

Chủ đề 10. Đồ thị Hamiltonian

Nhắc lại rằng trong mục “1.8. Dây truyền Euler”, chúng ta đã có một số khảo sát đơn giản xem khi nào thì một đồ thị G có chứa một dây chuyền Euler – một dây chuyền đóng kín đi qua mọi cạnh chính xác một lần. Kết quả 1.8.1) cũng đã đưa ra một lời giải tương đối thỏa đáng cho vấn đề này. Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét bài toán tương tự đối với các “đỉnh”: “Khảo sát xem khi nào thì một đồ thị G có chứa một dây chuyền đóng kín đi qua mọi đỉnh của G chính xác một lần?”. Nhận thấy rằng nếu $|G| \geq 3$ thì mọi dây chuyền như vậy đều là một chu trình trong G và chúng ta sẽ gọi nó là một **chu trình Hamilton của G** . Nếu G có chứa một chu trình Hamilton thì chúng ta sẽ gọi G là một **Hamiltonian**. Tương tự, chúng ta cũng sẽ gọi một đường đi đi qua mọi đỉnh của G chính xác một lần là một đường đi Hamilton của G .

Việc xác định xem một đồ thị G cho trước có phải là một Hamiltonian hay không khó khăn hơn rất nhiều so với việc xác định xem nó có phải là một Eulerian hay không. Tính cho đến nay thì chúng ta chưa tìm ra được một tiêu chuẩn nào “đủ tốt” để giúp xác định xem một đồ thị G cho trước có phải là một Hamiltonian hay không. Chúng ta sẽ bắt đầu việc khảo sát bằng cách trình bày một số điều kiện đơn giản để đảm bảo sự tồn tại của một chu trình Hamilton (mục “10.1. Một số điều kiện đơn giản” và “10.2. Chu trình Hamilton và bậc bậc”). Phần còn lại của bài viết sẽ được dành để trình bày một kết quả rất đẹp của nhà toán học Fleischner: “Đồ thị bình phương của mọi đồ thị 2 – liên thông đều có chứa một chu trình Hamilton”. Đây là một trong những kết quả quan trọng của lý thuyết đồ thị Hamiltonian. Phép chứng minh mà chúng ta trình bày cho Kết quả 10.3.1) trong bài viết này được đề xuất bởi nhà toán học Ríha tuy dài hơn so với đa số các phép chứng minh khác nhưng không quá khó để hiểu.

10.1. Một số điều kiện đơn giản.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Loại điều kiện như thế nào đủ để đảm bảo một đồ thị G có chứa một chu trình Hamiltonian?”. Nhận thấy rằng các loại điều kiện mang tính toàn cục (chẳng hạn như mật độ cạnh cao) là hoàn toàn không đủ: chúng ta không thể làm được gì nếu không có điều kiện cục bộ mọi đỉnh có ít nhất hai đỉnh láng giềng. Tuy nhiên, những điều kiện cục bộ có dạng $\delta(G) \geq \alpha$ với α là một số thực nào đó cũng không đủ: chúng ta dễ dàng tìm được các đồ thị không có chứa chu trình Hamilton nhưng có bậc nhỏ nhất $\delta(G)$ vượt qua bất kì giới hạn hằng số nào cho trước.

Kết quả kinh điển sau đây được rút ra từ phân tích nền tảng mà chúng ta vừa trình bày ở trên:

Kết quả 10.1.1. (Dirac)

Mọi đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh và bậc nhỏ nhất $\geq \frac{n}{2}$ đều có chứa một chu trình Hamilton.

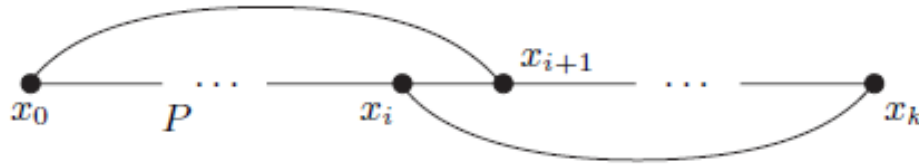
Chứng minh kết quả 10.1.1.

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (V, E)$ với $|G| = n \geq 3$ và $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$.

Khi đó, G là một đồ thị liên thông: trường hợp ngược lại, bậc của một đỉnh bất kì nằm trong thành phần nhỏ nhất C của G phải nhỏ hơn $|C| \leq \frac{n}{2}$.

Giả sử $P = x_0 \dots x_k$ là đường đi có chiều dài lớn nhất trong G . Từ tính tối đại của P , tất cả các đỉnh láng giềng của x_0 và tất cả các đỉnh láng giềng của x_k đều nằm trong P . Như vậy, có ít nhất $\frac{n}{2}$ đỉnh trong số các đỉnh $x_0, \dots, x_{k-1}$ liên hợp với x_k và có ít nhất $\frac{n}{2}$ đỉnh trong số k đỉnh x_i này sao cho $x_0 x_{i+1} \in E$.

Theo nguyên lí chuồng bồ câu, tồn tại một chỉ số i thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện nêu trên, nghĩa là $x_0 x_{i+1} \in E$ và $x_i x_k \in E$ với $i = 0, \dots, k-1$.



Hình ảnh minh họa cách xây dựng chu trình Hamilton nêu trong chứng minh của Kết quả 10.1.1.

Ta sẽ chứng minh rằng chu trình $C := x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$ là một chu trình Hamilton của G .

Thật vậy, do G là một đồ thị liên thông nên, nếu C không phải là một chu trình Hamilton của G thì C sẽ có một đỉnh láng giềng nằm trong $G - C$. Bằng cách tổ hợp đỉnh này với một đường đi khung của C , chúng ta sẽ thu được một đường đi có chiều dài lớn hơn P , mâu thuẫn với tính tối đại của P . $\square$

Nhận thấy rằng chúng ta không thể thay thế chặn dưới $\frac{n}{2}$ bởi $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$: nếu n là một số lẻ và G là hợp của hai bản sao của $K_{\frac{n}{2}}$ giao nhau tại một đỉnh thì $\delta(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ nhưng $\kappa(G) = 1$, nên G sẽ không có chứa chu trình Hamilton nào. Nói cách khác, điều kiện $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ là đủ để đảm bảo G sẽ là một đồ thị 2 – liên thông: điều kiện $\delta(G) \geq 2$ đủ để đảm bảo cho tính Hamiltonian của G . Như vậy, có vẻ như việc khảo sát một điều kiện có dạng $\kappa(G) \geq \alpha$ với α là một số thực nào đó cho $\kappa(G)$ thay vì cho $\delta(G)$ sẽ dễ dàng đảm bảo G có chứa một chu trình Hamilton hơn. Tuy nhiên, mọi việc xảy ra không như chúng ta nhận định: mặc dù mọi đồ thị k – liên thông đủ lớn đều có chứa một chu trình với chiều dài khá lớn (mọi đồ thị k – liên thông với bậc $\geq 2k$ đều có chứa một chu trình có chiều dài $\geq 2k$), nhưng các đồ thị $K_{n,k}$ lại chỉ ra rằng chiều dài của các chu trình này không nhất thiết phải tăng theo k .

