Chủ đề 02. Cây – Đồ thị chordal – Đồ thị lưỡng phân

2.1. Cây

Khái niệm cây

Một đồ thị liên thông không có chứa bất kì chu trình nào được gọi là một ***cây***. Một cây trên n thường được kí hiệu là T_n.

Kết quả 2.1.1.

Giả sử cho trước một đồ thị đơn G. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương nhau:

(1) G là một cây;

(2) G là một đồ thị liên thông và $m(G) = n(G) - 1$;

(3) G không có chứa bất kì chu trình nào và $m(G) = n(G) - 1$;

(4) Chỉ có duy nhất một đường đi nối giữa hai đỉnh bất kỳ của G;

(5) G không có chứa bất kì chu trình nào và nếu nối hai đỉnh không liên hợp bất kỳ lại với nhau bởi một cạnh nào đó thì sẽ thu được một đồ thị liên thông và cạnh bổ sung này chỉ nằm trên chính xác một chu trình nào đó.

Chứng minh kết quả 2.1.1.

(1) ⇒ (2) Giả sử G là một đồ thị liên thông. Ta sẽ chứng minh hệ thức $m(G) = n(G) - 1$ bằng quy nạp toán học theo chỉ số n. Với $n = 1,2$, tính đúng đắn của hệ thức trên là hiển nhiên. Giả sử $n(G) > 2$. Do G là một cây nên nó có ít nhất một đỉnh pendant x nên, bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi G, chúng ta sẽ thu được một cây G_1 với số đỉnh ít hơn G. Áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán cho đồ thị G_1, $m(G_1) = n(G_1) - 1$. Bằng cách trả lại đỉnh x và cạnh liên thuộc tương ứng với đỉnh x đã xóa lại vào G_1 để tạo lại đồ thị G. Hiển nhiên, $m(G) = m(G_1) + 1$ và $n(G) = n(G_1) + 1$, nên $m(G) = n(G) - 1$.

(2) ⇒ (3) Ta sẽ chứng minh G không có chứa bất kì chu trình nào. Ngược lại, giả sử G có chứa một chu trình nào đó. Bằng cách xóa yếu một cạnh $e = \{x, y\}$ nào đó của chu trình này, $G - e$ cũng là một đồ thị liên thông (do vẫn còn tồn tại một $(x, y) -$ đường đi nằm trong $G - e$). Nếu $G - e$ có chứa một chu trình nào đó thì, bằng cách lặp lại quy trình nêu ở trên cho đến khi thu được một đồ thị không có chứa bất kì chu trình nào, chúng ta có thể giả sử rằng $G - e$ không có chứa bất kì chu trình nào. Do $G - e$ là một đồ thị liên thông nên nó phải là một cây. Từ (1) ⇒ (2), $m = n - 1$, điều này mâu thuẫn với thực tế là chúng ta đã xóa đi ít nhất một cạnh.

(3) ⇒ (4) Giả sử G không có chứa bất kì chu trình nào và $m(G) = n(G) - 1$. Giả sử G có $k \geq 1$ thành phần liên thông $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Khi đó, mỗi thành phần liên thông G_i đều là một cây. Từ (1) ⇒ (2), với mỗi thành phần liên thông G_i, $m_i = n_i - 1$. Do đó, $m(G) = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k$. Như vậy, hệ thức $m = n - 1 = n - k$ chỉ ra rằng $k = 1$, nghĩa là G là một đồ thị liên thông. Điều này cũng chỉ ra rằng chỉ có duy nhất một đường đi nối giữa hai đỉnh bất kỳ của G. Trường hợp ngược lại, nếu có hai đường đi phân biệt nối giữa một cặp đỉnh bất kì thì G sẽ có chứa một chu trình nào đó, điều này mâu thuẫn với giả thiết của điều kiện (3).

(4) ⇒ (5) G không thể chứa bất kì chu trình nào bởi vì trong bất kì một chu trình nào thì hai đỉnh bất kì đều được nối với nhau bởi hai đường đi phân biệt. Giả sử x, y là hai đỉnh không liên hợp với nhau. Khi đó, chỉ có duy nhất một $(x, y) -$ đường đi. Bằng cách bổ sung thêm cạnh $e = \{x, y\}$ vào G, chúng ta sẽ thu được một chu trình. Nhận thấy rằng chu trình này là duy nhất; trong trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ thu được hai chu trình C_k và C_l nên đồ thị con $(C_k \cup C_l) - \{x, y\}$ cũng là một chu trình, điều này mâu thuẫn với giả thiết của khẳng định (4).

(5) ⇒ (1) G không có chứa bất kì chu trình nào. Nếu G không phải là một cây (nghĩa là G là một đồ thị không liên thông) thì, bằng cách nối hai đỉnh bất kì nằm trong hai thành phần liên thông khác nhau, chúng ta sẽ không thu được bất kì chu trình nào, mâu thuẫn. □

Giả sử cho trước một đồ thị đơn G với k thành phần liên thông. Giá trị $\Lambda(G) \coloneqq m(G) - n(G) + k$ được gọi là ***chỉ số chu trình của G***.

Nếu G là một đồ thị liên thông thì $k = 1$, nên $\Lambda = m - n + 1 = m - (n - 1)$. Kết quả 2.1.1) chỉ ra rằng $n - 1$ là số cạnh nhỏ nhất có thể có để đảm bảo một đồ thị cho trước là liên thông, nghĩa là đảm bảo một đồ thị cho trước là một cây. Do đó, giá trị $m - (n - 1)$ cho chúng ta biết số các cạnh cần thiết để bổ sung thêm vào đồ thị G. Bắt đầu từ một cây khung bất kì của đồ thị G, chúng ta có thể bổ sung thêm tuần tự Λ cạnh còn lại để tái tạo lại G. Mỗi cạnh như vậy đều hình thành chính xác một chu trình ứng với cây khung. Các chu trình này được gọi là các ***chu trình cơ bản*** và các cạnh này được gọi là các ***dây cung*** ứng với cây khung.

Nếu G là một đồ thị không liên thông thì, bằng cách áp dụng lập luận tương tự như trên cho từng thành phần liên thông và thay thế "cây" bởi "rừng", chúng ta cũng chỉ ra được giá trị $m - (n - k)$ cho chúng ta biết số các cạnh cần thiết để bổ sung thêm vào đồ thị G. Nói cách khác, chỉ số chu trình cho chúng ta biết một đồ thị G cách rừng "bao xa". Điều này lí giải cho cách gọi "chỉ số chu trình".

Thật vậy, những điều trên có thể được phát biểu lại trong khẳng định sau:

Kết quả 2.1.2. $\Lambda(G) = 0$ khi và chỉ khi G là một rừng.

Chúng ta có thể thấy rằng mỗi dây cung hình thành chính xác một chu trình cơ bản ứng với cây khung. Tuy nhiên, tổng số các chu trình lớn hơn Λ, nên sẽ có một số chu trình bổ sung có thể được biểu thị dưới dạng một tổ hợp các chu trình cơ bản. Nói chung, một đồ thị có thể có nhiều cây khung khác nhau, nên có nhiều tập hợp chu trình cơ bản khác nhau. Tuy nhiên, điều quan trọng ở đây đó là bất kỳ chu trình nào cũng có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp của các chu trình cơ bản và số chu trình cơ bản cần thiết để biểu diễn luôn luôn bằng nhau và bằng chỉ số chu trình của đồ thị.

Chúng ta nhận thấy rằng hai cây khung nằm trong đồ thị K_n được coi là phân biệt nếu chúng được tạo thành từ các tập cạnh khác nhau.

Kết quả 2.1.3. (Cayley) Số các cây khung phân biệt nằm trong đồ thị $K_n (n \geq 1)$ bằng n^{n-2}.

Do mọi cây đều là một đồ thị liên thông nên công thức Cayley chỉ ra rằng, với mọi số nguyên dương $n \geq 1$, có tất cả n^{n-2} cây phân biệt trên n đỉnh.

