

Chủ đề 09. Dạng đồ thị của định lý Ramsey

Trong chương này, chúng ta sẽ dành quỹ thời gian để khảo sát một loại cấu trúc con cơ bản thường được chứa trong các đồ thị G đủ lớn: “Loại cấu trúc con H nào bắt buộc phải có trong mọi đồ thị G có kích thước đủ lớn?”. Về mặt hình thức, vấn đề này chính là bài toán ngược của bài toán: “Cho trước một đồ thị H và số nguyên dương $n \geq |H|$. Một đồ thị G với n đỉnh sẽ cần có bao nhiêu cạnh để có thể chứa H như một đồ thị con bất kể cách phân bố của các cạnh này?” đã được khảo sát trong hai chương trước đó.

Bổ đề Szemerédi trong “Chủ đề 07. Cấu trúc con của đồ thị dày đặc” cung cấp một lời giải sơ bộ cho loạt vấn đề này: “Mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa những đồ thị con H có cấu trúc gần giống với các đồ thị đa phân”. Nếu chúng ta đang tìm kiếm những đồ thị con H có cấu trúc xác định hơn thì một câu trả lời như trên là hoàn toàn chưa đủ đối với chúng ta.

Mặc dù có nhiều nét tương đồng với các bài toán cực trị đồ thị nhưng vấn đề trên lại dẫn chúng ta đến một loạt các kết quả toán học mang màu sắc hoàn toàn riêng biệt. Thật vậy, các kết quả và phép chứng minh trong “Chủ đề 09. Dạng đồ thị của định lý Ramsey” này có nhiều nét tương đồng với các kết quả trong đại số và hình học hơn so với hầu hết các lĩnh vực thuộc về lý thuyết đồ thị. Như vậy, việc nghiên cứu các phương pháp cơ bản để giải quyết vấn đề trên có thể được coi như một lĩnh vực hoàn toàn riêng biệt của toán tổ hợp: lý thuyết Ramsey.

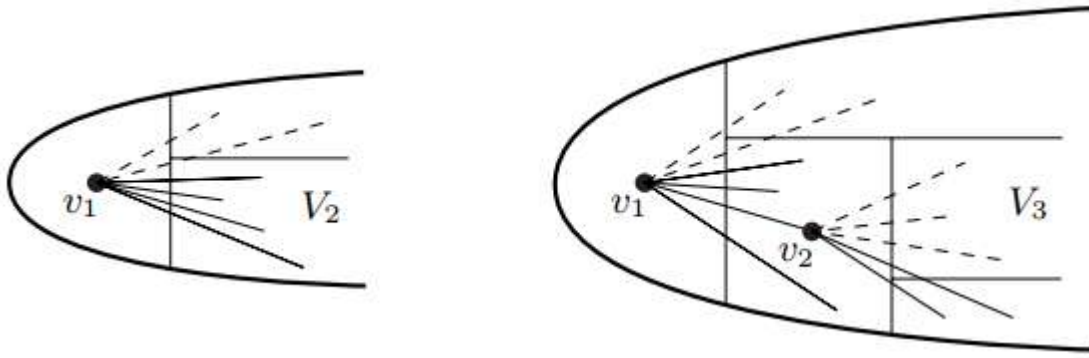
Để phù hợp với chủ đề của bài viết, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào các kết quả được biểu thị một cách tự nhiên dưới dạng đồ thị. Ngay cả khi nhìn nhận từ quan điểm của lý thuyết Ramsey tổng quát, việc chúng ta chỉ tập trung vào các kết quả biểu thị dưới dạng đồ thị cũng sẽ không làm giảm đi tính tổng quát của vấn đề: đồ thị là sự lựa chọn tự nhiên để biểu diễn các kết quả của lý thuyết Ramsey và “Chủ đề 09. Dạng đồ thị của định lý Ramsey” đưa ra đủ loại ý tưởng và phương pháp để truyền đạt những đặc điểm nổi bật nhất của lý thuyết Ramsey.

9.1. Dạng nguyên mẫu của định lý Ramsey

Dạng nguyên mẫu của định lý Ramsey phát biểu rằng: “Mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$ ”. Thoạt nhìn, khẳng định này dường như là một điều vô lý: bởi vì mọi đồ thị G với n đỉnh sẽ cần chứa khoảng $\frac{r-2}{r-1} \binom{n}{2}$ cạnh để đảm bảo G sẽ chứa một đồ thị con có dạng K_r (Kết quả 7.1.3) trong khi cả G và $\bar{G}$ không thể cùng chứa nhiều hơn $\frac{1}{2} \binom{n}{2}$ cạnh. Như vậy, việc ép quá nhiều cạnh vào đồ thị G mà không tạo ra được đồ thị K_r sẽ buộc G phải chứa một đồ thị con có dạng $\overline{K_r}$.

Câu hỏi đầu tiên đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể chứng minh định lý Ramsey?”.

Ý tưởng chính cho phép chứng minh của định lý Ramsey nằm ở việc chúng ta sẽ xây dựng đệ quy một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong G bắt đầu từ một đỉnh $v_1 \in V_1 := V(G)$ tùy ý như sau: Nếu $|G|$ đủ lớn thì sẽ tồn tại một tập đỉnh $V_2 \subseteq V_1 \setminus \{v_1\}$ đủ lớn mà tất cả các đỉnh đều liên thuộc với v_1 hoặc tất cả các đỉnh đều không liên thuộc với v_1 . Khi đó, v_1 có thể được xem như đỉnh đầu tiên của một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ với tất cả các đỉnh đều nằm trong V_2 . Kí hiệu $v_2 \in V_2$ là một đỉnh khác cũng nằm trên đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ này. Nếu $|V_2|$ đủ lớn thì sẽ tồn tại một tập đỉnh $V_3 \subseteq V_2 \setminus \{v_2\}$ đủ lớn mà tất cả các đỉnh đều liên thuộc với v_2 hoặc tất cả các đỉnh đều không liên thuộc với v_2 . Khi đó, v_2 có thể được xem như đỉnh đầu tiên của một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ với tất cả các đỉnh đều nằm trong V_3 . Bằng cách lặp lại quá trình xây dựng nêu trên, chúng ta sẽ tìm được một dãy các đỉnh $v_1, v_2, v_3, \dots$



Câu hỏi tiếp theo được đặt ra đó là: “Cần lặp lại quá trình xây dựng nêu trên trong bao lâu để có thể tìm được một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong dãy các đỉnh $v_1, v_2, v_3, \dots$ nêu trên?”.

Câu trả lời cho vấn đề này sẽ phụ thuộc nhiều vào kích thước $V(G)$ của G . Thật vậy, do mỗi tập V_i đều chứa ít nhất $\frac{|V_{i-1}|}{2}$ đỉnh từ tập tiền nhiệm V_{i-1} nên nếu đồ thị G chứa khoảng 2^s đỉnh thì quá trình xây dựng nêu trên sẽ kết thúc sau s lần thực hiện. Phép chứng minh sau sẽ chỉ ra rằng nếu chọn $s = 2r - 3$ thì chúng ta hoàn toàn có thể tìm được một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ từ trong dãy các đỉnh $v_1, v_2, v_3, \dots$ nêu trên.

Kết quả 9.1.1. (Dạng nguyên mẫu của định lý Ramsey)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n(r) \in \mathbb{N}$ sao cho nếu G là một đồ thị với $|G| \geq n$ thì G sẽ chứa một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$.

Chứng minh kết quả 9.1.1.

Nhận thấy rằng khẳng định trên hiển nhiên là đúng nếu $r \leq 1$, nên không giảm tính tổng quát của vấn đề chúng ta có thể giả sử rằng $r \geq 2$. Kí hiệu $n := 2^{2r-3}$. Giả sử G là một đồ thị với $|G| \geq n$. Chúng ta sẽ xây dựng một dãy các tập đỉnh $V_1, V_2, \dots, V_{2r-2}$ và một dãy các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_{2r-2}$ sao cho $v_i \in V_i$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ ($i = 1, \dots, 2r - 2$);
- ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ ($i = 2, \dots, 2r - 2$);
- iii) v_{i-1} hoặc liên thuộc với tất cả các đỉnh trong V_i hoặc không liên thuộc với bất kì đỉnh nào trong V_i ($i = 2, \dots, 2r - 2$).

Giả sử $V_1 \subseteq V(G)$ là một tập đỉnh bất kì với $|V_1| = 2^{2r-3}$ và $v_1 \in V_1$ là một đỉnh bất kì. Khi đó, tính đúng đắn của các điều kiện (i), (ii), (iii) là hiển nhiên. Giả sử đã xây dựng được một dãy các tập đỉnh $V_1, V_2, \dots, V_{i-1}$ và một dãy các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ ($1 < i \leq 2r - 2$) sao cho $v_j \in V_j$ ($j = 1, \dots, i$) và thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii). Do $|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$ là một số lẻ nên V_{i-1} phải chứa một tập đỉnh con V_i thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii). Để hoàn tất quá trình xây dựng nêu trên, chúng ta chỉ cần chọn v_i là một đỉnh bất kì thuộc V_i .

Nhận thấy rằng trong số $2r - 3$ đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_{2r-3}$ phải có $r - 1$ đỉnh cùng liên thuộc nhau đôi một hoặc cùng không liên thuộc nhau đôi một. Bằng cách kết hợp $r - 1$ đỉnh này với đỉnh v_{2r-2} , chúng ta sẽ nhận được một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong G (do $v_i, \dots, v_{2r-2} \in V_i$ với mọi chỉ số i). $\square$

Số nguyên dương $n(r)$ nhỏ nhất thỏa mãn Kết quả 9.1.1) được gọi là **số Ramsey $R(r)$** . Phép chứng minh nêu trong Kết quả 9.1.1) chỉ ra rằng $R(r) \leq 2^{2r-3}$. Trong “Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên”, chúng ta sẽ sử dụng một lập luận xác suất đơn giản để chỉ ra rằng $R(r) \leq 2^{\frac{r}{2}}$ (Kết quả 11.1.3).

Theo thông lệ trong lý thuyết Ramsey, một phép tô màu các phần tử của một tập hợp X bởi c màu phân biệt (hay nói ngắn gọn là một **phép c – tô màu của X**) có thể được xem như một phép phân hoạch của X thành c lớp phân biệt. Những phép c – tô màu nêu trong “Chủ đề 09. Dạng đồ thị của định lý Ramsey” này không cần đáp ứng bất kì yêu cầu nào về tính liên hợp như trong “Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị”.