Một điều rất lí thú ở đây là bất biến $\alpha(G)$ cũng có tính chất tương tự: một điều kiện có dạng $\alpha(G) \leq \alpha$ với α là một số thực nào đó sẽ đảm bảo G có chứa một chu trình với chiều dài khá lớn, mặc dù chu trình này không nhất thiết là chu trình Hamilton. Tuy nhiên, bằng cách kết hợp lại, hai dạng điều kiện về chỉ số liên thông $\kappa(G)$ và chỉ số độc lập $\alpha(G)$ bổ sung cho nhau một cách đáng ngạc nhiên để tạo ra một dạng điều kiện đủ cho Hamiltonian:

Kết quả 10.1.2.

Mọi đồ thị G với $|G| \geq 3$ và $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ đều có chứa một chu trình Hamilton.

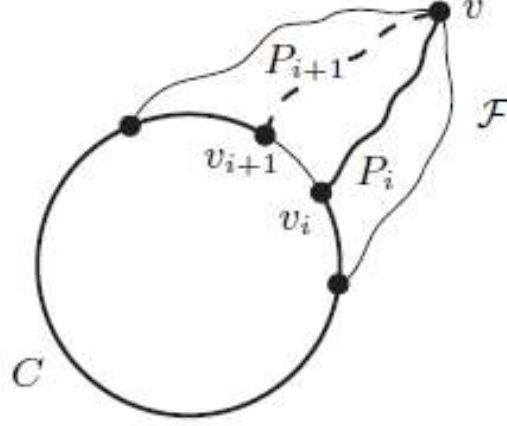
Chứng minh kết quả 10.1.2.

Kí hiệu $k := \kappa(G)$ và C là một chu trình có chiều dài lớn nhất chứa trong G .

Bằng cách đánh số lại các đỉnh của C theo nhóm cyclic $\mathbb{Z}_n$ với $n := |C|$, nghĩa là $V(C) = \{v_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$ với $v_i v_{i+1} \in E(C)$ với mọi $i \in \mathbb{Z}_n$. Nếu C không phải là một chu trình Hamilton thì tồn tại một đỉnh $v \in G - C$ và một $v - C$ fan $\mathcal{F} = \{P_i | i \in I\}$ chứa trong G , trong đó $I \subseteq \mathbb{Z}_n$ và mỗi đường đi P_i đều kết thúc tại đỉnh v_i . Kí hiệu $\mathcal{F}$ là một $v - C$ fan với lực lượng tối đại.

Khi đó, $vv_j \notin E(G)$ với mọi $j \notin I$, và $|\mathcal{F}| \geq \min\{k, |C|\}$ (điều này suy ra từ định lí Menger) (1)

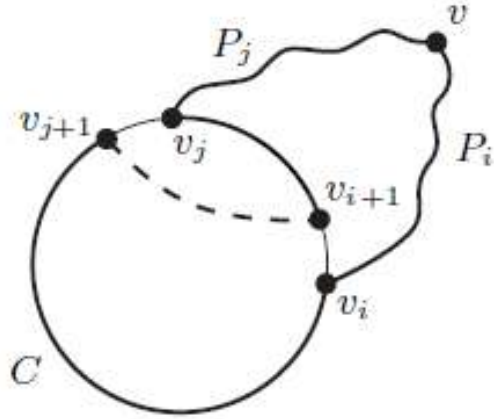
Nhận thấy rằng, với mọi $i \in I$, chúng ta có $i + 1 \notin I$: trường hợp ngược lại, $(C \cup P_i \cup P_{i+1}) - v_i v_{i+1}$ sẽ là một chu trình có chiều dài lớn hơn chu trình C .



Hình ảnh minh họa chu trình $(C \cup P_i \cup P_{i+1}) - v_i v_{i+1}$.

Như vậy, $|\mathcal{F}| < |C|$, nên $|I| = |\mathcal{F}| \geq k$ (điều này suy ra từ khẳng định (1)).

Nhận thấy thêm rằng, với mọi $i, j \in I$, $v_{i+1} v_{j+1} \notin E(G)$: trường hợp ngược lại, $(C \cup P_i \cup P_j) + v_{i+1} v_{j+1} - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1}$ sẽ là một chu trình có chiều dài lớn hơn chu trình C .



Hình ảnh minh họa chu trình $(C \cup P_i \cup P_j) + v_{i+1} v_{j+1} - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1}$.

Như vậy, $\{v_{i+1} | i \in I\} \cup \{v\}$ là một tập gồm $k + 1$ hoặc nhiều hơn các đỉnh độc lập trong G , điều này mâu thuẫn với nhận định $\alpha(G) \leq k$. □

Một điều đáng ngạc nhiên đó là tính Hamiltonian đối với các đồ thị khả phẳng có liên quan trực tiếp đến bài toán bốn màu. Như đã khảo sát trong mục “6.5. Cấu trúc của các đồ thị G có một $k -$ luồng với $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ”, định lí bốn màu tương đương với việc không tồn tại các đồ thị snark khả phẳng, nghĩa là mọi

khối lập phương không có chứa cạnh cầu khả phẳng đều có một 4 – luồng. Để làm giảm tính phức tạp của định lý bốn màu, chúng ta sẽ thay giả thiết “không có chứa cạnh cầu” bằng giả thiết “3 – liên thông” và nhận xét rằng mọi đồ thị Hamilton đều có một 4 – luồng. Như vậy, để chứng minh tính đúng đắn của định lý bốn màu, chúng ta phỏng đoán rằng: “Mọi khối lập phương 3 – liên thông khả phẳng đều có chứa một chu trình Hamilton!”. Thật không may mắn, phỏng đoán này là sai: ví dụ phản chứng đầu tiên được chỉ ra bởi nhà toán học Tutte vào năm 1946. Mười năm sau, nhà toán học Tutte đã chứng minh kết quả sâu sắc sau đây như một dạng suy yếu tốt nhất có thể của định lý bốn màu:

Kết quả 10.1.3. (Tutte)

Mọi đồ thị khả phẳng 4 – liên thông đều có chứa một chu trình Hamilton.

10.2. Chu trình Hamilton và dãy bậc.

Về mặt lịch sử, định lý Dirac đóng vai trò như điểm khởi đầu cho sự phát triển của một loạt các điện kiện cần về tính Hamiltonian. Sự phát triển lên đến đỉnh điểm trong một điều kiện cần duy nhất bao gồm tất cả các điều kiện cần đã khảo sát trước đó: định lý Chvátal mà chúng ta sẽ chứng minh trong bài viết này.

Giả sử G là một đồ thị với n đỉnh và dãy $d_1, \dots, d_n$ các bậc của G sao cho $d_1 \leq \dots \leq d_n$.

Khi đó, $n -$ bộ $(d_1, \dots, d_n)$ sẽ được gọi là **dãy bậc của G** .

Nhận thấy rằng mặc dù G có thể có nhiều cách đánh số khác nhau cho các đỉnh nhưng dãy bậc của nó thì sẽ tồn tại duy nhất.

Dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ được gọi là **Hamiltonian** nếu mọi đồ thị với n đỉnh có dãy bậc lớn điểm hơn $(a_1, \dots, a_n)$ đều là một đồ thị Hamiltonian. (Dãy $(d_1, \dots, d_n)$ được gọi là **lớn điểm hơn** $(a_1, \dots, a_n)$ nếu $d_i \geq a_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$)

Kết quả sau đây sẽ chỉ ra một đặc trưng quan trọng cho tất cả các dãy Hamiltonian:

Kết quả 10.2.1. (Chvátal)

Dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ sao cho $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ và $n \geq 3$ là một dãy Hamiltonian nếu và chỉ nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $i < \frac{n}{2}$:

$$a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i.$$

Chứng minh kết quả 10.2.1.

