì cách duy nhất để bắt buộc sự hiện diện của H như một đồ thị con trong G bằng các giả định toàn cục về G là $\|G\|$ phải nhận giá trị đủ lớn. Nhận thấy rằng nếu H không phải là một đồ thị lưỡng phân thì $\|G\|$ phải tăng bậc hai theo $|G|$: do một đồ thị lưỡng phân đầy đủ với n đỉnh có thể chứa tối đa $\frac{n^2}{4}$ cạnh.

Đồ thị G được gọi là một **đồ thị dày đặc** nếu số cạnh $\|G\|$ tăng bậc hai theo số đỉnh $|G|$; số $\frac{\|G\|}{\binom{|G|}{2}}$ – tỉ lệ giữa số cạnh thực tế của G trên số cạnh tiềm năng của nó – được gọi là **mật độ cạnh của G** .

Vấn đề xác định mật độ cạnh chính xác để đảm bảo sự xuất hiện của một đồ thị con cho trước là một trong những bài toán cực trị đồ thị đầu tiên được nghiên cứu chi tiết và nó cũng chính là chủ đề chính được bàn luận đến trong chừng mục ngắn ngủi của “Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc”.

Tuy nhiên, thay vì cố gắng liệt kê tất cả các kết quả của lý thuyết cực trị đồ thị dày đặc, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào hai kết quả quan trọng nhất của nó và cố gắng mô tả một cách chi tiết nhất kỹ thuật chứng minh của chúng: kết quả thứ nhất là Định lý Turán cho $H = K_r$ – kết quả này đóng vai trò như một mô hình chuẩn cho vô số các định lý tương tự cho các lớp đồ thị H khác; kết quả thứ hai là Định lý Erdős – Stone – kết quả này cung cấp một đánh giá tiệm cận chính xác cho tất cả các đồ thị H .

7.1. Định lí Turán

Giả sử cho trước một đồ thị H và số nguyên dương $n \geq |H|$. Vấn đề cơ bản được đặt ra trong lý thuyết cực trị đồ thị đó là: “Một đồ thị G với n đỉnh sẽ cần có bao nhiêu cạnh để có thể chứa H như một đồ thị con bất kể cách phân bố các cạnh của đồ thị này?”. Vấn đề này tương đương với câu hỏi: “Số cạnh lớn nhất có thể có của một đồ thị G với n và không chứa H như một đồ thị con là bao nhiêu? G thỏa mãn yêu cầu trên sẽ trông như thế nào? G có tồn tại duy nhất hay không?”.

Đồ thị $G \not\supset H$ với n đỉnh và có số cạnh lớn nhất có thể có được gọi là **extremal** của n và H ; số các cạnh của G được kí hiệu bởi $ex(n, H)$. Hiển nhiên, nếu G là một đồ thị extremal của n và H thì G cũng là một đồ thị tối đại cạnh với $H \not\subseteq G$. Tuy nhiên, nếu G là một đồ thị tối đại cạnh với $H \not\subseteq G$ thì số cạnh của G có thể nhỏ hơn $ex(n, H)$.

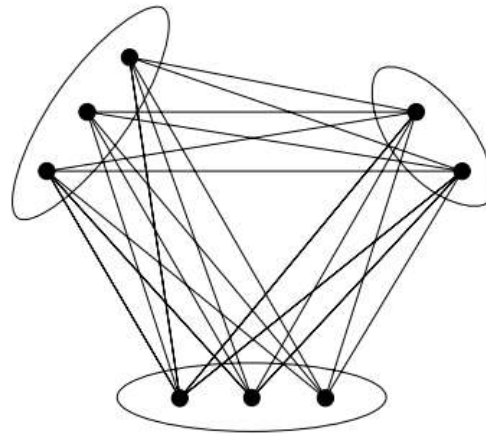


Hình vẽ minh họa.

Xét bài toán với $H = K_r$ ($r > 1$). Do mỗi đồ thị $(r - 1)$ – phần đều là một đồ thị tối đại cạnh không có chứa K_r nên bài toán được phát biểu lại dưới dạng: “Trong số các đồ thị $(r - 1)$ – phần thì đồ thị nào sẽ có số cạnh lớn nhất?”.

Hiển nhiên, nếu G là một đồ thị $(r - 1)$ – phần có số cạnh lớn nhất thì mỗi tập đỉnh trong phân hoạch có kích thước sai khác nhau tối đa không quá một đơn vị: nếu V_1, V_2 là hai tập đỉnh trong phân hoạch với $|V_1| - |V_2| \geq 2$ thì ta có thể tăng số cạnh của G lên bằng cách chuyển một đỉnh nào đó từ V_1 sang V_2 .

Đồ thị $(r - 1)$ – phần với $n \geq r - 1$ đỉnh sao cho hai tập đỉnh bất kì có kích thước sai khác nhau tối đa không quá một đơn vị được gọi là đồ thị Turán, kí hiệu bởi $T^{r-1}(n)$. Số các cạnh của đồ thị Turán $T^{r-1}(n)$ được kí hiệu bởi $t_{r-1}(n)$.



Nếu $n < r - 1$ thì vẫn có thể “mở rộng” định nghĩa đồ thị Turán nêu ở trên bằng việc cho các tập đỉnh trong phân hoạch có thể rỗng. Hiển nhiên, $T^{r-1}(n) := K_n$, với mọi $n \leq r - 1$. Kết quả sau sẽ chỉ ra rằng $T^{r-1}(n)$ là extremal duy nhất của n và K_r . Hiển nhiên, $ex(n, K_r) = t_{r-1}(n)$.

Kết quả 7.1.1. (Turán)

Cho trước các số nguyên n, r với $r > 1$.

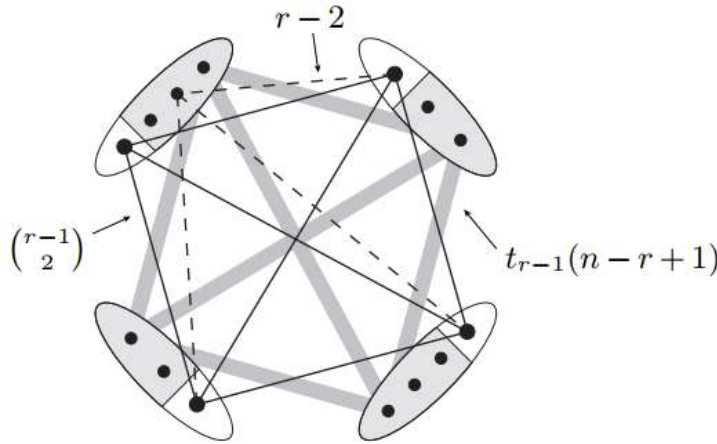
Khi đó, $T^{r-1}(n)$ là đồ thị $G \not\supset K_r$ duy nhất với n đỉnh và $ex(n, K_r)$ cạnh.

Chứng minh kết quả 7.1.1.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số n .

Nhận thấy rằng nếu $n \leq r - 1$ thì hiển nhiên $K_n =: T^{r-1}(n)$ là đồ thị G duy nhất có số cạnh lớn nhất trong số các đồ thị không chứa K_r ; không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $n \geq r$ và G là một đồ thị extremal của n và K_r .

