

Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị thừa

Như đã giới thiệu từ trước, nội dung chính của “Chủ đề 08. Cấu trúc con của đồ thị thừa” sẽ tiếp tục khảo sát lời giải của câu hỏi “Giá trị của các tham số toàn cục (chẳng hạn như bậc trung bình $\varepsilon(G)$, sắc số $\chi(G)$, girth $g(G)$,...) của một đồ thị G với n đỉnh phải bằng bao nhiêu để đảm bảo rằng G sẽ chứa một đồ thị H cho trước nào đó như một phân bù (hoặc phân bù topo), bất kể các cạnh này được sắp xếp như thế nào?”.

Nhắc lại rằng “Luôn tồn tại một hàm h sao cho nếu $d(G) \geq h(r)$ thì G sẽ chứa một đồ thị con có dạng TK_r ” (Định lý Mader – Kết quả 3.6.1), nên nếu $r \geq |H|$ thì G cũng sẽ chứa H như một phân bù topo. Hơn nữa, do một đồ thị có n đỉnh và bậc trung bình bằng d sẽ chứa tối đa $\frac{1}{2}dn$ cạnh nên kết luận trên có thể được phát biểu lại dưới dạng: “Luôn tồn tại một số c (chỉ phụ thuộc vào H chứ không phụ thuộc vào n) sao cho nếu G là một đồ thị với n đỉnh và $\geq cn$ cạnh thì G sẽ chứa H như một phân bù topo”. Các đồ thị G có số cạnh $\|G\|$ tăng bậc nhất theo số đỉnh $|G|$ được gọi là một **đồ thị thừa**. Như đã trình bày, lời giải của vấn đề mà ta đang khảo sát thuộc vào lớp các đồ thị thừa nên có thể nói rằng nội dung chính trong chủ đề này chính là khảo sát lớp các đồ thị thừa.

Câu hỏi thứ hai được đặt ra ở đây đó là: “Giá trị nhỏ nhất có thể có của số c cho trường hợp $H = K_r$ là bao nhiêu, nghĩa là hệ số tiệm cận của hàm $h(r)$ nêu trong Kết quả 3.6.1) có thể nhận giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?”. Đây là thực sự là một vấn đề mở cho đến thời gian gần đây. Trong bài viết này ta sẽ cố gắng trình bày một cách chi tiết và rõ ràng nhất các ý tưởng chính trong lời giải của vấn đề trên bởi vì nó thật sự lí thú và nó cũng đóng một vai trò quan trọng nhất định xuyên suốt quá trình khảo sát của chúng ta.

Nhận thấy rằng nếu ta tăng giá trị của bậc trung bình $d(G)$ để bắt buộc G phải chứa H như một phân bù thì điều tương tự cũng sẽ diễn ra cho các giá trị tham số toàn cục khác của G (điều này suy ra từ việc nếu ta tăng giá trị của các tham số toàn cục còn lại của G cũng sẽ làm tăng giá trị của bậc trung bình $d(G)$). Chẳng hạn, nếu $d(G) \geq c$ sẽ kéo theo $H \preccurlyeq G$ thì nếu $\chi(G) \geq c + 1$ cũng sẽ kéo theo $H \preccurlyeq G$ (Kết quả 5.1.3).

Câu hỏi thứ ba được đặt ra ở đây đó là: “Liệu đánh giá nêu ở trên đã đủ tốt hay chưa?”. Dễ dàng nhận thấy rằng ngay cả khi c nhận giá trị nhỏ nhất sao cho nếu $d(G) \geq c$ sẽ kéo theo $H \preccurlyeq G$ thì c cũng chưa chắc đã là giá trị nhỏ nhất để nếu $\chi(G) \geq c + 1$ sẽ kéo theo $H \preccurlyeq G$. Nhận định này nhận được sự ủng hộ từ giả thuyết Hadwiger – “nếu $\chi(G) \geq r$ thì $H \preccurlyeq G$ ” và sự kiện giá trị c nhỏ nhất sao cho nếu $d(G) \geq c$ kéo theo $H \preccurlyeq G$ sẽ có dạng $c' r \sqrt{\log r}$, trong đó c' không phụ thuộc vào n và r ” (khẳng định này sẽ được chứng minh chi tiết hơn trong mục 8.2). Giả thuyết Hadwiger là một dạng mở rộng của định lý 4 màu và nó cũng là một trong những giả thuyết toán học nổi tiếng nhất hiện nay. Tính đến thời điểm hiện tại nó đã được chứng minh là đúng với $r = 1, 2, \dots, 6$. Giả thuyết này sẽ được giới thiệu chi tiết hơn trong mục 8.3.

8.1. Điều kiện cần để G chứa K_r như một phân bù topo

Năm 1996, hai nhóm nghiên cứu của Bollobás & Thomason và Komlós & Szemerédi đã sẽ độc lập đưa ra một điều kiện cần đơn giản để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phân bù topo:

“Giá trị của bậc trung bình $d(G)$ vào khoảng cr^2 là đủ để đảm bảo cho sự xuất hiện của K_r như một phân bù topo của G ”.

Chính xác hơn, khẳng định trên có thể phát biểu lại dưới dạng:

Kết quả 8.1.1. (Bollobás – Thomason – Komlós – Szemerédi)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số thực $c \in \mathbb{R}$ sao cho nếu G là một đồ thị có bậc trung bình $d(G) \geq cr^2$ thì G sẽ chứa K_r như một phần bù topo.

Phép chứng minh chi tiết của khẳng định trên sẽ được trình bày trong phần bên dưới của bài viết này (ở đây ta sẽ trình bày phép chứng minh theo quan điểm của nhóm nghiên cứu Bollobás & Thomason).

Nhắc lại một số khái niệm cần thiết trong việc trình bày các lập luận & phân tích của ta:

Tập $U \subseteq V(G)$ được gọi là **link** (trong G) nếu, với mọi $2h$ đỉnh phân biệt $u_1, \dots, u_{2h} \in U$, tồn tại một hệ gồm h đường đi phân biệt $P_i = u_{2i-1} \dots u_{2i}$ ($i = 1, \dots, h$) chứa trong G .

Đồ thị G được gọi là (k, l) – **link** nếu mọi k – tập đỉnh của G đều có chứa một tập l – link nào đó.

Câu hỏi đặt ra ở đây đó là: “Làm cách nào để ta xác định đồ thị TK_r nêu trong Kết quả 8.1.1?”.

Để dễ hình dung quá trình xây dựng của đồ thị TK_r , ta tạm chia quá trình xây dựng đồ thị TK_r thành ba bước cơ bản như sau:

- Chọn ra một tập X gồm r đỉnh đóng vai trò như tập các đỉnh nhánh của TK_r ;
- Với mỗi đỉnh $x \in X$, chọn ra một tập Y_x gồm $(r - 1)$ đỉnh láng giềng của x trong K_r ;
- Nối các cặp đỉnh tương ứng trong $Y := \bigcup Y_x$ bởi một hệ các đường đi phân biệt trong $G - X$ để thu được đồ thị TK_r như mong muốn.

Nhận thấy rằng nếu hằng số c nêu trong Kết quả 8.1.1) có giá trị đủ lớn thì các đỉnh của tập X và các đỉnh của các tập Y_x có thể được chọn sao cho tập $X \cup Y_x$ chứa được tối đa $r + r(r - 1) = r^2$ đỉnh đôi một phân biệt nhau (điều này suy ra từ Kết quả 1.2.2: đồ thị G có chứa một đồ thị con H với bậc nhỏ nhất $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) \geq \frac{1}{2}cr^2$ đủ lớn để ta có thể chọn các đỉnh của X và các đỉnh láng giềng Y_x đôi một phân biệt nhau từ trong đồ thị con H này).