Giả sử cho trước một dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ sao cho $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ và $n \geq 3$. Đầu tiên, giả sử dãy các số nguyên này thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán và chúng ta sẽ chứng minh nó là một dãy Hamiltonian.

Giả sử tồn tại một đồ thị $G = (V, E)$ với dãy bậc $(d_1, \dots, d_n)$ sao cho $d_i \geq a_i$, với mọi i nhưng G không có chứa bất kì chu trình Hamilton nào. (1)

Kí hiệu G là một đồ thị thỏa mãn khẳng định (1) và có số cạnh lớn nhất có thể được; kí hiệu $(v_1, \dots, v_n)$ là một cách đánh số tập đỉnh V sao cho $d(v_i) = d_i$ với mọi i .

Từ khẳng định (1), chúng ta có thể biểu diễn lại điều kiện ràng buộc trên dãy $(a_1, \dots, a_n)$ cho dãy $(d_1, \dots, d_n)$ như sau:

$$d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i, \text{ với mọi } i < \frac{n}{2}. \quad (2)$$

Kí hiệu x, y là hai đỉnh phân biệt và không liên hợp với nhau trong G sao cho $d(x) \leq d(y)$ và tổng $d(x) + d(y)$ đạt giá trị lớn nhất có thể được.

Nhận thấy rằng dãy bậc của $G + xy$ lớn điểm hơn $(d_1, \dots, d_n)$, nên nó cũng sẽ lớn điểm hơn $(a_1, \dots, a_n)$.

Từ tính tối đại của G , cạnh xy phải nằm trên một chu trình Hamilton H nào đó của $G + xy$.

Khi đó, $H - xy$ sẽ là một đường đi Hamilton có dạng $x_1 \dots x_n$ trong G với $x_1 = x$ và $x_n = y$.

Tương tự như trong phép chứng minh của định lí Dirac, chúng ta sẽ xét hai tập chỉ số sau

$$I := \{i | xx_{i+1} \in E\} \text{ và } J := \{j | x_jy \in E\}.$$

Khi đó, $I \cup J \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ và $I \cap J = \emptyset$ (điều này suy ra từ việc G không có chứa bất kì chu trình Hamilton nào).

Như vậy, $d(x) + d(y) = |I| + |J| < n$, nên $h := d(x) < \frac{n}{2}$ (điều này suy ra từ cách chọn đỉnh x). (3)

Nhận thấy rằng do $x_iy \notin E$ với mọi $i \in I$ nên tất cả các đỉnh x_i đều là các ứng cử viên để làm đỉnh x cùng với đỉnh y như trên.

Từ cách chọn $\{x, y\}$ sao cho tổng $d(x) + d(y)$ đạt giá trị lớn nhất, $d(x_i) \leq d(x)$ với mọi $i \in I$.

Như vậy, G có chứa ít nhất $|I| = h$ đỉnh có bậc không vượt quá h , nên $d_h \leq h$.

Từ khẳng định (2), $d_{n-h} \geq n - h$, nên $h + 1$ đỉnh $v_{n-h}, \dots, v_n$ đều có bậc lớn hơn hoặc bằng $n - h$.

Do $d(x) = h$ nên có ít nhất một đỉnh z nào đó trong các đỉnh này không liên hợp với x nên

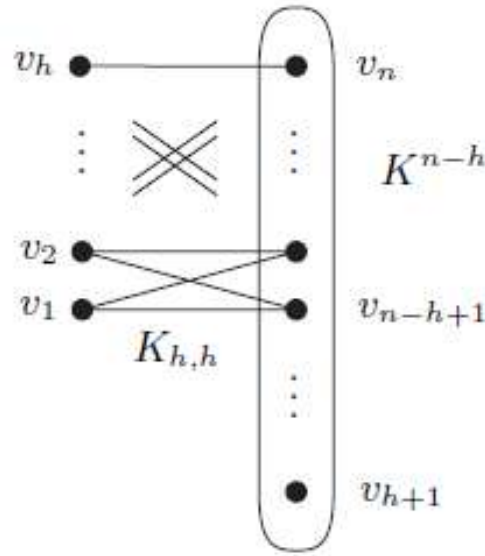
$$d(x) + d(y) \geq h + (n - h) = n.$$

Điều này mâu thuẫn với khẳng định (3).

Ngược lại, chúng ta sẽ chứng minh rằng, với mọi dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ sao cho $a_h \leq h$ và $a_{n-h} \leq n - h$ với một chỉ số $h < \frac{n}{2}$, tồn tại một đồ thị G có dãy bậc lớn điểm hơn $(a_1, \dots, a_n)$ nhưng không chứa bất kì chu trình Hamilton nào.

Nhận thấy rằng, với mọi h cho trước, dãy $\left(\underbrace{h, \dots, h}_{h \text{ lần}}, \underbrace{n - h - 1, \dots, n - h - 1}_{n-2h \text{ lần}}, \underbrace{n - 1, \dots, n - 1}_{h \text{ lần}} \right)$ là dãy các số nguyên “lớn nhất” trong các dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ sao cho $a_h \leq h$ và $a_{n-h} \leq n - h$ với một chỉ số $h < \frac{n}{2}$, nên chúng ta chỉ cần chỉ ra một đồ thị G không chứa chu trình Hamilton nào cho dãy các số nguyên này là đủ. (4)

Xét đồ thị G với tập đỉnh $\{v_1, \dots, v_n\}$ và tập cạnh $\{v_i v_j \mid i, j > h\} \cup \{v_i v_j \mid i \leq h; j > n - h\}$, nghĩa là G là hợp của đồ thị K_{n-h} với tập đỉnh $\{v_{h+1}, \dots, v_n\}$ với đồ thị $K_{h,h}$ với các tập phân hoạch đỉnh $\{v_1, \dots, v_h\}$ và $\{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$.



Hình vẽ minh họa.

Nhận thấy rằng G nhận $\left(\underbrace{h, \dots, h}_{h \text{ lần}}, \underbrace{n-h-1, \dots, n-h-1}_{n-2h \text{ lần}}, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_{h \text{ lần}} \right)$ làm dãy bậc và G cũng không có chứa bất kì chu trình Hamilton nào. □

Bằng cách áp dụng Kết quả 10.2.1) cho đồ thị $G * K_1$, chúng ta cũng tìm được một điều kiện tương tự cho sự tồn tại của các đường đi Hamilton. Đồng thời, chúng ta cũng có định nghĩa tương tự sau cho các đường đi Hamilton:

Dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ được gọi là **path – Hamiltonian** nếu mọi đồ thị với n đỉnh có dãy bậc lớn điểm hơn $(a_1, \dots, a_n)$ đều có chứa một đường đi Hamilton.

Kết quả 10.2.2.

Dãy các số nguyên $(a_1, \dots, a_n)$ sao cho $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ và $n \geq 2$ là một dãy path – Hamiltonian nếu và chỉ nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi $i < \frac{n}{2}$:

$$a_i < i \Rightarrow a_{n+1-i} \geq n - i.$$

10.3. Chu trình Hamilton trong một đồ thị bình phương.

Giả sử cho trước một đồ thị G và một số nguyên dương d , kí hiệu G^d là đồ thị xác định trên tập đỉnh $V(G)$ và hai đỉnh sẽ liên hợp với nhau trong G^d nếu và chỉ nếu khoảng cách trong G giữa chúng không vượt quá d . Hiển nhiên, $G = G^1 \subseteq G^2 \subseteq \dots$.