Từ giả thiết G là một đồ thị tối đại cạnh không có chứa K_r , G có chứa đồ thị con $K := K_{r-1}$. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $G - K$ chứa tối đa $t_{r-1}(n - r + 1)$ cạnh. Hơn nữa, mỗi đỉnh trong $G - K$ có tối đa $(r - 2)$ đỉnh láng giềng trong K . Do đó, $\|G\| \leq t_{r-1}(n - r + 1) + (n - r + 1)(r - 2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n)$ (hệ thức thứ hai suy ra từ cách định nghĩa đồ thị Turán $T^{r-1}(n)$). (1)



Hình vẽ minh họa.

Từ giả thiết G là đồ thị extremal của n và K_r , $\|G\| = t_{r-1}(n)$. Khi đó, mỗi đỉnh trong $G - K$ có chính xác $(r - 2)$ đỉnh láng giềng trong K ; kí hiệu $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ là các đỉnh của K .

Với mỗi chỉ số $i = 1, \dots, r - 1$, kí hiệu $V_i := \{v \in V(G) | vx_i \notin E(G)\}$ là tập tất cả các đỉnh v không phải là đỉnh láng giềng của x_i trong G . Nhận thấy rằng do $K_r \not\subset G$ nên mỗi V_i đều là một tập độc lập và chúng tạo thành một phân hoạch của tập $V(G)$. Như vậy, G cũng là một đồ thị $(r - 1)$ - phần.

Mặt khác, $T^{r-1}(n)$ là đồ thị có số cạnh lớn nhất trong số tất cả các đồ thị $(r - 1)$ - phần với n đỉnh, nên $G = T^{r-1}(n)$ (điều này suy ra từ tính extremal của G). $\square$

Nhận thấy rằng đồ thị $T^{r-1}(n)$ dày đặc: $T^{r-1}(n)$ chứa khoảng n^2 cạnh. Cụ thể, $t_{r-1}(n) \leq \frac{1}{2} n^2 \frac{r-2}{r-1}$, với mọi chỉ số nguyên n và r . Định lí Turán khẳng định rằng: "Nếu một đồ thị G chứa tối thiểu εn^2 cạnh thì nó có thể chứa một đồ thị con có dạng K_r ($\varepsilon > 0$ và n đủ lớn)". Tuy nhiên, số cạnh εn^2 sẽ là không đủ để đảm bảo cho G có thể nhận K_r^S làm một đồ thị con được với r, s là các nguyên cho trước nào đó. Kết quả sau sẽ cho ta biết số cạnh tối thiểu để một đồ thị G có thể chứa một đồ thị con có dạng K_r^S :

Kết quả 7.1.2. (Erdős – Stone)

Cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$, với mọi số nguyên $r \geq 2$ và $s \geq 1$, tồn tại một số nguyên n_0 sao cho mọi đồ thị có $n \geq n_0$ đỉnh và $t_{r-1}(n) + \varepsilon n^2$ cạnh đều chứa một đồ thị con có dạng K_r^s .

Phép chứng minh của Định lý Erdős – Stone sẽ được trình bày trong mục 7.3. Định lý Erdős – Stone có một hệ quả quan trọng trong “lý thuyết cực trị đồ thị” của lớp các đồ thị dày đặc như sau:

Giả sử cho trước một đồ thị H và một số nguyên dương n , kí hiệu $h_n := ex(n, H)/\binom{n}{2}$ là **mật độ cạnh tối đại** của một n – đồ thị không chứa H . Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu giá trị tới hạn của mật độ cạnh tối đại này có phải là một hàm của H , nghĩa là h_n có hội tụ khi $n \rightarrow \infty$?”. Kết quả sau chính là câu trả lời cho vấn đề vừa ở trên: “Giới hạn của tỉ số h_n là một hàm số cơ bản của sắc số cạnh $\chi(H)$ của H ”.

Kết quả 7.1.3.

Với mọi đồ thị H có ít nhất một cạnh, $\lim_{n \rightarrow \infty} ex(n, H) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$.

Nếu $H = K_r$ thì Kết quả 7.1.3) được phát biểu lại dưới dạng:

Kết quả 7.1.4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-2}{r-1}$$

Chứng minh kết quả 7.1.4.

Tính đúng đắn được suy ra từ đánh giá: $t_{r-1}\left((r-1) \left\lfloor \frac{n}{r-1} \right\rfloor\right) \leq t_{r-1}(n) \leq t_{r-1}\left((r-1) \left\lceil \frac{n}{r-1} \right\rceil\right)$. $\square$

Chứng minh kết quả 7.1.3.

Kí hiệu $r := \chi(H)$. Nhận thấy rằng do H không thể được tô bởi $(r-1)$ màu nên $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$ với mọi số nguyên dương n , nghĩa là $t_{r-1}(n) \leq ex(n, H)$. Mặt khác, $H \subseteq K_r^s$ với mọi số nguyên dương s đủ lớn, nên $ex(n, H) \leq ex(n, K_r^s)$, với mọi số nguyên dương s đó.

Cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$, với mọi số nguyên $r \geq 2$ và $s \geq 1$, $ex(n, K_r^s) < t_{r-1}(n) + \varepsilon n^2$, với mọi $n \geq n_0$ nào đó. (điều này suy ra từ Định lý Erdős – Stone)

Như vậy,

$$\begin{aligned} t_{r-1}(n)/\binom{n}{2} &\leq ex(n, H)/\binom{n}{2} \leq ex(n, K_r^s)/\binom{n}{2}, \text{ với } n \text{ đủ lớn} \\ &< t_{r-1}(n)/\binom{n}{2} + \varepsilon n^2/\binom{n}{2} \\ &= t_{r-1}(n)/\binom{n}{2} + 2\varepsilon/\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq t_{r-1}(n)/\binom{n}{2} + 4\varepsilon \quad (\text{giả sử } n \geq 2). \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng do $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$ hội tụ về $\frac{r-2}{r-1}$ (điều này suy ra từ Kết quả 7.1.4), nên $ex(n, H)/\binom{n}{2}$ cũng sẽ hội tụ về $\frac{r-2}{r-1}$. Do đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} ex(n, H) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$. $\square$

Nếu H là một đồ thị lưỡng phân thì số cạnh cần thiết để G có thể chứa H như một đồ thị con về cơ bản sẽ ít hơn $\binom{n}{2}$ nhiều. Cụ thể, $c_1 n^{2-\frac{2}{r+1}} \leq ex(n, K_{r,r}) \leq c_2 n^{2-\frac{1}{r}}$, trong đó c_1, c_2 là các hằng số phụ thuộc vào r .

Nếu H là một rừng thì $ex(n, H)$ bị chặn trên bởi một hàm số tuyến tính của n .

Năm 1963, hai nhà toán học Erdős và Sós giả thuyết rằng “ $ex(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n$ với mọi số nguyên n ” là chặn trên đúng cho mọi cây T với $k \geq 2$ cạnh và cho đến chúng ta vẫn chưa tìm được một lời giải đầy đủ cho giả thuyết này.

