# Dãy truy hồi tuyến tính cấp $k$ với hệ số không đổi

Trương Phước Nhân, 23/09/2021

Nội dung của bài viết là sự tổng hợp các kết quả đã đạt được trước đó trong các bài viết "**Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi**", "**Dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số không đổi**", "**Dãy truy hồi tuyên tính cấp bốn với hệ số không đổi**":

Cho $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{C}$, kí hiệu $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$ là tập các dãy $(u_n)$ trong $\mathbb{C}$ sao cho

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Dãy $(u_n)$ thỏa mãn điều kiện nêu trên được gọi là một ***dãy truy hồi tuyến tính cấp k với hệ số không đổi***.

**1. Cấu trúc và số chiều của $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$.**

a) $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$ là một không gian vector trên $\mathbb{C}$:

- $E_{a_1,a_2,\dots a_k} \neq \emptyset$ (dãy không luôn thuộc $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$)
- Nếu $\lambda \in \mathbb{C}$,$(u_n)$ và $(v_n)$ là hai dãy bất kì thuộc $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$ thì chúng ta có

$$\lambda u_{n+k} + v_{n+k} = \lambda(a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n) + (a_1v_{n+k-1} + a_2v_{n+k-2} + \cdots + a_kv_n)$$

$$= a_1(\lambda u_{n+k-1} + v_{n+k-1}) + a_2(\lambda u_{n+k-2} + v_{n+k-2}) + \cdots + a_k(\lambda u_n + v_n) \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Như vậy, $\lambda u_n + v_n \in E_{a_1,a_2,\dots a_k}$.

b) Kí hiệu $(U_n^1)$, $(U_n^2)$, ..., $(U_n^k)$ là $k$ phần tử của $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$ xác định bởi công thức

$$\begin{cases} U_1^1 = 1, U_2^1 = 0, \dots, U_k^1 = 0 \\ U_1^2 = 0, U_2^2 = 1, \dots, U_k^2 = 0 \\ \dots \\ U_1^k = 0, U_2^k = 0, \dots, U_k^k = 1 \end{cases}$$

- Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sao cho $\alpha_1U_n^1 + \alpha_2U_n^2 + \cdots + \alpha_kU_n^k = 0$ với mọi $n$.

Đặc biệt, chúng ta có: $\begin{cases} \alpha_1U_1^1 + \alpha_2U_1^2 + \cdots + \alpha_kU_1^k = 0 \\ \alpha_1U_2^1 + \alpha_2U_2^2 + \cdots + \alpha_kU_2^k = 0 \\ \dots \\ \alpha_1U_k^1 + \alpha_2U_k^2 + \cdots + \alpha_kU_k^k = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n^1)$, $(U_n^2)$, ..., $(U_n^k)$ là một hệ độc lập tuyến tính trong $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$.

- Giả sử $(u_n) \in E_{a_1,a_2,\dots a_k}$.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học: $u_n = u_1U_n^1 + u_2U_n^2 + \cdots + u_kU_n^k$, với mọi $n$.

Hệ thức trên là hiển nhiên với $n = 0, n = 1, \dots, n = k$.

Giả sử với một chỉ số $n$ nào đó chúng ta có: : $\begin{cases} u_n = u_1U_n^1 + u_2U_n^2 + \cdots + u_kU_n^k \\ u_{n+1} = u_1U_{n+1}^1 + u_2U_{n+1}^2 + \cdots + u_kU_{n+1}^k \\ \cdots \\ u_{n+k-1} = u_1U_{n+k-1}^1 + u_2U_{n+k-1}^2 + \cdots + u_kU_{n+k-1}^k \end{cases}$.

Do đó,

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n$$

$$= a_1(u_1U_{n+k-1}^1 + u_2U_{n+k-1}^2 + \cdots + u_kU_{n+k-1}^k) + a_2(u_1U_{n+k-2}^1 + u_2U_{n+k-2}^2 + \cdots + u_kU_{n+k-2}^k) + \cdots$$

$$\ldots + a_k(u_1U_n^1 + u_2U_n^2 + \cdots + u_kU_n^k)$$

$$= u_1(a_1U_{n+k-1}^1 + a_2U_{n+k-2}^1 + \cdots + a_kU_n^1) + u_2(a_1U_{n+k-1}^2 + a_2U_{n+k-2}^2 + \cdots + a_kU_n^2) + \cdots$$

$$\ldots + u_k(a_1U_{n+k-1}^k + a_2U_{n+k-2}^k + \cdots + a_kU_n^k)$$

$$= u_1U_{n+k}^1 + u_2U_{n+k}^2 + \cdots + u_kU_{n+k}^k.$$

Điều này chỉ ra rằng $(U_n^1)$, $(U_n^2)$, ..., $(U_n^k)$ sinh ra $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$.