Mục đích chính trong mục này của chúng ta là chứng minh kết quả cơ bản sau:

Kết quả 10.3.1. (Fleischner)

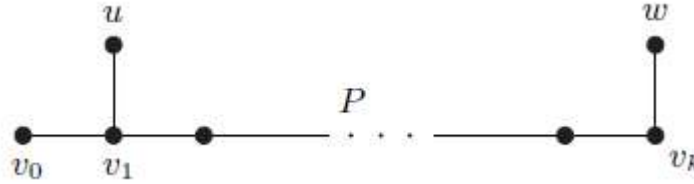
Nếu G là một đồ thị 2 – liên thông thì G^2 sẽ có chứa một chu trình Hamilton nào đó.

Đầu tiên, chúng ta chứng minh ba kết quả phụ quan trọng sau để làm nền tảng cho phép chứng minh của kết quả 10.3.1).

Cạnh $e \in G^2$ được gọi là **bắc cầu đỉnh $v \in G$** nếu các đầu mút của nó đều là các đỉnh láng giềng của v trong G .

Kết quả 10.3.2.

Giả sử cho trước một đường đi $P = v_0 \dots v_k$ ($k \geq 1$) và kí hiệu G là đồ thị thu được từ P bằng cách bổ sung thêm hai đỉnh u, w và hai cạnh uv_1 và wv_k .



Hình vẽ minh họa.

Khi đó:

- P^2 có chứa một đường đi Q từ v_0 đến v_1 với $V(Q) = V(P)$ và $v_{k-1}v_k \in E(Q)$ sao cho mỗi đỉnh $v_1, \dots, v_{k-1}$ đều được bắc cầu bởi một cạnh nào đó trong Q .
- G^2 có chứa hai đường đi phân biệt Q, Q' , đường đi Q từ v_0 đến v_k và đường đi Q' từ u đến w , sao cho mỗi đỉnh $v_1, \dots, v_k$ đều được bắc cầu bởi một cạnh nào đó trong Q hoặc Q' .

Chứng minh kết quả 10.3.2.

i) Nếu k là một số chẵn thì chúng ta đặt $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_kv_{k-1}v_{k-3} \dots v_3v_1$; nếu k là một số lẻ thì chúng ta đặt $Q := v_0v_2 \dots v_{k-1}v_kv_{k-2} \dots v_3v_1$.

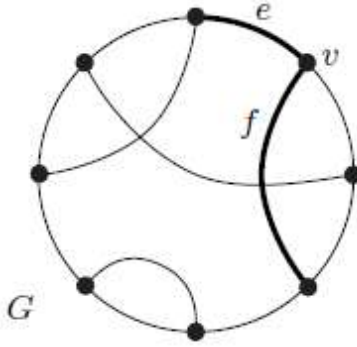
ii) Nếu k là một số chẵn thì chúng ta đặt $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_k$; nếu k là một số lẻ thì chúng ta đặt

$Q := v_0v_1v_3 \dots v_{k-2}v_k$. Trong cả hai trường hợp trên, chúng ta luôn đặt Q' là $u - w$ đường đi trên tập các đỉnh còn lại của G^2 . □

Kết quả 10.3.3.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị khối lập phương có chứa một chu trình Hamilton C .

Kí hiệu $e \in E(C)$ và $f \in E/E(C)$ là các cạnh nào đó có chung một đầu mút v .

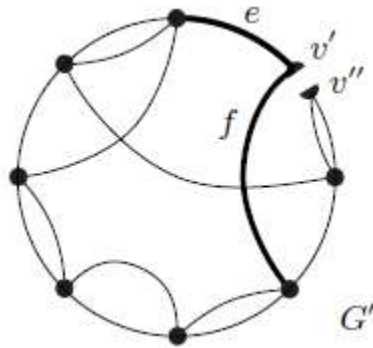


Hình vẽ minh họa đa đồ thị G .

Khi đó, tồn tại một dãy chuyển đóng kín trong G đi qua cạnh e đúng một lần, đi qua các cạnh khác của chu trình C một hoặc hai lần, đi qua các cạnh nằm trong $E/E(C)$ đúng một lần. Hơn nữa, chúng ta có thể chọn dãy chuyển này sao cho dãy chuyển này có chứa bộ ba (e, v, f) , nghĩa là nó đi qua cạnh e theo hướng của v và rời khỏi v theo cạnh f .

Chứng minh kết quả 10.3.3.

Từ mục “1.2. Bậc của một đỉnh”, chu trình C có chiều dài là một số chẵn. Bằng cách thay các cạnh của chu trình C khác với cạnh e bằng một cạnh kép nào đó và tách đỉnh v thành hai đỉnh v', v'' với đỉnh v' liên hợp với e và f còn v'' liên hợp với hai cạnh khác cũng có một đầu mút là đỉnh v , chúng ta nhận được một đa đồ thị 4 – regular G' .



Hình vẽ minh họa đa đồ thị G .

Từ Kết quả 1.8.1), đa đồ thị G' này có chứa một dãy chuyển Euler nào đó. Dãy chuyển Euler này sẽ cảm sinh ra dãy chuyển cần tìm trong G . □

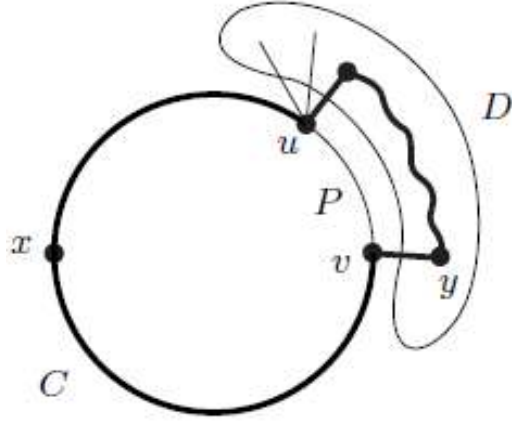
Kết quả 10.3.4.

Với mọi đồ thị 2 – liên thông G và $x \in V(G)$, tồn tại một chu trình $C \subseteq G$ đi qua đỉnh x và đi qua tất cả các đỉnh láng giềng của một đỉnh $y \neq x$ nào đó, nghĩa là $N_G(y) \subseteq V(C)$.

Chứng minh kết quả 10.3.4.

Nếu G có chứa một chu trình Hamilton thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Trường hợp ngược lại, do G là một đồ thị 2 – liên thông nên tồn tại ít nhất một chu trình $C' \subseteq G$ đi qua đỉnh x . Kí hiệu D là một thành phần liên thông nào đó của $G - C'$. Giả sử C' và D được chọn sao cho $|D|$ đạt giá trị nhỏ nhất có thể được. Do G là một đồ thị 2 – liên thông nên D phải có ít nhất hai đỉnh láng giềng nằm trên C' .

Khi đó, C' có chứa một đường đi P nối giữa hai đỉnh láng giềng u, v của D sao cho phần trong P^0 không có chứa đỉnh x và không chứa bất kì đỉnh láng giềng nào của D .



Hình vẽ minh họa.