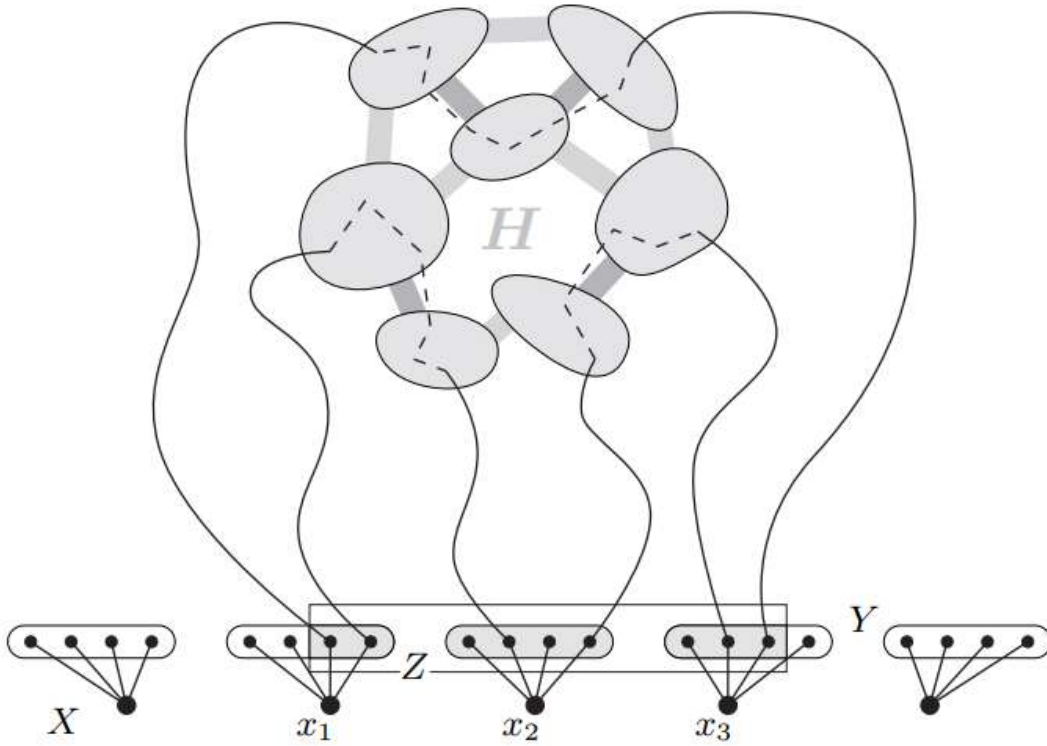
Nếu Y là một tập link trong $G - X$ thì khẳng định của bài toán là hoàn toàn hiển nhiên. Thật không may, khả năng điều này xảy ra trên thực tế là khá thấp: việc bậc trung bình $d(G)$ có giá trị lớn không đủ để bắt buộc mọi tập Y gồm $r(r - 1)$ phải là một tập link trong G . Tuy nhiên, nếu số đỉnh được chọn của X nhiều hơn đáng kể so với r và, với mỗi đỉnh $x \in X$, số đỉnh được chọn của Y_x nhiều hơn đáng kể so với $(r - 1)$ thì Y có thể trở nên lớn đến mức nếu bậc trung bình $d(G)$ có giá trị đủ lớn thì sẽ kéo theo sự tồn tại của một tập con link $Z \subseteq Y$. Điều này xảy ra nếu G là một đồ thị (k, l) – link với $k \leq |Y|$ và $l \geq |Z|$.

Như đã nói ở trên việc hằng số c có giá trị đủ lớn sẽ đảm bảo cho việc có thể chọn được X và Y với số lượng đỉnh đủ nhiều để dự phòng. Tuy nhiên, một vấn đề khác nghiêm trọng hơn nảy sinh ra ở đây đó là: nó không đủ để đảm bảo cho chỉ số l cũng sẽ có giá trị lớn. Thật vậy, nếu k có giá trị lớn hơn quá nhiều so với l thì có thể xảy ra hiện tượng mặc dù tập Z chứa một lượng đỉnh khá lớn nhưng thật ra chúng chỉ là đỉnh láng giềng của một vài đỉnh trong X . Do đó, chúng ta cũng phải đảm bảo rằng chỉ số k cũng phải có giá trị lớn tương đối so với chỉ số l . Đây cũng chính là nội dung chính của Bổ đề 8.1.2): bổ đề này thiết lập một điều kiện đủ đơn giản để đảm bảo cho G là một đồ thị $(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ – link.

Bổ đề 8.1.2.

Nếu G là một đồ thị k – liên thông và G có chứa một phần bù H với $2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k$ thì G sẽ là một đồ thị $\left(k, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right)$ – link.

Bổ đề 8.1.2) chỉ ra một điều kiện đơn giản để đảm bảo G là một đồ thị $\left(k, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right)$ – link đó là nó là một đồ thị k – liên thông có chứa một phần bù H với bậc nhỏ nhất $\delta(H) \geq \frac{1}{2}|H| + \frac{3}{4}k$ (đặc biệt, phần bù H này còn là một đồ thị dày đặc theo cách định nghĩa trong “Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc”). Từ Kết quả 3.6.2), phần bù H này cũng là một đồ thị k – link. Do đó, để thu được đồ thị TK_r như mong muốn, chúng ta chỉ cần nối các đỉnh nào đó trong Y với các tập đỉnh nhánh tương ứng trong H bởi một hệ các đường đi phân biệt trong G tránh qua các tập đỉnh nhánh còn lại của H . Bổ đề 8.1.2) cũng chỉ ra rằng kích thước của tập Z trong lập luận ở trên không vượt quá $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$.



Hình vẽ minh họa cách xây dựng phần bù topo TK_3 trong G với x_1, x_2, x_3 là các đỉnh nhánh.

Chứng minh kết quả 8.1.2.

Kí hiệu $\mathcal{V} := \{V_x | x \in V(H)\}$ là họ các tập đỉnh nhánh tương ứng với các đỉnh của H trong G .

Để chứng minh G là một đồ thị $\left(k, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right)$ – link, giả sử $v_1, \dots, v_k$ là k đỉnh phân biệt cho trước của G .

Để thuận tiện cho quá trình chứng minh, ta có một số quy ước như sau: dãy k đường đi phân biệt $P_1, \dots, P_k$ trong G được gọi là **hệ đường đi link** nếu mỗi đường đi P_i đều xuất phát tại v_i và kết thúc trong các tập đỉnh V_i đôi một phân biệt nhau của $\mathcal{V}$; các đường đi P_i được gọi là các **đường đi link**. (do G là một đồ thị k – liên thông và $|H| \geq k$ (điều này suy ra từ giả thiết của bài toán về H) nên luôn tồn tại ít nhất một hệ đường đi link $P_1, \dots, P_k$ trong G : chọn ra k đỉnh $u_1, \dots, u_k$ từ các tập đỉnh V_i đôi một phân biệt của

$\mathcal{V}$ và nối chúng với các đỉnh $v_1, \dots, v_k$ bởi một hệ các đường đi đôi một phân biệt $P_1, \dots, P_k$ theo Định lí Menger.)

Giả sử $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_k)$ là hệ đường đi link sao cho tổng số cạnh nằm ngoài $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} G[V]$ nhỏ nhất có thể được. Kí hiệu $f(P)$ là số cạnh của đường đi P không nằm trong bất kì đồ thị $G[V]$ ($V \in \mathcal{V}$) nào.

Khi đó, hệ $\mathcal{P}$ sẽ làm cho tổng $\sum_{i=1}^k f(P_i)$ đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

Nhận thấy rằng nếu một tập đỉnh $V \in \mathcal{V}$ có giao với một đường đi $P_i \in \mathcal{P}$ thì sẽ phải tồn tại một đường đi $P_j \in \mathcal{P}$ kết thúc trong V : ngược lại, nếu kí hiệu P'_i là phần đường đi P_i xuất phát tại v_i và kết thúc trong V thì $f(P'_i) < f(P_i)$. Như vậy, có chính xác k tập đỉnh nhánh V của H có giao với một đường đi link P_i nào đó của hệ $\mathcal{P}$.

Kí hiệu:

$\mathcal{U} := \{V \in \mathcal{V} | V \text{ có giao với chính xác một đường đi link } P_i \text{ của hệ } \mathcal{P}\};$

$\mathcal{W} := \{V \in \mathcal{V} | V \text{ có giao với nhiều hơn một đường đi link } P_i \text{ của hệ } \mathcal{P}\}.$

Do phần bù H dày đặc và mỗi tập đỉnh nhánh $U \in \mathcal{U}$ đều có giao với chính xác một đường đi link P_i của hệ $\mathcal{P}$ nên dễ dàng chứng minh được tập các đỉnh xuất phát v_i của hệ các đường đi link P_i này tạo thành một tập link trong G . Như vậy, mục tiêu của chúng ta là sẽ cố gắng chứng minh $|\mathcal{U}| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, nghĩa là $\mathcal{U}$ có kích thước lớn hơn hoặc bằng $\mathcal{W}$ (nhắc lại rằng $|\mathcal{U}| + |\mathcal{W}| = k$).

