

Bùi Thế Việt

CHUYÊN ĐỀ CASIO

SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

A – Giới Thiệu :

Như chúng ta đã biết, số phức trong kỳ thi THPT Quốc Gia là dạng bài “cho điểm” vì thông thường nó khá dễ dàng và thỏa mái khi làm bài. Tuy nhiên, thay vì hiểu số phức theo những quy tắc, định nghĩa, chúng ta thử tìm hiểu nó thông qua những bài toán khó và thiết thực hơn.

Trong chuyên đề này, tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc những vấn đề sau :

- Argument và ứng dụng tính $\sqrt[n]{a+bi}$ bằng CASIO
- Phương pháp Newton – Rapshon và ứng dụng tìm nghiệm phức bằng CASIO
- Thủ thuật CASIO tìm nhân tử chứa nghiệm phức
- Các vấn đề nâng cao

B – Ý Tưởng :

Trên máy tính CASIO hay VINACAL, trong môi trường số phức (MODE 2 – CMPLX), khi chúng ta nhập $\sqrt{1+i}$ vào chẳng hạn, máy tính sẽ báo Math Error vì chúng không có thuật toán chung để tính $\sqrt{1+i}$. Đây chính là một rào cản khi chúng ta phải khai căn số phức : trong giải toán hoặc trong các thủ thuật ở phần sau. Tuy nhiên, nếu máy tính không có thuật toán thì chúng ta thử tự xây dựng thuật toán cho nó.

Ở THPT, chúng ta được học các kiến thức về số phức, bao gồm :

- Số phức nào cũng có dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và đơn vị ảo $i = \sqrt{-1}$
- Số phức liên hợp (complex conjugate) $\bar{z} = a - bi$
- $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ với $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ là modulus của z
- Argument là góc tạo bởi vecto (a, b) với trục thực
- Định lý Euler : $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} = r\angle \varphi$ với $r = |z|$ và $\varphi = \arg(z)$.
- Định lý Moivre : Đặt
$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{cases}$$
 . Khi đó :
$$\begin{cases} \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{cases}$$

Ngoài ra, trong máy tính CASIO, chúng ta có sẵn một số hàm để tính toán trong số phức.

- Pol (polar). Ta luôn có $\text{Pol}(a, b) = \begin{cases} r = m \\ \theta = n \end{cases}$ với $a + bi = m \angle n$.
 ➤ Ví dụ $\text{Pol}(2, 3) = \begin{cases} r = 3.605551275 \\ \theta = 0.982793723 \end{cases}$
- Rec (rectangular). Ta luôn có $\text{Rec}(a, b) = \begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ với $a \angle b = m + ni$.
 ➤ Ví dụ $\text{Rec}(1, 3) = \begin{cases} x = 0.989992496 \\ y = 0.141120008 \end{cases}$
- Arg (argument). Ta luôn có $\text{Arg}(a + bi) = \arctan \frac{b}{a}$.
 ➤ Ví dụ $\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$
- Conjg (conjugate). Ta luôn có $\text{Conjg}(a + bi) = a - bi$.
 ➤ Ví dụ $\text{Conjg}(3 + 8i) = 3 - 8i$

Từ những kiến thức đã học và các hàm có sẵn ở trên, bạn đọc có thể tự mình tạo thuật toán tính $\sqrt[n]{a + bi}$ chứ?

C – Nội Dung :

Phần 1 : Argument và ứng dụng tính $\sqrt[n]{a + bi}$ bằng CASIO

Ta có công thức tính $\sqrt[n]{z}$ với $z = a + bi$ như sau :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \angle \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Chứng minh :

Đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Khi đó, theo định lý Moivre, ta có :

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \angle \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sqrt[n]{|z|} \angle \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}.$$

Điều phải chứng minh.

Ứng dụng :

Ví dụ 1 : Tính $\sqrt{11 - 60i}$.

