

Dãy truy hồi tuyến tính cấp bốn với hệ số không đổi

Trương Phước Nhân, 22/09/2021

Nội dung của bài viết là phần nối dài của các bài viết “**Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi**” và “**Dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số không đổi**” nên về mặt nguyên tắc chúng ta vẫn giữ nguyên cách trình bày và tiếp cận vấn đề như sau:

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, kí hiệu $E_{a,b,c,d}$ là tập các dãy (u_n) trong $\mathbb{C}$ sao cho

$$u_{n+4} = au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1} + du_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Dãy (u_n) thỏa mãn điều kiện nêu trên được gọi là một **dãy truy hồi tuyến tính cấp bốn với hệ số hằng**.

1. Cấu trúc và số chiều của $E_{a,b,c,d}$.

a) $E_{a,b,c,d}$ là một không gian vector trên $\mathbb{C}$.

- $E_{a,b,c,d} \neq \emptyset$ (dãy số không nằm trong $E_{a,b,c,d}$)
- Nếu $\lambda \in \mathbb{C}$, (u_n) và (v_n) là hai dãy bất kì thuộc $E_{a,b,c,d}$ thì chúng ta có

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+4} + v_{n+4} &= \lambda(au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1} + du_n) + (av_{n+3} + bv_{n+2} + cv_{n+1} + dv_n) \\ &= a(\lambda u_{n+3} + v_{n+3}) + b(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + c(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + d(\lambda u_n + v_n) \text{ với mọi } n \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, $\lambda u_n + v_n \in E_{a,b,c,d}$.

b) Kí hiệu $(U_n), (V_n), (W_n), (Z_n)$ là ba phần tử của $E_{a,b,c,d}$ xác định bởi công thức

$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0 \\ V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 0, V_3 = 0 \\ W_0 = 0, W_1 = 0, W_2 = 1, W_3 = 0 \\ Z_0 = 0, Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1 \end{cases}$$

- Giả sử $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ sao cho $\alpha U_n + \beta V_n + \gamma W_n + \delta Z_n = 0$ với mọi n .

$$\text{Đặc biệt, chúng ta có: } \begin{cases} \alpha U_0 + \beta V_0 + \gamma W_0 + \delta Z_0 = 0 \\ \alpha U_1 + \beta V_1 + \gamma W_1 + \delta Z_1 = 0 \\ \alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2 + \delta Z_2 = 0 \\ \alpha U_3 + \beta V_3 + \gamma W_3 + \delta Z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n), (V_n), (W_n), (Z_n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$.

- Giả sử $(u_n) \in E_{a,b,c,d}$.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học: $u_n = u_0 U_n + u_1 V_n + u_2 W_n + u_3 Z_n$ với mọi n .

Hệ thức trên là hiển nhiên với $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$.

Giả sử với một số n nào đó chúng ta có:
$$\begin{cases} u_n = u_0 U_n + u_1 V_n + u_2 W_n + u_3 Z_n \\ u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1} + u_2 W_{n+1} + u_3 Z_{n+1} \\ u_{n+2} = u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2} + u_2 W_{n+2} + u_3 Z_{n+2} \\ u_{n+3} = u_0 U_{n+3} + u_1 V_{n+3} + u_2 W_{n+3} + u_3 Z_{n+3} \end{cases}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} u_{n+4} &= au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1} + du_n \\ &= a(u_0 U_{n+3} + u_1 V_{n+3} + u_2 W_{n+3} + u_3 Z_{n+3}) + b(u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2} + u_2 W_{n+2} + u_3 Z_{n+2}) \\ &\quad + c(u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1} + u_2 W_{n+1} + u_3 Z_{n+1}) + d(u_0 U_n + u_1 V_n + u_2 W_n + u_3 Z_n) \\ &= u_0(aU_{n+3} + bU_{n+2} + cU_{n+1} + dU_n) + u_1(aV_{n+3} + bV_{n+2} + cV_{n+1} + dV_n) \\ &\quad + u_2(aW_{n+3} + bW_{n+2} + cW_{n+1} + dW_n) + u_3(aZ_{n+3} + bZ_{n+2} + cZ_{n+1} + dZ_n) \\ &= u_0 U_{n+4} + u_1 V_{n+4} + u_2 W_{n+4} + u_3 Z_{n+4}. \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n), (V_n), (W_n), (Z_n)$ sinh ra $E_{a,b,c,d}$.

Từ hai phân tích trên, chúng ta nhận thấy rằng $(U_n), (V_n), (W_n), (Z_n)$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, $\dim_{\mathbb{C}}(E_{a,b,c,d}) = 4$.