Giả sử cho trước một phép c – tô màu của $[X]^k$, tập $Y \subseteq X$ được gọi là **đơn sắc** nếu tất cả các phần tử của $[Y]^k$ đều được tô bởi cùng một màu, hay nói cách khác tất cả các phần tử của $[Y]^k$ đều nằm trong cùng một lớp tương đương của phân hoạch c tương ứng của $[X]^k$. Tương tự, nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị và $H \subseteq G$ là một đồ thị con có tất cả các cạnh được tô bởi cùng một màu trong một phép tô màu nào đó của E thì H được gọi là một **đồ thị con đơn sắc** của G .

Theo thuật ngữ trên, định lý Ramsey có thể được phát biểu lại dưới dạng: với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi n – tập X , mọi phép 2 – tô màu của $[X]^2$ đều có chứa một r – tập con đơn sắc $Y \subseteq X$. Tổng quát hơn, với mọi số tự nhiên $r, k \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi n – tập X , mọi phép k – tô màu của $[X]^k$ đều có chứa một r – tập con đơn sắc $Y \subseteq X$.

Nhằm tránh sự trùng lặp, chúng ta sẽ trình bày một kĩ thuật chứng minh thay thế khá phổ biến: đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh dạng vô hạn của định lý Ramsey; sau đó, chúng ta suy ra tính đúng đắn của dạng hữu hạn của định lý Ramsey (do chúng ta không phải quan tâm đến số phần tử của tập X khi chứng minh dạng vô hạn của định lý Ramsey nên tính phức tạp của vấn đề sẽ được giảm đi) – **lập luận compact**.

Kết quả 9.1.2. (Dạng vô hạn của định lý Ramsey)

Giả sử cho trước các số nguyên dương $k, c \in \mathbb{N}$ và một tập vô hạn X .

Khi đó, với mọi phép c – tô màu của $[X]^k$, X có chứa một tập con đơn sắc vô hạn Y .

Chứng minh kết quả 9.1.2.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta tạm cố định giá trị của chỉ số c và thực hiện quy nạp toán học theo chỉ số k . Với $k = 1$, tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử $k > 1$ và tính đúng đắn của khẳng định đã được chứng minh với mọi giá trị nhỏ hơn k .

Xét một phép c – tô màu bất kì của $[X]^k$. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ xây dựng một dãy vô hạn các tập con vô hạn $X_0, X_1, \dots, X_i, \dots$ của X và một dãy vô hạn các điểm $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ sao cho $x_i \in X_i$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;
- ii) tất cả các k – tập có dạng $\{x_i\} \cup Z$ với $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ đều được tô bởi cùng một màu c_i nào đó.

Đầu tiên, chúng ta sẽ bắt đầu với tập con vô hạn tầm thường $X_0 := X$ và một điểm $x_0 \in X_0$ bất kì.

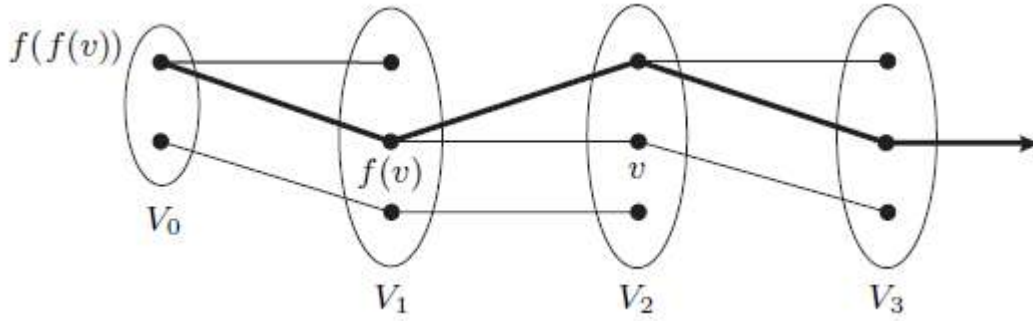
Giả sử chúng ta đã chọn được một tập vô hạn X_i và $x_i \in X_i$ với một chỉ số i nào đó, bằng cách tô mỗi tập $Z \in X_i \setminus \{x_i\}$ bởi màu của tập $\{x_i\} \cup Z$ trong phép c – tô màu của tập $[X]^k$. Theo giả thiết quy nạp của bài toán, $X_i \setminus \{x_i\}$ có chứa một tập con đơn sắc vô hạn X_{i+1} . Hiển nhiên, tập X_{i+1} này thỏa mãn cả hai điều kiện (i) và (ii). Sau đó, chúng ta chọn ra một điểm $x_{i+1} \in X_{i+1}$ bất kì.

Do c hữu hạn nên phải có một màu c_i nào đó trong c màu này liên kết với vô hạn các điểm x_i . Tập các điểm x_i sẽ tạo thành một tập con đơn sắc của X . □

Để nhận được dạng hữu hạn của định lý Ramsey (Kết quả 9.1.2), chúng ta sẽ cần đến kết quả sau:

Kết quả 9.1.3. (Dạng vô hạn của bổ đề König)

Giả sử $V_0, V_1, \dots, V_i, \dots$ là một dãy vô hạn các tập hữu hạn không rỗng đôi một phân biệt và G là một đồ thị trên hợp của các tập này. Giả sử mỗi đỉnh v trong tập V_i với $i \geq 1$ đều có một đỉnh láng giềng $f(v)$ trong V_{i-1} .



Hình ảnh minh họa.

Khi đó, G có chứa một đường đi vô hạn $v_0 v_1 \dots v_i \dots$ trong đó $v_i \in V_i$ với mọi i .

Chứng minh kết quả 9.1.3.

Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập tất cả các đường đi có dạng $vf(v)f(f(v)) \dots$ kết thúc trong V_0 . Do V_0 hữu hạn nhưng $\mathcal{P}$ vô hạn nên tồn tại vô hạn đường đi trong $\mathcal{P}$ kết thúc tại cùng một điểm $v_0 \in V_0$. Trong số những đường đi này, tồn tại vô hạn đường đi cùng đi qua đỉnh $v_1 \in V_1$ (điều này suy ra từ việc V_1 là một tập hữu hạn). Tương tự, trong số những đường đi này, tồn tại vô hạn đường đi cùng đi qua một điểm $v_2 \in V_2$ Lập luận tương tự, chúng ta xác định được các đỉnh $v_i \in V_i$ tương tự như trên với mọi $i \in \mathbb{N}$. Từ cách định nghĩa, mỗi đỉnh v_i đều liên hợp với đỉnh v_{i-1} , nên $v_0 v_1 \dots v_i \dots$ chính là đường đi vô hạn cần tìm. $\square$

Kết quả 9.1.4. (Dạng hữu hạn của định lý Ramsey)

Với mọi số nguyên dương $k, c, r \geq 1$, tồn tại một số tự nhiên $n(k, c, r) \geq k$ sao cho mọi n – tập X đều có chứa một r – tập con đơn sắc Y với mọi phép c – tô màu của $[X]^k$.

Chứng minh kết quả 9.1.4.

Kí hiệu $[n] := \{0, \dots, n-1\}$. Giả sử khẳng định của bài toán là sai với các số nguyên dương $k, c, r \geq 1$ nào đó. Khi đó, tồn tại một n tập, không giảm tính tổng quát của vấn đề chúng ta giả sử là tập $[n]$, và một phép c – tô màu $[n]^k \rightarrow c$ sao cho $[n]$ không chứa bất kì r – tập con đơn sắc nào. Chúng ta sẽ gọi một phép c – tô màu như vậy là một phép tô màu xấu. Như vậy, với mọi $n \geq k$, luôn tồn tại ít nhất một phép tô màu xấu của $[n]^k$. Ý tưởng của phép chứng minh của chúng ta là sẽ tổ hợp các phép tô màu này lại để tạo ra một phép tô màu xấu của $[\mathbb{N}]^k$, mâu thuẫn với Kết quả 9.1.3).

Với mọi $n \geq k$, kí hiệu $V_n \neq \emptyset$ là tập các phép tô màu xấu của $[n]^k$.

Nhận thấy rằng, với mọi $n > k$, phép thu hẹp $f(g)$ của mọi phép tô màu $g \in V_n$ cũng là một phép tô màu xấu, nghĩa là $f(g) \in V_{n-1}$. Từ Kết quả 9.1.3), tồn tại một dãy vô hạn $g_k, g_{k+1}, \dots, g_n, \dots$ các phép tô màu xấu $g_n \in V_n$ sao cho $f(g_n) = g_{n-1}$ với mọi $n > k$. Với mọi $m \geq k$, tất cả các phép tô màu g_n với $n \geq m$ đều trùng với nhau trên $[m]^k$, nên với mọi $Y \in [\mathbb{N}]^k$ giá trị của $g_n(Y)$ trùng với nhau với mọi $n > \max Y$. Kí hiệu $g(Y)$ là giá trị chung $g_n(Y)$ này. Khi đó, g là một phép tô màu xấu của $[\mathbb{N}]^k$: do mọi r – tập $S \subseteq \mathbb{N}$ đều được chứa trong một tập $[n]$ nào đó đủ lớn nên S không thể là một tập con đơn sắc của $\mathbb{N}$ (điều này suy ra từ việc phép tô màu g trùng với phép tô màu xấu g_n trên $[n]^k$). $\square$

Số nguyên dương $n(k, c, r)$ nhỏ nhất thỏa mãn Kết quả 9.1.1) được gọi là **số Ramsey $R(k, c, r)$** .

9.2. Số Ramsey

Định lí Ramsey có thể được diễn đạt lại dưới dạng: “Nếu $H = K_r$ và G là một đồ thị với số đỉnh đủ lớn thì hoặc G hoặc phần bù $\bar{G}$ của nó sẽ chứa H như một đồ thị con”. Hiển nhiên, khẳng định trên cũng đúng với mọi đồ thị H bất kì (điều này suy ra từ việc $H \subseteq K_h$ với $h := |H|$).

Một cách tự nhiên, chúng ta sẽ cần quan tâm đến số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho mọi đồ thị G với n đỉnh đều thỏa mãn tính chất nêu trên – số nguyên dương n như vậy được gọi là **số Ramsey $R(H)$ của H** . Hiển nhiên, nếu H là một đồ thị có thể nhúng được vào đồ thị G hoặc phần bù $\bar{G}$ với $|G| \geq n$ thì số Ramsey $R(H)$ của H sẽ nhỏ hơn số Ramsey $R(h) := R(K_n)$ của K_n .

Tổng quát hơn, kí hiệu $R(H_1, H_2)$ là số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $H_1 \subseteq G$ hoặc $H_2 \subseteq \bar{G}$ với mọi đồ thị G có n đỉnh. Với hầu hết các đồ thị H_1, H_2 , chúng ta chỉ thu được những đánh giá rất thô cho $R(H_1, H_2)$. Một điều rất thú vị đó là các đánh giá được chỉ ra bởi đồ thị ngẫu nhiên (Kết quả 11.1.3) thường sẽ tốt hơn cả các đánh giá tốt nhất được chỉ ra bởi việc sử dụng các cấu trúc cụ thể.