Để chứng minh khẳng định trên, ta sẽ cần đến kết quả phụ sau:

Khẳng định.

Mọi tập đỉnh nhánh $V \in \mathcal{W}$ đều có giao với một đường đi link P_i nào đó trong $\mathcal{P}$ và đường đi link P_i này lại kết thúc trong một tập đỉnh nhánh $U \in \mathcal{U}$. (*)

Chứng minh khẳng định.

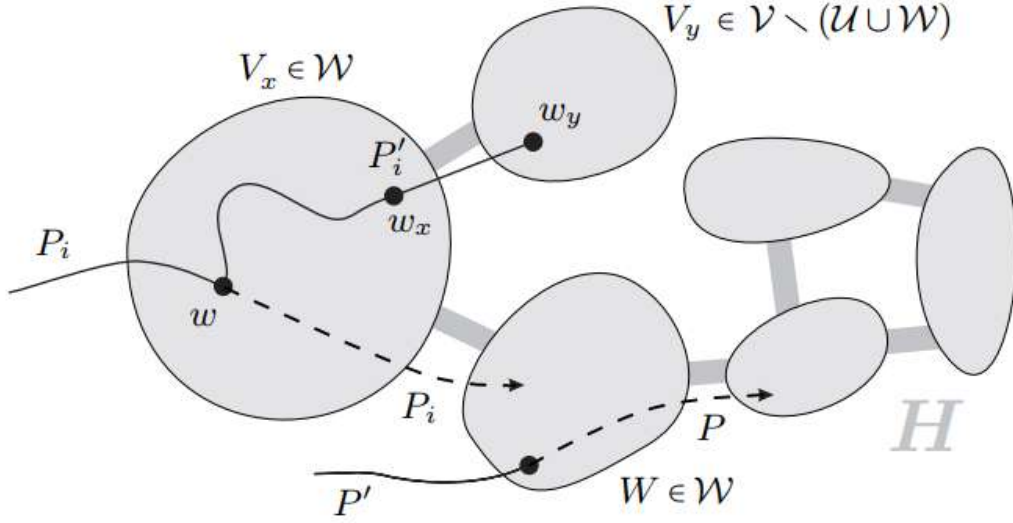
Giả sử $V_x \in \mathcal{W}$ là một tập đỉnh nhánh không thỏa mãn khẳng định (*).

Nhận thấy rằng do $2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k \geq \delta(H) + \frac{3}{2}k$ nên $\delta(H) \geq \frac{3}{2}k$. Do $|\mathcal{U} \cup \mathcal{W}| = k$ nên đỉnh x sẽ phải có ít nhất một đỉnh láng giềng y trong H với $V_y \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$; kí hiệu $\omega_x \omega_y$ là một cạnh nào đó của G với $\omega_x \in V_x$ và $\omega_y \in V_y$. Giả sử $Q := w \dots w_x w_y$ là một đường đi nào đó nằm trong $G[V_x \cup \{\omega_y\}]$ sao cho chỉ có duy nhất đỉnh w nằm trên một đường đi link P_i nào đó của $\mathcal{P}$. Hơn nữa, nếu thay đường đi link P_i trong $\mathcal{P}$ bởi đường đi $P'_i := P_i w Q$ thì ta cũng sẽ nhận được một hệ đường đi link $\mathcal{P}'$ mới nên, để hoàn tất phép chứng minh của kết quả phụ, ta sẽ chia ra hai trường hợp con để dễ khảo sát:

Trường hợp 1. P_i không kết thúc trong V_x .

Khi đó, $f(P'_i) \leq f(P_i)$. Từ giả thiết về tính tối tiểu của $\mathcal{P}$, $f(P'_i) = f(P_i)$, nghĩa là P_i phải kết thúc trong một tập đỉnh nhánh W nào đó ngay sau khi đi qua V_x . Do V_x là một tập đỉnh nhánh không thỏa mãn khẳng định (*) nên $W \notin \mathcal{U}$, nghĩa là $W \in \mathcal{W}$. Giả sử $P \neq P_i$ là một đường đi link khác cũng đi qua W . Do đó, P không thể kết thúc trong W (điều này suy ra từ việc P_i đã kết thúc trong W); kí hiệu $P' \subseteq P$ là phần đường đi của P từ đỉnh xuất phát v đến tập đỉnh nhánh W . Bằng thay các đường đi P_i, P bởi các

đường đi P'_i, P' , ta sẽ thu được một hệ đường đi link $\mathcal{P}' = (P'_1, \dots, P'_k)$ mới có tổng $\sum_{i=1}^k f(P'_i) < \sum_{i=1}^k f(P_i)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết về tính tối tiểu của $\mathcal{P}$.

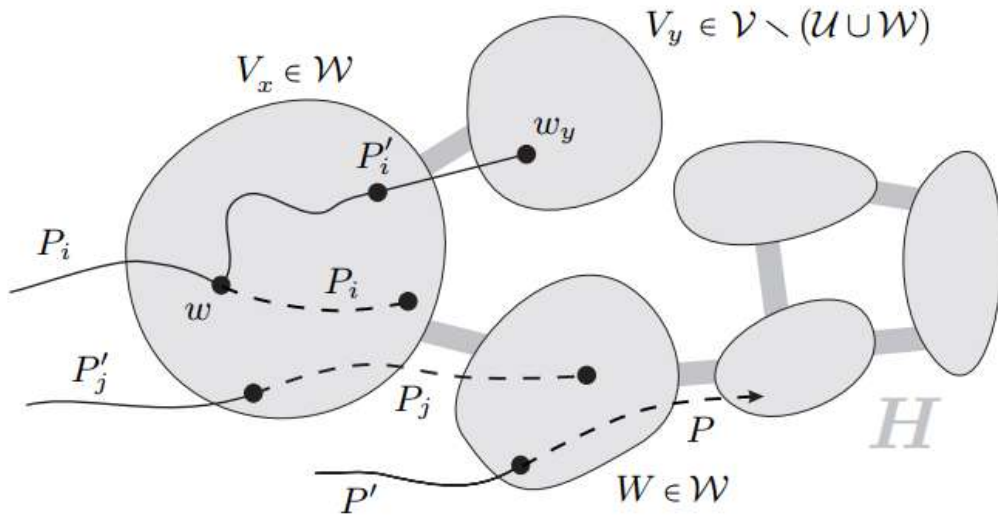


Hình ảnh minh họa quá trình thay thế các đường đi P_i, P bởi các đường đi P'_i, P' .

Trường hợp 2. P_i kết thúc trong V_x .

Khi đó, $f(P'_i) = f(P_i) + 1$. Từ giả thiết $V_x \in \mathcal{W}$, tồn tại một đường đi link P_j khác cũng có giao với V_x ; kí hiệu $P'_j \subseteq P_j$ là phần đường đi của P_j từ đỉnh v_j đến tập đỉnh nhánh V_x . Như vậy, $f(P'_j) \leq f(P_j) - 1$. Nếu ta thay các đường đi P_i, P_j bởi các đường đi P'_i, P'_j thì ta sẽ thu được một hệ đường đi link $\mathcal{P}'$ mới.

Từ giả thiết về tính tối tiểu của $\mathcal{P}$, $f(P'_j) = f(P_j) - 1$, nên P_j phải kết thúc trong một tập đỉnh nhánh W nào đó ngay sau khi đi qua V_x . Lập luận tương tự như trong trường hợp 1), $W \in \mathcal{W}$; kí hiệu $P' \subseteq P$ là phần đường đi của P từ đỉnh xuất phát v đến tập đỉnh nhánh W . Bằng thay các đường đi P_i, P_j, P bởi các đường đi P'_i, P'_j, P' , ta sẽ thu được một hệ đường đi link $\mathcal{P}' = (P'_1, \dots, P'_k)$ mới có tổng $\sum_{i=1}^k f(P'_i) < \sum_{i=1}^k f(P_i)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết về tính tối tiểu của $\mathcal{P}$.



Hình ảnh minh họa quá trình thay thế các đường đi P_i, P_j, P bởi các đường đi P'_i, P'_j, P' .