7.2. Bổ đề Szemerédi

Bổ đề này được giới thiệu đầu tiên bởi nhà toán học Szemerédi trong một luận văn bản về các tính chất Ramsey của các dãy cấp số cộng. Trong luận văn này, nhà toán học Szemerédi đã sử dụng công cụ đồ thị để mô hình hóa các dãy cấp số cộng và sử dụng bổ đề này như một giải pháp kỹ thuật thú vị cho sự phân bố đồng đều của số các cạnh nối giữa các phần của một phân hoạch đỉnh.

Bổ đề Szemerédi khẳng định rằng: “Mọi đồ thị bất kì đều có thể được xấp xỉ bằng các đồ thị ngẫu nhiên, nghĩa là mọi đồ thị đều có thể phân hoạch thành một số các tập đỉnh có kích thước nằm trong một giới hạn cho trước sao cho số cạnh nối giữa hai tập đỉnh bất kì được phân bố xấp xỉ nhau”.

Giả sử cho trước đồ thị $G = (V, E)$, X, Y là các tập đỉnh phân biệt của V ; kí hiệu $\|X, Y\|$ là **số các $A - B$ cạnh** của G và $d(X, Y) := \frac{\|X, Y\|}{|X||Y|}$ là **mật độ** của cặp (X, Y) .

Cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$, cặp đỉnh phân biệt (A, B) được gọi là **cặp $\varepsilon - regular$** nếu với mọi $X \subseteq A$ và $Y \subseteq B$ với $|X| \geq \varepsilon|A|$ và $|Y| \geq \varepsilon|B|$ thỏa mãn $|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon$.

Nhận thấy rằng các cạnh trong một $\varepsilon - regular$ cặp được phân bố khá đồng đều, nghĩa là nếu giá trị của hằng số ε đủ nhỏ thì sự phân bố các cạnh sẽ càng ổn định hơn.

Giả sử cho trước một phân hoạch $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ của V với C_0 được chọn ra từ trước như một **tập đặc biệt** (V_0 có thể rỗng). Phân hoạch $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ được gọi là một **phân hoạch $\varepsilon - regular$** của G nếu nó thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

- (i) $|C_0| \leq \varepsilon|V|$;
- (ii) $|C_1| = \dots = |C_k|$;
- (iii) Số các $\varepsilon - regular$ cặp (C_i, C_j) với $1 \leq i < j \leq k$ tối đa bằng εk^2 .

Sự xuất hiện của tập C_0 trong định nghĩa trên là một trong những điểm quan trọng về mặt kỹ thuật: nó yêu cầu tất cả các tập đỉnh $C_1, \dots, C_k$ đều phải có cùng một kích thước. Do điều kiện (iii) trong định nghĩa chỉ ảnh hưởng đến các tập $C_1, \dots, C_k$, nên ta có thể tạm bỏ qua các đỉnh của C_0 khi xét đến tính đồng nhất của phân hoạch.

Kết quả 7.2.1. (Szemerédi)

Với mọi số dương $\varepsilon > 0$, với mọi số nguyên dương $m \geq 1$, tồn tại một số nguyên dương M sao cho mọi đồ thị có bậc $\geq m$ đều có ít nhất một phân hoạch $\varepsilon - regular$ $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ với $m \leq k \leq M$.

Bổ đề Szemerédi khẳng định: “Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, mọi đồ thị đều có ít nhất một phân hoạch ε – regular với số tập đỉnh bị chặn bởi một số nguyên nào đó”. Nhận thấy rằng chặn trên đúng M của số tập đỉnh đảm bảo rằng nếu đồ thị có kích thước lớn thì các tập đỉnh của nó cũng sẽ có kích thước lớn. Ngoài ra, nếu chọn giá trị của chặn dưới đúng m của số tập đỉnh đủ lớn thì tỷ lệ các cạnh chạy giữa các tập đỉnh của phân hoạch cũng sẽ tăng theo, nghĩa là tỷ lệ các cạnh tuân theo định nghĩa về tính regular.

Nhận thấy rằng Bổ đề Szemerédi chủ yếu được thiết kế để khảo sát các đồ thị dày đặc: tính đúng đắn của Bổ đề Szemerédi là hoàn toàn hiển nhiên cho lớp các đồ thị thưa, bởi vì mật độ của các cặp đỉnh của nó tiến dần tới 0.

Phần còn lại của mục này sẽ được dùng để trình bày cũng như phân tích các ý tưởng độc đáo được ẩn sâu trong phép chứng minh của Bổ đề Szemerédi. Do phép chứng minh của bổ đề này khá phức tạp nên nếu đây là lần đầu bạn tiếp xúc với Bổ đề Szemerédi thì chủ yếu bạn chỉ nên quan tâm đến việc áp dụng bổ đề như thế nào hơn là đi nghiên cứu các kỹ thuật được sử dụng trong phép chứng minh này.

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (V, E)$ và $n := |V|$.

Kí hiệu:

$$q(A, B) := \frac{|A||B|}{n} d^2(A, B) = \frac{\|A, B\|^2}{|A||B|n^2}, \text{ với các tập phân biệt } A, B \text{ của } V;$$

$$q(\mathcal{A}, B) := \sum_{A' \in \mathcal{A}, B' \in B} q(A', B'), \text{ với mọi phân hoạch } \mathcal{A} \text{ của } A \text{ và } B \text{ của } B;$$

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i < j} q(C_i, C_j), \text{ nếu phân hoạch } \mathcal{P} = \{C_1, \dots, C_k\};$$

$$q(\mathcal{P}) := q(\tilde{\mathcal{P}}), \text{ nếu phân hoạch } \mathcal{P} = \{C_0, C_1, \dots, C_k\} \text{ với } C_0 \text{ là tập đặc biệt } (\tilde{\mathcal{P}} := \{C_1, \dots, C_k\} \cup \{\{v\} : v \in C_0\}).$$

Hàm $q(\mathcal{P})$ đóng một vai trò quan trọng trong phép chứng minh của Bổ đề Szemerédi. Nó đóng vai trò như số đo cho tính đều của phân hoạch $\mathcal{P}$, nghĩa là nếu $\mathcal{P}$ chứa quá nhiều các cặp (A, B) không regular thì ta có thể làm mịn phân hoạch $\mathcal{P}$ thành một phân hoạch $\mathcal{P}'$ mới sao cho $q(\mathcal{P})$ lớn hơn thực sự $q(\mathcal{P}')$: chọn ra một số cặp (A, B) không regular và phân hoạch A, B thành các tập đỉnh $X, Y, \dots, Z$ mới. Mặc dù, giá trị $q(\mathcal{P})$ có thể được làm tăng lên thêm nhưng sẽ vẫn luôn bị chặn trên bởi một hằng số nào đó phụ thuộc vào ε trong suốt quá trình nêu ở trên.