Cây và khoảng cách

Đồ thị E_n được gọi là một ***đồ thị tầm thường***. Thông thường, chúng ta thường chỉ khảo sát các đồ thị không tầm thường, nghĩa là bất kỳ đồ thị nào cũng có ít nhất hai đỉnh và ít nhất một cạnh.

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ và $x, y \in X$. Chúng ta định nghĩa ***khoảng cách*** $\boldsymbol{d(x,y)}$ giữa x và y được định nghĩa là chiều dài nhỏ nhất có thể có của một $(x, y) -$ đường đi chứa trong G. Nếu không tồn tại bất kỳ một $(x, y) -$ đường đi nào trong G thì $d(x, y) = \infty$; hiển nhiên, trong trường hợp này, G là một đồ thị không liên thông và hai đỉnh x, y sẽ nằm trong hai thành phần liên thông khác nhau của đồ thị G. ***Khoảng cách*** $\boldsymbol{d(x,Y)}$ giữa x và một tập đỉnh $Y \subseteq X$ được định nghĩa là số thực $d(x, Y) \coloneqq min_{y\in Y} d(x, y)$ – khoảng cách nhỏ nhất trong số các khoảng cách giữa x và một đỉnh y bất kì nằm trong Y.

Với mọi đỉnh $x, y, z \in X$, các thuộc tính sau của khoảng cách sẽ luôn được thỏa mãn:

1) $d(x, y) \geq 0$ và $d(x, x) = 0$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (bất đẳng thức tam giác).

Đường kính $\boldsymbol{diam(G)}$ của đồ thị G được định nghĩa là số thực $max_{x,y\in X} d(x, y)$ – khoảng cách giữa các đỉnh xa nhất của đồ thị G. Đối với các đồ thị liên thông, đường kính luôn là một số nguyên dương. Một $(x, y) -$ đường đi sao cho $d(x, y) = diam(G)$ được gọi là một đường kính của G. Có thể có nhiều đường kính trong một đồ thị cho trước. Kí hiệu $N_\infty(x)$ là tập các đỉnh cách xa đỉnh x nhất, nghĩa là nếu $y \in N_\infty(x)$ và $z \notin N_\infty(x)$ thì $d(x, z) < d(x, y)$. Khoảng cách giữa đỉnh x và tập $N_\infty(x)$ được gọi là **độ lệch tâm của đỉnh** $\boldsymbol{x}$. ***Tâm của đồ thị G*** được định nghĩa là tập các đỉnh có độ lệch tâm nhỏ nhất có thể được. ***Bán kính của đồ thị G*** được định nghĩa là độ lệch tâm của bất kì đỉnh nào nằm trong tâm của đồ thị G. Sau cùng, một đỉnh có bậc bằng 1 sẽ được gọi là một ***đỉnh pendant của đồ thị G***.

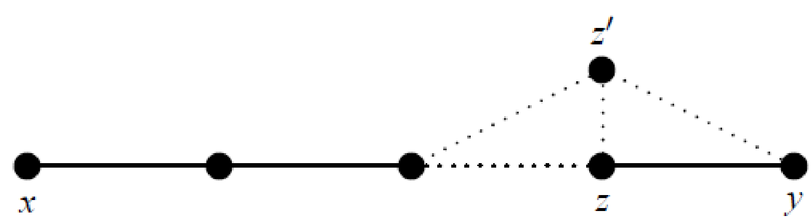
Kết quả 2.1.4.

Giả sử cho trước một cây $T = (X, E)$ và một đỉnh $x \in X$.

Khi đó, mọi đỉnh $y \in N_\infty(x)$ đều là một đỉnh pendant.

Chứng minh kết quả 2.1.4.

Giả sử cho trước một đỉnh $y \in N_\infty(x)$. Xét một $(x, y) -$ đường đi nằm trong T và một đỉnh z liên hợp với y nằm trên đường đi này.



Hình vẽ minh họa.

Ngược lại, giả sử tồn tại một đỉnh z' khác cũng liên hợp với y. Nhận thấy rằng một $(x, z') -$ đường đi ngắn nhất bất kì không thể đi qua đỉnh y; trường hợp ngược lại nó sẽ có chiều dài lớn hơn $d(x, y)$. Như vậy, một

$(x, z')-$ đường đi như vậy sẽ phải đi qua đỉnh z hoặc một đỉnh bất kỳ nào đó khác nằm trên $(x, y)-$ đường đi. Trong mọi trường hợp, chúng ta đều thu được một chu trình (tối thiểu cũng là một tam giác) nằm trong T, điều này mâu thuẫn với giả thiết T là một cây. □

Kết quả 2.1.5.

Mọi cây đều có chứa ít nhất hai đỉnh pendant.

Chứng minh kết quả 2.1.5.

Xét hai đỉnh x, y sao cho $d(x, y) = diam(T)$. Hiển nhiên, $x \in N_\infty(y)$ và $y \in N_\infty(x)$, nên cả hai đỉnh x và y đều là các đỉnh pendant (điều này suy ra từ Kết quả 2.1.4). □

Kết quả 2.1.6. (Jordan)

Tâm của một cây chỉ có thể là K_1 hoặc K_2.

Chứng minh kết quả 2.1.6.

Nhận thấy rằng việc xóa mạnh bất kỳ một đỉnh pendant nào khỏi cây T sẽ giữ lại mọi khoảng cách giữa các đỉnh còn lại không đổi. Bằng cách xóa mạnh tất cả các đỉnh pendant khỏi cây T, chúng ta thu được một cây T_1. Do cây T_1 nhận được bằng cách xóa mạnh tất cả các đỉnh pendant khỏi cây T nên độ lệch tâm của mỗi đỉnh x nằm trong T_1 nhỏ hơn độ lệch tâm của cùng đỉnh x đó trong T đúng 1 đơn vị. Như vậy, các đỉnh có độ lệnh tâm cực tiểu nằm trong T và T_1 là như nhau. Bằng cách lặp lại nhiều lần nhất có thể được quá trình nêu trên, chúng ta sẽ thu được một dãy các cây $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Sau cùng, chúng ta sẽ thu được một đồ thị K_1 hoặc K_2 – đây chính là tâm cần tìm. □

Kết quả trên cũng chỉ ra cho chúng ta một thuật toán đơn giản để xác định tâm của một cây cho trước.

Nhận thấy rằng đường kính $diam(T)$ có thể được xác định theo hai bước như sau:

1) Bắt đầu với một đỉnh z bất kì, chúng ta xác định tất cả các đỉnh $x \in N_\infty(z)$;

2) Lặp lại quá trình trên cho một đỉnh $x \in N_\infty(z)$ bất kì, chúng ta xác định tất cả các đỉnh $y \in N_\infty(x)$.

Khi đó, $diam(T) = d(x, y)$.

Cây khung tối tiểu

Một đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là một ***trọng đồ*** nếu mỗi cạnh $e \in E$ được gán một số thực dương $w(e)$ được gọi là ***trọng số của cạnh e***. Trong nhiều ứng dụng thực tế, trọng số có thể biểu diễn khoảng cách, thời gian, chi phí, công suất, sức cản, xác suất, v.v... Xét một cây khung $T = (X, E')$ bất kỳ của G. ***Trọng số $w(T)$ của cây khung T*** được định nghĩa là tổng trọng số của tất cả các cạnh của T. Các cây khung khác nhau có thể có trọng số khác nhau. Bài toán được đặt ra ở đây đó là: "Xác định một cây khung có trọng số tối tiểu (tối đại?". Bài toán này thường được gọi là bài toán tìm cây khung tối tiểu (tối đại).

Thuật toán tìm cây khung tối tiểu/Thuật toán Kruskal

INPUT: Trọng đồ liên thông G.

OUTPUT: Một cây khung T có trọng số tối tiểu của G.