Như vậy, mọi tập đỉnh nhánh $V \in \mathcal{W}$ đều có giao với một đường đi link P_i nào đó trong $\mathcal{P}$ và đường đi link P_i này lại kết thúc trong một tập đỉnh nhánh $U \in \mathcal{U}$. □

Từ khẳng định (*), ta có thể định nghĩa phép tương ứng $W \in \mathcal{W} \mapsto U \in \mathcal{U}$ như sau: “Với mọi tập đỉnh nhánh $W \in \mathcal{W}$, tồn tại một đường đi link P đi qua W ; kí hiệu U là tập đỉnh nhánh kết thúc của đường đi link P trong $\mathcal{U}$ ”. Phép tương ứng $W \in \mathcal{W} \mapsto U \in \mathcal{U}$ này thật sự là một đơn ánh (điều này suy ra từ việc các đường đi link khác nhau sẽ phải kết thúc trong các tập đỉnh nhánh khác nhau). Như vậy, $|\mathcal{U}| \geq |\mathcal{W}|$, nên $|\mathcal{U}| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$.

Thực hiện đánh số lại các đỉnh $v_1, \dots, v_k$ sao cho $u := |\mathcal{U}|$ đường đi link đầu tiên của hệ $P_1, \dots, P_k$ kết thúc trong các tập đỉnh nhánh của $\mathcal{U}$. Do $2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k$ nên, với hai tập đỉnh V_x, V_y bất kì thuộc $\mathcal{U}$, tồn tại ít nhất $\frac{3}{2}k$ tập đỉnh nhánh V_z sao cho $xz, yz \in E(H)$. Do chỉ có đúng k tập đỉnh nhánh V của H nằm trong $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ nên có tối thiểu $\frac{k}{2}$ tập đỉnh nhánh V_z không nằm trong $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$.

Như vậy, với $2h$ tập đỉnh nhánh phân biệt bất kì $U_1, \dots, U_{2h}$ nằm trong $\mathcal{U}$ ($h \leq \frac{u}{2} \leq \frac{k}{2}$), tồn tại h tập đỉnh nhánh phân biệt V^i nằm trong $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$ ($i = 1, \dots, h$) sao cho V^i được nối với cả U_{2i-1} và U_{2i} trong G . Điều này nghĩa là, với mỗi chỉ số i , mọi đỉnh bất kì của U_{2i-1} đều có thể được nối với một đỉnh cho trước bất kì của tập U_{2i} bởi một đường đi nào đó đi qua V^i , và những đường đi này là đôi một phân biệt nhau với các chỉ số i khác nhau. Bằng cách nối các cặp đường đi tương ứng trong $\mathcal{P}$ theo phương pháp nêu ở trên, ta dễ dàng chứng minh được $\{v_1, \dots, v_u\}$ là một tập linked trong G . $\square$

Bổ đề 8.1.2) đặt ra một vấn đề quan trọng cần được giải quyết đó là: “Liệu có tồn tại một phần bù H đủ dày đặc để ta có thể áp dụng được Bổ đề 8.1.2)?”. Điều đáng ngạc nhiên là sự tồn tại của một phần bù H dày đặc như vậy hoàn toàn có thể được suy ra từ giả định $d(G) \geq cr^2$ trong Kết quả 8.1.1). Phép chứng minh chi tiết cho khẳng định này sẽ được trình bày trong Bổ đề 8.1.3) dưới đây:

Bổ đề 8.1.3.

Mọi đồ thị G với $\varepsilon(G) \geq k$ ($k \geq 6$) đều có chứa một phần bù H với $2\delta(H) \geq |H| + \frac{1}{6}k$.

Chứng minh bổ đề 8.1.3.

Giả sử G_0 là một ($\leq$) – phần bù tối tiểu của G với $\varepsilon(G_0) \geq k$.

Từ giả thiết về tính tối tiểu của G_0 , $\delta(G_0) > k$ và $\varepsilon(G_0) = k$ (ngược lại ta có thể xóa đi một đỉnh hoặc một cạnh nào đó của G_0 để nhận được một phần bù G'_0 mới sao cho $\varepsilon(G'_0) \geq k$), nên

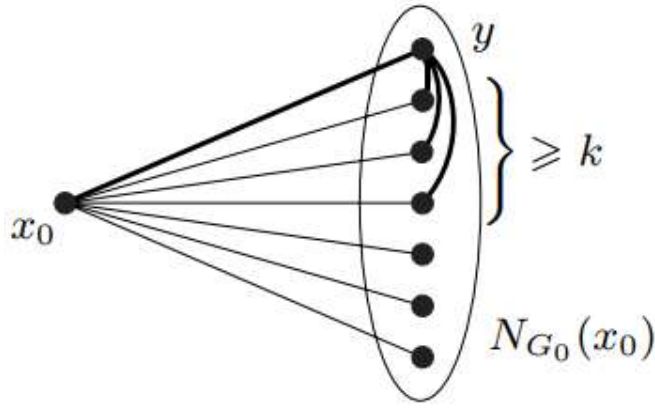
$$k + 1 \leq \delta(G_0) \leq d(G_0) = 2k.$$

Kí hiệu x_0 là một đỉnh nào đó có bậc nhỏ nhất nằm trong G_0 .

Trường hợp 1. k là số lẻ.

Kí hiệu $m := \frac{k+1}{2}$ và $G_1 := G_0[N_{G_0}(x_0) \cup \{x_0\}]$. Khi đó, $|G_1| = \delta(G_0) + 1 \leq 2k + 1 \leq 2(k + 1) = 4m$.

Từ giả thiết về tính tối tiểu của G_0 , nếu thực hiện phép co bất kì cạnh x_0y nào của G thì đồ thị G / x_0y nhận được cũng sẽ mất đi ít nhất $k + 1$ cạnh. Như vậy, các đỉnh x_0 và y phải có chung ít nhất k đỉnh láng giềng, nên $\delta(G_1) \geq k + 1 = 2m$.



Hình ảnh minh họa.

Trường hợp 2. k là số chẵn.

Kí hiệu $m := \frac{k}{2}$ và $G_1 := G_0[N_{G_0}(x_0)]$. Khi đó, $|G_1| = \delta(G_0) \leq 2k = 4m$ và $\delta(G_1) \geq k = 2m$.

Tóm lại, kết hợp các kết quả phân tích thu được trong cả hai trường hợp trên, tồn tại một số nguyên dương $m \geq \frac{k}{2}$ và một phần bù $G_1 \leq G$ sao cho

$$|G_1| \leq 4m \text{ và } \delta(G_1) \geq 2m, \quad (1)$$

nên

$$\varepsilon(G_1) \geq m \geq \frac{k}{2} \geq 3. \quad (2)$$

Nhận thấy rằng do $2\delta(G_1) \geq 4m \geq |G_1|$ nên G_1 là một ứng cử viên tiềm năng cho phần bù H cần tìm.

Để có thể tăng giá trị của $2\delta(G_1)$ lên một lượng $\frac{1}{6}k$ cho phù hợp với yêu cầu của phần bù H cần tìm, chúng ta sẽ áp dụng lại quá trình thu hẹp nêu ở trên cho đồ thị con G_1 và đặt ra thêm một số điều kiện khắt khe hơn so với trước: chúng ta sẽ thu hẹp dần từng cạnh một của G_1 sao cho số cạnh bị mất đi không vượt quá $\frac{7}{6}m$. Nói cách khác, chúng ta chấp nhận mất đi nhiều cạnh hơn chỉ để duy trì ngưỡng giới hạn này lại ở mức $\varepsilon \geq m$ (nhắc lại rằng, khi thu hẹp từ G về G_0 , ngưỡng giới hạn này đã nằm ở mức $\varepsilon = k$). Nếu kí hiệu H_0 là đồ thị không rỗng thu được sau khi thực hiện quá trình thu hẹp cho G_1 thì $\varepsilon(H_0) \geq \frac{7}{6}m$, ngưỡng giới hạn này cao hơn đáng kể so với G_1 . Sau cùng, tương tự như khi nhận được G_1 từ G_0 , lượng chênh lệch $\frac{1}{6}m$ này đủ để ta nhận được một phần bù H_1 từ H_0 trong đó giá trị 2δ tăng lên một lượng $\frac{1}{6}k$ như mong muốn.