- Bước 1 : Vào MODE 2 – CMPLX
- Bước 2 : Nhập $\sqrt{11 - 60i} \angle \frac{\arg(11 - 60i)}{2}$
- Bước 3 : Ấn "=", máy hiện $6 - 5i$
- Bước 4 : Sửa biểu thức thành $\sqrt{11 - 60i} \angle \frac{\arg(11 - 60i) + 2\pi}{2}$
- Bước 5 : Ấn "=", máy hiện $-6 + 5i$

Kết luận : $\sqrt{11 - 60i} = 6 - 5i$ hoặc $-6 + 5i$

Ví dụ 2 : Tính $\sqrt{13 - 2i}$.

- Bước 1 : Vào MODE 2 – CMPLX
- Bước 2 : Lần lượt tính $\sqrt[5]{|13-2i|} \angle \frac{\arg(13-2i)}{5}$ và $\sqrt[5]{|13-2i|} \angle \frac{\arg(13-2i)+2\pi}{5}$
- Bước 3 : Ta được $3.6161406 - 0.27653791i$ và $-3.6161406 + 0.27653791i$

Kết luận : $\sqrt[5]{13-2i} = 3.6161406 - 0.27653791i$ hoặc $-3.6161406 + 0.27653791i$

Ví dụ 3 : Tính $\sqrt[5]{316+12i}$.

- Bước 1 : Vào MODE 2 – CMPLX
- Bước 2 : Lần lượt tính như trên ta có :
 - $\sqrt[5]{|316+12i|} \angle \frac{\arg(316+12i)}{5} = 3.162186543 + 0.0240055317i$
 - $\sqrt[5]{|316+12i|} \angle \frac{\arg(316+12i)+2\pi}{5} = 0.9543387625 + 3.014836235i$
 - $\sqrt[5]{|316+12i|} \angle \frac{\arg(316+12i)+4\pi}{5} = -2.572372751 + 1.839265731i$
 - $\sqrt[5]{|316+12i|} \angle \frac{\arg(316+12i)+6\pi}{5} = -2.544152555 - 1.878107499i$
 - $\sqrt[5]{|316+12i|} \angle \frac{\arg(316+12i)+8\pi}{5} = 1 - 3i$

Kết luận : $\sqrt[5]{316+12i}$ có 5 giá trị như trên

Nhận xét : Bạn đọc có thể hiểu vì sao máy tính CASIO hay VINACAL lại không cho phép chúng ta tính trực tiếp $\sqrt[n]{a+bi}$ chứ. Đơn giản bởi vì nó cho quá nhiều giá trị, máy tính không nhận hết được.

Còn việc tại sao $\sqrt[n]{a+bi}$ lại có tới n giá trị ? Giống như việc giải một phương trình bậc n vậy, ta luôn có n nghiệm cả thực, cả phức, cả bội. Do đó, $\sqrt[n]{a+bi}$ cũng sẽ có tối đa n giá trị.

Phần 2 : Phương pháp Newton – Rapshon và ứng dụng tìm nghiệm phức bằng CASIO

Newton có một phương pháp tính gần đúng nghiệm của một phương trình bằng phương pháp lặp :

Xét phương trình $f(x) = 0$ và cho trước x_0 là một hằng số. Xét chuỗi :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Khi đó nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$ thì $f(k) = 0$, tức $x = k$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

Ứng dụng :

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm phương trình sau với $x_0 = 1$:

$$x^5 - x - 1 = 0$$

Hướng dẫn

Ta có :

- Bước 1 : Xét $f(x) = x^5 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 1$

- Bước 2 : Nhập biểu thức $X - \frac{X^5 - X - 1}{5X^4 - 1}$, CALC cho $X = 1$
- Bước 3 : Ấn Shift + STO + X, máy báo, máy sẽ hiện là $X - \frac{X^5 - X - 1}{5X^4 - 1} \rightarrow X$ và kết quả của nó là $\frac{5}{4}$.
- Bước 4 : Ấn "=" liên tiếp đến khi kết quả của nó là số không đổi. Kết quả này chính là nghiệm của phương trình ban đầu.

Lần ấn "="	X
1	1.25
2	1.178459394
3	1.167537389
4	1.167304083
5	1.167303978
6	1.167303978
7	1.167303978

Kết luận : Phương trình tồn tại nghiệm $x = 1.167303978$

Nhận xét : Ở đây, $x_0 = 1$ là cái mà chúng ta chọn tùy ý.