Từ hai phân tích trên, chúng ta nhận thấy rằng $(U_n^1)$, $(U_n^2)$, ..., $(U_n^k)$ là một cơ sở của $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$.

Như vậy, $dim_{\mathbb{C}}\left(E_{a_1,a_2,\ldots a_k}\right) = k$.

**2. Các phần tử đặc biệt của $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$.**

Tương tự như trước, chúng ta cũng sẽ xem xét vấn đề: "Liệu không gian vector $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$ có chứa các cấp số nhân hay không ?"

Nhận thấy rằng, với mọi $z \in \mathbb{C}$, dãy $(z^n)$ thuộc $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$ khi và chỉ khi $z^{n+k} = a_1z^{n+k-1} + a_2z^{n+k-2} + \cdots + a_kz^n$ với mọi chỉ số $n$, nghĩa là $z^k - a_1z^{k-1} - a_2z^{k-2} - \cdots - a_k = 0$.

Phương trình $z^k - a_1z^{k-1} - a_2z^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng** của các dãy truy hồi tuyến tính cấp $k$ thỏa mãn $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n$ với mọi $n \geq 0$.

Giả sử phương trình đặc trưng $z^k - a_1z^{k-1} - a_2z^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ có $r$ nghiệm $z_1, z_2, \ldots, z_r$ với số bội lần lượt là $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Khi đó,

$$\underbrace{(z_1^n), (nz_1^{n-1}), \ldots., (n(n-1)\ldots(n-n_1+2)z_1^{n-n_1+1})}_{n_1}, \ldots, \underbrace{(z_r^n), (nz_r^{n-1}), \ldots., (n(n-1)\ldots(n-n_r+2)z_r^{n-n_r+1})}_{n_r}$$

độc lập tuyến tính trong $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$ mà $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$ có số chiều bằng $k$, nên

$$\underbrace{(z_1^n), (nz_1^{n-1}), \ldots., (n(n-1)\ldots(n-n_1+2)z_1^{n-n_1+1})}_{n_1}, \ldots, \underbrace{(z_r^n), (nz_r^{n-1}), \ldots., (n(n-1)\ldots(n-n_r+2)z_r^{n-n_r+1})}_{n_r}$$

là một cơ sở của $E_{a_1,a_2,\ldots a_k}$.

Như vậy, với mọi dãy $(u_n)$ nằm trong $E_{a_1,a_2,\dots a_k}$, tồn tại các số phức $\underbrace{\lambda_1^1,\lambda_2^1,\dots,\lambda_{n_1}^1}_{n_1},\dots,\underbrace{\lambda_1^r,\lambda_2^r,\dots,\lambda_{n_r}^r}_{n_r}\in\mathbb{C}$,

$$u_n=\lambda_1^1 z_1^n+\lambda_2^1 n z_1^{n-1}+\cdots+\lambda_{n_1}^1(n-n_1+2)z_1^{n-n_1+1}+\cdots+\lambda_1^r z_r^n+\lambda_2^r n z_r^{n-1}+\cdots+\lambda_{n_r}^r(n-n_r+2)z_r^{n-n_r+1}$$

$$u_n=\left[\lambda_1^1 z_1^{n_1-1}+\lambda_2^1 n z_1^{n_1-2}+\cdots+\lambda_{n_1}^1(n-n_1+2)\right]z_1^{n-n_1+1}+\cdots$$

$$\dots+\left[\lambda_1^1 z_1^{n_1-1}+\lambda_2^1 n z_1^{n_1-2}+\cdots+\lambda_{n_1}^1(n-n_1+2)\right]z_1^{n-n_1+1}$$

**Tài liệu tham khảo:**


[1]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi, 21/06/2018.

[2]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp ba với hệ số không đổi, 16/09/2021.

[3]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính cấp bốn với hệ số không đổi, 22/09/2021.

[4]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Định lí Vieta, 23/09/2021.