1. Sắp xếp các cạnh của G theo thứ tự tăng dần của trọng số của các cạnh và đặt T là một đồ thị rỗng.

2. Bổ sung thêm cạnh đầu tiên trong dãy sắp thứ tự này vào T.

3. Xét cạnh tiếp theo trong dãy sắp thứ tự này. Nếu nó tạo ra một chu trình trong T với các cạnh đã được bổ sung trước đó thì bỏ qua nó. Trường hợp ngược lại, bổ sung thêm cạnh này vào T.

4. Nếu T có $|G| - 1$ cạnh thì kết thúc thuật toán và xuất T. Trường hợp ngược lại, chuyển sang Bước 3).

Kết quả 2.1.7. (Kruskal)

Với mọi trọng đồ liên thông G, thuật toán Kruskal xây dựng một cây khung với trọng số tối tiểu.

Chứng minh kết quả 2.1.7.

Nhận thấy rằng thuật toán Kruskal sẽ tạo ra một cây vì nó không tạo ra các chu trình và không thể kết thúc khi T là một đồ thị không liên thông.

Giả sử T không phải là một cây khung tối tiểu của G, nghĩa là tồn tại một cây khung $T^* \neq T$ với trọng số tối tiểu sao cho $w(T^*) < w(T)$. Giả sử e là cạnh đầu tiên trong dãy sắp thứ tự được chọn bổ sung thêm vào T nhưng e không có mặt trong T^*. Nếu chúng ta bổ sung thêm cạnh e vào T^* thì chúng ta sẽ thu được một chu trình mới duy nhất. Do T không chứa bất kỳ chu trình nào nên chu trình này có chứa một cạnh e' nào đó không nằm trong T.

Xét cây khung $T^* + e - e'$. Do $w(e) \leq w(e')$ nên $w(T^* + e - e') = w(T^*) + w(e) - w(e') \leq w(T^*)$.

Như vậy, chúng ta thu được một cây khung mới với trọng số tối tiểu và có thêm một cạnh chung nữa với T.

Bằng cách lặp lại quy trình này nhiều lần nữa nếu cần, chúng ta sẽ thu được cây T. Điều này chỉ ra tính tối tiểu của cây khung T. □

Thuật toán và Định lí trên vẫn đúng nếu chúng ta đặt vấn đề cần tìm một cây khung với trọng số tối đại: chúng ta chỉ cần tiến hành theo dãy sắp xếp thứ tự giảm dần của trọng số của các cạnh.

2.2. Đồ thị chordal / Đồ thị tam giác phân

Khái niệm đồ thị chordal

Nếu một đồ thị liên thông G không phải là một cây thì nó sẽ có ít nhất một chu trình. Một số chu trình trong số đó có thể có hai đỉnh không liên tiếp liên hợp nhau trong G. Cạnh nối chúng được gọi là một ***dây cung*** của chu trình đó. Đồ thị G được gọi là ***chordal/tam giác phân*** nếu mỗi chu trình có độ dài ≥ 4 đều có một dây cung. Do các chu trình C_k $(k \geq 4)$ không có dây cung không thể xuất hiện như các đồ thị con riêng biệt nên các đồ thị chordal không thể chứa các chu trình $C_k (k \geq 4)$ như các đồ thị con cảm sinh. Nói cách khác, nếu một đồ thị chordal có chứa các chu trình $C_k (k \geq 4)$ thì không có chu trình nào trong số chúng là một đồ thị con cảm sinh.

Một dây cung sẽ tách một chu trình cho trước thành hai chu trình nhỏ hơn. Nếu một đồ thị là chordal và có ít nhất một chu trình không phải là tam giác thì nó sẽ có một dây cung khác, v.v... Như vậy, mọi chu trình đều có tách thành một số tam giác. Đó là lý do tại sao các đồ thị chordal còn được gọi là các ***đồ thị tam giác phân***.

Mọi đồ thị hoặc là chordal hoặc là không chordal. Nếu một đồ thị không phải là chordal thì nó có chứa một chu trình con cảm sinh C_k $(k \geq 4)$. Do các cây không có chứa chu trình nên tất cả chúng đều là các đồ thị chordal.

Một đỉnh được gọi là ***simplicial*** nếu tất cả các đỉnh láng giềng của nó đôi một liên hợp nhau, nghĩa là các đỉnh láng giềng của nó cảm sinh một đồ thị con đầy đủ. Điều này chỉ ra rằng một đỉnh là không simplicial nếu nó có hai đỉnh láng giềng rời nhau.

Chúng ta sẽ thấy rằng các đồ thị chordal luôn có chứa các đỉnh simplicial. Hơn nữa, nếu chúng ta xem cây như một trường hợp đặc biệt của các đồ thị chordal thì các đỉnh pendant sẽ đóng vai trò như một trường hợp đặc biệt của các đỉnh simplicial.

Kết quả 2.2.1.

Trong một đồ thị chordal, mọi đồ thị con cảm sinh đều là chordal.

Chứng minh kết quả 2.2.1.

Nếu trong một đồ thị chordal có một đồ thị con cảm sinh không phải là chordal thì đồ thị này có chứa một chu trình cảm sinh C_k $(k \geq 4)$. Hiển nhiên, C_k là một đồ thị con cảm sinh trong đồ thị ban đầu, mâu thuẫn với giả thiết đồ thị ban đầu là một đồ thị chordal. □

Tính chất trên rất quan trọng vì nó cho phép chúng ta chứng minh nhiều kết quả quan trọng về các đồ thị chordal bằng phương pháp quy nạp toán học: nếu chúng ta xóa mạnh một số đỉnh bất kỳ nào đó khỏi một đồ thị chordal thì đồ thị thu được cũng là một đồ thị chordal.

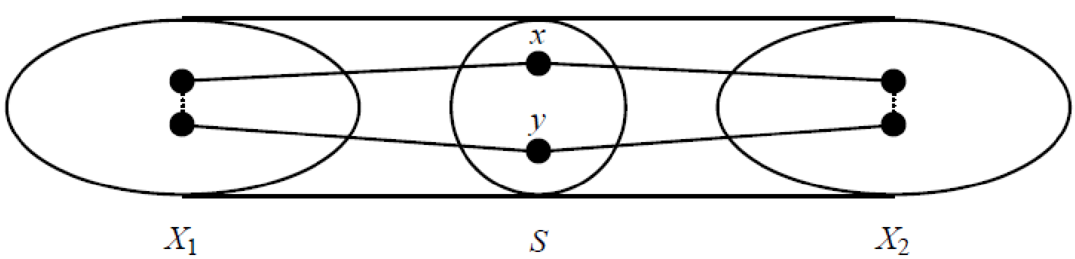
Tập tách và đỉnh simplicial

Kết quả 2.2.2.

Một đồ thị là chordal khi và chỉ khi mọi tập tách tối tiểu của nó đều là một clique.

Chứng minh kết quả 2.2.2.

(⇒) Giả sử cho trước một đồ thị chordal $G = (X, E)$ và S là một tập tách tối tiểu của G. Giả sử chúng ta có hai đồ thị con dẫn xuất $G_1 = G_{X_1 \cup S}$ và $G_2 = G_{X_2 \cup S}$.



Hình ảnh minh họa tập tách tối tiểu S của G.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng G_S là một clique. Xét một cặp đỉnh $x, y \in S$ bất kỳ. Do S là một tập tách tối tiểu nên cả hai đỉnh x, y đều có các đỉnh láng giềng nằm trong X_1 và X_2. Đầu tiên, chúng ta chọn một (x, y) −đường đi ngắn nhất đi qua X_1; chiều dài của nó ≥ 2. Tiếp theo, chúng ta chọn một (x, y) − đường đi ngắn nhất đi qua X_2; chiều dài của nó ≥ 2. Bằng cách tổ hợp hai (x, y) − đường đi này, chúng ta thu được một chu trình C_k $(k \geq 4)$. Do không có cạnh nào nối giữa X_1, X_2 và G là một đồ thị chordal nên hai đỉnh x, y phải liên hợp với nhau. Do x, y là hai đỉnh bất kỳ của S nên tất cả các đỉnh của S đều đôi một liên hợp nhau, nghĩa là G_S là một clique.