Bằng cách thay đường đi P trong C' bằng một $u - v$ đường đi đi qua D , chúng ta sẽ thu được một chu trình C đi qua đỉnh x và một đỉnh láng giềng y của v trong D . Nếu y có một đỉnh láng giềng z trong $G - C$ thì z phải nằm trong một thành phần liên thông $D' \subsetneq D$ nào đó của $G - C$, điều này mâu thuẫn với cách chọn C' và D . Như vậy, tất cả các đỉnh láng giềng của y đều nằm trong C . $\square$

Chứng minh kết quả 10.3.1.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$: với mọi đỉnh $x^* \in G$, tồn tại một chu trình Hamilton H trong G^2 thỏa mãn yêu cầu sau:

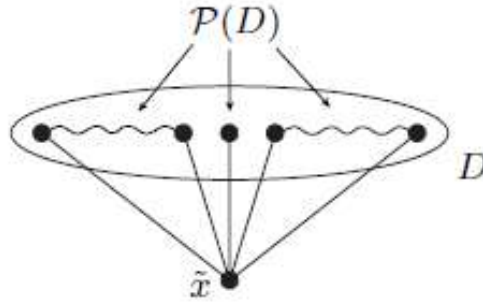
Tất cả các cạnh của H nhận x^ làm đầu mút đều nằm trong G .* (*)

Với $|G| = 3$, chúng ta có $G = K_3$ và tính đúng đắn của khẳng định (*) là hiển nhiên. Giả sử $|G| \geq 4$ và khẳng định (*) đã được chứng minh cho mọi đồ thị có bậc nhỏ hơn $|G|$.

Giả sử cho trước một đỉnh $x^* \in V(G)$. Từ Kết quả 10.3.4), tồn tại một chu trình $C \subseteq G$ đi qua đỉnh x^* và đi qua tất cả các đỉnh láng giềng của một đỉnh $y^* \neq x^*$.

Nếu C là một chu trình Hamilton trong G thì tính đúng đắn của (*) là hiển nhiên. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $G - C \neq \emptyset$. Xét một thành phần liên thông D của $G - C$. Kí hiệu $\tilde{D}$ là đồ thị $G/(G - D)$ thu được từ G bằng cách thu hẹp $G - D$ về thành một đỉnh $\tilde{x}$ mới. Nếu $|D| = 1$ thì kí hiệu $\mathcal{P}(D) := \{D\}$. Nếu $|D| > 1$ thì $\tilde{D}$ cũng là một đồ thị 2 – liên thông. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $\tilde{D}^2$ có chứa một chu trình Hamilton $\tilde{C}$ sao cho tất cả các cạnh của $\tilde{C}$ nhận $\tilde{x}$ làm đầu mút đều nằm trong $\tilde{D}$.

Nhận thấy rằng đường đi $\tilde{C} - \tilde{x}$ có thể chứa một số cạnh không nằm trong G^2 : các cạnh nối giữa hai đỉnh láng giềng của $\tilde{x}$ không có đỉnh láng giềng chung trong G . Kí hiệu $\tilde{E}$ là tập các cạnh như vậy và $\mathcal{P}(D)$ là tập các thành phần liên thông của $(\tilde{C} - \tilde{x}) - \tilde{E}$ - tập các đường đi chứa trong G^2 sao cho các đầu mút của nó liên hợp với $\tilde{x}$ trong $\tilde{D}$.



Hình vẽ minh họa $\mathcal{P}(D)$.

Kí hiệu $\mathcal{P}$ là hợp của tất cả các tập $\mathcal{P}(D)$ lấy trên tất cả các thành phần liên thông D của $G - C$.

Hiển nhiên, $\mathcal{P}$ thỏa mãn tính chất sau:

*Các phần tử của $\mathcal{P}$ là các đường đi đôi một phân biệt tránh chu trình C trong G^2 , $V(G) = V(C) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$. Mọi đầu mút y của một đường đi $P \in \mathcal{P}$ đều có một đỉnh láng giềng trong G nằm trên chu trình C ; chúng ta chọn ra một đỉnh láng giềng như vậy và gọi nó là **chân của đường đi P tại y** .* (1)

Nếu $P \in \mathcal{P}$ là một đường đi tầm thường thì P có đúng một chân. Nếu P không phải là một đường đi tầm thường thì P có một chân với mỗi đầu mút. Nhận thấy rằng do hai chân này không cần phải phân biệt với nhau nên mọi đường đi không tầm thường P đều có một hoặc hai chân.

Bây giờ chúng ta sẽ sửa đổi $\mathcal{P}$ một chút sao cho các tính chất nêu trong khẳng định (1) vẫn được bảo toàn:

Nếu một đỉnh của C là chân của hai đường đi phân biệt $P, P' \in \mathcal{P}$ lần lượt tại $y \in P$ và $y' \in P'$ thì yy' là một cạnh của G^2 và $Pyy'P'$ là một đường đi chứa trong G^2 ; chúng ta sẽ thay thế P và P' trong $\mathcal{P}$ bởi đường đi $Pyy'P'$.

Chúng ta sẽ lặp lại phép sửa đổi nêu trên cho $\mathcal{P}$ đến khi điều kiện sau được thỏa mãn:

Không có bất kì đỉnh nào của chu trình C là chân của hai đường đi phân biệt chứa trong $\mathcal{P}$. (2)

Với mỗi $i = 1, 2$, kí hiệu $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ là tập tất cả các đường đi nằm trong $\mathcal{P}$ với chính xác i chân và $X_i \subseteq V(C)$ là tập tất cả các chân của các đường đi nằm trong $\mathcal{P}_i$. Khi đó, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ (điều này suy ra từ điều kiện (2)), và $y^* \notin X_1 \cup X_2$.

Đồng thời chúng ta cũng sẽ sửa đổi G một chút sao cho những thay đổi này không làm ảnh hưởng đến các đường đi chứa trong $\mathcal{P}$ cũng như tính đúng đắn của các khẳng định (1) và (2). Đầu tiên, chúng ta sẽ giả định rằng tất cả các phần tử của $\mathcal{P}$ đều là các đường đi trong chính G chứ không chỉ là các đường đi trong G^2 . Việc giả định thêm như vậy có thể làm xuất hiện thêm một số cạnh bổ sung cho G^2 nhưng chúng ta sẽ không sử dụng đến chúng khi xây dựng chu trình Hamilton H như mong muốn. (Thật vậy, H sẽ chứa tất cả các đường đi từ tập $\mathcal{P}$ này dưới dạng các đường đi con.) Như vậy, nếu H nằm trong G^2 và thỏa mãn khẳng định (*) đối

với phiên bản sửa đổi của G thì nó cũng sẽ thỏa mãn khẳng định (*) đối với phiên bản gốc của G . Tiếp theo, với mỗi $P \in \mathcal{P}$, chúng ta xóa tất cả các $P - C$ cạnh trong G ngoại trừ các cạnh nằm giữa các đầu mút của P và các chân tương ứng của nó. Sau cùng, chúng ta xóa tất cả các dây cung của chu trình C trong G . Như vậy, không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta giả định rằng:

Các cạnh của G nằm giữa C và một đường đi $P \in \mathcal{P}$ chính là hai cạnh nằm giữa các đầu mút của đường đi P và các chân tương ứng của nó. (Nếu $|P| = 1$ thì hai cạnh này trùng nhau.) Các cạnh của G có cả hai đầu mút nằm trên C chính là các cạnh của chu trình C . (3)

Ý tưởng chứng minh của chúng ta là xây dựng một chu trình Hamilton H cho G^2 từ các đường đi chứa trong $\mathcal{P}$ và các đường đi thích hợp chứa trong C^2 như sau.