Kết quả sau đây là một trong số rất ít trường hợp mà số Ramsey $R(H_1, H_2)$ được xác định chính xác với một số lượng các đồ thị tương đối lớn:

Kết quả 9.2.1.

Giả sử cho trước các số nguyên dương $s, t \geq 1$ và T là một cây bất kì với t đỉnh.

Khi đó, $R(T, K_s) = (s - 1)(t - 1) + 1$.

Chứng minh kết quả 9.2.1.

Nhận thấy rằng hợp rời rạc của $s - 1$ đồ thị K_{t-1} phân biệt sẽ không chứa bất kì đồ thị con nào có dạng T và K_s . Đồng thời, phần bù của đồ thị này là đồ thị $(s - 1)$ –phần K_{t-1}^{s-1} cũng không chứa bất kì đồ thị con nào có dạng T và K_s . Điều này chỉ ra rằng $R(T, K_s) \geq (s - 1)(t - 1) + 1$.

Ngược lại, giả sử G là một đồ thị bất kì với $n = (s - 1)(t - 1) + 1$ sao cho phần bù $\bar{G}$ của nó không chứa bất kì đồ thị con nào có dạng K_s . Khi đó, $s > 1$ và, với mọi phép tô màu đỉnh của G , chỉ có thể có tối đa $s - 1$ đỉnh có thể được tô bởi cùng một màu (xem lại nội dung của “Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị”). Như vậy, $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{n}{s-1} \right\rceil = t$. Từ Kết quả 5.1.4), G có chứa một đồ thị con H với $\delta(H) \geq t - 1$.

Điều này chỉ ra rằng G sẽ chứa một đồ thị con có dạng T (điều này suy ra từ Kết quả 1.5.4). □

Kết quả 9.2.2. (Chvátal – Rödl – Szemerédi – Trotter)

Với mọi số nguyên dương $\Delta \geq 1$, tồn tại một hằng số c sao cho

$$R(H) \leq c|H| \text{ với mọi đồ thị } H \text{ với } \Delta(H) \leq \Delta.$$

Chứng minh kết quả 9.2.2.

Ý tưởng của phép chứng minh này nằm ở việc chúng ta sẽ chỉ ra rằng nếu $|G|$ đủ lớn thì $H \subseteq G$ hoặc $H \subseteq \bar{G}$. Xét một phân hoạch ε – regular của G như trong Kết quả 7.2.1). Nếu số các cặp ε – regular của phân hoạch có mật độ dương đủ lớn thì G sẽ chứa H như một đồ thị con. Nếu phần lớn các cặp có mật độ nhỏ hơn hoặc bằng không thì $\bar{G}$ sẽ chứa H như một đồ thị con. Kí hiệu R, R', R'' lần lượt là các đồ thị regular của G với các cạnh của nó tương ứng với các mật độ $\geq 0, \geq 1/2, < 1/2$. Khi đó, R là hợp rời rạc cạnh của R' và R'' .

Để chứng minh $H \subseteq G$ hoặc $H \subseteq \bar{G}$, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng H được chứa trong một đồ thị regular R'_s hoặc R''_s nào đó (điều này suy ra từ Kết quả 7.3.2). Do $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta + 1$ nên nếu $s \geq \alpha(H)$ và chúng ta có thể tìm được một đồ thị $K_{\Delta+1}$ trong R' hoặc R'' thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Tuy nhiên, điều kiện này được thỏa mãn rất dễ dàng: chúng ta chỉ cần đảm bảo $K_r \subseteq R$ trong đó r là số Ramsey của $\Delta + 1$, phần còn lại sẽ được suy ra từ Định lý Turán do R là một đồ thị dày đặc.

Với ý tưởng phép cận như trên, phép chứng minh sẽ được thực hiện như sau:

Giả sử cho trước $\Delta \geq 1$. Với $d := 1/2$ và Δ , tồn tại một số thực dương $\varepsilon_0 > 0$ sao cho:

“Nếu G là một đồ thị bất kì, H là một đồ thị với $\Delta(H) \leq \Delta$, R là một đồ thị regular của G với các tham số $\varepsilon \leq \varepsilon_0, l \geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, d$ thì $H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G$ ”.

Kí hiệu $m := R(\Delta + 1)$ là số Ramsey của $\Delta + 1$.

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ đủ nhỏ sao cho $2\varepsilon < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{k}$ với mọi $k \geq m$. (1)

Kí hiệu M là số nguyên dương nêu trong Kết quả 7.2.1) tương ứng với ε và m .

Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên với $c := \frac{M}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$.

Xét một đồ thị H bất kì với $\Delta(H) \leq \Delta$ và kí hiệu $s := |H|$.

Giả sử G là một đồ thị bất kì với bậc $n \geq c|H|$, chúng ta sẽ chứng minh rằng $H \subseteq G$ hoặc $H \subseteq \bar{G}$.

Từ Kết quả 7.2.1), G có một phân hoạch ε -regular $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ với V_0 là tập đặc biệt và

$|V_1| = \dots = |V_k| =: l$ với $m \leq k \leq M$.

Khi đó, $l = \frac{n-|V_0|}{k} \geq \frac{n-\varepsilon n}{M} = n \frac{1-\varepsilon}{M} \geq cs \frac{1-\varepsilon}{M} = \frac{s}{\varepsilon_0}$. (2)

Giả sử R là một đồ thị regular của G tương ứng với các tham số ε, l, d .

Từ định nghĩa, R chứa k đỉnh và

$$\begin{aligned} \|R\| &\geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 \\ &= \frac{1}{2}k^2 \left(1 - \frac{1}{k} - 2\varepsilon\right) \\ &>_{(1)} \frac{1}{2}k^2 \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}k^2 \frac{m-2}{m-1} \\ &\geq t_{m-1}(k). \end{aligned}$$

Từ Kết quả 7.1.1), R có chứa một đồ thị con $K = K_m$.

Bây giờ, chúng ta sẽ thực hiện tô màu các cạnh e của R bởi hai màu xanh và đỏ theo quy tắc: cạnh e được tô màu đỏ nếu nó tương ứng với một cặp (V_i, V_j) có mật độ $\geq 1/2$; trường hợp ngược lại, cạnh e được tô màu xanh. Kí hiệu R' là đồ thị con bao trùm của R được tạo thành bởi các cạnh màu đỏ tương ứng với các cặp (V_i, V_j) có mật độ $\geq 1/2$, R'' là đồ thị con bao trùm của R được tạo thành bởi các cạnh

màu xanh tương ứng với các cặp (V_i, V_j) có mật độ $< 1/2$. Khi đó, R' là một đồ thị regular của G với các tham số $\varepsilon, l, 1/2$ và R'' là một đồ thị regular của $\bar{G}$ với các tham số $\varepsilon, l, 1/2$.

Từ cách định nghĩa của m , đồ thị K có chứa một đồ thị con K_r tô màu xanh hoặc một đồ thị con K_r tô màu đỏ (điều này suy ra từ việc $r := \chi(H) \leq \Delta + 1$). Như vậy, $H \subseteq R'_s$ hoặc $H \subseteq R''_s$. Do $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ và $l \geq s/\varepsilon_0$ (điều này suy ra từ khẳng định (2)) nên R' và R'' đều thỏa mãn điều kiện nêu trong Kết quả 7.1.1), nghĩa là $H \subseteq G$ hoặc $H \subseteq \bar{G}$. $\square$

Tính đến nay, chúng ta vẫn đang cố giải quyết câu hỏi xác định bậc nhỏ nhất của một đồ thị G sao cho mọi phép 2 – tô màu cạnh của G đều tạo ra một đồ thị con đơn sắc H cho trước. Thay vì phải tập trung quá nhiều vào bậc của đồ thị G , chúng ta có thể thử xác định phần tử tối thiểu của G theo chính quan hệ đồ thị con. Giả sử cho trước một đồ thị H , đồ thị G được gọi một **phần tử tối thiểu Ramsey của H** nếu G là phần tử tối thiểu của tính chất: mọi phép 2 – tô màu cạnh đều tạo ra một đồ thị con đơn sắc H .

Một số câu hỏi được đặt ra cho chúng ta đó là: “Những phần tử tối thiểu Ramsey của một đồ thị H sẽ trông như thế nào? Phần tử tối thiểu có tồn tại duy nhất hay không?”. Kết quả sau đây sẽ phần nào trả lời cho hai vấn đề nêu trên:

Kết quả 9.2.3.

Nếu T là một cây nhưng không phải là một star thì sẽ tồn tại vô hạn phần tử tối thiểu Ramsey của T .

Chứng minh kết quả 9.2.3.

Kí hiệu $r := |T|$. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại một phần tử tối thiểu Ramsey của T có bậc $\geq n$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ mượn một kết quả quan trọng trong “Chủ đề 11. Đồ thị ngẫu nhiên”: “Với mọi số tự nhiên $n, r \in \mathbb{N}$, luôn tồn tại một đồ thị G với sắc số $\chi(G) > r^2$ và girth $g(G) > n$ ”. Nếu chúng ta tô màu các cạnh của đồ thị G bởi hai màu xanh và đỏ thì đồ thị con cảm sinh bởi các cạnh màu xanh và đồ thị con cảm sinh bởi các cạnh màu đỏ không thể đồng thời đều có một phép r – tô màu đỉnh theo định nghĩa đã trình bày trong “Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị”: trường hợp ngược lại, chúng ta có thể tô màu các đỉnh của G bởi các cặp màu của phép tô màu cạnh, mâu thuẫn với giả thiết $\chi(G) > r^2$. Giả sử $G' \subseteq G$ là một đồ thị con đơn sắc với $\chi(G') > r$. Từ Kết quả 5.1.4), G' có chứa một đồ thị con H có bậc nhỏ nhất $\delta(H) \geq r$. Từ Kết quả 1.5.4), G' có chứa một đồ thị con đẳng cấu với T .

Giả sử $G^* \subseteq G$ là một phần tử tối thiểu Ramsey của T . Hiển nhiên, G^* không thể là một rừng: do các cạnh của một rừng bất kì đều có thể 2 – tô màu sao cho không có rừng con đơn sắc nào có chứa một đường đi có chiều dài ≥ 3 nên cũng không thể chứa đồ thị con nào đẳng cấu với T (do T là một cây nhưng không phải là một star nên T có chứa P_3). Như vậy, G^* có chứa một chu trình với chiều dài $\geq g(G) > n$ (điều này suy ra từ việc $G^* \subseteq G$), nghĩa là $|G^*| > n$. $\square$

9.3. Dạng cảm sinh của định lý Ramsey

Nhắc lại rằng định lý Ramsey có thể được phát biểu dưới dạng: “Với mọi đồ thị H cho trước, tồn tại một đồ thị G sao cho với mọi phép 2 – tô màu cạnh của G đều chứa một đồ thị con đơn sắc $H \subseteq G$ ”. Chúng ta có thể thay đổi bài toán lại dưới dạng cảm sinh như sau: “Với mọi đồ thị H cho trước, tồn tại một đồ thị G sao cho với mọi phép 2 – tô màu cạnh của G đều chứa một đồ thị con cảm sinh đơn sắc $H \subseteq G$ ”.