Trong trường hợp có nhiều hơn hai đồ thị con dẫn xuất, chúng ta chỉ cần xem xét hai đồ thị con dẫn xuất trong số đó.

($\Leftarrow$) Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ trong đó mọi tập tách tối tiểu của nó đều là một clique. Giả sử phản chứng G không phải là một đồ thị chordal. Khi đó, G có chứa một chu trình con cảm sinh C_k $(k \geq 4)$.

Xét hai đỉnh x, y không liên hợp nhau bất kỳ của chu trình C_k. Khi đó, C_k được tạo thành bởi hai $(x, y)-$ đường đi phân biệt. Do $k \geq 4$ nên mỗi đường đi như vậy có chứa ít nhất một đỉnh trong. Do C_k là một đồ thị con cảm sinh nên các đỉnh trong của đường đi thứ nhất sẽ không liên hợp với các đỉnh trong của đường đi thứ hai. Nhận thấy rằng mọi tập $(x, y)-$ tách đỉnh tối tiểu đều có chứa ít nhất một đỉnh trong từ mỗi đường đi này. Như vậy, mọi tập $(x, y)-$ tách đỉnh tối tiểu đều có chứa hai đỉnh không liên hợp nhau, mâu thuẫn với giả thiết mọi tập tách tối tiểu của nó đều là một clique. □

Kết quả 2.2.3. (Dirac)

Mọi đồ thị chordal liên thông không đầy đủ đều có chứa ít nhất hai đỉnh simplicial không liên hợp nhau.

Chứng minh kết quả 2.2.3.

Giả sử cho trước một đồ thị chordal liên thông không đầy đủ $G = (X, E)$. Khi đó, $|X| = n \geq 3$. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng quy nạp toán học theo chỉ số $|X| = n$. Với $n = 3$, tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử rằng khẳng định trên đã được chứng minh cho tất cả các đồ thị chordal liên thông không đầy đủ với ít hơn n đỉnh. Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định trên cũng đúng với đồ thị G.

Do G không phải là một đồ thị đầy đủ nên G có chứa hai đỉnh x, y không liên hợp nhau. Khi đó, $X - \{x, y\}$ là một tập tách đỉnh của G. Chọn một tập tách đỉnh S tối tiểu trong G. Khi đó, G_S là một clique (điều này suy ra từ Kết quả 2.2.2).

Giả sử việc xóa S khỏi G để lại hai thành phần liên thông G_{X_1} và G_{X_2}. Kí hiệu $G_1 = G_{X_1 \cup S}$ và $G_2 = G_{X_2 \cup S}$ là các đồ thị con dẫn xuất tương ứng với S. Khi đó, hai đồ thị G_1 và G_2 đều là các đồ thị con chordal của G.

Xét đồ thị con G_1. Nếu nó là một clique thì mọi đỉnh nằm trong X_1 đều là một đỉnh simplicial trong G (điều này suy ra từ việc không có cạnh nào nằm giữa X_1 và X_2). Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử G_1 không phải là một clique. Khi đó, G_1 là một đồ thị liên thông (điều này suy ra từ việc G_{X_1} là một đồ thị liên thông và G_S là một clique). Nhận thấy rằng đồ thị G_1 có chứa $< n$ đỉnh (điều này suy ra từ việc $X_2 \neq \emptyset$). Từ giả thiết quy nạp của bài toán, G_1 có chứa ít nhất hai đỉnh simplicial không liên hợp nhau. Do G_S là một clique nên cả hai đỉnh simplicial không thể cùng nằm trong S. Do đó, một trong số hai đỉnh này phải nằm trong X_1. Một lần nữa, do không có cạnh nào nằm giữa X_1 và X_2 nên đỉnh simplicial nằm trong X_1 này cũng là một đỉnh simplicial trong G.

Xét đồ thị con G_2. Lập luận tương tự, chúng ta cũng chứng minh được rằng G_2 có chứa ít nhất đỉnh simplicial và một trong số hai đỉnh simplicial này cũng là một đỉnh simplicial trong G. Như vậy, chúng ta thu được hai đỉnh simplicial trong G không liên hợp nhau.

Nếu việc xóa S khỏi G để lại $k \geq 3$ thành phần liên thông thì, bằng cách áp dụng cách lập luận tương tự như trên cho từng thành phần liên thông, chúng ta có thể chứng minh được rằng G có chứa k đỉnh simplicial đôi một không liên hợp nhau. □

Kết quả 2.2.4.

Mọi cây đều có chứa ít nhất hai đỉnh pendant.

Chứng minh kết quả 2.2.4.

Nhận thấy rằng do mọi cây đều là một đồ thị chordal nên, theo Kết quả 2.2.3), mọi cây đều có chứa ít nhất hai đỉnh simplicial. Tuy nhiên, mọi đỉnh simplicial trong cây đều là một đỉnh pendant. □

Giả sử cho trước một đồ thị chordal $G = (X, E)$. Kí hiệu $G_1 \coloneqq G$. Khi đó, G_1 có chứa một đỉnh simplicial, kí hiệu là x_1. Bằng cách xóa đỉnh simplicial x_1 khỏi G_1, chúng ta thu được một đồ thị con mới và kí hiệu đồ thị thu được bởi G_2. Do G_2 là một đồ thị con của G_1 nên nó cũng là một đồ thị chordal. Khi đó, G_2 cũng có chứa một đỉnh simplicial, kí hiệu là x_2. Bằng cách xóa đỉnh simplicial x_2 khỏi G_2, chúng ta cũng thu được một đồ thị con chordal G_3 mới và G_3 cũng có chứa một đỉnh simplicial x_3; v.v… Nhận thấy rằng, tại bước thứ i của quá trình trên, chúng ta thu được một đồ thị chordal G_i và một đỉnh simplicial x_i của nó (điều này suy ra từ Kết quả 2.2.2). Bước cuối cùng của quá trình trên xảy ra khi chúng ta xóa đỉnh x_n khỏi G_n và thu được $G_{n+1} = \emptyset$. Chúng ta thu được một dãy sắp thứ tự các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_n$. Kí hiệu dãy sắp thứ tự này bởi σ.

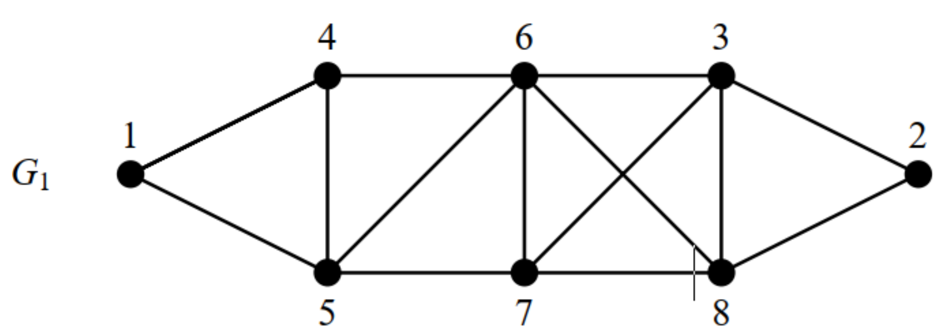
Khi đó, $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dãy sắp thứ tự σ được gọi là ***dãy sắp thứ tự khử simplicial / dãy sắp thứ tự khử hoàn hảo***. Quá trình xóa các đỉnh theo dãy sắp thứ tự σ này được gọi là ***phép phân tích simplicial***. Đặc điểm chính của phép phân tích simplicial này đó là mỗi đỉnh x_i đều là một đỉnh simplicial của đồ thị G_i cảm sinh bởi các đỉnh $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ và $G_{i+1} = G_i - x_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$.