Mặc khác,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i < j} q(C_i, C_j) \\ &= \sum_{i < j} \frac{|C_i||C_j|}{n^2} d^2(C_i, C_j) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i < j} |C_i||C_j| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Như vậy, số lần $q(\mathcal{P})$ tăng giá trị sẽ bị chặn trên bởi một hằng số nào đó, nghĩa là sau một số hữu hạn lần tinh chỉnh lại phân hoạch $\mathcal{P}$ sẽ thật sự nhận được một phân hoạch ε –regular $\mathcal{P}'$!. Để hoàn thành phép chứng minh của Bổ đề Szemerédi, tất cả những gì phải làm đó là tính toán xem phân hoạch cuối cùng $\mathcal{P}'$ chứa bao nhiêu tập đỉnh nếu chúng ta bắt đầu với một phân hoạch $\mathcal{P}$ với số tập đỉnh bằng m , và chọn số tập đỉnh này làm chặn trên đúng M mong muốn trong Bổ đề Szemerédi.

Đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng nếu ta làm mịn một phân hoạch $\mathcal{P}$ thì giá trị của hàm q sẽ không thể giảm:

Kết quả 7.2.2.

(i) Nếu A, B là các tập phân biệt cho trước của V , $\mathcal{A}$ là một phân hoạch của A và $\mathcal{B}$ là một phân hoạch của B thì $q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq q(A, B)$.

(ii) Nếu $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ là các phân hoạch của V và $\mathcal{P}'$ mịn hơn $\mathcal{P}$ thì $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$.

Chứng minh kết quả 7.2.2.

(i) Giả sử $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ và $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_l\}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sum_{i,j} q(A_i, B_j) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{\|A_i, B_j\|^2}{|A_i||B_j|} \\ &\geq_{\text{Bất đẳng thức Schwartz}} \frac{1}{n^2} \frac{(\sum_{i,j} \|A_i, B_j\|)^2}{(\sum_{i,j} |A_i|)(\sum_{i,j} |B_j|)} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{\|A, B\|^2}{(\sum_i |A_i|)(\sum_j |B_j|)} \\ &= q(A, B). \end{aligned}$$

(ii) Giả sử $\mathcal{P} = \{C_1, \dots, C_k\}$ và $\mathcal{C}_i$ là phân hoạch của C_i cảm sinh bởi $\mathcal{P}'$ ($i = 1, \dots, k$).

Khi đó, $q(\mathcal{P}) = \sum_{i < j} q(C_i, C_j) \leq_{\text{Khẳng định (i)}} \sum_{i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \leq q(\mathcal{P}')$ (điều này suy ra từ hệ thức $q(\mathcal{P}') = \sum_i q(\mathcal{C}_i) + \sum_{i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j)$). □

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng nếu làm mịn một phân hoạch bằng cách phân chia tiếp một cặp (A, B) không ε -regular thành các tập con nhỏ hơn sẽ làm giảm giá trị của hàm q đi một chút:

Kết quả 7.2.3.

Cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$, A, B là các tập phân biệt của V .

Khi đó, nếu (A, B) không phải là một cặp ε -regular thì sẽ tồn tại một phân hoạch $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ của A và một phân hoạch $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$ của B sao cho $q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq q(A, B) + \varepsilon^4 \frac{|A||B|}{n^2}$.

Chứng minh kết quả 7.2.3.

Giả sử (A, B) không phải là một cặp ε -regular. Khi đó, tồn tại một tập $A_1 \subseteq A$ và một tập $B_1 \subseteq B$ sao cho $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| > \varepsilon$, $|A_1| > \varepsilon|A|$ và $|B_1| > \varepsilon|B|$. (1)

Kí hiệu:

$$A_2 := A \setminus A_1, B_2 := B \setminus B_1;$$

$$\mathcal{A} := \{A_1, A_2\}, \mathcal{B} := \{B_1, B_2\};$$

$$\eta := d(A_1, B_1) - d(A, B).$$

Ta sẽ chứng minh rằng các phân hoạch $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ sẽ thỏa mãn điều kiện của Kết quả 7.2.3).

Kí hiệu:

$$a_i := |A_i|, b_j := |B_j|, c_{ij} := \|A_i, B_j\|;$$

$$a := |A|, b := |B|, c := \|A, B\|.$$

Tương tự như trong phép chứng minh của Kết quả 7.2.2),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{c_{ij}^2}{a_i b_j} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{c_{11}^2}{a_1 b_1} + \sum_{i+j \geq 2} \frac{c_{ij}^2}{a_i b_j} \right) \\ &\geq_{\text{Bất đẳng thức Schwartz}} \frac{1}{n^2} \left(\frac{c_{11}^2}{a_1 b_1} + \frac{(c - c_{11})^2}{ab - a_1 b_1} \right). \end{aligned}$$

Từ định nghĩa của η , $c_{11} = \frac{a_1 b_1 c}{ab} + \eta a_1 b_1$, nên

$$\begin{aligned} n^2 q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\geq \frac{1}{a_1 b_1} \left(\frac{a_1 b_1 c}{ab} + \eta a_1 b_1 \right)^2 + \frac{1}{ab - a_1 b_1} \left(\frac{ab - a_1 b_1}{ab} c - \eta c_1 d_1 \right)^2 \\ &= \frac{a_1 b_1 c^2}{a^2 b^2} + \frac{2c\eta a_1 b_1}{ab} + \eta^2 a_1 b_1 + \frac{ab - a_1 b_1}{a^2 b^2} c^2 - \frac{2c\eta a_1 b_1}{ab} + \frac{\eta^2 a_1^2 b_1^2}{ab - a_1 b_1} \\ &\geq \frac{c^2}{ab} + \eta^2 a_1 b_1 \\ &\geq_{\text{Khẳng định (1)}} \frac{c^2}{ab} + \varepsilon^4 ab. \end{aligned} \quad \square$$

Sau cùng, ta sẽ chỉ ra rằng nếu phân hoạch $\mathcal{P}$ có số các cặp (A, B) không ε – regular quá lớn không thỏa mãn định nghĩa của một phân hoạch ε – regular thì việc làm mịn một phân hoạch bằng cách phân chia tiếp các cặp (A, B) không ε – regular thành các tập con nhỏ hơn sẽ làm tăng giá trị của hàm q

Kết quả 7.2.4.

Cho trước số thực dương $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$, $\mathcal{P} = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ là một phân hoạch của V với tập đặc biệt C_0 sao cho $|C_0| \leq \varepsilon n$ và $|C_1| = \dots = |C_k| =: c$.

Khi đó, nếu $\mathcal{P}$ không phải là một phân hoạch ε – regular thì sẽ tồn tại phân hoạch $\mathcal{P}' = \{C'_0, C'_1, \dots, C'_l\}$ ($k \leq l \leq k4^k$) của V với tập đặc biệt C'_0 sao cho $|C'_0| \leq |C_0| + \frac{n}{2^k}$, $|C'_1| = \dots = |C'_l|$ và $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}$.

Chứng minh kết quả 7.2.4.