Bạn đọc có thể cho $x_0 = 2, -3, 4, 10, -100, \dots$ miễn sao thỏa mãn $f(x_0) \neq 0$. Khi đó thuật toán sẽ tìm được nghiệm (nếu có) cho bạn đọc.

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm phương trình sau với $x_0 = 10$:

$$\sqrt{4x-5} + 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

Hướng dẫn

Ta có :

- Bước 1 : Xét $f(x) = \sqrt{4x-5} + 2x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-5}} + 4x - 6$
- Bước 2 : Nhập biểu thức $X - \frac{\sqrt{4X-5} + 2X^2 - 6X + 4}{\frac{2}{\sqrt{4X-5}} + 4X - 6}$, CALC cho $X = 1$
- Bước 3 : Ấn Shift + STO + X, máy báo, máy sẽ hiện là :

$$X - \frac{\sqrt{4X-5} + 2X^2 - 6X + 4}{\frac{2}{\sqrt{4X-5}} + 4X - 6} \rightarrow X$$

Kết quả của nó là 5.634113507.

- Bước 4 : Ấn "=" liên tiếp đến khi kết quả của nó là số không đổi. Kết quả này chính là nghiệm của phương trình ban đầu.

Lần ấn "="	X
1	5.634113507
2	3.408338472

3	2.239017587
4	1.587443334
5	1.260543075
6	1.281037023
7	1.291820315
8	1.292885597
9	1.292893218
10	1.292893219
11	1.292893219
12	1.292893219

Kết luận : Phương trình tồn tại nghiệm $x = 1.292893219$

Nhận xét : Để tìm hết nghiệm, chúng ta phải xét x_0 ở các khoảng khác nhau. Đây cũng chính là nguyên lý tìm nghiệm của CASIO, khi mà nó luôn hỏi người dùng nhập một số x_0 ban đầu để nó bắt đầu tìm nghiệm.

Việc tìm nghiệm thực, chúng ta cứ để máy tính lo, vậy còn nghiệm phức, máy tính không tìm được, chúng ta có cách nào để tìm không ?

Liệu phương pháp Newton – Raphson này còn đúng khi chúng ta tìm nghiệm phức ?

Câu trả lời là có, tuy nhiên để tìm nghiệm phức, chúng ta phải vào MODE 2 (COMPLEX) và cho x_0 là một số phức nào đó. Thông thường, chúng ta cho $x_0 = i$.

Lưu ý : Trong MODE 2, một số máy (ví dụ như VINACAL) không tính được x^n khi $n > 3$. Do đó, chúng ta tách thành các số mũ bé hơn. Ví dụ $X^4 = X^2 \cdot X^2$

Ví dụ 3 : Tìm nghiệm phương trình sau :

$$4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3 = 0$$

Hướng dẫn

Ta có :

- Bước 1 : Xét $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 + 6x^2 + 12x - 1$
- Bước 2 : Tìm nghiệm thực :

$$\text{CALC cho } X = 0, \text{ thực hiện phép gán } X - \frac{4X^4 + 2X^3 + 6X^2 - X + 3}{16X^3 + 6X^2 + 12X - 1} \rightarrow X$$

Lần ấn "="	X
1	3
2	2.170825336
3	1.533078004
4	1.029755652
5	0.603099921
6	0.138097911
7	-3.52775482
8	-2.61448093

Dãy $\{x_n\}$ không hội tụ, do đó phương trình không có nghiệm thực

- Bước 3 : Đi tìm nghiệm phức :

$$\text{CALC cho } X = i, \text{ thực hiện phép gán } X - \frac{4X^4 + 2X^3 + 6X^2 - X + 3}{16X^3 + 6X^2 + 12X - 1} \rightarrow X$$

$$\text{hoặc } X - \frac{4X^2X^2 + 2X^3 + 6X^2 - X + 3}{16X^3 + 6X^2 + 12X - 1} \rightarrow X \text{ (với máy bị Math Error)}$$