Từ các quan sát nêu trên, chúng ta nhận thấy rằng mọi đồ thị chordal đều có một dãy sắp thứ tự khử simplicial σ/ hoặc tương đương có một phép phân tích simplicial. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Nếu một đồ thị có một phép phân tích simplicial thì nó có phải là một đồ thị chordal hay không?”. Giả sử phản chứng nó không phải là một đồ thị chordal. Khi đó, nó có chứa một chu trình cảm sinh C_k $(k \geq 4)$. Nếu nó có một phép phân tích simplicial thì sớm hay muộn một đỉnh nào đó của C_k cũng phải xuất hiện trong phép phân tích simplicial này. Tuy nhiên, không có bất kỳ đỉnh nào của C_k là một đỉnh simplicial trong bất kỳ đồ thị con cảm sinh nào của nó, mâu thuẫn.

Bằng cách tổng hợp các quan sát nêu trên, chúng ta đi đến kết luận sau đây:

Kết quả 2.2.5.

Một đồ thị G là chordal khi và chỉ khi nó có một dãy sắp thứ tự khử simplicial.



Hình ảnh minh họa đồ thị chordal G_1 và dãy sắp thứ tự khử simplicial $\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8)$.

Điểm mạnh của dãy sắp thứ tự khử simplicial nằm ở việc, khi cần xem xét xem một đồ thị có phải là chordal hay không, chúng ta không nhất thiết phải kiểm tra xem trong tất cả các tập đỉnh con có kích thước 4,5,6, ... có tập nào cảm sinh ra một chu trình C_k hay không; thay vào đó, chúng ta chỉ cần chỉ ra ít nhất một dãy sắp thứ tự khử simplicial hoặc chứng minh rằng không tồn tại một dãy sắp thứ tự khử simplicial như vậy.

Nói cách khác, bài toán tìm kiếm một dãy sắp thứ tự khử simplicial sẽ thay thế cho bài toán kiểm tra tất cả các tập đỉnh con có kích thước 4,5,6, ... để nhận dạng các đồ thị chordal.

Chẳng hạn, xét đồ thị G_1. Nếu chúng ta chỉ sử dụng định nghĩa của một đồ thị chordal thì chúng ta phải kiểm tra $\binom{8}{4}$ tập đỉnh con có kích thước 4 xem có tập đỉnh con nào cảm sinh ra một chu trình C_4 hay không. Tiếp theo, chúng ta cần kiểm tra $\binom{8}{5}$ tập đỉnh con có kích thước 5 để tìm kiếm các tập đỉnh con cảm sinh ra chu trình C_5, $\binom{8}{6}$ tập đỉnh con có kích thước 6 để tìm kiếm các tập đỉnh con cảm sinh ra chu trình C_6, $\binom{8}{7}$ tập đỉnh con có kích thước 7 để tìm kiếm các tập đỉnh con cảm sinh ra chu trình C_7, $\binom{8}{8}$ tập đỉnh con có kích thước 8 để tìm kiếm các tập đỉnh con cảm sinh ra chu trình C_8. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng phép phân tích simplicial, chúng ta có thể thay thế quy trình trên bằng cách chỉ cần tìm kiếm một dãy sắp thứ tự khử simplicial là đủ.

Các đồ thị không chordal cũng có thể có chứa các đỉnh simplicial nhưng nếu chúng ta bắt đầu thực hiện phép phân tích simplicial thì sớm hay muộn chúng ta cũng sẽ bị kẹt lại vì trong đồ thị thu được không có đỉnh nào là simplicial.

Kết quả 2.2.6.

Trong một đồ thị chordal G, bất kỳ đỉnh nào cũng có thể là đỉnh cuối cùng trong một dãy sắp thứ tự khử simplicial nào đó.

Chứng minh kết quả 2.2.6.

Thật vậy, giả sử G là một đồ thị chordal và x là một đỉnh bất kỳ. Do G có ít nhất hai đỉnh simplicial ở bất kỳ bước nào của phép phân tích simplicial nên chúng ta có thể tránh việc phải xóa đỉnh x ở mọi bước, ngoại trừ bước cuối cùng. □

Kết quả 2.2.7.

Nếu x là một đỉnh simplicial trong đồ thị $G = (X, E)$ thì tồn tại một tập độc lập tối đại $S \subseteq X$ sao cho $x \in S$.

Chứng minh kết quả 2.2.7.

Do x là một đỉnh simplicial nên mọi tập độc lập tối đại S' đều chứa chính xác một đỉnh nằm trong tập $\{x\} \cup N(x)$ bởi vì nếu không thì tập $S' \cup \{x\}$ cũng sẽ là một tập độc lập và có lực lượng lớn hơn S'. Nếu tồn tại một đỉnh $y \in N(x)$ sao cho $y \in S'$ thì chúng ta có thể thay thế đỉnh y bởi x và đặt $S \coloneqq S' \setminus \{y\} \cup \{x\}$. □

Nhận thấy rằng kết quả nêu trên đúng với mọi đồ thị bất kỳ chứ không nhất thiết chỉ cho các đồ thị chordal.

Tuy nhiên, sự tồn tại của dãy sắp thứ tự khử simplicial cho phép chúng ta đề xuất một thuật toán đơn giản để xác định chỉ số độc lập và tập độc lập tối đại tương ứng của một đồ thị chordal:

Thuật toán xác định tập độc lập đối đại của một đồ thị chordal.

INPUT: Đồ thị chordal $G = (X, E)$.

OUTPUT: Tập độc lập tối đại $S \subseteq X$ với $|S| = \alpha(G)$.

1. Đặt $S \coloneqq \emptyset$.
2. Tìm một đỉnh simplicial x, xóa mạnh tập đỉnh $x \cup N(x)$ và bổ sung đỉnh x vào S.
3. Nếu còn lại ít nhất một đỉnh thì lặp lại bước 2 của thuật toán.
4. Kết thúc thuật toán.

Chẳng hạn, nếu chúng ta chạy thuật toán cho đồ thị G_1 thì, ở bước đầu tiên của thuật toán, đỉnh 1 được bổ sung vào S và tập $\{1,4,5\}$ bị xóa mạnh; ở bước thứ hai của thuật toán, đỉnh 2 được bổ sung vào S và tập $\{2,3,8\}$ bị xóa mạnh; ở bước thứ ba của thuật toán, đỉnh 6 được bổ sung vào S và tập $\{6,7\}$ bị xóa mạnh. Nếu không còn đỉnh nào nữa thì chúng ta kết thúc thuật toán và kết luận rằng tập $S = \{1,2,6\}$ là một tập độc lập tối đại của đồ thị G và $\alpha(G) = 3$. Điều này tương đương với việc tập $T = \{3,4,5,7,8\}$ là một tập transversal tối tiểu của đồ thị G và $\tau(G) = 5$. Tùy thuộc vào các đỉnh simplicial được chọn ở mỗi bước của thuật toán, chúng ta sẽ nhận được các tập độc lập tối đại và các tập transversal tối tiểu khác nhau. Lưu ý rằng thuật toán nêu trên vẫn hoạt động đối với các đồ thị không chordal.

Nhận thấy rằng các tập đỉnh bị xóa trong thuật toán nêu trên cảm sinh ra các clique. Hơn nữa, chúng ta có thể chứng minh được rằng số các tập đỉnh bị xóa trong thuật toán nêu trên chính là số tối thiểu các clique cần thiết để phủ X. Chẳng hạn, mọi đỉnh của đồ thị G_1 đều nằm trong một clique nào đó cảm sinh bởi $\{1,4,5\}$, $\{2,3,8\}$, $\{6,7\}$ và số những clique như vậy là nhỏ nhất có thể được.

Tổng quát hơn, ***chỉ số phủ clique $\theta(G)$ của đồ thị G*** là số tối thiểu các clique cần thiết để phủ X, nghĩa là mỗi đỉnh của đồ thị G đều nằm trong chính xác một clique như vậy. Chẳng hạn, chỉ số phủ clique của đồ thị G_1 bằng $\theta(G) = 3$. Như chúng ta sẽ thấy, các clique phủ đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết đồ thị hiện đại.

