

Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi

Trương Phước Nhân, 21/06/2018

Cho $a, b \in \mathbb{R}$, ký hiệu $E_{a,b}$ là tập hợp các dãy (u_n) trong $\mathbb{R}$ sao cho $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ với mọi $n \geq 0$ gọi là các dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi.

1. Cấu trúc và số chiều của $E_{a,b}$

a) $E_{a,b}$ là một không gian vector trên $\mathbb{R}$, vì:

- $E_{a,b} \neq \emptyset$ (dãy số không thuộc $E_{a,b}$)
- Nếu $\lambda \in \mathbb{R}, (u_n)$ và (v_n) là hai dãy thuộc $E_{a,b}$ ta có

$$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n) \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Vậy $(\lambda u_n + v_n) \in E_{a,b}$.

b) Ký hiệu (U_n) và (V_n) là hai phần tử của $E_{a,b}$ xác định bởi
$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 0 \\ V_0 = 0, V_1 = 1 \end{cases}.$$

- Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\alpha U_n + \beta V_n = 0$ với mọi n .

$$\text{Đặc biệt, ta có: } \begin{cases} \alpha U_0 + \beta V_0 = 0 \\ \alpha U_1 + \beta V_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Điều này chỉ ra rằng (U_n) và (V_n) độc lập tuyến tính trong $E_{a,b}$.

- Giả sử $(u_n) \in E_{a,b}$.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n rằng: $u_n = u_0 U_n + u_1 V_n$.

Hệ thức là hiển nhiên với $n = 0$ và $n = 1$.

$$\text{Giả sử với một số } n \text{ nào đó ta có: } \begin{cases} u_n = u_0 U_n + u_1 V_n \\ u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1} \end{cases}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n = a(u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1}) + b(u_0 U_n + u_1 V_n) \\ &= u_0 (aU_{n+1} + bU_n) + u_1 (aV_{n+1} + bV_n) = u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2}. \end{aligned}$$

Điều này chứng minh rằng (U_n) và (V_n) sinh ra $E_{a,b}$.

Từ hai phân tích trên ta nhận thấy rằng (U_n) và (V_n) là một cơ sở của $E_{a,b}$. Vậy $\dim_{\mathbb{R}}(E_{a,b}) = 2$.

2. Các phần tử đặc biệt của $E_{a,b}$

Ta xét xem $E_{a,b}$ có chứa các dãy nhân hay không.

Cho $r \in \mathbb{R}$, dãy (r^n) thuộc $E_{a,b}$ khi và chỉ khi $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ với mọi n , nghĩa là $r^2 - ar - b = 0$.

Phương trình $r^2 - ar - b = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của các dãy truy hồi tuyến tính cấp hai thỏa mãn $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ với mọi n .

Ký hiệu biệt thức của phương trình này là $\Delta = a^2 + 4b$.

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt trong $\mathbb{R}$, ký hiệu là r_1, r_2 , nghĩa là $\Delta > 0$.

Họ (r_1^n) và (r_2^n) độc lập trong $E_{a,b}$ mà số chiều bằng 2; do đó họ này là một cơ sở của $E_{a,b}$.

Như vậy với mọi dãy u_n nằm trong $E_{a,b}$ ta đều tìm được các số λ_1, λ_2 sao cho $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm, ký hiệu là r_0 , nghĩa là $\Delta = 0$.

Khi đó ta thấy hai dãy (r_0^n) và (nr_0^{n-1}) lập thành một cơ sở trong $E_{a,b}$.

Như vậy với mọi dãy u_n nằm trong $E_{a,b}$ ta đều tìm được các số λ_1, λ_2 sao cho $u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 nr_0^{n-1}$.

Trường hợp 3: Phương trình đặc trưng không có nghiệm trong $\mathbb{R}$, nghĩa là $\Delta < 0$.

Ký hiệu $E'_{a,b}$ là tập các dãy phức (u_n) thỏa mãn hệ thức truy hồi $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ với mọi n .

Khi đó $E_{a,b} = E'_{a,b} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Theo sự khảo sát ở trường hợp 1, khi ta ký hiệu r_1 và $r_2 = \overline{r_1}$ là các nghiệm phức (không thực) của phương trình đặc trưng, ta có: $E'_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng: $E_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n}) \mid \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$

- Với mọi $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, dãy $(\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n})$ là phần tử của $E'_{a,b}$ với các số hạng thực nên thuộc $E_{a,b}$.
- Ngược lại, giả sử $(u_n) \in E_{a,b}$, vì $E_{a,b} \subset E'_{a,b}$ nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sao cho $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ với mọi $n \geq 0$.

Bởi vì:

$$\begin{aligned} (u_n) \in E_{a,b} &\Rightarrow \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 \overline{r_1} \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 \overline{r_1} = \overline{\lambda_1 r_1} + \overline{\lambda_2 r_1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} - \overline{\lambda_1} \\ (\lambda_2 - \overline{\lambda_1}) \overline{r_1} = \overline{(\lambda_2 - \overline{\lambda_1}) r_1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \overline{\lambda_1} \in \mathbb{R} \\ (\lambda_2 - \overline{\lambda_1}) \overline{r_1} \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 - \overline{\lambda_1} = 0, \text{ bởi vì } \overline{r_1} \notin \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } E_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n}) \mid \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ (2 \operatorname{Re}(\lambda_1 r_1^n)) \mid \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ta có thể tiếp tục biến đổi biểu thức vừa thu được như sau:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(A - iB), A, B \in \mathbb{R} \\ \rho = |r_1|, \theta = \operatorname{Arg}(r_1) \end{cases}, \text{ khi đó ta có:}$$

$$2 \operatorname{Re}(\lambda_1 r_1^n) = \operatorname{Re}((A - iB) \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)) = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta).$$

$$\text{Cuối cùng: } E_{a,b} = \left\{ (\rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)) \mid A, B \in \mathbb{R} \right\} \text{ trong đó } \rho = |r_1|, \theta = \operatorname{Arg}(r_1).$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Jean – Marie Monnier (1996), Giáo trình Toán – Tập 1 Giải tích 1, NXB Giáo dục.
- [2]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa hình thức, 09/06/2018.
- [3]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Công cụ ma trận, 22/08/2017.
- [4]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Phương pháp toán tử, 21/08/2017.