Việc sửa đổi này làm thay đổi đáng kể các tính chất đặc trưng của bài toán. Phép chứng minh bây giờ không còn là việc chỉ ra một đồ thị G đủ lớn bằng một bằng chứng đơn giản mà thay vào đó là một phép

xây dựng tình tế: xây dựng một đồ thị G , với mọi 2 – phân hoạch các cạnh, chứa H như một đồ thị con cảm sinh. Đồ thị G như vậy được gọi là một **đồ thị Ramsey của H** .

Việc một đồ thị Ramsey luôn tồn tại với mọi cách chọn H khác nhau là một trong số các kết quả quan trọng nhất của lý thuyết Ramsey. Phép chứng minh cho khẳng định này được đề xuất một cách độc lập bởi các nhà toán học Deuber, Erdős, Hajnal & Pósa, Rödl:

Kết quả 9.3.1. (Dạng cảm sinh của định lý Ramsey)

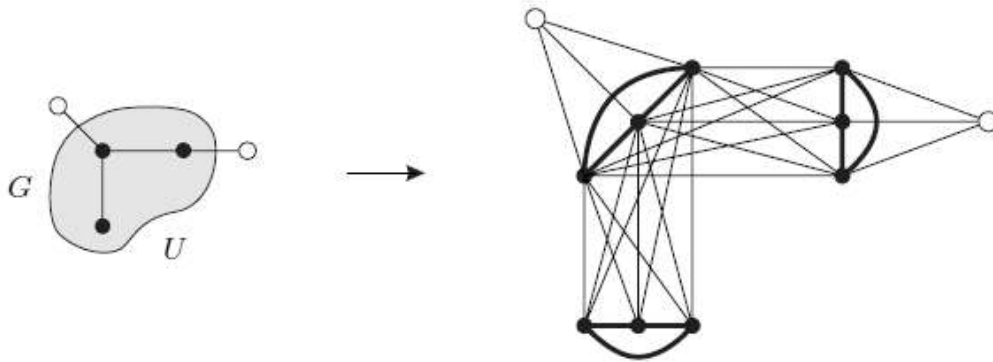
Mọi đồ thị H đều có một đồ thị Ramsey G nào đó, nghĩa là với mọi đồ thị H , tồn tại một đồ thị G , với mọi phân hoạch $\{E_1, E_2\}$ của $E(G)$, chứa H như một đồ thị con cảm sinh sao cho $E(H) \subseteq E_1$ hoặc $E(H) \subseteq E_2$.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ giới thiệu hai cách chứng minh khác nhau cho khẳng định trên. Cả hai phép chứng minh này đều mang tính chất cá nhân rất cao, mỗi phép chứng minh đều cung cấp một cách nhìn rất độc đáo về lý thuyết Ramsey: các loại đồ thị được giới thiệu trong các phép chứng minh hầu như không được sử dụng trong thực tế mà chỉ đóng vai trò như những viên gạch trong phép xây dựng nhưng về mặt tổng thể các phép chứng minh đều rất ấn tượng.

Chứng minh thứ nhất cho kết quả 9.3.1.

Phép xây dựng đồ thị Ramsey được thực hiện bằng cách thay thế nhiều lần các đỉnh của một đồ thị $G = (V, E)$ đã được xây dựng trước đó bằng các bản sao của đồ thị H khác.

Với mỗi tập đỉnh $U \subseteq V$, kí hiệu $G[U \rightarrow H]$ là đồ thị thu được từ G bằng cách thay các đỉnh $u \in U$ bởi bản sao $H(u)$ của H , nối hoàn toàn mỗi $H(u)$ với tất cả các $H(u')$ với $u' \in U$ và $uu' \in E$, và nối mỗi $H(u)$ với tất cả các đỉnh $v \in V/U$ với $uv \in E$.



Hình vẽ minh họa đồ thị $G[U \rightarrow H]$ với $H = K_3$.

Về mặt hình thức, $G[U \rightarrow H]$ là một đồ thị xác định trên $(U \times V(H)) \times ((V/U) \times \{\emptyset\})$ trong đó hai đỉnh (v, w) và (v', w') liên hợp với nhau nếu $vv' \in E$ hoặc $v = v' \in U$ và $ww' \in E(H)$ (việc thay thế V/U bởi $(V/U) \times \{\emptyset\}$ là một cách để đảm bảo tất cả các đỉnh của $G[U \rightarrow H]$ đều có cùng một dạng (v, w) , cũng như đảm bảo $G[U \rightarrow H]$ sẽ tách rời khỏi G).

Sau đây, chúng ta sẽ chứng minh một dạng mạnh hơn của Kết quả 9.3.1):

Với hai đồ thị H_1, H_2 bất kì, tồn tại một đồ thị $G = G(H_1, H_2)$ sao cho với mọi phép tô màu cạnh của G bởi hai màu 1 và 2 đều có một đồ thị con cảm sinh $H_1 \subseteq G$ với tất cả các cạnh được tô bởi màu 1 hoặc một đồ thị con cảm sinh $H_2 \subseteq G$ với tất cả các cạnh được tô bởi màu 2. (*)

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (*), chúng ta sẽ thực hiện một phép quy nạp toán học theo chỉ số $|H_1| + |H_2|$ như sau:

Nếu H_1 hoặc H_2 không có chứa cạnh ($|H_1| + |H_2| \leq 1$) thì khẳng định (*) thỏa mãn với $G = \overline{K_n}$ với n đủ lớn. Giả sử H_1, H_2 đều có chứa ít nhất một cạnh và khẳng định (*) thỏa mãn với tất cả các cặp (H'_1, H'_2) với $|H'_1| + |H'_2| < |H_1| + |H_2|$.

Với mỗi $i = 1, 2$, chọn ra một đỉnh $x_i \in H_i$ có liên thuộc với một cạnh nào đó trong H_i .

Kí hiệu $H'_i := H_i - x_i$ và H''_i là đồ thị con của H'_i cảm sinh bởi các đỉnh láng giềng của x_i .

Đầu tiên, chúng ta sẽ xây dựng một dãy $G^0, \dots, G^n$ các đồ thị tách rời nhau; G^n chính là đồ thị Ramsey $G(H_1, H_2)$ cần tìm. Với các đồ thị G^n này, chúng ta sẽ xây dựng các tập con $V^i \subseteq V(G^i)$ và một ánh xạ

$$f: V^1 \cup \dots \cup V^n \rightarrow V^0 \cup \dots \cup V^{n-1}$$

sao cho $f(V^i) = V^{i-1}$ với mọi $i \geq 1$. (1)

Kí hiệu $f^i := f \circ \dots \circ f$ là n -hợp của f bất cứ khi nào nó được xác định và f^0 là ánh xạ đồng nhất trên $V^0 = V(G^0)$.

Khi đó, $f^i(v) \in V^0$ với mọi $v \in V^i$. $f^i(v)$ sẽ được gọi là **đỉnh gốc của $v \in V^i$ trong V^0** .

Hơn nữa, các đồ thị con $G^i[V^i]$ sẽ phản ánh phần nào đó cấu trúc của đồ thị G^0 :

Các đỉnh trong V^i ứng với các đỉnh gốc phân biệt liên hợp với nhau trong G^i khi và chỉ khi các đỉnh gốc của chúng liên hợp với nhau trong G^0 . (2)

Mặc dù, khẳng định (2) sẽ không được sử dụng chính thức trong phép chứng minh của chúng ta.

Tuy nhiên, nó có thể giúp chúng ta có được một cái nhìn hình dung về các đồ thị G^i : mỗi đồ thị G^i (chính xác hơn, mỗi đồ thị $G^i[V^i]$ — cũng sẽ có một số đỉnh $x \in G^i - V^i$) về cơ bản là một bản sao phóng to của G^0 trong đó mỗi đỉnh $w \in G^0$ được thay thế bởi tập hợp tất cả các đỉnh nằm trong V^i cùng nhận w làm đỉnh gốc, và ánh xạ f sẽ nối các đỉnh có cùng gốc qua các đồ thị G_i .

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, tồn tại các đồ thị Ramsey $G_1 := G(H_1, H'_2)$ và $G_1 := G(H'_1, H_2)$.

Kí hiệu G^0 là một bản sao của đồ thị G_1 và $V^0 := V(G^0)$. Kí hiệu $W'_0, \dots, W'_{n-1}$ là các tập con của V^0 bao trùm đồ thị H'_2 trong G^0 . Như vậy, n được định nghĩa là số bản sao cảm sinh của H'_2 trong G^0 , và chúng ta sẽ xây dựng một đồ thị G^i cho mỗi tập W'_{i-1} , $i = 1, \dots, n$. Do đồ thị H_1 có chứa ít nhất một cạnh nên $n \geq 1$: trường hợp ngược lại, G^0 không thể là một đồ thị Ramsey $G(H_1, H'_2)$.

Với mỗi $i = 0, \dots, n-1$, kí hiệu W''_i là ảnh của $V(H'_2)$ qua phép đẳng cấu $H'_2 \rightarrow G^0[W'_i]$.

Giả sử chúng ta đã xây dựng được dãy các đồ thị $G^0, \dots, G^{i-1}$, dãy các tập con $V^0, \dots, V^{i-1}$ với $i \geq 1$, và ánh xạ f đã được xác định trên $V^0 \cup \dots \cup V^{i-1}$ và thỏa mãn điều kiện (1) với mọi $j \leq i$.