Đầu tiên, chúng ta sẽ xây dựng một dây chuyền khép kín W trong đồ thị $\tilde{G} := G - \cup \mathcal{P}_1$ thỏa mãn điều kiện (*) và đi qua mọi đường đi chứa trong $\mathcal{P}_2$ đúng một lần. Tiếp theo, chúng ta sẽ sửa đổi W lại để nó đi qua mọi đỉnh của C đúng một lần. Sau cùng, chúng ta sẽ sửa đổi W lại để nó bao gồm cả các đường đi chứa trong $\mathcal{P}_1$. Để xây dựng dây chuyền W , chúng ta giả sử rằng $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$; trường hợp $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ đơn giản hơn rất nhiều và sẽ được xử lý sau.

Để bắt đầu, chúng ta sẽ chọn ra một định hướng cyclic của chu trình C , một song ánh $i \mapsto v_i$ từ $\mathbb{Z}_{|C|}$ vào $V(C)$ sao cho $v_i v_{i+1} \in E(C)$ với mọi $i \in \mathbb{Z}_{|C|}$. Bằng cách xem xét định hướng cyclic này theo chiều kim đồng hồ. Khi đó, mỗi đỉnh $v_i \in C$ đều có một **đỉnh láng giềng phải** $v_i^+ := v_{i+1}$ và một **đỉnh láng giềng trái** $v_i^- := v_{i-1}$. Theo đó, cạnh $v v^+$ sẽ **nằm bên phải** của đỉnh v , và cạnh $v^- v$ sẽ **nằm bên trái** của đỉnh v .

Một đường đi không tầm thường $P = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ trong C sao cho $V(P) \cap X_2 = \{v_i, v_j\}$ sẽ được gọi là một **khoảng trong C với đầu mút trái v_i và đầu mút phải v_j** . Như vậy, C là hợp của $|X_2| = 2|\mathcal{P}_2|$ khoảng. Như thường lệ, chúng ta kí hiệu $[v_i, v_j] := P$ và $(v_i, v_j) := P^0$ cũng như $[v_i, v_j] := P v_j^0$ và $(v_i, v_j] := v_i^0 P$. Với các khoảng $[u, v]$ và $[v, w]$ có cùng đầu mút v , chúng ta sẽ gọi $[u, v]$ là **nằm bên trái** của $[v, w]$, và $[v, w]$ là nằm bên phải của $[u, v]$.

Kí hiệu I^* là khoảng $[v, w]$ duy nhất sao cho $x^* \in (v, w]$, P^* là đường đi chứa trong $\mathcal{P}_2$ nhận w làm chân, Q^* là đường đi $I^* w P^*$.

Để xây dựng dây chuyền W , chúng ta có thể xem $\tilde{G}$ như một đa đồ thị M xác định trên X_2 với các cạnh là các khoảng trong C và các đường đi chứa trong $\mathcal{P}_2$ (với các chân của chúng đóng vai trò như các đầu mút). Từ khẳng định (2), M là một khối lập phương, nên chúng ta có thể áp dụng Kết quả 10.3.3) cho đa đồ thị M với $e := I^*$ và $f := P^*$. Kết quả 10.3.3) cung cấp cho chúng ta một dây chuyền khép kín W trong G đi qua I^* đúng một lần, đi qua mọi khoảng khác trong C một hoặc hai lần, đi qua mọi đường đi trong $\mathcal{P}_2$ đúng một lần. Hơn nữa, W chứa Q^* như một đường đi con. Hai cạnh trên W nhận x^* làm đầu mút cũng nằm trong G .

Bây giờ chúng ta sửa đổi W sao cho W đi qua mọi đỉnh của C đúng một lần. Đồng thời, chúng ta cũng chuẩn bị cho việc bổ sung thêm các đường đi chứa trong $\mathcal{P}_1$ bằng cách định nghĩa một đơn ánh $v \mapsto e(v)$ trên X_1 bằng cách gán cho mọi đỉnh $v \in X_1$ một cạnh $e(v)$ của dây chuyền W đã sửa đổi sao cho điều kiện sau được thỏa mãn:

Cạnh $e(v)$ hoặc bắc cầu đỉnh v hoặc liên thuộc với đỉnh v . Trường hợp $e(v)$ liên thuộc với v , $e(v) \in C$ và $e(v) \neq v x^$.* (**)

Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ định nghĩa ánh xạ $v \mapsto e(v)$ trên $V(C)/X_2$ – một tập bao hàm của X_1 (điều này suy ra từ điều kiện (2)). Để đảm bảo tính đơn ánh trên X_1 , chúng ta chỉ cần đảm bảo rằng không có cạnh $vw \in C$ nào được chọn trùng với $e(v)$ hoặc $e(w)$. Thật vậy, do $|X_1| \geq 2$ và $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ (điều này suy ra từ giả thiết của bài toán) nên chúng ta có $|C - y^*| \geq |X_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 4$, nghĩa là $|C| \geq 5$. Như vậy, không có cạnh nào của G^2 có thể bắc cầu nhiều hơn một đỉnh của C , hoặc bắc cầu một đỉnh của C và đồng thời nằm trên C .

Đối với các điều chỉnh cho dây chuyền W tại các đỉnh của C , chúng ta cần xem xét các khoảng của C tại cùng một thời điểm. Theo định nghĩa của dây chuyền W , mọi khoảng I đều thuộc một trong ba loại sau:

Loại 1: W đi qua I đúng một lần;

Loại 2: W đi qua I đúng hai lần theo các hướng đối nghịch (nghĩa là W có chứa một bộ ba (e, x, e) với $x \in X_2$ và $e \in E(I)$);

Loại 3: W đi qua I đúng hai lần theo các hướng riêng biệt (nghĩa là W không có bộ ba (e, x, e) nào như trên).

Theo định nghĩa của dây chuyền W , khoảng I^* thuộc loại 1. Đỉnh x nêu trong định nghĩa của các khoảng loại 2 được gọi là **đỉnh cắt** của khoảng đó. Sau cùng, do Q^* là một đường đi con của W và W đi qua cả I^* và P^* đúng một lần, chúng ta có:

Khoảng nằm bên phải của I^ là một khoảng thuộc loại 2 và đỉnh cắt của nó nằm ở bên trái.* (4)

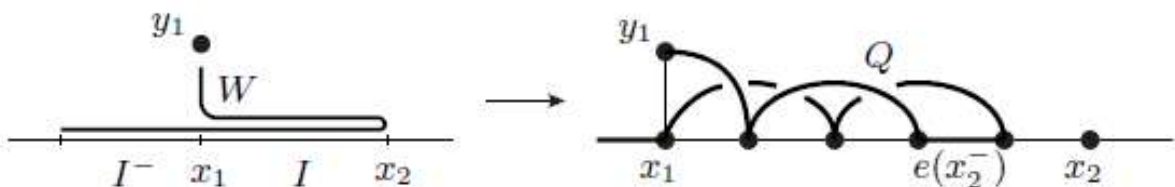
Xét một khoảng cố định $I = [x_1, x_2]$. Kí hiệu y_1 là đỉnh láng giềng của x_1 trên một đường đi nào đó nằm trong $\mathcal{P}_2$ và y_2 là đỉnh láng giềng của x_2 trên một đường đi nào đó nằm trong $\mathcal{P}_2$. Kí hiệu I^- là một khoảng nào đó nằm bên trái của I .