Lần ấn "="	X
1	-0.07692307692 + 0.6153846154i
2	0.3947611463 + 0.6853073845i
3	0.2751731213 + 0.6574123265i
4	0.2505879727 + 0.6608187591i
5	0.24999949 + 0.6614369973i
6	0.25 + 0.6614378278i
7	0.25 + 0.6614378278i
8	0.25 + 0.6614378278i

Kết luận : Phương trình tồn tại nghiệm $x = 0.25 + 0.6614378278i$

Nhận xét : Có một sự vô cùng đặc biệt của nhân tử bậc hai $(ax^2 + bx + c)$. Nghiệm phức của nó luôn có dạng $m + n\sqrt{pi}$. Bạn đọc có thể thành thử ngay trên máy biểu thức sau :

$$\left(X - \frac{1}{4}\right)^2$$

Máy hiện kết quả $\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{7}{16}$. Đây cũng chính là cơ sở cho việc tìm nhân tử chứa nghiệm phức :

Phần 3 : Thủ thuật CASIO tìm nhân tử chứa nghiệm phức

Sẽ không có công thức tổng quát tìm nhân tử bậc cao (lớn hơn 2) cho các loại nghiệm phức, tuy nhiên, với nhân tử bậc 2 thì điều này là quá dễ dàng bởi chúng có nghiệm dạng $m + n\sqrt{pi}$. Ví dụ như phương trình $4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 3 = 0$ ở trên, chúng

ta tìm được nghiệm là $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$. Tất nhiên là chúng cũng sẽ có nghiệm $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$. Vì vậy, phương pháp tìm nhân tử chứa nghiệm phức sẽ là :

- Tìm nghiệm dạng $x = m + n\sqrt{pi}$
- Khử i bằng cách lấy $(x - m)^2 + n^2p = 0$
- Rút gọn biểu thức

Ví dụ 1 : Giải phương trình :

$$4x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 9 = 0$$

Hướng dẫn

Ta có :

- Bước 1 : Xét $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 9 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 42x - 18$
- Bước 2 : Tìm nghiệm với $x_0 = i$, ta được :

$$x = 0.75 + 0.96824583i$$

- Bước 3 : Khử i ta được :

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

- Bước 4 : Sử dụng thủ thuật chia biểu thức :

$$\frac{4x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 9}{2x^2 - 3x + 3} = 2x^2 - 3x + 3$$

Kết luận : $4x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 9 = (2x^2 - 3x + 3)^2$

Ví dụ 2 : Giải phương trình :

$$3x^4 - 2x^3 + 3x - 2 = 0$$

Hướng dẫn

Ta có :

- Bước 1 : Xét $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 3$
- Bước 2 : Tìm nghiệm với $x_0 = i$, ta được :

$$x = 0.5 + 0.866025403i$$

- Bước 3 : Khử i ta được :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

- Bước 4 : Chia biểu thức :

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{x^2 - x + 1} = 3x^2 + x - 2$$

Kết luận : $3x^4 - 2x^3 + 3x - 2 = (3x^2 + x - 2)(x^2 - x + 1)$

Nhận xét : Vậy là nhờ CASIO và phương pháp Newton-Rapshon, chúng ta có thể tìm ngay nghiệm phức mà không cần phải tìm nghiệm thực trước. Tuy nhiên, tốt hơn hết là chúng ta đi tìm nghiệm thực đã, nghiệm phức thì chúng ta kiểm tra sau.

Ví dụ 3 : Giải phương trình :

$$x^3 + 10x^2 - 5x - 4 + (x^2 - 7x - 2)\sqrt{x^2 - 2x - 1} = 0$$

Hướng dẫn

Sử dụng CASIO và phương pháp đổi dấu trước căn, chúng ta tìm được nghiệm thực duy nhất của phương trình này là $x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 2x - 1)$

Tức là, chúng ta phân tích nhân tử phương trình ban đầu thành :

$$(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 2x - 1)(-x^2 - 2x + 1 - (x - 3)\sqrt{x^2 - 2x - 1}) = 0$$

Vấn đề còn lại là chiến đấu với nhân tử $(-x^2 - 2x + 1 - (x - 3)\sqrt{x^2 - 2x - 1})$.