Với các cặp chỉ số $1 \leq i < j \leq k$, ta sẽ xây dựng một phân hoạch $\mathcal{C}_{ij}$ của C_i và một phân hoạch $\mathcal{C}_{ji}$ của C_j như sau:

“Nếu (C_i, C_j) là một cặp ε – regular thì chọn $\mathcal{C}_{ij} := \{C_i\}$ và $\mathcal{C}_{ji} := \{C_j\}$; ngược lại, tồn tại một phân hoạch $\mathcal{C}_{ij}$ của C_i và một phân hoạch $\mathcal{C}_{ji}$ của C_j sao cho

$$|\mathcal{C}_{ij}| = |\mathcal{C}_{ji}| = 2 \text{ và } q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) \geq q(C_i, C_j) + \varepsilon^4 \frac{|C_i||C_j|}{n^2} = q(C_i, C_j) + \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2}.” \quad (2)$$

Với mỗi chỉ số $i = 1, \dots, k$, kí hiệu $\mathcal{C}_i$ là phân hoạch tối tiểu của C_i mịn hơn tất cả các phân hoạch $\mathcal{C}_{ij}$ ($j \neq i$) (nghĩa là nếu quy ước: “hai phần tử của C_i là tương đương khi và chỉ khi, với mọi cặp chỉ số $i < j$, hai phần tử này luôn nằm trong cùng một tập đỉnh của $\mathcal{C}_{ij}$ ” thì $\mathcal{C}_i$ chính là tập các lớp tương đương theo quan hệ tương đương vừa định nghĩa). Như vậy, $|\mathcal{C}_i| \leq 2^{k-1}$.

Xét phân hoạch $\mathcal{C} := \{C_0\} \cup \bigcup_{i=1}^k \mathcal{C}_i$ của V với C_0 được xem như một tập đặc biệt.

Khi đó, $\mathcal{C}$ mịn hơn $\mathcal{P}$ và $k \leq |\mathcal{C}| \leq k2^k$. (3)

Kí hiệu $\mathcal{C}_0 := \{\{v\}: v \in C_0\}$. Nhận thấy rằng nếu $\mathcal{P}$ không phải là một phân hoạch ε – regular thì số các cặp (C_i, C_j) với $1 \leq i < j \leq k$ của phân hoạch sẽ phải lớn hơn εk^2 . Từ định nghĩa của hàm $q(\mathcal{P})$ cho các lớp các phân hoạch $\mathcal{P}$ có một tập đặc biệt C_0 cho trước và Kết quả 7.2.2 (i),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{C}) &= \sum_{1 \leq i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) + \sum_{1 \leq i} q(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_i) + \sum_{0 \leq i} q(\mathcal{C}_i) \\ &\geq \sum_{1 \leq i < j} q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) + \sum_{1 \leq i} q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) \\ &\geq_{\text{Khẳng định (3)}} \sum_{1 \leq i < j} q(C_i, C_j) + \varepsilon k^2 \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2} + \sum_{1 \leq i} q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) \\ &= q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5 \left(\frac{kc}{n}\right)^2 \\ &\geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}. \text{ (do } |C_0| \leq \varepsilon n \leq \frac{n}{4} \text{ nên } kc \geq \frac{3}{4}n) \end{aligned}$$

Kí hiệu $C'_1, \dots, C'_k$ là một họ tối đại các tập phân biệt có kích thước $d := \left\lfloor \frac{c}{4^k} \right\rfloor$ sao cho mỗi C'_i đều được chứa trong một tập C nào đó thuộc $\mathcal{C} \setminus \{C_0\}$, $C'_0 := V \setminus \bigcup C'_i$.

Khi đó, $\mathcal{P}' := \{C'_0, C'_1, \dots, C'_l\}$ cũng là một phân hoạch của V .

Hơn nữa, $\tilde{\mathcal{P}}'$ mịn hơn $\tilde{\mathcal{C}}$, nên $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{C}) \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}$. (điều này suy ra từ Kết quả 7.2.2 (ii))

Nhận thấy rằng do mỗi tập $C'_i \neq C'_0$ đều được chứa trong một tập $C_0, C_1, \dots, C_k$ nào đó và cũng có không quá 4^k tập C'_i nằm trong cùng một tập C_j (điều này suy ra từ cách định nghĩa chỉ số d) nên $k \leq l \leq k4^k$.

Sau cùng, do các tập $C'_1, \dots, C'_l$ chỉ chứa tối đa không quá d đỉnh từ mỗi tập $C \neq C_0$ của $\mathcal{C}$, nên

$$\begin{aligned} |C'_0| &\leq |C_0| + d|\mathcal{C}| \\ &\leq_{\text{Khẳng định (3)}} |C_0| + \frac{c}{4^k} k2^k \\ &\leq |C_0| + \frac{n}{2^k}. \end{aligned}$$

□

Phép chứng minh của Bổ đề Szemerédi được suy ra dễ dàng bằng cách áp dụng liên tiếp Kết quả 7.2.4):

Chứng minh kết quả 7.2.1. Cho trước số thực dương $\varepsilon > 0$ và số nguyên dương $m \geq 1$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$. Kí hiệu $s := \frac{2}{\varepsilon^5}$, s chính là chặn trên của số lần cần thiết để áp dụng Kết quả 7.2.4) làm mịn phân hoạch $\mathcal{P}$ thành một phân hoạch ε – regular $\mathcal{P}'$. Nhắc lại rằng $q(\mathcal{P}) \leq 1$, với mọi phân hoạch $\mathcal{P}$.

Nhận thấy rằng phân hoạch $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ với $|C_1| = \dots = |C_k|$ phải thỏa mãn điều kiện $|C_0| \leq \varepsilon n$ thì mới có thể áp dụng được Kết quả 7.2.4). Với mỗi lần lặp lại Kết quả 7.2.4), kích thước của tập đặc biệt sẽ tăng thêm một lượng $\frac{n}{2^k}$ (chính xác hơn thì kích thước của tập đặc biệt sẽ tăng thêm $\frac{n}{2^l}$ với l là số các tập đỉnh trong phân hoạch hiện tại; do $l \geq k$ nên $\frac{n}{2^k} \geq \frac{n}{2^l}$). Đầu tiên, chúng ta chọn số k đủ lớn sao cho tổng gia số gây ra bởi s số hạng $\frac{n}{2^k}$ không vượt quá $\frac{1}{2}\varepsilon n$. Hơn nữa, với n đủ lớn, với mọi giá trị ban đầu $|C_0| \leq k$, ta phải luôn có $|C_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon n$. (nếu ta bắt đầu quá trình với một phân hoạch $\mathcal{P}$ có k tập không đặc biệt $C_1, \dots, C_k$ thì, để đảm bảo có thể đạt được $|C_1| = \dots = |C_k|$, chúng ta nên cho phép kích thước C_0 ban đầu không vượt quá k)

Kí hiệu $k \geq m$ là một số nguyên đủ lớn sao cho $2^{k-1} \geq \frac{s}{\varepsilon}$.

Khi đó, $\frac{s}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, nên $k + \frac{s}{2^k}n \leq \varepsilon n$ với $n \geq \frac{2k}{\varepsilon}$. (do $\frac{k}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$) (4)

Nhận thấy rằng số M chính là chặn trên đúng của số tập đỉnh không đặc biệt trong phân hoạch của chúng ta sau s lần áp dụng Kết quả 7.2.4). Hơn nữa, số tập đỉnh này chỉ có thể tăng trong khoảng từ giá trị r hiện tại cho đến $r4^r$ sau mỗi lần áp dụng Kết quả 7.2.4).