Đầu tiên, giả sử I là một khoảng thuộc loại 1.

Chúng ta giữ nguyên W không đổi trên I . Nếu $I \neq I^*$ thì, với mọi $v \in I^0$, chúng ta định nghĩa $e(v)$ là cạnh nằm bên trái của v . Từ khẳng định (4), $I^- \neq I^*$, nên $x_1 \neq x^*$, nghĩa là cách lựa chọn cạnh $e(v)$ này thỏa mãn (**). Nếu $I = I^*$ thì chúng ta định nghĩa $e(v)$ là cạnh nằm bên trái của v nếu $v \in (x_1, x^*] \in I^0$, và cạnh nằm bên phải của v nếu $v \in (x^*, x_2)$. Cách định nghĩa $e(v)$ như trên cũng thỏa mãn (**).

Tiếp theo, giả sử I là một khoảng thuộc loại 2.

Kí hiệu x_2 là một đỉnh cắt của I . Khi đó, W sẽ chứa một dây chuyền con có dạng $y_1 x_1 I x_2 I x_1 I^-$ (hoặc có thể theo thứ tự ngược lại). Bằng cách áp dụng Kết quả 10.3.2 (i) cho đường đi $P := y_1 x_1 I x_2^0$, và thay thế đường đi con $y_1 x_1 I x_2 I x_1$ bởi $y_1 - x_1$ đường đi $Q \subseteq G^2$ nêu trong Kết quả 10.3.2 (i).

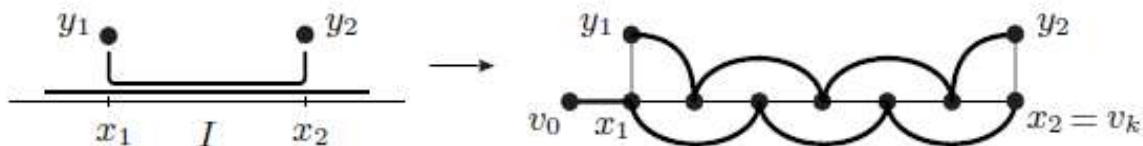


Hình vẽ minh họa.

Khi đó, $V(Q^0) = V(P)/\{y_1, x_1\} = V(I^0)$. Mỗi đỉnh $v \in (x_1, x_2^-)$ đều được bắc cầu bởi một cạnh nào đó nằm trên đường đi Q và chúng ta chọn cạnh này làm $e(v)$. Để định nghĩa $e(x_2^-)$, chúng ta chọn $e(x_2^-)$ là cạnh nằm bên trái của đỉnh x_2^- (ngoại trừ trường hợp $x_2^- = x_1$). Cạnh này cũng nằm trên Q (điều này suy ra từ Kết quả 10.3.2 (i)). Hơn nữa, khẳng định (4) chỉ ra rằng cạnh này không liên thuộc với x^* (điều này suy ra từ việc x_2 là đỉnh cực của khoảng I), nên nó cũng sẽ thỏa mãn (**). Trường hợp x_1 là đỉnh cực của khoảng I có thể được xử lý theo cách tương tự như sau: áp dụng Kết quả 10.3.2 (i), chúng ta có thể thay thế đường đi con $y_2 x_2 I x_1 x_2$ trong W bởi một $y_2 - x_2$ đường đi $Q \subseteq G^2$ với $V(Q^0) = V(I^0)$, với mọi $v \in (x_1^+, x_2)$ chọn $e(v)$ là một cạnh nào đó của Q bắc cầu v , và định nghĩa $e(x_1^+)$ là cạnh bên phải của đỉnh x_1^+ (ngoại trừ trường hợp $x_1^+ = x_2$).

Sau cùng, giả sử I là một khoảng thuộc loại 3.

Do W đi qua cạnh $y_1 x_1$ đúng một lần và đi qua khoảng I^- không quá hai lần nên W chứa $y_1 x_1 I$ và $I^- U I$ như các đường đi con. Hơn nữa, khoảng I^- thuộc loại 1. Từ khẳng định (4), $I^- \neq I^*$. Như vậy, $e(v)$ đã được xác định với mọi $v \in I^{0-}$ (xem lại trường hợp I là một khoảng thuộc loại 1). Hơn nữa, cạnh ngoài cùng bên phải $x_1^- x_1$ của khoảng I^- chưa được chọn để đặt làm $e(v)$ với mọi v nên chúng ta có thể tiến hành thay thế cạnh này. Do W đi qua I^+ không quá hai lần nên nó phải đi qua cạnh $x_2 y_2$ ngay sau một trong hai đường đi con $y_1 x_1 I$ và $x_1^- x_1 I$ của nó. Bằng cách chọn đỉnh bắt đầu của đường đi con này (y_1 hoặc x_1^-) làm đỉnh u trong Kết quả 10.3.2 (ii) và đỉnh còn lại trong $\{y_1, x_1^-\}$ làm đỉnh v_0 ; hơn nữa, đặt $v_k := x_2$ và $w := y_2$. Từ Kết quả 10.3.2 (ii), chúng ta có thể thay thế hai đường đi con của W nằm giữa $\{y_1, x_1^-\}$ và $\{x_2, y_2\}$ bởi hai đường đi con phân biệt trong G , và gán cho mọi đỉnh $v \in I^0$ một cạnh $e(v)$ bắc cầu đỉnh v nằm trên một trong hai đường đi con này.



Hình vẽ minh họa.

Sau các sửa đổi trình bày ở trên, W giờ là một dây chuyền khép kín trong $\tilde{G}^2$. Ngoài ra, chúng ta sẽ chứng minh rằng W đi qua mỗi đỉnh của $\tilde{G}$ đúng một lần. Đối với các đỉnh nằm trên các đường đi chứa trong $\mathcal{P}_2$, khẳng định này là hiển nhiên, bởi vì W cũng đi qua mọi đường đi như vậy đúng một lần và tránh nó bằng cách khác. Đối với các đỉnh nằm trong $C - X_2$, khẳng định này được suy ra từ các sửa đổi trình bày ở trên. Như vậy, chúng ta chỉ cần kiểm tra thêm khẳng định trên cho các đỉnh nằm trong X_2 là đủ.

Giả sử cho trước một đỉnh $x \in X_2$ và kí hiệu y là một đỉnh láng giềng của x nằm trên một đường đi nào đó nằm trong $\mathcal{P}_2$. Kí hiệu I_1 là khoảng I thỏa mãn điều kiện $yxI \subseteq W$ trước khi thực hiện sửa đổi W và I_2 là một khoảng khác nhận x làm một đầu mút. Nếu I_1 là một khoảng thuộc loại 1 thì I_2 sẽ là một khoảng thuộc loại 2 với x là một đỉnh cực. Trong trường hợp này, x được giữ lại trong W khi W được sửa đổi trên I_1 nhưng bị bỏ qua khi W được sửa đổi trên I_2 . Như vậy, x được chứa chính xác một lần trong W sau khi sửa đổi. Nếu I_1 là một khoảng thuộc loại 2 thì x không thể là một đỉnh cực của I_1 và I_2 là một khoảng thuộc loại 1. Đường đi con của W bắt đầu với yx và sau đó đi dọc theo khoảng I_1 và quay ngược lại sẽ được thay thế bằng một $y - x$ đường đi. Đường đi này bây giờ được theo sau trên W bởi khoảng không thay đổi I_2 . Như vậy, x cũng được chứa trong W đúng một lần. Sau cùng, nếu I_1 là một khoảng thuộc loại 3 thì x được chứa trong một đường đi

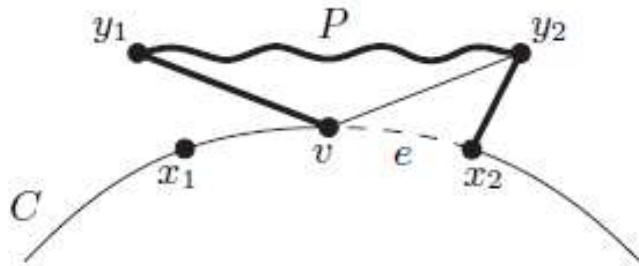
nào đó trong hai đường đi thay thế Q, Q' nêu trong Kết quả 10.3.2 (ii). Do các đường đi này rời nhau (điều này được nêu trong Kết quả 10.3.2 (ii)) nên lại một lần nữa x được chứa trong W đúng một lần.

