Dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số hằng

Trương Phước Nhân, 16/09/2021

Nội dung của bài viết này là phần nối dài của bài viết "**Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi**" nên về mặt nguyên tắc chúng ta giữ nguyên cách trình bày và tiếp cận vấn đề nhưng vẫn có một số sửa đổi nhất định về mặt kĩ thuật như sau:

Cho $a, b, c \in \mathbb{C}$, kí hiệu $E_{a,b,c}$ là tập tất cả các dãy (u_n) trong $\mathbb{C}$ sao cho

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Dãy (u_n) thỏa mãn điều kiện nêu trên được gọi là một ***dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số hằng***.

1. Cấu trúc và số chiều của $E_{a,b,c}$.

a) $E_{a,b,c}$ là một không gian vector trên $\mathbb{C}$:

- $E_{a,b,c} \neq \emptyset$ (dãy số không thuộc $E_{a,b,c}$)
- Nếu $\lambda \in \mathbb{C}$, (u_n) và (v_n) là hai dãy bất kì thuộc $E_{a,b,c}$ thì chúng ta có

$$\lambda u_{n+3} + v_{n+3} = \lambda(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) + (av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n)$$

$$= a(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + b(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + c(\lambda u_n + v_n) \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Vậy $\lambda u_n + v_n \in E_{a,b,c}$.

b) Kí hiệu $(U_n), (V_n), (W_n)$ là ba phần tử của $E_{a,b,c}$ xác định bởi $\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 0, U_2 = 0 \\ V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 0 \\ W_0 = 0, W_1 = 0, W_2 = 1 \end{cases}$.

- Giả sử $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sao cho $\alpha U_n + \beta V_n + \gamma W_n = 0$ với mọi n.

Đặc biệt, ta có: $\begin{cases} \alpha U_0 + \beta V_0 + \gamma W_0 = 0 \\ \alpha U_1 + \beta V_1 + \gamma W_1 = 0 \\ \alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n), (V_n), (W_n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c}$.

- Giả sử $(u_n) \in E_{a,b,c}$.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học: $u_n = u_0U_n + u_1V_n + u_2W_n$, với mọi n.

Hệ thức trên là hiển nhiên với $n = 0, n = 1, n = 2$.

Giả sử với một số n nào đó ta có: $\begin{cases} u_n = u_0U_n + u_1V_n + u_2W_n \\ u_{n+1} = u_0U_{n+1} + u_1V_{n+1} + u_2W_{n+1} \\ u_{n+2} = u_0U_{n+2} + u_1V_{n+2} + u_2W_{n+2} \end{cases}.$

Do đó,

$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$

$= a(u_0U_{n+2} + u_1V_{n+2} + u_2W_{n+2}) + b(u_0U_{n+1} + u_1V_{n+1} + u_2W_{n+1}) + c(u_0U_n + u_1V_n + u_2W_n)$
$= u_0(aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n) + u_1(aV_{n+2} + bV_{n+1} + cV_n) + u_2(aW_{n+2} + bW_{n+1} + cW_n)$
$= u_0U_{n+3} + u_1V_{n+3} + u_2W_{n+3}.$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n), (V_n), (W_n)$ sinh ra $E_{a,b,c}$.

Từ hai phân tích trên, chúng ta nhận thấy rằng $(U_n), (V_n), (W_n)$là một cơ sở của $E_{a,b,c}$.

Như vậy, $dim_{\mathbb{C}}(E_{a,b,c}) = 3$.

2. Các phần tử đặc biệt của $E_{a,b,c}$.

Chúng ta sẽ xem xét vấn đề: "Liệu không gian vector $E_{a,b,c}$ có chứa các cấp số nhân hay không ?"

Nhận thấy rằng, với mọi $z \in \mathbb{C}$, dãy (z^n) thuộc $E_{a,b,c}$ khi và chỉ khi $z^{n+3} = az^{n+2} + bz^{n+1} + cz^n$ với mọi chỉ số n, nghĩa là $z^3 - az^2 - bz - c = 0$.

Phương trình $z^3 - az^2 - bz - c = 0$ được gọi là ***phương trình đặc trưng*** của các dãy truy hồi tuyến tính cấp ba thỏa mãn $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ với mọi $n \geq 0$.

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có ba nghiệm phân biệt trong , kí hiệu là z_1, z_2, z_3.

Khi đó, $(z_1^n), (z_2^n), (z_3^n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c}$ mà $E_{a,b,c}$ có số chiều bằng 3, nên $(z_1^n), (z_2^n), (z_3^n)$ là một cơ sở của $E_{a,b,c}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$,

$$u_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n + \lambda_3 z_3^n.$$

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép và một nghiệm đơn, kí hiệu là $z_1, z_2 = z_3$.

Khi đó, $(z_1^n), (z_2^n), (nz_2^{n-1})$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c}$ mà $E_{a,b,c}$ có số chiều bằng 3, nên (z_1^n), (z_2^n), (nz_2^{n-1}) là một cơ sở của $E_{a,b,c}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$,

$$u_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n + \lambda_3 n z_2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \lambda_1 z_1^n + (\lambda_2 z_2 + \lambda_3 n) z_2^{n-1}.$$

Trường hợp 3. Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm duy nhất, $z_1 = z_2 = z_3$

Khi đó, $(z_1^n), (nz_1^{n-1}), (n(n-1)z_1^{n-2})$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c}$ mà $E_{a,b,c}$ có số chiều bằng 3, nên (z_1^n), (nz_1^{n-1}), $(n(n-1)z_1^{n-2})$ là một cơ sở của $E_{a,b,c}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$,

$$u_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 n z_1^{n-1} + \lambda_3 n(n-1) z_1^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = (\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 n z_1 + \lambda_3 n(n-1)) z_1^{n-2}.$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi, 21/06/2018.

[2]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Định lí Vieta, 18/07/2021.