Như thủ thuật S.O.S chứng minh vô nghiệm, chúng ta có thể đánh giá như sau :

Nếu $x \geq 1 + \sqrt{2}$ thì :

$$-x^2 - 2x + 1 - (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + x - 3\right)^2 - 6x + 5 < 0$$

Nếu $x \leq 1 - \sqrt{2}$ thì do $\sqrt{x^2 - 2x - 1} > -x - \frac{1}{2}$ nên :

$$-x^2 - 2x + 1 - (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1} > -x^2 - 2x + 1 - (x-3)\left(-x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{9x+1}{2} > 0$$

Tuy nhiên, trước khi nghĩ tới phương pháp đánh giá như trên, bạn đọc thử nghĩ xem, liệu $\left(-x^2 - 2x + 1 - (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1}\right)$ còn phân tích nhân tử được nữa hay không ?

Tất nhiên là nó vô nghiệm, nhưng cái chúng ta tìm sẽ là nhân tử chứa nghiệm phức của nó :

- Xét $f(x) = x^2 + 2x - 1 + (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1} \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 + \frac{2x^2 - 6x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Tuy nhiên, máy tính CASIO sẽ không tính được $\sqrt{x^2 - 2x - 1}$ khi x là số phức. Hơn nữa, biểu thức nhập vào sẽ rất dài và bị tràn màn hình.

Thay vì tìm nghiệm của $x^2 + 2x - 1 + (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1} = 0$, chúng ta đi khử căn thức của nó rồi mới tìm nghiệm :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 + (x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 1} &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 + 2x - 1)^2 &= (x-3)^2(x^2 - 2x - 1) \\ \Leftrightarrow 2(2x+1)(3x^2 - 6x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

Rất may cho chúng ta, chưa kịp dọa nghiệm phức thì nó đã hiện nguyên hình rồi. Hóa ra là khi đổi dấu, nó chứa nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ nên phương trình ban đầu sẽ có nhân tử là

$$\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + x + 1\right)$$

Chia biểu thức, chúng ta được :

$$\begin{aligned} x^3 + 10x^2 - 5x - 4 + (x^2 - 7x - 2)\sqrt{x^2 - 2x - 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 2x + 2\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + x + 1\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 2x - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Nhận xét : Bài toán trên coi như là trường hợp đặc biệt. Vậy nếu xảy ra trường hợp đổi dấu cũng không có nghiệm đẹp thì sao ? Lúc đó chúng ta mới đi tìm nghiệm phức của nó. Và tất nhiên, chúng ta cũng chuẩn bị đối mặt với vấn đề màn hình tràn ...

Ví dụ 4 : Giải phương trình :

$$7x^3 + 7x^2 - 8x - 12 = (11x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2}$$

Hướng dẫn

Đầu tiên, chúng ta xem phương trình này có nghiệm như nào :

- $7x^3 + 7x^2 - 8x - 12 = (11x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2}$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$
- $7x^3 + 7x^2 - 8x - 12 + (11x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2} = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1-2\sqrt{7}}{3}$

Vậy bài toán này chỉ có 1 nhân tử chứa nghiệm thực :

$$(2\sqrt{x^2 - 2} - x - 1)$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} 7x^3 + 7x^2 - 8x - 12 &= (11x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow (5x^2 - 4x - (x+3)\sqrt{x^2 - 2})(2\sqrt{x^2 - 2} - x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Quan trọng bây giờ là đánh giá $5x^2 - 4x - (x+3)\sqrt{x^2 - 2} = 0$ vô nghiệm.