Kí hiệu f là hàm $x \mapsto x4^x$ và $M := \max\left\{f^s(k), \frac{2k}{\varepsilon}\right\}$.

Sau cùng, ta sẽ chỉ ra rằng mọi đồ thị $G = (V, E)$ có bậc $\geq m$ đều có ít nhất một phân hoạch ε – regular $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ với $m \leq k \leq M$. Giả sử cho trước một đồ thị G và $n := |G|$. Nếu $n \leq M$ thì phân hoạch G thành $k := n$ tập đơn bằng cách đặt $C_0 := \emptyset$ và $|C_1| = \dots = |C_k| = 1$. Hiển nhiên, phân hoạch này chính là một phân hoạch ε – regular của G . Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $n > M$. Kí hiệu $C_0 \subseteq V$ là tập con nhỏ nhất sao cho $|V \setminus C_0|$ chia hết k và $\{C_1, \dots, C_k\}$ là một phân hoạch bất kì của $V \setminus C_0$ thành các k tập có kích thước bằng nhau. Khi đó, $|C_0| < k$, nên $|C_0| \leq \varepsilon n$ (điều này suy ra từ khẳng định (4)). Bằng cách áp dụng liên tiếp Kết quả 7.2.4) cho phân hoạch $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ sau tối đa s lần áp dụng liên tiếp ta sẽ thu được một phân hoạch ε – regular của G (do kích thước của tập đặc biệt trong phân hoạch luôn nhỏ hơn hoặc bằng εn nên ta có thể áp dụng lại Kết quả 7.2.4) tối đa s lần). □

7.3. Định lí Erdős – Stone

Nội dung của mục này sẽ được dùng để minh họa cách áp dụng Bổ đề Szemerédi cho bài toán cực trị của lớp các đồ thị dày đặc. Cụ thể, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một giá trị mật độ cạnh xác định của G để đảm bảo G sẽ phải chứa một đồ thị con H cho trước nào đó. Nói cách khác, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một giá trị mật độ cạnh xác định của G để đảm bảo G sẽ phải chứa một phân hoạch ε – regular cho trước nào đó. Nhận thấy rằng mặc dù mật độ cạnh của mỗi cặp (V_i, V_j) có thể bị phụ thuộc vào cặp (V_i, V_j) đó nhưng các cạnh nằm bên trong hầu hết các cặp (V_i, V_j) của các phân hoạch đỉnh lại được phân bố khá đồng đều. Nhưng do G có chứa nhiều cạnh nên mật độ cạnh của các cặp (V_i, V_j) không thể đồng thời bằng 0: một số cặp (V_i, V_j) có tỉ lệ khá lớn nên mật độ cạnh của các cặp (V_i, V_j) này sẽ có giá trị dương. Hơn nữa, nếu đồ thị G lớn thì mật độ cạnh của các cặp (V_i, V_j) cũng sẽ lớn theo: nhắc lại rằng số tập đỉnh của một phân hoạch luôn bị chặn trên và các tập phân hoạch đỉnh của nó cũng có cùng một kích thước. Nếu một đồ thị lưỡng phân bất kì đủ lớn với các tập phân hoạch đỉnh có cùng kích thước thì mật độ cạnh của các cặp (V_i, V_j) của nó cũng sẽ có giá trị dương, nên sự phân bố đồng đều của các cạnh sẽ kéo theo việc đồ thị này

sẽ phải chứa một đồ thị con lưỡng phân cho trước nào đó (nếu các bạn đã quen thuộc với khái niệm đồ thị ngẫu nhiên thì có thể thấy rằng điều khẳng định này tương đương với Kết quả 11.3.1) – điều khẳng định này sẽ được chứng minh chi tiết hơn ở phần bên dưới của bài viết. Như vậy, nếu ta có đủ số cặp (V_i, V_j) có mật độ cạnh dương trong phân hoạch của G và H có thể được biểu diễn dưới dạng hợp của các đồ thị lưỡng phân sao cho mỗi đồ thị lưỡng phân này nằm trong một cặp (V_i, V_j) nào đó thì ta có thể kết luận được rằng $H \subseteq G$ như mong muốn.

Những ý tưởng vừa trình bày ở trên sẽ được chứng minh lại một cách chặt chẽ trong Kết quả 7.3.2) ở phần bên dưới của bài viết. Bằng cách kết hợp Kết quả 7.3.2) với Bổ đề Szemerédi, ta sẽ có thể đưa ra một phép chứng minh hoàn chỉnh cho Định lý Erdos – Stone đã được giới thiệu đến trong mục 7.1.

Để hoàn tất phép chứng minh của Kết quả 7.3.2), ta cần chứng minh một tính chất rất lí thú về tính regular của một cặp ε – regular (A, B) : “Nếu Y là một tập con không quá nhỏ của B thì phần lớn các đỉnh láng giềng của A trong B sẽ được chứa trong tập Y .”

Kết quả 7.3.1.

Giả sử (A, B) là một cặp ε – regular có mật số bằng d , $Y \subseteq B$ với $|Y| \geq \varepsilon|B|$.

Khi đó, số các đỉnh của A có số đỉnh láng giềng trong Y ít hơn $(d - \varepsilon)|Y|$ sẽ nhỏ hơn $\varepsilon|A|$.

Chứng minh kết quả 7.3.1.

Giả sử $X \subseteq A$ là tập các đỉnh có ít hơn $(d - \varepsilon)|Y|$ đỉnh láng giềng trong Y .

Khi đó, $\|X, Y\| < |X|(d - \varepsilon)|Y|$, nên $d(X, Y) = \frac{\|X, Y\|}{|X||Y|} < d - \varepsilon = d(A, B) - \varepsilon$.

Mặt khác, do (A, B) là một cặp ε – regular, nên $|X| < \varepsilon|A|$. □

Giả sử $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ là một phân hoạch ε – regular của G với tập đặc biệt C_0 và $|C_1| = \dots = |C_k| =: l$.

Cho trước một số thực dương $d \in (0, 1]$, kí hiệu R là đồ thị với $C_1, \dots, C_k$ đóng vai trò như các đỉnh và hai đỉnh liên hợp nhau nếu và chỉ nếu chúng là một cặp ε – regular trong G với mật số $\geq d$, R được gọi là một **đồ thị regular của G với các tham số ε, l, d** .

Cho trước số tự nhiên $s \in \mathbb{N}$, kí hiệu R_s là đồ thị thu được từ R bằng cách thay thế mỗi đỉnh C_i của R bởi một tập C_i^s gồm s đỉnh và thay mỗi cạnh nối giữa các đỉnh V_i, V_j của R bởi một đồ thị lưỡng phân đầy đủ giữa hai s – tập tương ứng. (chẳng hạn, nếu $R = K_r$ thì $R_s = K_r^s$). Kết quả sau chỉ ra rằng nếu ε đủ nhỏ và V_i đủ lớn thì R_s có thể được xem như một đồ thị con của G :

Kết quả 7.3.2.

Với mọi số thực $d \in (0, 1]$ và $\Delta \geq 1$, tồn tại một số thực dương $\varepsilon_0 > 0$ thỏa mãn tính chất:

“Nếu G là một đồ thị bất kì, H là một đồ thị với $\Delta(H) \leq \Delta$, R là một đồ thị regular của G với các tham số $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \geq \frac{s}{\varepsilon_0}$, d ($s \in \mathbb{N}$) thì $H \subseteq R_s \implies H \subseteq G$ ”.