Vấn đề đặt ra cho ý tưởng chứng minh trên đó là: “Liệu đồ thị H_0 nhận được sau quá trình thu hẹp này có thực sự là một đồ thị không rỗng hay không?”. Thoạt nhìn thì có vẻ như nhận định này thật thiếu tính thuyết phục, lý do là ngay cả khi chúng ta chấp nhận mất đi $\frac{7}{6}m$ cạnh và một đỉnh sau $|G_1|$ lần thu hẹp mà lại không thể làm mất đi quá $m|G_1|$ cạnh của G_1 : các đồ thị có ít hơn m đỉnh ở cuối quá trình này đơn giản là quá nhỏ để có thể loại bỏ đi $\frac{7}{6}m$ cạnh theo (1)!

Về mặt hình thức, chúng ta sẽ hạn chế các đồ thị H nhận được trong suốt quá trình này thu hẹp này không phải bằng việc đưa ra một giới hạn trên cho số cạnh bị mất đi ở mỗi bước như trong ý tưởng ban đầu mà thay vào đó là một giới hạn dưới cho số cạnh $\|H\|$ theo số đỉnh $|H|$. Giới hạn dưới này tăng tuyến

tính từ một giá trị lớn hơn $\binom{m}{2}$ cho $|H| = m$ đến một giá trị nhỏ hơn $4m^2$ cho $|H| = 4m$. Từ (1) và (2), đồ thị $H = G_1$ sẽ thỏa mãn điều kiện hạn chế này. Nhưng rõ ràng ràng buộc này không thể được thỏa mãn bởi bất kì đồ thị H nào với $|H| = m$, nên quá trình thu hẹp này phải dừng lại sớm hơn ở một đồ thị H nào đó với $|H| > m$.

Kí hiệu:

$$f(n) := \frac{1}{6}m(n - m - 5);$$

$$\mathcal{H} := \{H \preccurlyeq G_1 : \|H\| \geq m|H| + f(|H|) - \binom{m}{2}\}.$$

Từ (1), $f(|G_1|) \leq f(4m) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{6}m < \binom{m}{2}$. Từ (2), $\frac{\|G_1\|}{|G_1|} \geq m$.

Như vậy, $\|G_1\| \geq m|G_1| + f(|G_1|) - \binom{m}{2}$, nên $G_1 \in \mathcal{H}$.

Nhận thấy rằng, với mọi $H \in \mathcal{H}$, bất kỳ đồ thị nào thu được từ H bằng một trong ba thao tác sau cũng sẽ thuộc $\mathcal{H}$:

(i) Xóa một cạnh $e \in E(H)$ bất kì nếu $\|H\| \geq m|H| + f(|H|) - \binom{m}{2} + 1$;

(ii) Xóa một đỉnh $v \in V(H)$ bất kì nếu bậc $d(v)$ của nó không vượt quá $\frac{7}{6}m$;

(iii) Thu hẹp một cạnh $xy \in H$ bất kì nếu hai đỉnh x, y có chung tối đa không vượt quá $\left(\frac{7}{6}m - 1\right)$ đỉnh láng giềng trong H .

Nhận thấy rằng nếu áp dụng liên tiếp các thao tác nêu trên cho G_1 (nếu có thể được) và kí hiệu $H_0 \in \mathcal{H}$ là đồ thị nhận được sau cùng thì $H_0 \neq \emptyset$. Thật vậy, $\|K_m\| = m|K_m| - m - \binom{m}{2}$ và $f(m) = -\frac{5}{6}m > -m$, nên $m|K_m| + f(|K_m|) - \binom{m}{2} + 1 > \|K_m\|$; nghĩa là $K_m \notin \mathcal{H}$. Như vậy, $\mathcal{H}$ không chứa đồ thị nào có m đỉnh, nên $|H_0| > m$. Hiển nhiên, $H_0 \neq \emptyset$.

Kí hiệu x_1 là một đỉnh nào đó có bậc nhỏ nhất nằm trong H_0 và $H_1 := H_0[N_{H_0}(x_1) \cup \{x_1\}]$.

Ta sẽ chứng minh rằng đồ thị H_1 chính là phần bù cần tìm.

Nhận thấy rằng:
$$\delta(H_1) > \frac{7}{6}m. \quad (3)$$

Thật vậy, H_0 là phần tử tối tiểu đối với (ii) và (iii), nên $d_{H_0}(x_1) > \frac{7}{6}m$ (nên $d_{H_1}(x_1) > \frac{7}{6}m$); mọi đỉnh $y \neq x_1$ của H_1 đều có nhiều hơn $\left(\frac{7}{6}m - 1\right)$ đỉnh láng giềng chung với x_1 trong H_1 , nên $d_{H_1}(y) > \frac{7}{6}m$. Để có thể chuyển đổi đánh giá (3) về dạng $2\delta(H_1) \geq |H_1| + \alpha m$ với α là một số thực nào đó, ta cần biểu diễn giới hạn trên của $|H_1|$ theo m .

Do H_0 nằm trong $\mathcal{H}$ nhưng không phải là phần tử tối tiểu đối với (i) nên

$$\begin{aligned} \|H_0\| &< m|H_0| + \left(\frac{1}{6}m|H_0| - \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{6}m\right) - \binom{m}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2 - \frac{1}{3}m + 1 \\ &\leq_{(2)} \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ cách chọn x_1 và cách định nghĩa H_1 ,

$$\begin{aligned}
|H_1| - 1 &= \delta(H_0) \\
&\leq 2\varepsilon(H_0) \\
&<_{(4)} \frac{7}{3}m - \frac{4}{3}m^2/|H_0| \\
&\leq_{(1)} \frac{7}{3}m - \frac{1}{3}m \\
&= 2m, \\
\Rightarrow |H_1| &\leq 2m.
\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\begin{aligned}
2\delta(H_1) &>_{(3)} 2m + \frac{1}{3}m \\
&\geq |H_1| + \frac{1}{3}m \\
&\geq_{(2)} |H_1| + \frac{1}{6}k.
\end{aligned}$$

□

Chứng minh kết quả 8.1.1.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của Kết quả 8.1.1) cho $c := 1116$.

Giả sử cho trước một đồ thị G với $d(G) \geq 1116r^2$.

Từ Kết quả 1.4.2), G có chứa một đồ thị con G_0 sao cho $\kappa(G_0) \geq 279r^2 \geq 276r^2 + 3r$.

Kí hiệu:

$X := \{x_1, \dots, x_{3r}\}$ là một tập gồm $3r$ phần tử nào đó trong G_0 ;

Y_i là một tập gồm $5r$ đỉnh láng giềng của x_i ($i = 1, \dots, r$) trong G_1 sao cho các tập Y_i này đôi một phân biệt nhau (điều này hoàn toàn khả thi do $\delta(G_0) \geq \kappa(G_0) \geq 15r^2 + |X|$);

$$G_1 := G_0 - X.$$

Do $\delta(G_1) \geq \kappa(G_1) \geq \kappa(G_0) - |X| \geq 276r^2$ nên $\varepsilon(G_1) \geq 138r^2$. Từ Bổ đề 8.1.3), G_1 sẽ chứa một phần bù H với $2\delta(H) \geq |H| + 23r^2$. Từ Bổ đề 8.1.2), G_1 sẽ là một đồ thị $(15r^2, 7r^2) - \text{link}$.

Kí hiệu:

$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{3r} Y_i$ là một tập $7r^2 - \text{link}$ trong G_1 ;

$$Z_i := Z \cap Y_i \quad (i = 1, \dots, r).$$

Do Z là một tập $7r^2 - \text{link}$ trong G_1 nên nếu ta tìm được r chỉ số i sao cho $|Z_i| \geq r - 1$ thì phép chứng minh của Kết quả 8.1.1) sẽ được hoàn tất: các đỉnh x_i đóng vai trò như các đỉnh nhánh của một đồ thị TK_r trong G . Trường hợp không tồn tại r chỉ số i nào như trên thì đánh giá $|Z_i| \leq r - 2$ chỉ có thể đúng với tối đa $r - 1$ chỉ số i , nên $|Z| = \sum_{i=1}^{3r} |Z_i| \leq (r - 1)5r + (2r + 1)(r - 2) < 7r^2 = |Z|$, vô lí. □

Mặc dù Kết quả 8.1.1) đưa ra một ước tính khá tốt về độ lớn của bậc trung bình $d(G)$. Tuy nhiên việc giá trị chính xác của $d(G)$ sao cho đồ thị G có chứa một đồ thị con có dạng TK_r là rất khó ngay cả cho

trong trường hợp r có giá trị nhỏ. Trong mục 8.3), chúng ta sẽ dành một phần của bài viết để giới thiệu một số kết quả và giả thuyết toán học lí thú xoay quanh trường hợp $r = 5$.