Thật vậy, sử dụng thủ thuật S.O.S ta được :

$$5x^2 - 4x - (x+3)\sqrt{x^2 - 2} = 4\left(\sqrt{x^2 - 2} - \frac{x}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{16}\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \sqrt{x^2 - 2} + \frac{8}{5} > 0$$

Tuy nhiên, như đã nói ở trên, trước khi nghĩ tới hướng đi này, chúng ta thử tìm xem phương trình $5x^2 - 4x - (x+3)\sqrt{x^2 - 2} = 0$ có nghiệm phức hay không. Cách đơn giản nhất là tìm nghiệm phức của phương trình sau khi khử căn thức :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x - (x+3)\sqrt{x^2 - 2} &= 0 \\ \Rightarrow (5x^2 - 4x)^2 &= (x+3)^2(x^2 - 2) \\ \Leftrightarrow 24x^4 - 46x^3 + 9x^2 + 12x + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Sử dụng thủ thuật tìm nghiệm phức bằng CASIO, chúng ta có thể phân tích nhân tử nó thành : $24x^4 - 46x^3 + 9x^2 + 12x + 18 = (3x^2 - 8x + 6)(8x^2 + 6x + 3)$. Các nhân tử này có nghiệm phức là $x = \frac{-3 \pm \sqrt{15}i}{8}; \frac{4 \pm \sqrt{2}i}{3}$. Điều này chứng tỏ phương trình ban đầu có thể phân tích nhân tử theo nghiệm phức trên.

Giả sử chúng ta cần tìm nhân tử $(\sqrt{x^2 - 2} + ax + b)$ chứa nghiệm $x = \frac{-3 + \sqrt{15}i}{8}$.

Sử dụng thủ thuật tính $\sqrt[n]{z}$ bằng CASIO, ta được :

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{|x^2 - 2|} \angle \frac{\arg(x^2 - 2)}{2} = 0.125 - 1.4523687i = \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{15}}{8}i$$

$$\text{Vậy là } \sqrt{x^2 - 2} = \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{15}}{8}i = -3x - 1 \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 2} + 3x + 1).$$

Tương tự, ta tìm được nhân tử còn lại là $(\sqrt{x^2 - 2} - 2x + 2)$.

Kết luận :

$$\begin{aligned} 7x^3 + 7x^2 - 8x - 12 &= (11x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 2} - 2x + 2)(\sqrt{x^2 - 2} + 3x + 1)(2\sqrt{x^2 - 2} - x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Lưu ý :

Không phải phương trình vô tỷ nào cũng có nghiệm phức. Vẫn có trường hợp PTVT vô nghiệm mà không có cả nghiệm phức luôn. Ví dụ :

$$2\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 1 = 0$$

Bạn sẽ không thể thấy nghiệm phức nào của phương trình này vì vòng lặp Newton-Rapshon không hội tụ. Vậy liệu có thể tìm được nhân tử dạng như trên trong một bài PTVT nào đó không ? Câu trả lời là có. Chính xác là như sau :

Xét trường hợp PTVT chắc chắn có nhân tử cơ bản là $(\sqrt{f(x)} + a\sqrt{g(x)} + b)$ hoặc $(\sqrt{f(x)} + ax + b)$. Để tìm các nhân tử này thì :

- Nếu PTVT có nghiệm thực thì dễ dàng tìm được nhân tử này
- Nếu PTVT có nghiệm phức thì tương tự như trên, ta cũng có thể tìm được nhân tử
- Nếu PTVT không có nghiệm thực và phức, thì chắc chắn trong các phương trình sau khi đổi dấu sẽ có nghiệm thực hoặc phức. Chúng ta dựa vào nghiệm đó để tìm nhân tử sau khi đổi dấu

Ví dụ như $2\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 1 = 0$ thì các phương trình đổi dấu sau có nghiệm :

- $2\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} + 1 = 0$ có nghiệm $x = \frac{47+8\sqrt{6}}{25}$
- $-2\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 1 = 0$ có nghiệm $x = \frac{47-8\sqrt{6}}{25}$

Vậy là chỉ cần đổi dấu, chúng ta có thể tìm nhân tử $(2\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 1)$ ngay cả khi nó không có nghiệm thực và phức.

Ví dụ 5 : Giải phương trình :

$$13x - 1 + (13x - 9)\sqrt{x+1} - (14x + 12)\sqrt{x-2} - 14\sqrt{x-2}\sqrt{x+1} = 0$$

Hướng dẫn

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = \frac{32+4\sqrt{10}}{9}$. Đổi dấu cũng chỉ chứng minh được phương trình này có nhân tử $(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2} + 1)$. Ta được :

$$13x - 1 + (13x - 9)\sqrt{x+1} - (14x + 12)\sqrt{x-2} - 14\sqrt{x-2}\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2} + 1)(5x + 3 - 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}) = 0$$

Bây giờ đánh giá $5x + 3 - 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}$ có lẽ sẽ hơi khó khăn. Ta có :

$$5x + 3 - 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}$$

$$> 5x + 3 - 2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}$$

$$= x - 1 + 2\sqrt{x+1} > 0$$

Bài toán được giải quyết.