Chứng minh kết quả 7.3.2.

Cho trước số thực $d \in (0, 1]$ và $\Delta \geq 1$, tồn tại một số thực $0 < \varepsilon_0 < d$ đủ nhỏ sao cho $\frac{(\Delta+1)\varepsilon_0}{(d-\varepsilon_0)^\Delta} \leq 1$. (1)

(điều này suy ra từ việc $\frac{(\Delta+1)\varepsilon}{(d-\varepsilon)^\Delta} \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0^+$)

Giả sử G là một đồ thị bất kì, H là một đồ thị với $\Delta(H) \leq \Delta$, R là một đồ thị regular của G với các tham số $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \geq \frac{s}{\varepsilon_0}$, d ($s \in \mathbb{N}$) và $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ là phân hoạch ε -regular của G cảm sinh ra R .

Khi đó, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $V(R) = \{C_1, \dots, C_k\}$ và $|C_1| = \dots = |C_k| = l$.

Giả sử H là một đồ thị con của R_s . Kí hiệu $u_1, \dots, u_h$ là các đỉnh của H . Nhận thấy rằng do mỗi đỉnh u_i chỉ thuộc duy nhất một s -tập C_j^s của R_s nên phép tương ứng $\sigma: i \mapsto j$ thực sự là một ánh xạ.

Ý tưởng ở đây đó là ta sẽ xây dựng một phép nhúng $u_i \mapsto v_i \in V_{\sigma(i)}$ từ H vào G .

Khi đó, các đỉnh $v_1, \dots, v_h$ cũng sẽ đôi một phân biệt trong G và nếu $u_i u_j$ là một cạnh trong H thì $v_i v_j$ cũng là một cạnh trong G .

Kế hoạch ở đây là ta sẽ xây dựng đệ quy dần các đỉnh $v_1, \dots, v_h$. Trong suốt quá trình đệ quy này, kí hiệu $Y_i \subseteq V_{\sigma(i)}$ là tập tất cả các đỉnh là ứng cử viên tiềm năng cho v_i . Đầu tiên, kí hiệu $Y_i := V_{\sigma(i)}$. Khi thực hiện quá trình nhúng, Y_i sẽ được “thu nhỏ” dần lại cho đến khi nó trở thành một tập đơn có dạng $\{v_i\}$ theo quy tắc: “Nếu ta chọn một đỉnh v_j với $j < i$ và $u_j u_i \in E(H)$ thì ta sẽ phải xóa tất cả các đỉnh không liên hợp với v_j ra khỏi Y_i ”.

Như vậy, Y_i có thể được xem như một dãy hữu hạn $V_{\sigma(i)} = Y_i^0 \supseteq \dots \supseteq Y_i^i = \{v_i\}$, trong đó Y_i^j là trạng thái của Y_i sau khi ta đã xóa bỏ đi một số đỉnh nào đó ra khỏi Y_i^{j-1} và xác định được đỉnh v_j .

Để đảm bảo tính đúng đắn của ý tưởng chứng minh này, ta cần đảm bảo rằng các tập Y_i không được quá nhỏ. Nhận thấy rằng nếu ta muốn nhúng một đỉnh u_j thì ta sẽ phải xem xét đến tất cả các chỉ số $i > j$ sao cho $u_j u_i \in E(H)$: có tối đa Δ chỉ số i như vậy. Với mỗi chỉ số i , ta luôn mong muốn chọn được đỉnh v_j sao cho $Y_i^j = N(v_j) \cap Y_i^{j-1}$ đủ lớn, nghĩa là nó phải không nhỏ hơn quá nhiều so với Y_i^{j-1} . (2)

Bằng cách áp dụng Kết quả 7.3.1) với $A = V_{\sigma(j)}$, $B = V_{\sigma(i)}$, $Y = Y_i^{j-1}$: ngoại trừ trường hợp tập Y_i^{j-1} có kích thước quá nhỏ (kích thước của nó nhỏ hơn εl), $|Y_i^j| \geq (d - \varepsilon)|Y_i^{j-1}|$ (điều này suy ra từ việc có tối đa εl cách để chọn đỉnh v_j). (3)

Lập lại điều tương tự cho các giá trị còn lại của chỉ số i (có tối đa tất cả Δ giá trị i cần phải xem xét), ta sẽ xác định được tất cả các đỉnh v_j trong $V_{\sigma(j)}$ cũng thỏa mãn điều kiện (3) với mọi chỉ số i (có tối đa tất cả $\Delta \varepsilon l$ đỉnh v_j như vậy). Hơn nữa, $Y_j^{j-1} \subseteq V_{\sigma(j)}$, với mọi chỉ số i .

Phần việc còn lại của phép chứng minh là chỉ ra rằng các tập Y_i^j được xét đến thực sự không quá nhỏ và $|Y_j^{j-1}| - \Delta \varepsilon l \geq s$ để đảm bảo rằng ta luôn có thể chọn được đỉnh v_j (do $\sigma(j') = \sigma(j)$ với tối đa $s - 1$ đỉnh $u_{j'}$ ($j' < j$) nên một sự chọn lựa giữa s ứng cử viên tiềm năng cho đỉnh v_j sẽ đủ để giữ cho v_j phân biệt với $v_1, \dots, v_{j-1}$). Thật vậy, giá trị ban đầu Y_i^0 của Y_i có kích thước bằng l và một đỉnh v_j ($j < i$) đã được xác định trước đó sẽ được xóa ra khỏi Y_i chỉ khi $u_j u_i \in E(H)$ (điều này xảy ra tối đa Δ lần).

Như vậy, $|Y_i^j| - \Delta \varepsilon l \geq_{(3)} (d - \varepsilon)^\Delta l - \Delta \varepsilon l \geq_{(3)} (d - \varepsilon_0)^\Delta l - \Delta \varepsilon_0 l \geq_{(1)} \varepsilon_0 l \geq s$, với mọi chỉ số $j < i$; hơn nữa, $|Y_i^j| \geq \varepsilon_0 l \geq \varepsilon l$ và $|Y_j^{j-1}| - \Delta \varepsilon l \geq s$. □

Phép chứng minh của Định lí Erdős – Stone sẽ được tiến hành như sau:

Chứng minh kết quả 7.1.2.

Giả sử cho trước các số nguyên $r \geq 2$ và $s \geq 1$. Nhận thấy rằng nếu $s = 1$ thì khẳng định của bài toán chính là định lí Turán. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $r \geq 2$ và $s \geq 2$.

Giả sử cho trước một số thực dương $0 < \gamma < 1$ (số γ này đóng vai trò của số ε trong Định lí Erdős – Stone) và một đồ thị G sao cho $|G| := n$, $\|G\| \geq t_{r-1}(n) + \gamma n^2$.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu n nhận giá trị đủ lớn thì $K_r^s \subseteq G$. Kế hoạch ở đây là ta sẽ sử dụng Bổ đề Szemerédi để chứng minh rằng nếu n nhận giá trị đủ lớn thì G sẽ phải chứa một đồ thị regular R và R đủ dày đặc để có thể chứa được K_r . Khi đó, R_s sẽ chứa K_r^s , nên $K_r^s \subseteq G$ (điều này suy ra từ Kết quả 7.3.2).