Chỉ số Szekeres-Wilf

Bậc của một đỉnh được định nghĩa là số đỉnh láng giềng của nó; đây là một định nghĩa rất chung chung được dùng cho tất cả các đồ thị. Các đỉnh với bậc có giá trị nhỏ nhất đóng một vai trò quan trọng trong nhiều bài toán tối ưu hóa khác nhau và chúng ta thường gọi là ***các đỉnh với bậc nhỏ nhất***.

Thông thường chúng ta cần xác định giá trị lớn nhất có thể có của bậc tối tiểu tính trên tất cả các đồ thị con nằm trong một đồ thị cho trước nào đó. Khi chúng ta nói "bậc của một đỉnh trong một đồ thị con" nghĩa là chúng ta đang nói đến số các đỉnh láng giềng của nó chỉ trong đồ thị con đó.

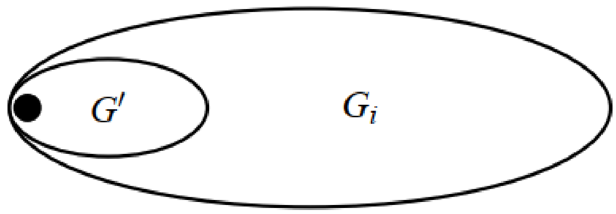
Chẳng hạn, nếu chúng ta khảo sát khái niệm bậc thì có vẻ như các đồ thị chordal sẽ đóng một vai trò đặc biệt quan trọng. Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$, chúng ta định nghĩa chỉ số Szekeres – Wilf như sau:

$$M(G) = max_{X' \subset X} min_{x \in G' = (X', E')} d(x).$$

Như chúng ta có thể nhận thấy từ cách định nghĩa của chỉ số Szekeres – Wilf, để xác định chỉ số Szekeres – Wilf $M(G)$ của đồ thị G, chúng ta cần xem xét tất cả các đồ thị con cảm sinh G' của đồ thị G, xác định bậc nhỏ nhất trong mỗi đồ thị con cảm sinh G' đó, xác định giá trị lớn nhất trong số tất cả các bậc nhỏ nhất đó.

Tuy nhiên, có một thuật toán đơn giản hơn để chúng ta có thể xác định giá trị của chỉ số Szekeres – Wilf $M(G)$: đầu tiên, chúng ta xác định một phép phân tích simplicial của G thu được bằng cách loại bỏ liên tiếp các đỉnh có bậc nhỏ nhất khỏi G; khi đó, giá trị t lớn nhất trong số tất cả các bậc nhỏ nhất đó chính là giá trị $M(G)$ cần tìm.

Thật vậy, $M(G)$ không thể nhỏ hơn t, bởi vì t là bậc nhỏ nhất trong một đồ thị con nào đó của G. Mặt khác, nếu $M(G) > t$ thì sẽ có một đồ thị con cảm sinh $G' \subseteq G$ có bậc nhỏ nhất lớn hơn t. Tuy nhiên, trong phép phân tích simplicial thu được bằng cách loại bỏ liên tiếp các đỉnh có bậc nhỏ nhất như vậy, đỉnh đầu tiên của G' sẽ xuất hiện ở bước i nào đó. Từ định nghĩa của t, bậc của đỉnh này không thể có giá trị lớn hơn t. Tổng quát hơn, bậc của bất kỳ đỉnh nào nằm trong đồ thị con G' không thể có giá trị lớn hơn bậc của cùng đỉnh đó trong đồ thị G_i, nên cũng không thể có giá trị lớn hơn bậc của cùng đỉnh đó trong đồ thị G. Như vậy, $M(G) = t$.



Kết quả 2.2.8.

Với mọi đồ thị G, $M(G) \geq \omega(G) - 1$.

Chứng minh kết quả 2.2.8.

Từ định nghĩa của chỉ số clique $\omega(G)$, $\omega(G)$ là kích thước tối đại có thể có của một clique chứa trong đồ thị G. Như vậy, có ít nhất một đồ thị con cảm sinh đầy đủ của G với bậc nhỏ nhất $\omega(G) - 1$.

Do $M(G) = max_{X' \subset X} min_{x \in G' = (X', E')} d(x)$ nên $M(G) \geq \omega(G) - 1$. □

Như chúng ta có thể nhận thấy từ kết quả trên, giá trị $\omega(G) - 1$ trên thực tế là một chặn dưới của $M(G)$ cho tất cả các đồ thị G. Kết quả tiếp theo còn chỉ ra rằng nếu $\omega(G) - 1$ là giá trị nhỏ nhất của $M(G)$ cho tất cả các đồ thị G và ngược lại:

Kết quả 2.2.9.

Các khẳng định sau là tương đương với nhau:

(1) $M(G') = \omega(G') - 1$ với mỗi đồ thị con cảm sinh $G' \subseteq G$;

(2) G là một đồ thị chordal.

Chứng minh kết qủa 2.2.9.

(1) ⇒ (2) Giả sử $M(G') = \omega(G') - 1$ với mỗi đồ thị con cảm sinh $G' \subseteq G$ và G không phải là một đồ thị chordal. Khi đó, G có chứa một chu trình cảm sinh C_k với độ dài ≥ 4. Tuy nhiên, $M(C_k) = \omega(C_k) = 2$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

(2) ⇒ (1) Giả sử G là một đồ thị chordal. Do mọi đồ thị con của một đồ thị chordal cũng là một đồ thị chordal nên, không làm mất tính tổng quát của vấn đề, chúng ta chỉ cần chứng minh đẳng thức trên cho đồ thị G. Từ Kết quả 2.2.8), $M(G) \geq \omega(G) - 1$. Do G là một đồ thị chordal nên G có một phép phân tích simplicial.

Giả sử t là bậc cao nhất của một đỉnh simplicial xuất hiện trong phép phân tích simplicial như vậy. Khi đó, kích thước tối đại có thể có của một clique chứa trong G là $\omega(G) = t + 1$. Nhận thấy rằng do đỉnh simplicial có bậc t không nhất thiết là đỉnh có bậc nhỏ nhất nên $M(G) \leq t = \omega(G) - 1$. Như vậy, $M(G) = \omega(G) - 1$. □

Như chúng ta có thể nhận thấy, với mọi đồ thị chordal, phép phân tích simplicial và phép phân tích bậc nhỏ nhất đều chỉ ra rằng giá trị bậc lớn nhất xuất hiện trong các phép phân tích này đều bằng $\omega(G) - 1$. Trong trường hợp đặc biệt, với mọi cây G, phép phân tích simplicial và phép phân tích bậc nhỏ nhất trùng nhau. Trong trường hợp tổng quát, tình hình kém hấp dẫn hơn nhiều. Chẳng hạn, với mọi đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{n,n}$ với $n \geq 2$, chúng ta có $M(K_{n,n}) = n$, $\omega(K_{n,n}) = 2$ và đồ thị $K_{n,n}$ cũng không có chứa bất kỳ đỉnh simplicial nào.

Đồ thị chordal và khoảng cách

Kết quả sau đây là một dạng tổng quát của Kết quả 2.1.4:

Kết quả 2.2.10.

Giả sử cho trước một đồ thị chordal G và một đỉnh $x \in G$.

Khi đó, $N_\infty(x)$ có chứa ít nhất một đỉnh simplicial trong G.

Chứng minh kết quả 2.2.10.