Chúng ta thực hiện phép mở rộng G^{i-1} lên thành G^i theo hai bước như sau:

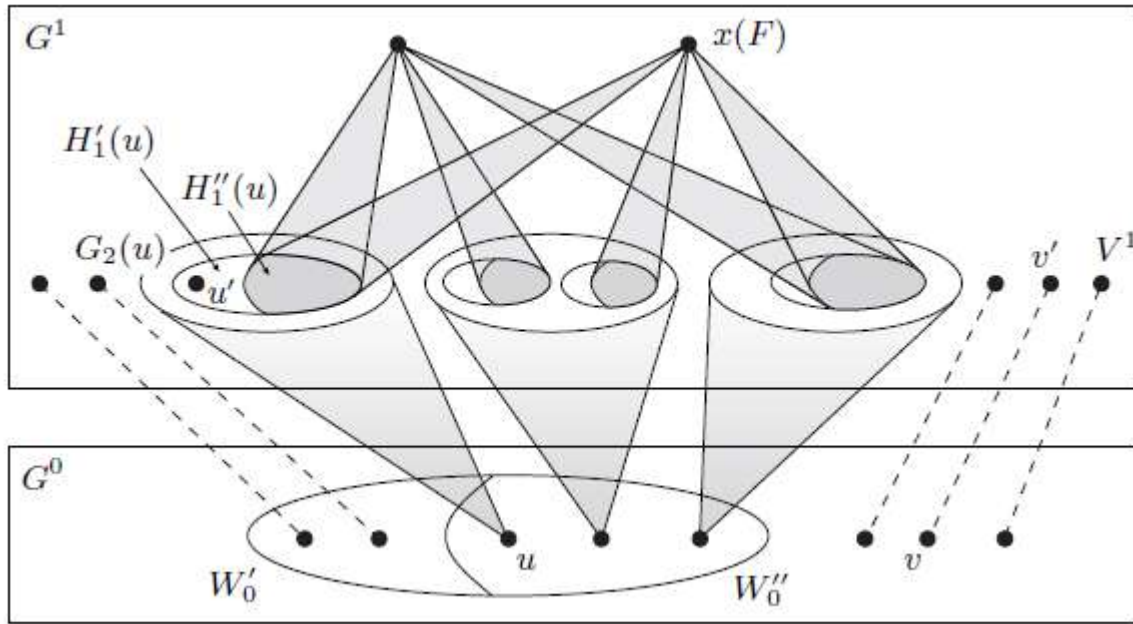
Bước thứ nhất.

Đầu tiên, chúng ta cần xét tập U^{i-1} gồm tất cả các đỉnh $v \in V^{i-1}$ có đỉnh gốc $f^{i-1}(v)$ nằm trong W''_{i-1} (với $i = 1$, $U^0 = W''_0$). Tiếp theo, chúng ta mở rộng G^{i-1} lên thành một đồ thị $\tilde{G}^{i-1}$ bằng cách thay mỗi đỉnh $u \in U^{i-1}$ bởi một bản sao $G_2(u)$ của G_2 , nghĩa là $\tilde{G}^{i-1} := G^{i-1}[U^{i-1} \rightarrow G_2]$. Kí hiệu $f(u') := u$ với mọi $u \in U^{i-1}$ và $u' \in G_2(u)$, và $f(v') := v$ với mọi $v' = (v, \emptyset)$ với $v \in V^{i-1}/U^{i-1}$ (nhắc lại rằng $(v, \emptyset)$ đơn giản chỉ là một bản sao không được mở rộng của một đỉnh $v \in G^{i-1}$ trong $\tilde{G}^{i-1}$). Kí hiệu V^i là tập các đỉnh v' hoặc u' của $\tilde{G}^{i-1}$ sao cho ánh xạ f được xác định, nghĩa là các đỉnh tương ứng trực tiếp với một đỉnh v trong V^{i-1} hoặc các đỉnh nằm trong một bản sao mở rộng $G_2(u)$ của một đỉnh u trong V^{i-1} .

Khi đó, (1) được thỏa mãn với i . Hơn nữa, nếu chúng ta giả sử (2) được thỏa mãn với $i - 1$ thì (2) cũng sẽ đúng với i (trong $\tilde{G}^{i-1}$). Đồ thị $\tilde{G}^{i-1}$ đóng vai trò như “phần cốt lõi” của đồ thị $\tilde{G}^{i-1}$: phần này trông như một bản sao phóng to của G^0 .

Bước thứ hai.

Ta sẽ mở rộng $\tilde{G}^{i-1}$ lên thành đồ thị G^i bằng cách bổ sung thêm một số đỉnh $x \notin V^i$. Kí hiệu $\mathcal{F}$ là tập tất cả các họ F có dạng $F = (H'_1(u) | u \in U^{i-1})$, trong đó mỗi $H'_1(u)$ là một đồ thị con cảm sinh của $G_2(u)$ đẳng cấu với H'_1 (nói cách khác: $\mathcal{F}$ là tập các cách để chọn từ mỗi $G_2(u)$ chính xác một bản sao cảm sinh của H'_1). Với mỗi $F \in \mathcal{F}$, bổ sung thêm một đỉnh $x(F)$ vào $\tilde{G}^{i-1}$ và nối nó với tất cả các đỉnh của $H'_1(u)$ với mỗi $u \in U^{i-1}$, trong đó $H''_1(u)$ là ảnh của $H'_1(u)$ qua phép đẳng cấu $H'_1 \rightarrow H'_1(u)$. Kí hiệu G^i là đồ thị nhận được sau quá trình xây dựng nêu trên. Điều này kết thúc quá trình xây dựng dãy các đồ thị $G^0, \dots, G^n$.



Hình ảnh minh họa phép xây dựng G^1 .

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra rằng đồ thị $G := G^n$ sẽ thỏa mãn khẳng định (*). Để thực hiện được mục đích này, chúng ta cần chứng minh khẳng định (**) sau cho các đồ thị G^i với $i = 0, \dots, n$:

Với mọi phép tô màu cạnh của G^i bởi hai màu 1 và 2, G^i có chứa một đồ thị con cảm sinh H_1 được tô bởi màu 1, hoặc một đồ thị con cảm sinh H_2 được tô bởi màu 2, hoặc một đồ thị con cảm sinh H được tô bởi màu 2 sao cho $V(H) \subseteq V^i$ và phép thu hẹp của f^i trên $V(H)$ là một phép đẳng cấu giữa H và $G^0[W'_k]$ với một chỉ số $k \in \{i, \dots, n-1\}$ nào đó. (**)

Nhận thấy rằng do trường hợp thứ ba của khẳng định (**) không thể xảy ra với $i = n$ nên khẳng định (**) cho $i = n$ tương đương với khẳng định (*) với $G := G^n$.

Với $i = 0$, khẳng định (**) được suy ra từ cách lựa chọn G^0 là một bản sao của $G_1 = G(H_1, H'_2)$ và cách định nghĩa của các tập W'_k .

Giả sử $1 \leq i \leq n$ và khẳng định (**) đã được kiểm chứng với mọi giá trị nhỏ hơn i .

Xét một phép tô màu cạnh bất kì của G^i .

Với mỗi đỉnh $u \in U^{i-1}$, tồn tại một bản sao $G_2(u)$ của G_2 trong G^i sao cho $G^i \supseteq G_2(u) \simeq G(H'_1, H_2)$.

Nếu $G_2(u)$ có chứa một đồ thị con cảm sinh H_2 được tô bởi màu 2 với một đỉnh $u \in U^{i-1}$ nào đó thì khẳng định (**) hiển nhiên đúng.

Trường hợp ngược lại, mỗi $G_2(u)$ đều có chứa một đồ thị con cảm sinh $H'_1(u) \simeq H'_1$ được tô bởi màu 1.

Kí hiệu F là họ các đồ thị $H'_1(u)$ này với mỗi $u \in U^{i-1}$ và $x := x(F)$.

Nếu, với một đỉnh $u \in U^{i-1}$ nào đó, tất cả các $x - H''_1(u)$ cạnh trong G^i đều được tô màu 1 thì chúng ta thu được một bản sao cảm sinh của H_1 trong G^i , nên khẳng định (**) được thỏa mãn.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng mỗi $H''_1(u)$ đều có chứa một đỉnh y_u sao cho cạnh xy_u được tô bởi màu 2.

Kí hiệu $\widehat{U}^{i-1} := \{y_u | u \in U^{i-1}\} \subseteq V^i$.

Khi đó, f xác định một phép đẳng cấu giữa $\widehat{G}^{i-1} := G^i[\widehat{U}^{i-1} \cup \{(v, \emptyset) | v \in V(G^{i-1})/U^{i-1}\}]$ và G^{i-1} : ánh xạ này biến mỗi đỉnh y_u thành u và mỗi đỉnh $(v, \emptyset)$ thành v .

Phép tô màu cạnh của G^i sẽ cảm sinh một phép tô màu cạnh của G^{i-1} .

Nếu phép tô màu này mang lại một đồ thị con cảm sinh $H_1 \subseteq G^{i-1}$ được tô bởi màu 1 hoặc một đồ thị con cảm sinh $H_2 \subseteq G^{i-1}$ được tô bởi màu 2 thì chúng ta cũng có được những khẳng định này trong $\widehat{G}^{i-1} \subseteq G^i$, nên khẳng định (**) được thỏa mãn.

Từ giả thiết quy nạp của khẳng định (**) với $i - 1$, chúng ta có thể giả sử rằng G^{i-1} có chứa một đồ thị con cảm sinh H' được tô bởi màu 2 sao cho $V(H') \subseteq V^{i-1}$ và phép thu hẹp của f^{i-1} trên $V(H')$ là một phép đẳng cấu giữa H' và $G^0[W'_k] \simeq H'_2$ với một chỉ số $k \in \{i - 1, \dots, n - 1\}$.

Kí hiệu $\widehat{H}'$ là đồ thị con cảm sinh tương ứng của H' trong $\widehat{G}^{i-1} \subseteq G^i$.