Từ Kết quả 7.3.2), chọn $d := \gamma$ và $\Delta := \Delta(K_r^s)$, tồn tại một số thực dương $\varepsilon_0 > 0$ thỏa mãn tính chất:

“Nếu G là một đồ thị bất kì, H là một đồ thị với $\Delta(H) \leq \Delta$, R là một đồ thị regular của G với các tham số $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \geq \frac{s}{\varepsilon_0}$, d ($s \in \mathbb{N}$) thì $H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G$ ”. Hơn nữa, nếu ta thay ε_0 bằng một số thực dương khác nhỏ hơn ε_0 thì khẳng định trên vẫn đúng, nên không giảm tính tổng quát của vấn đề ta có thể giả sử rằng $0 < \varepsilon_0 < \frac{\gamma}{2} < 1$. (1)

Áp dụng Bổ đề Szemerédi, chọn số nguyên $m > \frac{1}{\gamma}$ và số thực dương $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ và $\delta = 2\gamma - \varepsilon^2 - \varepsilon - d - \frac{1}{m} > 0$ (điều này hoàn toàn có thể thực hiện được do $2\gamma - d - \frac{1}{m} > 0$), tồn tại một số nguyên dương M sao cho mọi đồ thị có bậc $\geq m$ đều có ít nhất một phân hoạch ε -regular $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ với $m \leq k \leq M$.

Giả sử $n \geq \frac{Ms}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$. Do giá trị nhỏ nhất của số này $\geq m$ nên đồ thị G phải chứa ít nhất một phân hoạch ε -regular $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ với $m \leq k \leq M$ (điều này suy ra trực tiếp từ cách chọn M).

Kí hiệu $|V_1| = \dots = |V_k| =: l$.

Khi đó, $n \geq kl$ và $l = \frac{n-|V_0|}{k} \geq \frac{n-\varepsilon n}{M} = n \frac{1-\varepsilon}{M} \geq \frac{s}{\varepsilon_0}$ (điều này suy ra trực tiếp từ cách chọn n). (2)

Kí hiệu R là đồ thị regular của G với các tham số ε, l, d tương ứng với phân hoạch ε -regular $\{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ nêu ở trên. Nhận thấy rằng do $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ và $l \geq \frac{s}{\varepsilon_0}$ nên đồ thị regular R thỏa mãn điều kiện tiên đề nêu trong Kết quả 7.3.2) và $\Delta(K_r^s) = \Delta$ (điều này suy ra trực tiếp từ cách chọn Δ) nên $K_r^s \subseteq G$ (điều này suy ra trực tiếp từ Kết quả 7.3.2).

Phần còn lại của phép chứng minh này là ta sẽ cố gắng chứng minh rằng $K_r \subseteq R$ (nên $K_r^s \subseteq R_s$).

Kế hoạch ở đây là ta sẽ chứng minh $K_r \subseteq R$ bằng Định lí Turán. Để thực hiện theo ý tưởng chứng minh này, ta cần chỉ ra rằng R chứa tối thiểu $t_{r-1}(n)$ cạnh (điều này suy ra trực tiếp từ Định lí Turán), nghĩa là G chứa tối thiểu $t_{r-1}(n)$ cặp (V_i, V_j) có mật độ $\geq d$. Thật vậy, do mật độ cạnh của đồ thị Turán $T^{r-1}(n)$ chỉ vào khoảng $\frac{r-2}{r-1}$ nhưng mật độ cạnh của G lại vào khoảng $\frac{r-2}{r-1} + 2\gamma$ nên G sẽ phải chứa tối thiểu $t_{r-1}(n)$ cặp (V_i, V_j) có mật độ $\geq d$.

Ta sẽ thực hiện một số tính toán cơ bản để ước tính giá trị của $\|R\|$ như sau:

Đầu tiên, có tối đa không quá $\frac{1}{2}(\varepsilon n)^2$ cạnh của G không nằm trong các cặp ε – regular (điều này suy ra từ việc có tối đa $\binom{|V_0|}{2}$ cạnh nằm trong V_0 và điều kiện (i) trong định nghĩa về phân hoạch ε – regular) và tối đa không quá $|V_0|kl \leq \varepsilon$ cạnh nối V_0 với các tập phân hoạch V_i ($i = 1, \dots, k$) khác. Tiếp theo, do có tối đa εk^2 cặp (V_i, V_j) ($1 \leq i < j \leq k$) không phải là một cặp ε – regular và mỗi cặp này chứa tối đa l^2 cạnh nên tổng cộng chúng chứa tối đa không quá $\varepsilon k^2 l^2$ cạnh. Hơn nữa, do mỗi cặp ε – regular có mật độ $< d$ chỉ chứa tối đa dl^2 cạnh nên tổng cộng chúng chứa tối đa không quá $\frac{1}{2}k^2 dl^2$ cạnh. Sau cùng, do có tối đa $\binom{l}{2}$ cạnh nằm trong mỗi tập phân hoạch đỉnh V_i ($i = 1, \dots, k$) nên tổng cộng chúng chứa tối đa không quá $\frac{1}{2}l^2 k$ cạnh. Tất cả các cạnh còn lại của G phải nằm trong một cặp ε – regular có mật độ $\geq d$ và các cạnh chính là nguồn đóng góp để tạo ra các cạnh của R nên chúng chứa tối đa không quá $\|R\|l^2$ cạnh (điều này suy ra từ việc mỗi cạnh của R tương ứng với tối đa l^2 cạnh của G).

Bằng cách kết hợp các đánh giá cơ bản nêu ở trên,

$$\|G\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon nkl + \varepsilon k^2 l^2 + \frac{1}{2}k^2 dl^2 + \frac{1}{2}l^2 k + \|R\|l^2.$$

Như vậy, với mọi số nguyên dương n nhận giá trị đủ lớn,

$$\begin{aligned} \|R\| &\geq \frac{\frac{1}{2}k^2 \left(\|G\| - \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 - \varepsilon nkl - \varepsilon k^2 l^2 - \frac{1}{2}k^2 dl^2 - \frac{1}{2}l^2 k \right)}{\frac{1}{2}k^2 l^2} \\ &\geq_{(1)+(2)} \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{t_{r-1}(n) + \gamma n^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 - \varepsilon nkl}{\frac{n^2}{2}} - 2\varepsilon - d - \frac{1}{k} \right) \\ &\geq_{(2)} \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{t_{r-1}(n)}{\frac{n^2}{2}} + 2\gamma - \varepsilon^2 - 4\varepsilon - d - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{1}{2}k^2 \left(t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \delta \right) \\ &>_{\text{Kết quả 7.1.4}} \frac{1}{2}k^2 \frac{r-2}{r-1} \\ &\geq t_{r-1}(n) \end{aligned}$$

Do đó, $K_r \subseteq R$ (điều này suy ra trực tiếp từ Định lý Turán). □