Kết quả sau đây của nhà toán học Mader chỉ ra rằng việc girth $g(G)$ của đồ thị G có giá trị lớn sẽ ảnh hưởng đến sự tồn tại của phần bù topo K_r . Phép chứng minh chi tiết cho kết quả này sẽ không được trình bày trong bài viết mà thay vào đó ta sẽ trình bày phép chứng minh cho dạng tương tự của nó đối với các phần bù bởi vì điều này đơn giản hơn nhiều. Phép chứng minh chi tiết có thể thu được bằng một số thay đổi và điều chỉnh phù hợp.

Kết quả 8.1.4. (Mader)

Với mọi đồ thị H có bậc lớn nhất $\Delta(H) \geq 3$, tồn tại một số nguyên dương k sao cho nếu G là một đồ thị có bậc nhỏ nhất $\delta(G) \geq \Delta(H)$ và $g(G) \geq k$ thì G sẽ chứa H như một phần bù topo.

Như đã thảo luận trong “Mục 5.1. Phép tô màu đỉnh” và “Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc”, bậc trung bình $d(G)$ của G không phải là một đại lượng không đổi. Tuy nhiên, nếu bậc trung bình $d(G)$ nhận giá trị đủ lớn sẽ buộc G phải chứa một đồ thị H cho trước nào đó như một đồ thị con của nó – miễn là H có chứa ít nhất một chu trình. Mặt khác, bất kì đồ thị G nào cũng chứa tất cả các cây T với số đỉnh không vượt quá $\varepsilon(G) + 2$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.2.1) và Kết quả 1.5.4)). Như vậy, việc bậc trung bình $d(G)$ nhận giá trị lớn sẽ đảm bảo sự xuất hiện của bất kì cây T cho trước nào đó như một đồ thị con của nó. Tuy nhiên, nếu chúng ta muốn cây T là một đồ thị con khung của G thì G phải thỏa mãn thêm những điều kiện nào?.

Nhận thấy rằng việc chúng ta giả định bậc trung bình $d(G)$ nhận giá trị lớn là chưa đủ để đảm bảo G sẽ chứa T như một đồ thị con khung. Nhưng nếu chúng ta giả định sắc số $\chi(G)$ của G nhận giá trị đủ lớn thay cho giả định bậc trung bình $d(G)$ nhận giá trị lớn dường như sẽ tạo ra một sự khác biệt đáng kể ở đây: theo một giả thuyết của Gyárfás, mọi đồ thị G có sắc số $\chi(G)$ nhận giá trị đủ lớn sẽ phải chứa một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc một cây T cho trước nào đó. (Về mặt hình thức giả thuyết Gyárfás có thể được phát biểu lại dưới dạng: “Với mọi số nguyên dương r và mọi cây T , tồn tại một số nguyên dương k sao cho nếu G là một đồ thị có $\chi(G) \geq k$ và $\omega(G) < r$ thì G sẽ chứa T như một đồ thị con khung”)

Mặc dù cho đến nay chúng ta vẫn chưa thể tìm được một phép chứng minh hoàn chỉnh cho giả thuyết của Gyárfás nhưng dạng topo yếu của giả thuyết này thì đã được chứng minh là đúng bởi nhà toán học Scott:

Kết quả 8.1.5. (Scott)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$ và mọi cây T , tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho nếu G là một đồ thị có $\chi(G) \geq k$ và $\omega(G) < r$ thì G

8.2. Điều kiện cần để G chứa K_r như một phần bù

Từ Kết quả 8.1.1), nếu bậc trung bình $d(G)$ của G có giá trị vào khoảng cr^2 thì G sẽ chứa K_r như một phần bù topo. Nếu chúng ta thấy rằng giá trị bậc trung bình $d(G)$ cần thiết để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù topo là khá nhỏ thì sẽ thật bất ngờ nếu chúng ta biết rằng giá trị bậc trung bình $d(G)$ cần thiết để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù thậm chí còn nhỏ hơn như vậy rất nhiều: trong một bài báo xuất bản vào năm 1968, nhà toán học Mader đã chứng minh được rằng “Mọi đồ thị G có bậc trung bình $d(G) \geq cr \log r$ thì G sẽ chứa K_r như một phần bù”. Tương tự như Kết quả 7.1.1) và Kết quả 8.1.1),

kết quả dưới đây sẽ giúp ta xác định được giá trị bậc trung bình $d(G)$ cần thiết để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù như một hàm của r :

Kết quả 8.2.1. (Kostochka - Thomason)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số thực $c \in \mathbb{R}$ sao cho nếu G là một đồ thị có bậc trung bình $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$ thì G sẽ chứa K_r như một phần bù.

Kết quả trên chỉ ra rằng giá trị bậc trung bình $d(G)$ cần thiết để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù chỉ vào khoảng $cr\sqrt{\log r}$ – phép chứng minh cho kết quả này có thể nhận được bằng cách sử dụng các đồ thị ngẫu nhiên sẽ được giới thiệu trong “Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên”. Hơn nữa, giá trị $cr\sqrt{\log r}$ này cũng chính là mức giá trị bậc trung bình $d(G)$ nhỏ nhất để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù – phép chứng minh cho nhận định này có thể được thực hiện bằng phương pháp tương tự như trong “Mục 8.1. Điều kiện cần để G chứa K_r như một phần bù topo”.

Thay vì trình bày phép chứng minh của Kết quả 8.2.1), chúng ta sẽ dành phần còn lại của bài viết để giới thiệu một điều kiện cần khác để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù:

Kết quả 8.2.2. (Thomassen)

Với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nếu G là một đồ thị có $g(G) \geq 4k - 3$ và $\delta(G) \geq 3$ thì G sẽ chứa một phần bù H với $\delta(H) \geq k$.

Chứng minh kết quả 8.2.2.

Do $\delta(G) \geq 3$ nên mọi thành phần liên thông của G đều có chứa ít nhất một chu trình. Do đó, khẳng định của bài toán là hiển nhiên đối với $k \leq 2$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $k \geq 3$.

Giả sử V là tập đỉnh của một thành phần liên thông nào đó của G , $\{V_1, \dots, V_m\}$ là một phân hoạch tối đại của V thành các tập liên thông V_i sao cho mỗi tập đỉnh V_i đều chứa tối thiểu $2k - 2$ đỉnh (do $|V| \geq g(G) > 2k - 2$ và V liên thông trong G nên luôn tồn tại ít nhất một phân hoạch $\{V_1, \dots, V_m\}$ như vậy).

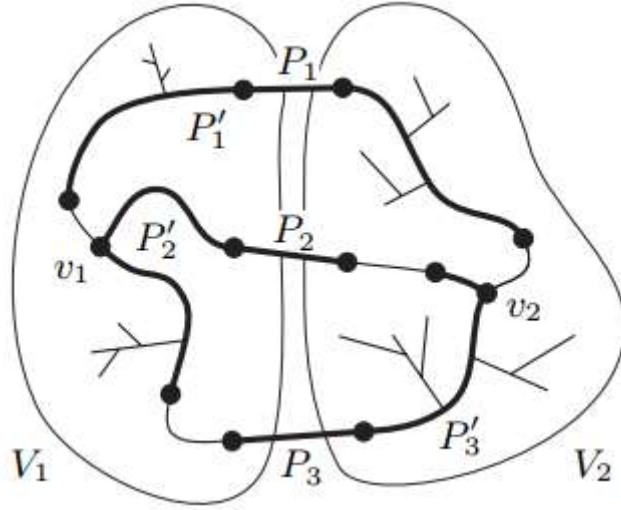
Đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng mỗi đồ thị $G[V_i]$ đều là một cây. Kí hiệu T_i là một cây khung nào đó của $G[V_i]$. Nếu $G[V_i]$ có chứa một cạnh $e \notin T_i$ thì $T_i + e$ sẽ phải chứa một chu trình C nào đó. Theo giả thiết của bài toán, chiều dài tối thiểu của chu trình C sẽ là $4k - 3$. Do đó, cạnh đối diện với cạnh e trên chu trình C sẽ tách đường đi $C - e$ thành hai thành phần liên thông sao cho mỗi thành phần đều chứa tối thiểu $2k - 2$ đỉnh. Nếu kết hợp hai thành phần liên thông này với các tập V_j ($j \neq i$) thì ta sẽ thu được một phân hoạch của V thành $m + 1$ tập liên thông, mâu thuẫn với giả thiết về tính tối đại của m . Như vậy, mỗi đồ thị $G[V_i]$ đều là một cây, nghĩa là $G[V_i] = T_i$.