Tuy nhiên, chúng ta có thể thử xem liệu $5x + 3 - 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}$ có phân tích nhân tử được không ?

$$\text{Xét } f(x) = 5x + 3 - 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}$$

Khi đó $f'(x) = 5 - \frac{2\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x-2}} - \frac{2\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x+1}}$.

Nếu chúng ta viết biểu thức sau sẽ bị tràn

$$x - \frac{5x+3-2\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2}+4\sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2}-4\sqrt{x-2}\|x+1\angle\frac{\arg((x-2)(x+1))}{2}}{5-\frac{2\sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2}-1}{\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2}}-\frac{2\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2}+2}{\sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2}}}$$

Do đó, để viết gọn lại thì chúng ta sẽ tính từng căn rồi mới gán vào biểu thức. Cụ thể, chúng ta ẩn như sau : (lưu ý trong biểu thức này, “ : ” là dấu 2 chấm ở dưới phím Alpha, còn “ / ” là phép chia bình thường)

$$\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2} \rightarrow A : \sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2} \rightarrow B : x - \frac{5x+3-2A+4B-4AB}{5-(2B-1)/A-(2A+2)/B} \rightarrow x$$

Ấn “=” liên tiếp để tính giá trị biểu thức.

Ta thấy vòng này không hội tụ mà x đổi dấu liên tục. Do đó phương trình $5x+3-2\sqrt{x-2}+4\sqrt{x+1}-4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}=0$ không có nghiệm phức.

Tiếp tục đổi dấu trước căn $\sqrt{x-2}$, chúng ta chỉ cần sửa biểu thức lại thành :

$$-(\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2}) \rightarrow A : \sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2} \rightarrow B : x - \frac{5x+3-2A+4B-4AB}{5-(2B-1)/A-(2A+2)/B} \rightarrow x$$

Dãy này cũng đổi dấu liên tục.

Tiếp tục đổi dấu trước căn $\sqrt{x-2}$ và $\sqrt{x+1}$:

$$-(\sqrt{x-2}\angle\frac{\arg(x-2)}{2}) \rightarrow A : -(\sqrt{x+1}\angle\frac{\arg(x+1)}{2}) \rightarrow B : x - \frac{5x+3-2A+4B-4AB}{5-(2B-1)/A-(2A+2)/B} \rightarrow x$$

Dãy này hội tụ về $-\frac{13}{9} + \frac{8\sqrt{2}}{9}i$

$$\text{Vậy } x = -\frac{13}{9} + \frac{8\sqrt{2}}{9}i \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i \\ \sqrt{x-2} = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+1}+1)$$

Trả lại dấu cho căn, ta được nhân tử của phương trình ban đầu là :

$$(-\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+1}+1)$$

Chia biểu thức, ta được :

$$\frac{5x+3-2\sqrt{x-2}+4\sqrt{x+1}-4\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}}{(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}+1)} = 2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}+1$$

Kết luận :

$$13x-1+(13x-9)\sqrt{x+1}-(14x+12)\sqrt{x-2}-14\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}=0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}+1)(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}+1)^2=0$$

Nghiệm phức còn được dùng để tìm nhân tử kép của bài toán.

Ví dụ 1 : Giải phương trình :

$$x^4 - 2x^3 - 2 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} = 0$$

Hướng dẫn

Phương trình này có nghiệm thực là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy là nó có nhân tử :

$$\left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x - 2 \right)$$

Tuy nhiên $\left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x - 2 \right)$ còn chứa nghiệm $x = -1$. Nghiệm này không thỏa mãn phương trình ban đầu nên nhân tử này không được ổn cho lắm.