Khi đó, $\widehat{H}'$ cũng được tô bởi màu 2, $V(\widehat{H}') \subseteq V^i$ và $f^i(V(\widehat{H}')) = f^{i-1}(V(H')) = W'_k$,

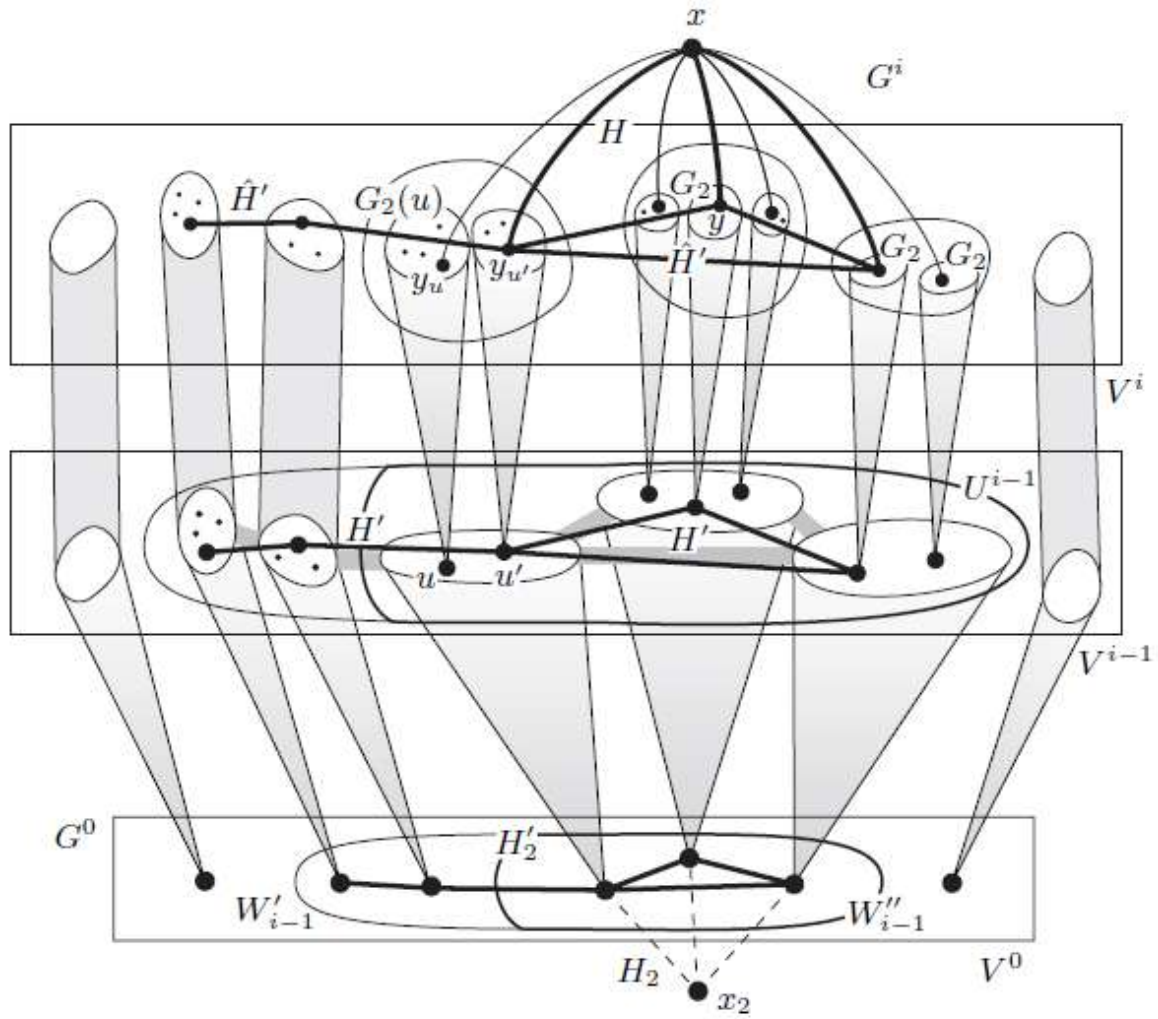
nên $f^i: \widehat{H}' \rightarrow G^0[W'_k]$ là một phép đẳng cấu.

Nếu $k \geq i$ thì khẳng định (**) được thỏa mãn với $H := \widehat{H}'$.

Không giảm tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $k < i$, nên $k = i - 1$.

Từ cách định nghĩa của U^{i-1} và $\widehat{G}^{i-1}$, nghịch ảnh của W'_{i-1} qua phép đẳng cấu $f^i: \widehat{H}' \rightarrow G^0[W'_{i-1}]$ là một tập con của $\widehat{U}^{i-1}$.

Do đỉnh x được nối với tất cả các đỉnh của $\widehat{H}'$ nằm trong $\widehat{U}^{i-1}$ và tất cả các cạnh xy_u này đều được tô bởi màu 2 nên đồ thị $\widehat{H}'$ cùng với đỉnh x tạo thành một bản sao đơn sắc của H_2 trong G^i , nên phép chứng minh cho khẳng định (**) hoàn tất. $\square$



Hình ảnh minh họa bản sao đơn sắc của H_2 trong G^i .

Nhắc lại một lần nữa dạng nguyên mẫu của định lý Ramsey đã trình bày ở phần nào của bài viết: “Với mọi đồ thị H cho trước, tồn tại một đồ thị G sao cho với mọi phép 2 – tô màu cạnh của G đều chứa một đồ thị con đơn sắc $H \subseteq G$ ”. Đồ thị G mà theo đó khẳng định này xảy ra ngay lập tức từ định lý Ramsey là một đồ thị đầy đủ với bậc đủ lớn. Tuy nhiên, nếu chúng ta yêu cầu G sẽ không chứa bất kì đồ thị con đầy đủ nào lớn hơn các đồ thị con đầy đủ chứa trong H , nghĩa là $\omega(G) = \omega(H)$, thì vấn đề sẽ trở nên khá phức tạp ngay cả khi chúng ta không yêu cầu H phải là một đồ thị con cảm sinh trong G .

Phép chứng minh thứ hai cho Kết quả 9.3.1) giải quyết cả hai vấn đề trên cùng một lúc: cho trước một đồ thị H bất kì, chúng ta sẽ xây dựng một đồ thị Ramsey của H có cùng chỉ số clique với đồ thị H .

Nhắc lại rằng một đồ thị lưỡng phân P là một bộ ba (V_1, V_2, E) , trong đó V_1, V_2 là hai lớp phân hoạch đỉnh và $E \subseteq V_1 \times V_2$ là tập các đỉnh. Nguyên nhân cho cách kí hiệu rõ ràng này nằm ở việc chúng ta cần nhúng các đồ thị lưỡng phân vào nhau nhưng vẫn tôn trọng các đồ thị lưỡng phân này: cho trước một đồ thị lưỡng phân $P' = (V_1', V_2', E')$, một đơn ánh $\varphi: V_1 \cup V_2 \rightarrow V_1' \cup V_2'$ được gọi là một **phép nhúng P vào P'** nếu $\varphi(V_i) \subseteq V_i'$ với $i = 1, 2$ và $\varphi(v_1)\varphi(v_2)$ là một cạnh của P' khi và chỉ khi v_1v_2 là một cạnh của P .

Hơn nữa, chúng ta kí hiệu $\varphi: P \rightarrow P'$ thay cho cách kí hiệu $\varphi: V_1 \cup V_2 \rightarrow V_1' \cup V_2'$.

Để xây dựng được đồ thị Ramsey có cùng chỉ số clique với đồ thị H , chúng ta sẽ cần đến hai kết quả quan trọng sau:

Kết quả 9.3.2.

Mọi đồ thị lưỡng phân đều có thể nhúng vào một đồ thị lưỡng phân có dạng $(X, [X]^k, E)$ trong đó $E = \{xY | x \in Y\}$.

Chứng minh kết quả 9.3.2.

Giả sử P là một đồ thị lưỡng phân với các phân hoạch đỉnh $\{a_1, \dots, a_n\}$ và $\{b_1, \dots, b_m\}$.

Giả sử X là một $(2n + m) -$ tập nào đó, tạm giả sử là $X = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\}$; chúng ta sẽ định nghĩa một phép nhúng $\varphi: P \rightarrow (X, [X]^{n+1}, E)$.

Đầu tiên, chúng ta đặt $\varphi(a_i) := x_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét xem các $(n + 1) -$ tập $Y \subseteq X$ nào là phù hợp để đặt làm $\varphi(b_i)$ với một đỉnh b_i bất kì cho trước. Hiển nhiên, đỉnh này chỉ có thể liên hợp với ảnh của các đỉnh láng giềng của b_i , nghĩa là

$$Y \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \varphi(N_P(b_i)). \quad (1)$$

Do $d(b_i) \leq n$ nên điều kiện (1) được thỏa mãn với ít nhất một $(n + 1) -$ tập Y nào đó.

Ngoại trừ $\varphi(N_P(b_i))$, chúng ta sẽ đưa vào $Y = \varphi(b_i)$ đỉnh z_i đóng vai trò như một loại chỉ số để đảm bảo rằng $\varphi(b_i) \neq \varphi(b_j)$ với $i \neq j$ nếu b_i và b_j có cùng đỉnh láng giềng trong P . Để xác định chính xác các tập $Y = \varphi(b_i)$ này, chúng ta sẽ lấp đầy các chúng bằng các phần tử y_j cho đến khi $|Y| = n + 1$. $\square$

Kết quả sau sẽ chứng minh tính đúng đắn của Kết quả 9.3.1) cho các đồ thị lưỡng phân: mọi đồ thị lưỡng phân đều có ít nhất một đồ thị Ramsey – đồ thị Ramsey này còn là một đồ thị lưỡng phân.

Kết quả 9.3.3.

Với mọi đồ thị lưỡng phân P , tồn tại một đồ thị lưỡng phân P' sao cho, với mọi phép 2 – tô màu cạnh của P' , luôn tồn tại một phép nhúng $\varphi: P \rightarrow P'$ sao cho tất cả các cạnh của $\varphi(P)$ đều được tô bởi cùng một màu.

Chứng minh kết quả 9.3.3.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử đồ thị lưỡng phân P có dạng $(X, [X]^k, E)$ với $E = \{xY | x \in Y\}$.

Để hoàn tất chứng minh, chúng ta sẽ chỉ ra rằng đồ thị lưỡng phân P' có dạng $P' = (X', [X']^{k'}, E')$

với $k' := 2k - 1$, X' là một tập bất kì có lực lượng $|X'| = R\left(k', 2\binom{k'}{k}, k|X| + k - 1\right)$ (R là số Ramsey nêu trong Kết quả 9.1.4) và $E' := \{x'Y' | x' \in Y'\}$.

Xét một phép 2 – tô màu các cạnh của P' với hai màu α và β . Do trong số $|Y'| = 2k - 1$ cạnh liên thuộc với một đỉnh $Y' \in [X']^{k'}$ luôn có ít nhất k cạnh được tô bởi cùng một màu nên, với mọi Y' , chúng ta luôn có thể chọn ra một $k -$ tập $Z' \subseteq Y'$ sao cho tất cả các cạnh $x'Y'$ với $x' \in Z'$ đều được tô bởi cùng một màu; chúng ta sẽ gọi màu này là liên kết với Y' .