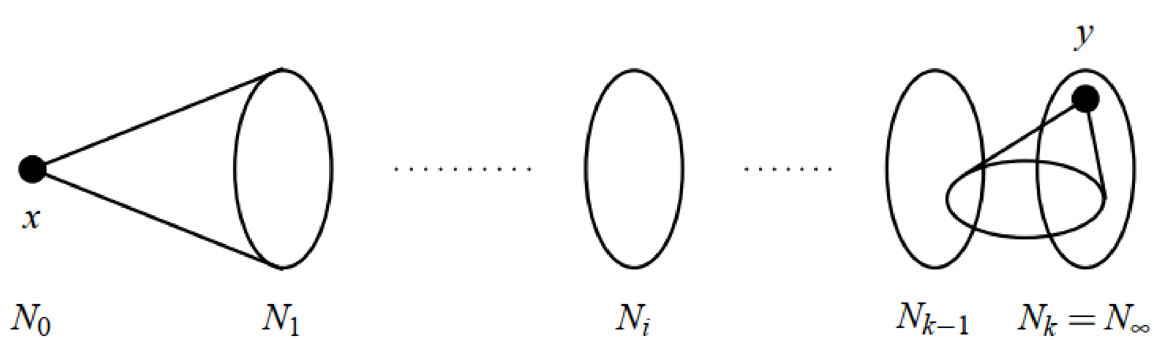
Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị chordal liên thông không tầm thường. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $n := |X|$. Tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên với $n = 2$. Giả sử khẳng định đã được kiểm chứng với mọi đồ thị chordal xác định trên $< n$ đỉnh.

Kí hiệu $\{x\}$ bởi N_0, tập các đỉnh láng giềng $N(x)$ bởi N_1, tập các đỉnh có khoảng cách đến đỉnh x bằng 2 bởi N_2, tập các đỉnh có khoảng cách đến đỉnh x bằng 3 bởi N_3, v.v... tập đỉnh $N_\infty(x)$ sau cùng của dãy này bởi N_k

Chúng ta nhận được một phân hoạch sau của tập đỉnh X (điều này suy ra từ việc $N_i \cap N_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$):

$$X = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_k,$$

trong đó $N_k = N_\infty(x)$.



Hình vẽ minh họa.

Nếu $k = 1$ thì $N_\infty(x) = X - \{x\}$. Do đồ thị chordal $G - x$ có một đỉnh simplicial và mọi đỉnh simplicial trong $G - x$ đều là một đỉnh simplicial trong G (điều này suy ra từ việc đỉnh x liên hợp với tất cả các đỉnh khác) nên $N_\infty(x)$ có chứa ít nhất một đỉnh simplicial trong G.

Giả sử $k \geq 2$. Khi đó, N_{k-1} đóng vai trò như một tập tách trong G. Nó sẽ có chứa một tập tách tối tiểu nào đó và đồ thị con G_{N_k} có chứa ít nhất một thành phần liên thông. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử N_{k-1} là một tập tách tối tiểu và G_{N_k} chỉ có chính xác một thành phần liên thông.

Từ Kết quả 2.2.2), $G_{N_{k-1}}$ là một clique. Nếu $G_{N_{k-1} \cup N_k}$ cũng là một clique thì mọi đỉnh nằm trong N_k đều là một đỉnh simplicial trong G. Nếu $G_{N_{k-1} \cup N_k}$ không phải là một clique thì nó có chứa ít nhất hai đỉnh simplicial không liên hợp nhau (điều này suy ra từ việc $G_{N_{k-1} \cup N_k}$ là một đồ thị chordal liên thông nhưng không đầy đủ và Kết quả 2.2.3). Nhận thấy rằng cả hai đỉnh simplicial này không thể cùng nằm trong N_{k-1} (điều này suy ra từ việc tập đỉnh N_{k-1} cảm sinh một clique trong G). Như vậy, có ít nhất một trong số chúng phải nằm trong N_k. Nhận xét thêm rằng mọi đỉnh $y \in N_k$ là simplicial trong $G_{N_{k-1} \cup N_k}$ cũng là simplicial trong G. □

Kết quả tiếp theo là dạng mở rộng của Kết quả 2.1.5) và Kết quả 2.2.3):

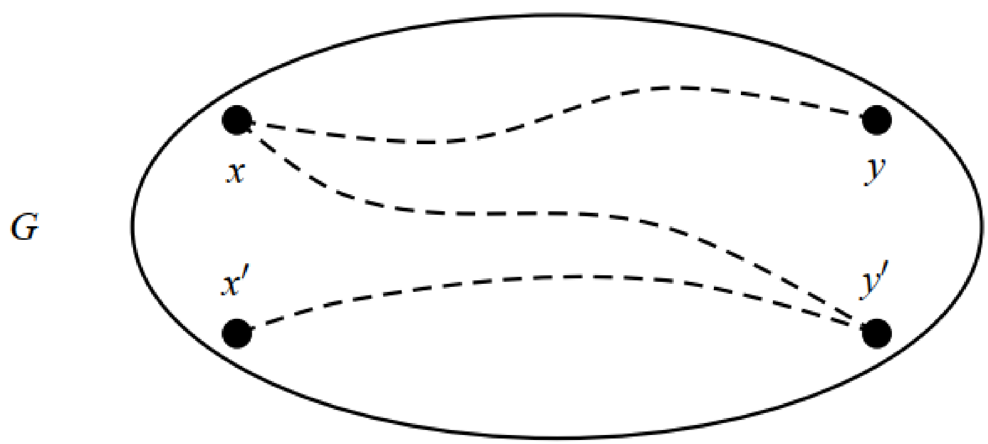
Kết quả 2.2.11.

Mọi đồ thị chordal liên thông không tầm thường đều có chứa ít nhất hai đỉnh simplicial x và y sao cho $d(x, y) = diam(G)$.

Chứng minh kết quả 2.2.11.

Giả sử cho trước một đồ thị chordal liên thông không tầm thường $G = (X, E)$.

Xét hai đỉnh x và y sao cho $d(x, y) = diam(G)$.



Từ Kết quả 2.2.10), tồn tại một đỉnh simplicial $y' \in N_\infty(x)$. Hiển nhiên, $d(x, y') = d(x, y) = diam(G)$.

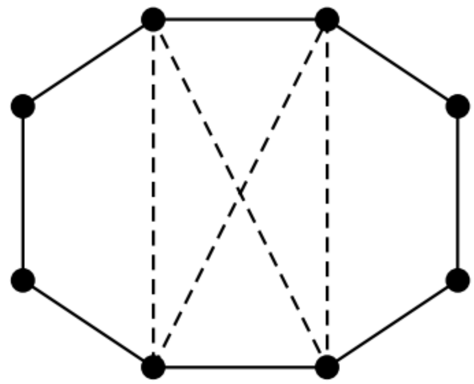
Từ Kết quả 2.2.10), tồn tại một đỉnh simplicial $x' \in N_\infty(x)$ sao cho $d(x', y') = d(x, y') = diam(G)$. □

Đồ thị giả tam giác phân

Nhận thấy rằng các đồ thị chordal không chỉ có nhiều tính chất thú vị mà các tính chất này còn là cơ sở quan trọng cho những khái quát sâu sắc hơn trong lý thuyết đồ thị và siêu đồ thị. Phần này của bài viết sẽ được dùng để trình bày một ví dụ về sự tổng quát hóa như vậy và ứng dụng của nó đối với các cấu trúc chu trình của các đồ thị và các phần bù của chúng.

Trong một đồ thị G, một đỉnh x được gọi là ***cyclic yếu*** nếu nó không thuộc bất kỳ chu trình cảm sinh C_k nào với $k \geq 4$. Hiển nhiên, trong mọi đồ thị, do các đỉnh simplicial không thuộc bất kỳ chu trình cảm sinh C_k nào với $k \geq 4$ nên chúng cũng là các đỉnh cyclic yếu. Như vậy, khái niệm đỉnh cyclic yếu là dạng tổng quát hóa của khái niệm đỉnh simplicial.

Một đồ thị G được gọi là ***lattice*** nếu mỗi đỉnh của đồ thị G đều nằm trong một đồ thị con cảm sinh có dạng C_k với $k \geq 4$ và một đồ thị con cảm sinh có dạng $\overline{C_l}$ với $l \geq 4$. Chúng ta có thể xem các đồ thị lattice là các đồ thị với tất cả các đỉnh đều là "cyclic mạnh". Đồ thị lattice bất biến đối với phép lấy phần bù: nếu G là một đồ thị lattice thì phần bù $\bar{G}$ cũng là một đồ thị lattice. Tất cả các chu trình C_k với $k \geq 6$ đều là đồ thị lattice: mỗi đỉnh của nó đều nằm trong C_k hoặc $\overline{C_4}$.