Nếu bạn đọc muốn lấy $\frac{x^4 - 2x^3 - 2 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2}}{\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x - 2}$ thì chắc chắn phải nhân thêm $(x+1)$.

Sẽ rất cồng kềnh và phần còn lại chứng minh vô nghiệm khá khó. Tuy nhiên, chúng ta có thể khử nghiệm này đi bằng cách đẩy nhân tử lên cao hơn, tức là :

$$\left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x - 2 + k(x^2 - x - 1) \right)$$

Nếu biết thêm nghiệm khác nữa của bài toán thì chúng ta sẽ tìm được k và biểu thức của chúng ta vô cùng đẹp. Vì phương trình chỉ có 2 nghiệm thực $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ nên chúng ta tìm thử nghiệm phức xem. Sử dụng thuật toán ở trên, chúng ta được nghiệm là :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Khi đó, thế vào nhân tử trên ta được :

$$\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x - 2 + k(x^2 - x - 1) = -2 - 2k \Rightarrow k = -1$$

Vậy nhân tử của chúng ta là :

$$\left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x^2 - 1 \right)$$

Chia biểu thức, chúng ta được :

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 2 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - x^2 - 1 \right) \left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} + x^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết.

Ví dụ 2 : Giải phương trình :

$$(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$$

Hướng dẫn

Để có lời giải ngắn gọn như dưới đây, cái quan trọng của chúng ta là đi tìm nhân tử $\left(\sqrt{x+7} - 2 \right)$

Ta có :

$$\begin{aligned} & (5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} \leq x^3 + 13x^2 - 6x + 32 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x+7} - 2)(\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1) \\ & ((x^2 + 11)\sqrt{x+2} + (x^2 + 4)\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} - x^2 + 3x + 2) \leq 0 \end{aligned}$$

Ta luôn có :

$$\begin{aligned} & (x^2 + 11)\sqrt{x+2} + (x^2 + 4)\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} - x^2 + 3x + 2 \\ & \geq (x^2 + 4)\sqrt{x+7} - x^2 + 3x + 2 > 2(x^2 + 4) - x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0 \end{aligned}$$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Nhận xét : Nhân tử này khó ở chỗ nghiệm của $(\sqrt{x+7} - 2)$ không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy thì chúng ta phải tìm nghiệm của phương trình ban đầu trong môi trường số phức. Tuy nhiên biểu thức của nó khá là cồng kềnh và khi đạo hàm sẽ vô cùng tốn thời gian. Do đó ta cần một cách làm nào đó nhanh gọn hơn.

Để ý rằng : $\sqrt{z} = \sqrt{-z}i$. Vì vậy, ta đổi dấu trong căn để lấy nghiệm thực mà không thỏa mãn ĐKXĐ. Đó là lý do vì sao cách làm trên có thể lấy được nghiệm $x = -3$.

Tuy nhiên, không phải bài nào chúng ta cũng may mắn như thế. Chỉ cần tinh ý là chúng ta có thể hiểu được vấn đề. Hệ số trước căn của $\sqrt{x+2}$ là $(2x+6)$ nên chúng ta thử xem $x = -3$ có thỏa mãn phần còn lại hay không.

Giả sử như $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} - (x^3 + 13x^2 - 6x + 32)$ thỏa mãn $x = -3$ thì chắc chắn nó có nhân tử $(\sqrt{x+7} - 2)$, trong khi đó $2x+6 = 2(\sqrt{x+7} - 2)(\sqrt{x+7} + 2)$. Vì vậy nên phương trình ban đầu có nhân tử $(\sqrt{x+7} - 2)$.

D – Kết Luận :

Thực sự làm việc với nghiệm phức là một vấn đề khó và đôi khi cũng gặp phải rủi ro vì bài toán chưa chắc đã cho nghiệm phức dạng $m + n\sqrt{pi}$. Nghiệm phức chủ yếu để giải quyết phần còn lại của một phương trình vô tỷ nhưng lưu ý rằng, nếu phần còn lại vô nghiệm thì chắc chắn có thể sử dụng đánh giá hoặc BĐT để giải quyết bài toán chứ không nhất thiết phải tìm nhân tử chứa nghiệm phức.