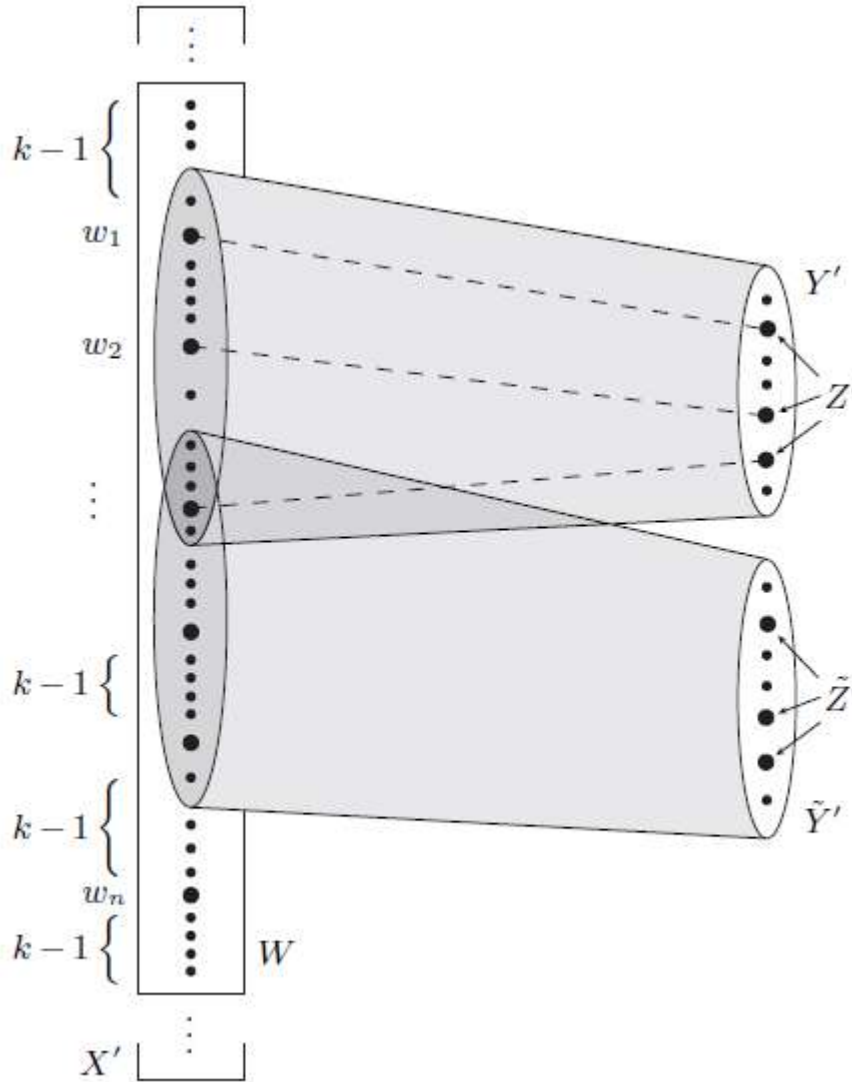
Nhận thấy rằng có $\binom{k'}{k}$ cách để một $k -$ tập Z' có thể nằm trong một $k' -$ tập Y' như vậy.

Giả sử X' là một tập sắp thứ tự tuyến tính bất kì. Khi đó, với mỗi $Y' \in [X']^{k'}$, tồn tại duy nhất một song ánh bảo toàn thứ tự $\sigma_{Y'}: Y' \rightarrow \{1, \dots, k'\}$.

Bây giờ, chúng ta tô màu $[X']^{k'}$ bởi $2 \binom{k'}{k}$ màu của tập $[\{1, \dots, k'\}]^k \times \{\alpha, \beta\}$: với mỗi $Y' \in [X']^{k'}$, màu của Y' sẽ được xác định bởi cặp $(\sigma_{Y'}(Z'), \gamma)$, trong đó γ là màu α hoặc β liên kết với Y' . Do $|X'|$ là số Ramsey tương ứng với các tham số $k', 2 \binom{k'}{k}, k|X| + k - 1$ nên X' có chứa một tập con đơn sắc W có lực lượng bằng $k|X| + k - 1$. Như vậy, với mọi $Y' \subseteq W$, tồn tại một tập $S \in [\{1, \dots, k'\}]^k$ sao cho $\sigma_{Y'}(Z') = S$. Hơn nữa, tất cả các tập $Y' \in [W]^{k'}$ đều cùng liên kết với một màu, tạm giả sử là màu α .

Ta sẽ xây dựng phép nhúng φ của P vào P' như sau:

Đầu tiên, chúng ta định nghĩa φ trên $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ bằng cách đặt $\varphi(x_i) =: w_i \in W$ sao cho $w_i < w_j$ theo quan hệ thứ tự của X' với $i < j$. Hơn nữa, chúng ta có thể chọn các w_i sao cho có chính xác $k - 1$ phần tử của W nhỏ hơn w_1 , chính xác $k - 1$ phần tử của W nằm giữa w_i và w_{i+1} với $i = 1, \dots, n - 1$ và chính xác $k - 1$ phần tử của W lớn hơn w_n (điều này suy ra từ việc $|W| = kn + k - 1$).



Hình ảnh minh họa.

Tiếp theo, chúng ta sẽ định nghĩa φ trên $[X]^k$.

Với mỗi $Y \in [X]^k$, chúng ta cần chọn $\varphi(Y) =: Y' \in [X']^{k'}$ sao cho các đỉnh láng giềng của Y' trong số các đỉnh trong $\varphi(X)$ thực sự là các ảnh của các đỉnh láng giềng của Y trong P , nghĩa là các đỉnh $\varphi(x)$ với $x \in Y$, và các cạnh nối giữa Y' và các đỉnh láng giềng này đều được tô bởi màu α .

Để xác định tập Y' , đầu tiên chúng ta sẽ chọn ra một tập con Z' đóng vai trò của $\{\varphi(x) | x \in Y\}$ (điều này suy ra từ việc có k đỉnh thuộc loại w_i) và mở rộng Z' thành một tập $Y' \in [W]^{k'}$ bằng cách bổ sung thêm $k' - k$ đỉnh $u \in W/\varphi(X)$. Theo cách xây dựng này, Z' sẽ nằm trong Y' , nghĩa là $\sigma_{Y'}(Z') = S$.

Phép xây dựng này luôn có thể thực hiện được do có chính xác $k - 1 = k' - k$ đỉnh khác của W nằm giữa hai đỉnh w_i liên tiếp. Khi đó, $Y' \cap \varphi(X) = Z' = \{\varphi(x) | x \in Y\}$, nên Y' có các đỉnh láng giềng nằm trong $\varphi(X)$ và tất cả các cạnh nối giữa Y' và các đỉnh láng giềng này đều được tô bởi màu α .

Sau cùng, φ là một đơn ánh trên $[X]^k$: ảnh Y' của các đỉnh Y khác nhau cũng sẽ khác nhau (điều này suy ra từ việc giao của các đỉnh Y' khác nhau với $\varphi(X)$ sẽ khác nhau).

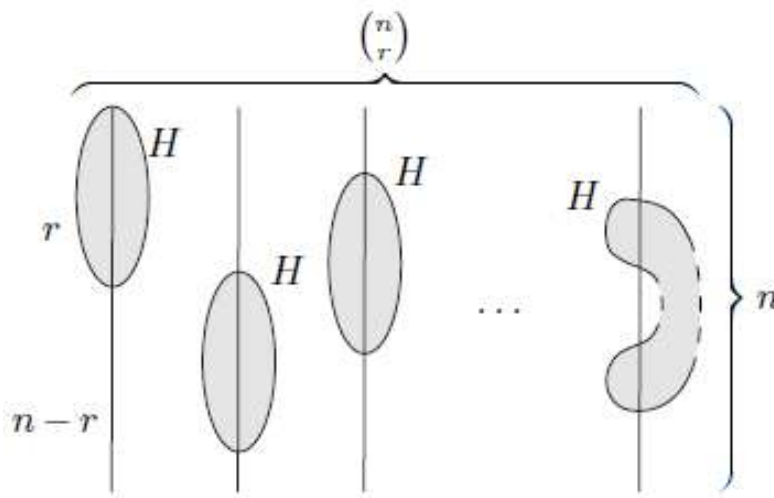
Tóm lại, φ thật sự là một phép nhúng của P vào P' . □

Chứng minh thứ hai cho kết quả 9.3.1.

Giả sử cho trước một đồ thị H bất kì và kí hiệu $n := R(r)$ là số Ramsey của $r := |H|$.

Khi đó, với mọi phép 2 – tô màu cạnh, đồ thị $K = K_n$ đều có chứa một bản sao đơn sắc H – bản sao này không nhất thiết cảm sinh trong K .

Chúng ta xây dựng đồ thị G^0 như sau. Đầu tiên, chúng ta sắp xếp lại các đỉnh của đồ thị K trên một cột và thay thế mỗi đỉnh bởi một hàng gồm $\binom{n}{r}$. Mỗi một cột trong $\binom{n}{r}$ cột phát sinh thêm này đều có thể được liên kết với một trong $\binom{n}{r}$ cách nhúng $V(H)$ vào $V(K)$. Như vậy, chúng ta đã cung cấp cho mỗi cột này các cạnh của một bản sao của H . Khi đó, đồ thị G^0 phát sinh thêm này bao gồm $\binom{n}{r}$ bản sao phân biệt của H và $(n - r) \binom{n}{r}$ đỉnh cô lập.



Hình ảnh minh họa đồ thị G^0 .

Về mặt hình thức, đồ thị G^0 được định nghĩa lại như sau:

Giả sử $V(K) = \{1, \dots, n\}$ và chọn ra các bản sao $H_1, \dots, H_{\binom{n}{r}}$ của H trong K sao cho các tập đỉnh đôi một phân biệt nhau (điều này suy ra từ việc mỗi r – tập nằm trong $V(K)$ đều xác định một bản sao H_j của H).

Khi đó, chúng ta định nghĩa

$$V(G^0) := \{(i, j) \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, \binom{n}{r}\},$$

$$E(G^0) := \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{r}} \{(i, j)(i', j) \mid ii' \in E(H_j)\}.$$

Ý tưởng chứng minh của Kết quả 9.3.1) là giảm trường hợp tổng quát của bài toán về trường hợp đồ thị lưỡng phân đã được chứng minh trong Kết quả 9.3.3). Bằng cách áp dụng lặp lại Kết quả 9.3.3) cho tất cả các các cặp hàng của G^0 , chúng ta sẽ xây dựng một đồ thị G đủ lớn sao cho với mọi phép tô màu cạnh của G đều có một bản sao đơn sắc của G_0 trong G đơn sắc trên tất cả các đồ thị con lưỡng phân cảm sinh bởi các cặp hàng của nó, nghĩa là các cạnh nằm giữa hai hàng giống nhau luôn có cùng một màu. Phép chiếu của $G^0 \subseteq G$ vào $\{1, \dots, n\}$ (bằng cách thu hẹp các hàng của nó) sẽ xác định một phép tô màu cạnh của K .

Từ cách định nghĩa K , một trong các $H_j \subseteq K$ này phải đơn sắc. Nhưng H_j này cũng xuất hiện với cùng cách tô màu trong hàng thứ j của đồ thị G^0 , nên nó cũng xuất hiện với cùng cách tô màu trong G . Hơn nữa, H_j còn là một đồ thị con cảm sinh trong G^0 , nên nó cũng là một đồ thị con cảm sinh trong G .

Về mặt hình thức, chúng ta sẽ xây dựng một dãy $G^0, \dots, G^m$ gồm các n – phân đồ thị G^k với $\{V_1^k, \dots, V_n^k\}$ là n – phân hoạch đỉnh tương ứng.