Do $\delta(G) \geq 3$ nên $\sum_{v \in V_i} d_G(v) \geq 3|V_i|$. Như vậy, với mỗi chỉ số i , G sẽ phải chứa tối thiểu $|V_i| + 2 \geq 2k$ cạnh nối V_i với $V \setminus V_i$ (điều này suy ra từ việc các cạnh của cây T_i xuất hiện đúng $2|V_i| - 2$ lần trong tổng $\sum_{v \in V_i} d_G(v)$ này).

Nhận thấy rằng nếu chúng ta có thể chứng minh được rằng mỗi tập V_i chỉ có tối đa hai cạnh nối với một tập V_j khác thì mỗi tập V_i sẽ được nối với tối thiểu k tập V_j khác, nên các tập V_i này là các tập nhánh của một $MH \subseteq G$ với $\delta(H) \geq k$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử G có chứa ba $V_1 - V_2$ cạnh nào đó.

Khi đó, tồn tại một đỉnh $v_1 \in V_1$ và một đỉnh $v_2 \in V_2$ sao cho đồ thị $G[V_1 \cup V_2]$ có chứa ba $v_1 - v_2$ đường đi độc lập P_1, P_2, P_3 .



Hình ảnh minh họa.

Nhận thấy rằng trong số ba đường đi P_1, P_2, P_3 này chỉ có thể có tối đa một đường đi có chiều dài nhỏ hơn $\frac{1}{2}g(G)$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử P_1 là $v_1 - v_2$ đường đi có chiều dài nhỏ nhất trong số ba đường đi P_1, P_2, P_3 này. Khi đó, $|P_1| \geq \left\lceil \frac{1}{2}g(G) \right\rceil \geq 2k - 1$; kí hiệu $P'_1 := P_1^0$, $|P'_1| \geq 2k - 2$. Do $P_2 \cup P_3$ là một chu trình có chiều dài $\geq g(G) \geq 4k - 3$ nên chúng ta có thể tìm được các đường đi $P'_2, P'_3 \subseteq P_2 \cup P_3$ sao cho mỗi đường đi này đều chứa tối thiểu $2k - 2$ đỉnh. Hơn nữa, $G[V_1 \cup V_2]$ liên thông, nên tồn tại một phân hoạch của $V_1 \cup V_2$ thành ba tập liên thông V'_1, V'_2, V'_3 sao cho $V(P'_i) \subseteq V'_i (i = \overline{1, 3})$. Bằng cách thay thế hai tập V_1, V_2 bởi ba tập V'_1, V'_2, V'_3 , ta sẽ thu được một phân hoạch của V thành $m + 1$ tập liên thông, mâu thuẫn với giả thiết về tính tối đại của m . $\square$

Bằng cách kết hợp Kết quả 8.2.1) và 8.2.2), ta nhận được kết quả sau:

Kết quả 8.2.3.

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số thực $c \in \mathbb{R}$ sao cho nếu G là một đồ thị có $g(G) \geq cr\sqrt{\log r}$ và $\delta(G) \geq 3$ thì G sẽ chứa K_r như một phần bù.

Chứng minh kết quả 8.2.3.

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên cho $c := 4c'$ trong đó c' là hằng số nêu trong Kết quả 8.2.1). Giả sử G là một đồ thị có $g(G) \geq 4c'r\sqrt{\log r}$. Từ Kết quả 8.2.2), G sẽ chứa một phần bù H với $\delta(H) \geq c'r\sqrt{\log r}$. Từ Kết quả 8.2.1), H sẽ chứa K_r như một phần bù, nên G cũng sẽ chứa K_r như một phần bù. $\square$

8.3. Giả thuyết Hadwiger

Như chúng ta đã giới thiệu trong hai mục trước, giá trị $cr\sqrt{\log r}$ của bậc trung bình $d(G)$ sẽ đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù; giá trị cr^2 của bậc trung bình $d(G)$ sẽ đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phần bù topo. Nếu chúng ta thay thế bậc trung bình $d(G)$ bởi sắc số $\chi(G)$ thì hai khẳng định nêu trên vẫn đúng

với các hằng số c giống như cũ: mọi đồ thị G có sắc số $\chi(G) \geq k$ đều có chứa một đồ thị con H có bậc trung bình $d(H) \geq k - 1$ (Kết quả 5.1.3).

Mặc dù cả hai giá trị $cr\sqrt{\log r}$ và cr^2 nêu ở trên đều là đánh giá tốt nhất cho bậc trung bình $d(G)$ nhưng chúng chưa phải là đánh giá tốt nhất cho sắc số $\chi(G)$. Câu hỏi đặt ra ở đây đó là: “Giá trị nhỏ nhất của sắc số $\chi(G)$ là bao nhiêu để đảm bảo G sẽ chứa K_r như một phân bù (hoặc phân bù topo)?”. Hiển nhiên, nếu chúng ta có thể trả lời được câu hỏi này thì nó cũng sẽ giúp chúng ta khám phá ra bản chất cơ bản thật ẩn giấu đằng sau sắc số χ .

Một câu trả lời hoàn chỉnh cho câu hỏi trên cho đến nay vẫn đang còn là một vấn đề để mở. Tuy nhiên, với trường hợp phân bù, giả thuyết Hadwiger dưới đây đưa ra cho chúng ta một gợi ý quan trọng cho câu hỏi này (giả thuyết Hadwiger được nhiều nhà toán học đánh giá là một trong những vấn đề để mở sâu sắc nhất trong lý thuyết đồ thị hiện đại):

Giả thuyết Hadwiger.

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, nếu G là một đồ thị có $\chi(G) \geq r$ thì $G \succcurlyeq K_r$.

Nhận thấy rằng giả thuyết Hadwiger là hiển nhiên với $r \leq 2$; đơn giản với $r = 3$ và $r = 4$; tương đương với định lý bốn màu với $r = 5$ và $r = 6$. Với $r \geq 7$, giả thuyết Hadwiger vẫn đang còn là một vấn đề mở. Nếu chúng ta diễn đạt lại giả thuyết Hadwiger dưới dạng $G \succcurlyeq K_{\chi(G)}$ thì, bằng cách sử dụng các đồ thị ngẫu nhiên, chúng ta có thể chứng minh được rằng giả thuyết Hadwiger là đúng với hầu hết các đồ thị. Hơn nữa, nếu giả thuyết Hadwiger đúng với $r + 1$ thì nó cũng đúng với r .

Nếu chúng ta cố định giá trị r thì giả thuyết Hadwiger tương đương với khẳng định toán học: “Mọi đồ thị G không chứa K_r như một phân bù đều có ít nhất một phép $(r - 1)$ – tô màu”. Trong dạng phát biểu này, giả thuyết Hadwiger đặt ra cho chúng ta một vấn đề quan trọng đó là: “Nếu một đồ thị G không chứa K_r như một phân bù sẽ trông như thế nào?”. (do bất kì một mô tả cấu trúc đủ chi tiết nào của các đồ thị dạng này cũng cho phép chúng ta đưa ra quyết định xem một đồ thị G có thể được tô bởi $(r - 1)$ màu hay không”)

Nhận thấy rằng, với $r = 3$, các đồ thị G không chứa K_r như một phân bù chính là các rừng. Với $r = 4$, kết quả sau sẽ chỉ ra một mô tả cấu trúc đủ chi tiết cho các đồ thị G không chứa K_r như một phân bù:

Kết quả 8.3.1.

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị G với $|G| \geq 3$ là một đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phân bù là G có thể được xây dựng đệ quy từ các đồ thị triangle bằng cách dán dọc theo K_2 .

Chứng minh kết quả 8.3.1.