Như vậy, chúng ta đã chỉ ra rằng W sau khi sửa đổi là một dây chuyền khép kín trong $\tilde{G}^2$ đi qua mọi đỉnh của $\tilde{G}$ đúng một lần, nghĩa là W xác định một chu trình Hamilton $\tilde{H}$ trong $\tilde{G}^2$. Do W có chứa đường đi Q^* nên $\tilde{H}$ cũng thỏa mãn (*).

Cho đến nay, chúng ta vẫn đang giả định rằng $\mathcal{P}_2$ là một tập khác rỗng. Nếu $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ thì, bằng cách đặt $\tilde{H} := \tilde{G} = C$, $\tilde{H}$ cũng sẽ thỏa mãn (*). Phần việc còn lại của chúng ta là biến chu trình Hamilton $\tilde{H}$ thành một chu trình Hamilton H của G^2 bằng cách bổ sung thêm các đường đi nằm trong $\mathcal{P}_1$. Để có thể xử lý trường hợp $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ đồng thời với trường hợp $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$, chúng ta cũng sẽ xây dựng một ánh xạ $v \mapsto e(v)$ cho trường hợp $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ tương tự như khi $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ như sau: với mọi $v \in C - y^*$, $e(v) := \begin{cases} vv^+ & \text{nếu } v \in [x^*, y^*) \\ vv^- & \text{nếu } v \in (y^*, x^*) \end{cases}$. Hiển nhiên, $v \mapsto e(v)$ cũng là một đơn ánh thỏa mãn (**) và xác định trên một tập bao hàm của X_1 (điều này suy ra từ việc đỉnh y^* không nằm trong tập X_1).

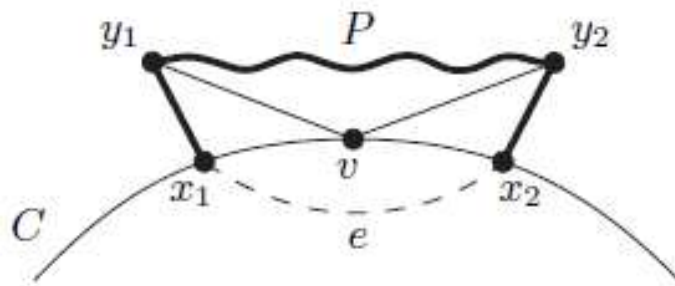
Giả sử $P \in \mathcal{P}_1$ là một đường đi với chân $v \in X_1$ và các đầu mút y_1, y_2 cần được kết hợp vào $\tilde{H}$. (Nếu $|P| = 1$ thì $y_1 = y_2$) Mục tiêu của chúng ta là sẽ thay thế cạnh $e := e(v)$ trong $\tilde{H}$ bằng đường đi P bằng cách chỉ ra rằng các đầu mút của P có thể được nối với e bởi các cạnh phù hợp nằm trong G^2 .

Từ khẳng định (2) và (3), v chỉ có duy nhất hai đỉnh láng giềng trong $\tilde{G}$, các đỉnh láng giềng của nó là x_1, x_2 nằm trên C . Nếu v liên thuộc với e , nghĩa là $e = vx_i$ với $i \in \{1, 2\}$, thì chúng ta có thể thay thế e bằng đường đi $vy_1Py_2x_i \subseteq G^2$.



Hình vẽ minh họa.

Nếu v không liên thuộc với e thì e bắc cầu v (điều này suy ra từ khẳng định (**)). Khi đó, $e = x_1x_2$, nên chúng ta có thể thay thế e bằng đường đi $x_1y_1Py_2x_2 \subseteq G^2$.



Hình vẽ minh họa.

Do $v \mapsto e(v)$ là một đơn ánh trên X_1 nên khẳng định (2) chỉ ra rằng tất cả các sửa đổi trình bày ở trên cho $\tilde{H}$ có thể được thực hiện độc lập với nhau và tạo ra một chu trình Hamilton H của G^2 .

Sau cùng, chúng ta sẽ chứng minh rằng H thỏa mãn khẳng định (*), nghĩa là tất cả các cạnh của H nhận x^* làm đầu mút đều nằm trong G . Do $\tilde{H}$ thỏa mãn khẳng định (*) nên chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng các cạnh có dạng $e = x^*z$ của $\tilde{H}$ không nằm trong H (nghĩa là các cạnh e có dạng $e = e(v)$ với v là một đỉnh nào đó nằm trong X_1) được thay thế bằng một $x^* - z$ đường đi nào đó với cạnh đầu tiên nằm trong G .

Nhận thấy rằng v là một đỉnh liên thuộc với e . Trường hợp ngược lại, $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ và e bắc cầu v . Do $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ và $v \in X_1$ nên $|C - y^*| \geq |X_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 3$, nghĩa là $|C| \geq 4$. Do $e \in G$ (điều này suy ra từ việc $\tilde{H}$ thỏa mãn khẳng định (*)) và e bắc cầu v nên điều này mâu thuẫn với khẳng định (3).

Như vậy, v là một đỉnh liên thuộc với e . Từ cách định nghĩa của cạnh e , $v \in \{x^*, z\}$. Do $e \neq vx^*$ (điều này suy ra từ khẳng định (**)) nên $v = x^*$. Như vậy, cạnh e có thể được thay thế bằng một đường đi có dạng $x^*y_1Py_2z$. Do x^*y_1 là một cạnh của G nên cách thay thế này một lần nữa thỏa mãn (*). Như vậy, H sẽ thỏa mãn khẳng định (*), nên phép quy nạp của chúng ta được hoàn tất. □

Chúng ta sẽ tạm khép lại “Chủ đề 10. Đồ thị Hamiltonian” này bằng cách giới thiệu một phỏng đoán tổng quát hơn của định lý Dirac như sau:

Giả thuyết Seymour.

Mọi đồ thị G với bậc $n \geq 3$ và bậc nhỏ nhất $\delta(G) \geq \frac{k}{k+1}n$ đều có chứa một chu trình Hamilton H sao cho $H^k \subseteq G$ với k là một số nguyên dương cho trước.

Trường hợp $k = 1$, phỏng đoán này chính là định lý Dirac. Trường hợp $k = 2$ được đề xuất vào năm 1963 bởi nhà toán học Pósa. Năm 1996, ba nhà toán học Komlós, Sárközy và Szemerédi đã chứng minh được tính đúng đắn của phỏng đoán trên cho n đủ lớn.