Đồ thị G^0 sẽ được định nghĩa như trên; kí hiệu $V_1^0, \dots, V_n^0$ là các hàng của nó:

$$V_i^0 := \{(i, j) \mid j = 1, \dots, \binom{n}{r}\}.$$

Kí hiệu $e_1, \dots, e_m$ là dãy các cạnh của đồ thị K . Với mỗi $k = 0, \dots, m - 1$, chúng ta sẽ xây dựng đồ thị G^{k+1} từ đồ thị G^k như sau:

Đầu tiên, giả sử $e_{k+1} = i_1 i_2$. Kí hiệu $P = (V_{i_1}^k, V_{i_2}^k, E)$ là đồ thị con lưỡng phân của G^k cảm sinh bởi hàng thứ i_1 và hàng thứ i_2 . Từ Kết quả 9.3.3), P có chứa một đồ thị Ramsey $P' = (W_1, W_2, E')$.

Tiếp theo, chúng ta xây dựng đồ thị $G^{k+1} \supseteq P'$ sao cho mọi phép nhúng $P \rightarrow P'$ đều có thể mở rộng thành một phép nhúng $G^k \rightarrow G^{k+1}$.

Kí hiệu:

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$ là tập tất cả các phép nhúng của P vào P' ,

$$V(G^{k+1}) := V_1^{k+1} \cup \dots \cup V_n^{k+1}, \text{ trong đó } V_i^{k+1} := \begin{cases} W_1 & \text{với } i = i_1 \\ W_2 & \text{với } i = i_2 \\ \bigcup_{p=1}^q (V_i^k \times \{p\}) & \text{với } i \notin \{i_1, i_2\} \end{cases}.$$

(Như vậy, với $i \notin \{i_1, i_2\}$, chúng ta có thể xem V_i^{k+1} như q bản sao rời rạc của V_i^k)

Bây giờ, chúng ta sẽ xây dựng tập các cạnh của G^{k+1} sao cho mọi phép mở rộng tầm thường của φ_p trên $V(G^k)$ đều là một phép nhúng của G^k vào G^{k+1} : với mỗi $p = 1, \dots, q$, kí hiệu $\psi_p: V(G^k) \rightarrow V(G^{k+1})$ là ánh xạ xác định bởi công thức

$$\psi_p(v) := \begin{cases} \varphi_p(v) & \text{với } v \in P \\ (v, p) & \text{với } v \notin P \end{cases}$$

Kí hiệu $E(G^{k+1}) := \bigcup_{p=1}^q \{\psi_p(v)\psi_p(v') \mid vv' \in E(G^k)\}$.

Khi đó, với mọi phép 2 – tô màu cạnh, G^{k+1} có chứa một bản sao cảm sinh $\psi_p(G^k)$ của G^k với các cạnh nằm trong P (những cạnh nằm giữa hàng thứ i_1 và hàng thứ i_2) đều được tô bởi cùng một màu: chúng ta chỉ cần chọn chỉ số p sao cho $\varphi_p(P)$ là một bản sao đơn sắc của P trong P' (điều này suy ra từ Kết quả 9.3.3).

Sau cùng, chúng ta sẽ chứng minh rằng đồ thị $G := G^m$ thỏa mãn yêu cầu của Kết quả 9.3.1).

Xét một phép 2 – tô màu cạnh bất kì của G . Từ cách xây dựng đồ thị G^m từ G^{m-1} , chúng ta có thể tìm được trong G^m một bản sao cảm sinh của G^{m-1} sao cho nếu $e_m = ii'$ thì tất cả các cạnh nằm giữa hàng thứ i và hàng thứ i' đều được tô bởi cùng một màu. Tương tự, chúng ta cũng có thể tìm được trong bản sao này của G^{m-1} một bản sao cảm sinh của G^{m-2} sao cho nếu $e_{m-1} = ii'$ thì tất cả các cạnh nằm giữa hàng thứ i và hàng thứ i' cũng được tô bởi cùng một màu. Lặp lại quá trình suy luận như trên, chúng ta sẽ tìm được một bản sao của G^0 trong G sao cho, với mọi cặp (i, i') , tất cả các cạnh nằm giữa V_i^0 và $V_{i'}^0$ đều được tô bởi cùng một màu. Nhắc lại rằng, chúng ta đã chứng minh được G^0 có chứa một bản sao cảm sinh đơn sắc H_j của H . □

9.4. Tính chất Ramsey và tính liên thông.

Theo định lí Ramsey, mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa một đồ thị con cảm sinh rất dày đặc hoặc rất thưa thớt có bậc cho trước (chẳng hạn: mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa một đồ thị con cảm sinh có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$). Nếu chúng ta giả thiết thêm G là một đồ thị liên thông thì chúng ta thu được kết quả sau:

Kết quả 9.4.1.

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị liên thông G có bậc $\geq n$ đều có chứa một đồ thị con cảm sinh có dạng K_r hoặc $K_{1,r}$ hoặc P_r .

Chứng minh kết quả 9.4.1.

Kí hiệu $d + 1$ là số Ramsey của r và n là một số tự nhiên nào đó $> 1 + rd^r$. Giả sử G là một đồ thị liên thông có bậc $\geq n$. Nếu đồ thị G có chứa một đỉnh v có bậc $\geq d + 1$ thì $N(v)$ cảm sinh một đồ thị con K_r hoặc $\{v\} \cup N(v)$ cảm sinh một đồ thị con $K_{1,r}$ (điều này suy ra từ Kết quả 9.1.1 và cách định nghĩa chỉ số d). Nếu $\Delta(G) \leq d$ thì G có bán kính $> r$ (điều này suy ra từ Kết quả 1.3.3), nghĩa là tồn tại hai đỉnh nằm trong G có khoảng cách $\geq r$. Điều này chỉ ra rằng G có chứa một đồ thị con cảm sinh có dạng P_r . □

Nhận thấy rằng tập các đồ thị con cảm sinh nêu trong Kết quả 9.4.1) là nhỏ nhất có thể.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{G}$ là một tập các đồ thị con liên thông nào đó có cùng tính chất, nghĩa là với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, mọi đồ thị liên thông G đủ lớn đều có chứa một bản sao cảm sinh của một đồ thị có bậc $\geq r$ trong $\mathcal{G}$. Khi đó, $\mathcal{G}$ phải chứa một đồ thị đầy đủ đủ lớn hoặc một đường đi đủ lớn hoặc một đồ thị star đủ lớn (điều này suy ra từ việc nếu chúng ta chọn G là một đồ thị đầy đủ hoặc một đường đi hoặc một đồ thị star thì các đồ thị con của nó cũng thuộc các loại này). Kết quả 9.4.1) chỉ ra rằng tập các đồ thị con cảm sinh này tập các đồ thị con cảm sinh tối thiểu thỏa mãn tính chất nêu trên.

Về mặt nguyên tắc, chúng ta cũng có thể xác định một tập hợp $\mathcal{G}$ như trên cho lớp các đồ thị k – liên thông nghĩa là chúng ta có thể xác định một tập hợp tối thiểu $\mathcal{G}$ sao cho mọi đồ thị k – liên thông đủ lớn đều có chứa một đồ thị con nào đó nằm trong tập hợp $\mathcal{G}$. Thật không may, $\mathcal{G}$ dường như phát triển rất nhanh theo chỉ số k .

Kết quả 9.4.2.

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị 2 – liên thông G có bậc $\geq n$ đều có chứa một phân bù topo có dạng C_r hoặc $K_{2,r}$.

Chứng minh kết quả 9.4.2.

Kí hiệu $d + 1$ là số Ramsey của r và n là một số tự nhiên nào đó $> 1 + rd^r$. Giả sử G là một đồ thị 2 – liên thông có bậc $\geq n$.

Từ Kết quả 1.3.3), chúng ta suy ra rằng G có chứa một đỉnh có bậc $> d$ hoặc $\text{diam}(G) \geq \text{rad}(G) > r$.

Giả sử $\text{diam}(G) > r$, nghĩa là tồn tại hai đỉnh $a, b \in G$ sao cho khoảng cách giữa chúng $> r$.

Từ Định lý Menger (Kết quả 3.3.5), G có chứa hai $a - b$ đường đi độc lập, nên G có chứa một chu trình có chiều dài $> r$.

Giả sử G có chứa một đỉnh v có bậc $> d$. Do G là một đồ thị 2 – liên thông nên $G - v$ là một đồ thị liên thông. Như vậy, $G - v$ có chứa một cây khung; kí hiệu T là một cây khung tối thiểu trong $G - v$ chứa tất cả các đỉnh lá giềng của v . Khi đó, mọi lá của cây T đều là một đỉnh lá giềng của v . Từ cách định nghĩa d , chúng ta suy ra rằng T có chứa một đỉnh có bậc $\geq r$ hoặc T có chứa một đường đi có chiều dài $\geq r$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng đường đi này nối giữa hai đỉnh lá của cây T . Nếu T có chứa một đường đi có chiều dài $\geq r$ thì, bằng cách nối cả hai đỉnh lá này với đỉnh v , một đường đi như vậy sẽ tạo thành một chu trình có chiều dài $\geq r$ trong G . Nếu T có chứa một đỉnh u có bậc $\geq r$ thì, bằng cách nối đỉnh u này với đỉnh v bởi r đường đi độc lập nằm trong T , chúng tạo thành một đồ thị $TK_{2,r}$.

Tuy nhiên, bằng cách nói lỏng yêu cầu bài toán từ “đồ thị con cảm sinh” về thành “phần bù topo” hoặc “phần bù”, chúng ta sẽ thu được một số kết quả thú vị cho trường hợp $k = 3$ và $k = 4$.

Kết quả 9.4.3. (Oporowski – Oxley – Thomas)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị 3 – liên thông G có bậc $\geq n$ đều có chứa một phân bù có dạng một đồ thị wheel có bậc $\geq r$ hoặc $K_{3,r}$.

Đồ thị có dạng $C_n * \overline{K_2}$ ($n \geq 4$) được gọi là một **đồ thị double wheel**, đồ thị 1 – skeleton tam giác của hình trụ được gọi là một **đồ thị crown**, đồ thị 1 – skeleton tam giác của dải Möbius được gọi là một **đồ thị Möbius crown**.



Hình ảnh minh họa đồ thị crown và đồ thị Möbius crown.

Kết quả 9.4.4. (Oporowski – Oxley – Thomas)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho mọi đồ thị 4 – liên thông G có bậc $\geq n$ đều có chứa một phần bù có dạng một đồ thị double wheel có bậc $\geq r$ hoặc một đồ thị crown có bậc $\geq r$ hoặc một đồ thị Möbius crown có bậc $\geq r$ hoặc $K_{4,r}$.