Nhắc lại rằng do mọi MK_4 đều có chứa một TK_4 (điều này suy ra từ việc $\Delta(K_4) = 3$ và Kết quả 1.7.2), nên lớp các đồ thị không chứa K_4 như một phân bù trùng với lớp các đồ thị không chứa K_4 như một phân bù topo. Việc chứng minh mọi đồ thị G được xây dựng đệ quy từ các đồ thị triangle bằng cách dán dọc theo K_2 đều là đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phân bù là khá đơn giản; nên để chứng minh tính đúng đắn của giả thuyết Hadwiger cho $r = 4$, chúng ta chỉ cần chứng minh chiều thuận của khẳng định trên. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của nhận định này bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$.

Giả sử G là một đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phần bù. Nhận thấy rằng nếu $|G| = 3$ thì hiển nhiên G sẽ là một đồ thị triangle. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $|G| \geq 4$. Hiển nhiên, G không thể là một đồ thị đầy đủ; kí hiệu $S \subseteq V(G)$ là một tập tách nào đó của G sao cho $|S| = \kappa(G)$, C_1, C_2 là hai thành phần liên thông phân biệt nào đó của $G - S$. Do S là một tập tách tối tiểu của G nên mọi đỉnh nằm trong S đều có một đỉnh láng giềng trong C_1 và một đỉnh láng giềng trong C_2 . Nếu $|S| \geq 3$ thì G sẽ chứa một hệ gồm ba đường đi độc lập P_1, P_2, P_3 cùng nối giữa một đỉnh $v_1 \in C_1$ và một đỉnh $v_2 \in C_2$. Do $\kappa(G) = |S| \geq 3$ nên $G - \{v_1, v_2\}$ là một đồ thị liên thông và G có chứa một đường đi P nằm giữa hai đường đi phân biệt P_i nào đó. Như vậy, $P \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 = TK_4$, mâu thuẫn với giả thiết G không chứa K_4 như một phần bù. $\square$

Một trong những hệ quả thú vị nhất của Kết quả 8.3.1) đó là “Mọi đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phần bù đều có cùng số cạnh”:

Kết quả 8.3.2.

Mọi đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phần bù đều có $2|G| - 3$ cạnh.

Chứng minh kết quả 8.3.2.

Tính đúng đắn của khẳng định trên có thể được chứng minh bằng quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$. $\square$

Kết quả 8.3.3.

Giả thuyết Hadwiger đúng cho $r = 4$.

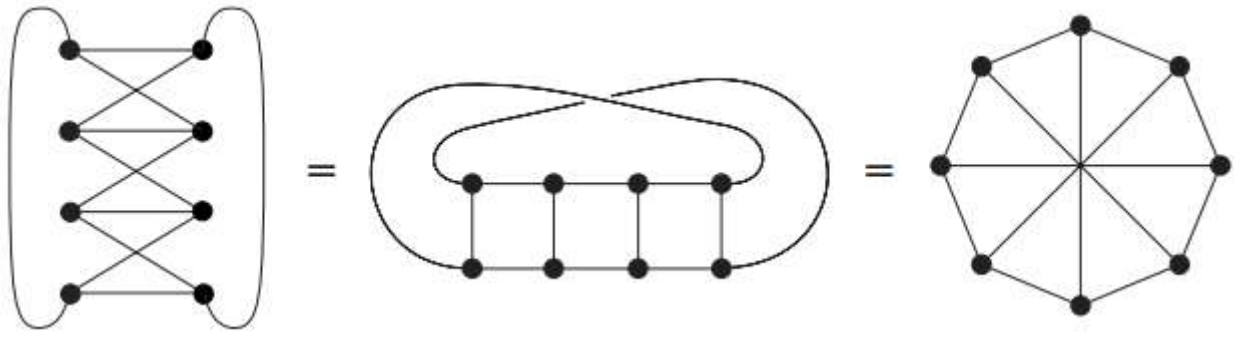
Chứng minh kết quả 8.3.3.

Nếu đồ thị G được tạo ra từ hai đồ thị G_1 và G_2 bằng cách dán dọc chúng theo một đồ thị đầy đủ nào đó thì $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ (xem lại phép chứng minh của Kết quả 5.5.2). Như vậy, mọi đồ thị tối đại cạnh không chứa K_4 như một phần bù đều là 3 – colour (điều này suy ra từ việc chúng ta áp dụng phương pháp quy nạp toán học dựa trên Kết quả 8.3.1), nên mọi đồ thị không chứa K_4 như một phần bù cũng đều là 3 – colour. $\square$

Bằng cách sử dụng định lý bốn màu, tính đúng đắn của giả thuyết Hadwiger cho $r = 5$ có thể được suy ra từ mô tả dưới đây về cấu trúc của các đồ thị không chứa K_5 như một phần bù. Điều này tương tự như khi chúng ta chứng minh tính đúng đắn của giả thuyết Hadwiger cho $r = 4$. Phép chứng minh của Kết quả 8.3.4) hầu như tương tự như phép chứng minh của Kết quả 8.3.1) nhưng sẽ dài hơn đáng kể:

Kết quả 8.3.4. (Wagner)

Nếu G là một đồ thị tối đại cạnh không chứa K_5 như một phần bù với $|G| \geq 4$ thì G có thể được xây dựng đệ quy từ các đồ thị triangle phẳng và các bản sao của đồ thị Wagner W bằng cách dán dọc theo các triangle và K_2 .



Hình ảnh minh họa ba bản sao của đồ thị Wagner W .

Từ Kết quả 4.2.8), chúng ta có thể dễ dàng tính được số cạnh tối đa có thể có của các đồ thị được xây dựng như trong mô tả của Kết quả 8.3.4). Điều này suy ra từ việc các đồ thị tối đại cạnh không chứa K_5 như một phần bù không có nhiều cạnh hơn các đồ thị tối đại cạnh không chứa $\{MK_5, MK_{3,3}\}$:

Kết quả 8.3.5.

Mọi đồ thị G với n đỉnh và không chứa K_5 như một phần bù chỉ có thể có tối đa $3n - 6$ cạnh.

Kết quả 8.3.4) và định lý bốn màu sẽ chỉ ra tính đúng đắn của giả thuyết Hadwiger cho $r = 5$:

Kết quả 8.3.6.

Giả thuyết Hadwiger đúng cho $r = 5$.

Một lần nữa việc chứng minh tính đúng đắn của giả thuyết Hadwiger cho $r = 6$ sẽ khó hơn khá nhiều so với $r = 5$ và nó cũng dựa trên định lý bốn màu. Mấu chốt của phép chứng minh nằm ở việc chỉ ra rằng nếu giả thuyết Hadwiger là sai thì mọi đồ thị không thỏa mãn giả thuyết Hadwiger cho $r = 6$ đều có thể được xây dựng từ một đồ thị phẳng bằng cách bổ sung thêm một đỉnh mới. Như vậy, bản thân đồ thị này lại thỏa mãn giả thuyết Hadwiger cho $r = 6$ (điều này suy ra từ định lý bốn màu), mâu thuẫn !

Kết quả 8.3.7. (Robertson – Seymour – Thomas)

Giả thuyết Hadwiger đúng cho $r = 6$.

Từ Kết quả 8.3.5), mọi đồ thị với n đỉnh và có nhiều hơn $3n - 6$ cạnh đều chứa một MK_5 . Trên thực tế, mọi đồ thị với n đỉnh và có nhiều hơn $3n - 6$ cạnh đều chứa một TK_5 . Kết quả này từng là một trong những giả thuyết quan trọng nhất của lý thuyết đồ thị hiện đại trong gần hơn 30 năm:

Kết quả 8.3.8. (Mader)

Mọi đồ thị G với n đỉnh và có nhiều hơn $3n - 6$ cạnh đều chứa K_5 như một phần bù topo.

Thật không may mắn là cho đến nay chúng ta vẫn chưa tìm được một mô tả tổng quát nào về cấu trúc của các đồ thị không chứa TK_5 tương tự như Kết quả 8.3.1) và Kết quả 8.3.4). Tuy nhiên, nhà toán học Mader đã tìm ra được mô tả tổng quát cho cấu trúc của các đồ thị tối đại cạnh không chứa TK_5 như sau:

Kết quả 8.3.9. (Mader)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị G là tối đại cạnh không chứa TK_5 là G có thể được xây dựng đệ quy từ các đồ thị phẳng tối đại bằng cách dán dọc theo các triangle.