2. Các phần tử đặc biệt của $E_{a,b,c,d}$.

Lập luận tương tự, chúng ta sẽ xem xét vấn đề: “Liệu không gian vector $E_{a,b,c,d}$ có chứa các cấp số nhân hay không?”

Nhận thấy rằng, với mọi $z \in \mathbb{C}$, dãy (z^n) thuộc $E_{a,b,c,d}$ khi và chỉ khi $z^{n+4} = az^{n+3} + bz^{n+2} + cz^{n+1} + dz^n$ với mọi chỉ số n , nghĩa là $z^4 - az^3 - bz^2 - cz - d = 0$.

Phương trình $z^4 - az^3 - bz^2 - cz - d = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng** của các dãy truy hồi tuyến tính cấp bốn thỏa mãn $u_{n+4} = au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1} + du_n$ với mọi $n \geq 0$.

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có bốn nghiệm phân biệt, kí hiệu là z_1, z_2, z_3, z_4 .

Khi đó, $(z_1^n), (z_2^n), (z_3^n), (z_4^n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$ mà $E_{a,b,c,d}$ có số chiều bằng 4, nên $(z_1^n), (z_2^n), (z_3^n), (z_4^n)$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c,d}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$,

$$u_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n + \lambda_3 z_3^n + \lambda_4 z_4^n.$$

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép, hai nghiệm đơn, kí hiệu là $z_1 = z_2, z_3, z_4$.

Khi đó, $(z_1^n), (nz_1^{n-1}), (z_3^n), (z_4^n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$ mà $E_{a,b,c,d}$ có số chiều bằng 4, nên $(z_1^n), (nz_1^{n-1}), (z_3^n), (z_4^n)$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c,d}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 n z_1^{n-1} + \lambda_3 z_3^n + \lambda_4 z_4^n \\ \Leftrightarrow u_n &= (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 n) z_1^{n-1} + \lambda_3 z_3^n + \lambda_4 z_4^n. \end{aligned}$$

Trường hợp 3. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm kép, kí hiệu là $z_1 = z_2, z_3 = z_4$.

Khi đó, $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (z_3^n), (n z_3^{n-1})$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$ mà $E_{a,b,c,d}$ có số chiều bằng 4, nên $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (z_3^n), (n z_3^{n-1})$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c,d}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 n z_1^{n-1} + \lambda_3 z_3^n + \lambda_4 n z_3^{n-1} \\ \Leftrightarrow u_n &= (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 n) z_1^{n-1} + (\lambda_3 z_3 + \lambda_4 n) z_3^{n-1}. \end{aligned}$$

Trường hợp 4. Phương trình đặc trưng có một nghiệm bội ba, kí hiệu là $z_1 = z_2 = z_3, z_4$.

Khi đó, $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (n(n-1) z_1^{n-2}), (z_4^n)$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$ mà $E_{a,b,c,d}$ có số chiều bằng 4, nên $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (n(n-1) z_1^{n-2}), (z_4^n)$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c,d}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 n z_1^{n-1} + \lambda_3 n(n-1) z_1^{n-2} + \lambda_4 z_4^n \\ \Leftrightarrow u_n &= (\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 n z_1 + \lambda_3 n(n-1)) z_1^{n-2} + \lambda_4 z_4^n. \end{aligned}$$

Trường hợp 5. Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm duy nhất, kí hiệu là $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Khi đó, $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (n(n-1) z_1^{n-2}), (n(n-1)(n-2) z_1^{n-3})$ độc lập tuyến tính trong $E_{a,b,c,d}$ mà $E_{a,b,c,d}$ có số chiều bằng 4, nên $(z_1^n), (n z_1^{n-1}), (n(n-1) z_1^{n-2}), (n(n-1)(n-2) z_1^{n-3})$ là một cơ sở của $E_{a,b,c,d}$.

Như vậy, với mọi dãy (u_n) nằm trong $E_{a,b,c,d}$, tồn tại các số phức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 n z_1^{n-1} + \lambda_3 n(n-1) z_1^{n-2} + \lambda_4 n(n-1)(n-2) z_1^{n-3} \\ \Leftrightarrow u_n &= [\lambda_1 z_1^3 + \lambda_2 n z_1^2 + \lambda_3 n(n-1) z_1 + \lambda_4 n(n-1)(n-2)] z_1^{n-3} \end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi, 21/06/2018.
- [2]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số không đổi, 16/09/2021.
- [3]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Định lí Vieta, 18/07/2021.