Hình ảnh minh họa.

Trong một đồ thị G, một đỉnh x được gọi là ***cosimplicial*** nếu nó là một đỉnh simplicial trong phần bù $\bar{G}$. Điều này có nghĩa là các đỉnh không phải là láng giềng của đỉnh x sẽ tạo thành một tập các đỉnh độc lập, hoặc tương đương, không có cạnh nào của G hoàn toàn nằm ngoài tập láng giềng $N(x)$.

Một đồ thị G được gọi là ***giả tam giác phân*** nếu nó có một phép phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh simplicial hoặc cosimplicial khỏi đồ thị G.

Đồ thị giả tam giác phân là bất biến đối với phép lấy phần bù: nếu G là một đồ thị giả tam giác phân thì phần bù $\bar{G}$ cũng là một đồ thị giả tam giác phân.

Chẳng hạn, C_4 là một đồ thị giả tam giác phân: mọi đỉnh của C_4 đều là một đỉnh cosimplicial. C_5 không phải là một đồ thị giả tam giác phân bởi vì nó không có đỉnh simplicial và cosimplicial nào.

Kết quả 2.2.12.

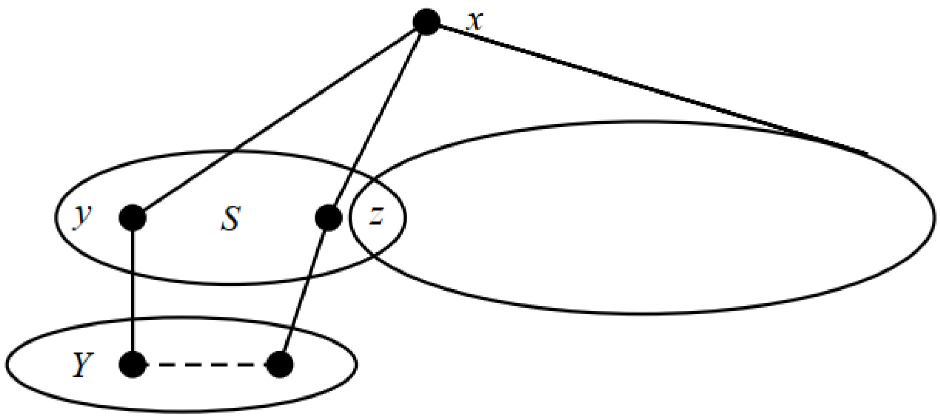
Giả sử cho trước một đồ thị G và x là một đỉnh không thuộc bất kỳ chu trình cảm sinh C_k nào với $k \geq 4$.

Khi đó, mọi tập tách tối tiểu S nằm trong tập láng giềng $N(x)$ đều cảm sinh một clique trong G.

Chứng minh kết quả 2.2.12.

Giả sử cho trước một đồ thị G, x là một đỉnh không thuộc bất kỳ chu trình cảm sinh C_k nào với $k \geq 4$ và S là một tập tách tối tiểu nằm trong tập láng giềng $N(x)$.

Kí hiệu Y là một tập đỉnh cảm sinh ra một thành phần liên thông không có chứa x của $G - S$.



Chọn hai đỉnh y, z bất kỳ trong S. Giả sử hai đỉnh y, z không liên hợp với nhau. Do S là một tập tách tối tiểu nên mỗi một trong hai đỉnh y và z đều có một đỉnh láng giềng nằm trong Y. Do Y cảm sinh ra một thành phần liên thông nên tồn tại một đường đi với chiều dài nhỏ nhất có thể nối giữa hai đỉnh y và z trong Y. Đường đi này cùng với đỉnh x sẽ tạo thành một chu trình cảm sinh C_k với $k \geq 4$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết đỉnh x không thuộc bất kỳ chu trình cảm sinh C_k nào với $k \geq 4$. Như vậy, hai đỉnh y, z phải liên hợp với nhau, nghĩa là S cảm sinh một clique. □

Kết quả 2.2.13. (Gorgos)

Các khẳng định sau là tương đương với nhau:

(1) G là một đồ thị giả tam giác phân;

(2) G có một phép phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh cyclic yếu khỏi đồ thị G hoặc phần bù $\bar{G}$.

(3) G không chứa bất kỳ đồ thị con lattice nào.

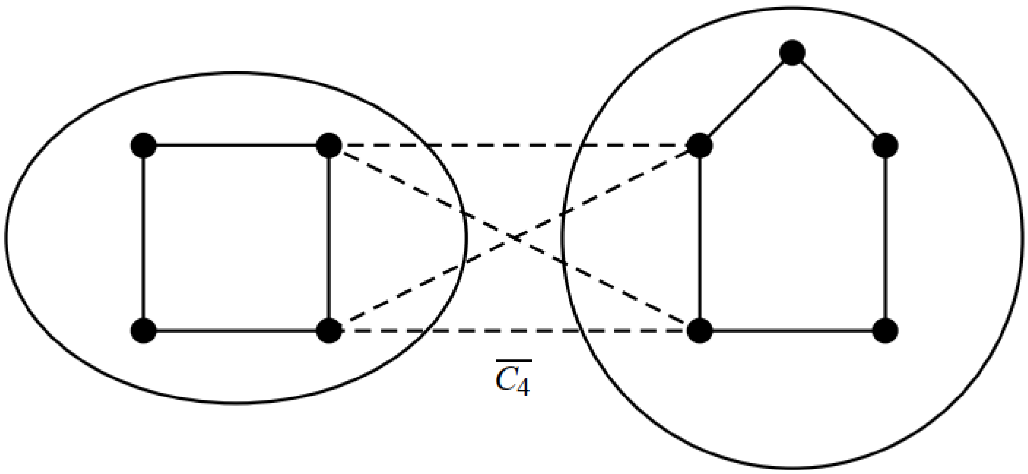
Chứng minh kết quả 2.2.13.

Nếu G là một đồ thị giả tam giác phân thì G sẽ có một phép phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh cyclic yếu khỏi đồ thị G hoặc phần bù $\bar{G}$ (điều này suy ra từ việc mọi đỉnh simplicial đều là một đỉnh cyclic yếu trong đồ thị G và mọi đỉnh cosimplicial đều là một đỉnh cyclic yếu trong phần bù $\bar{G}$). Ngược lại, nếu G có một phép phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh cyclic yếu khỏi đồ thị G hoặc phần bù $\bar{G}$ thì nó không thể chứa bất kỳ đồ thị con lattice nào bởi vì một đồ thị lattice bất kỳ không thể có một phép phân tích như vậy (điều này suy trực tiếp từ cách định nghĩa của các đồ thị lattice). Do đó, (1) kéo theo (2), và (2) kéo theo (3). Như vậy, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng (3) kéo theo (1).

Chúng ta sẽ chứng minh (3) kéo theo (1) bằng phương pháp quy nạp toán học theo số đỉnh $n(G)$ của đồ thị G. Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ thỏa mãn điều kiện (3). Nếu G có chứa một đỉnh simplicial hoặc cosimplicial thì, bằng cách xóa đỉnh simplicial hoặc cosimplicial này khỏi G, chúng ta sẽ thu được một đồ thị mới có $< n$ đỉnh. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta thu được điều phải chứng minh. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng G không có chứa bất kỳ đỉnh simplicial hoặc cosimplicial nào. Phép chứng minh của chúng ta sẽ được tách ba bước cơ bản như sau:

Bước 1. Chứng minh G là một đồ thị liên thông.

Giả sử G là một đồ thị không liên thông. Nếu có ít nhất một thành phần liên thông của G là một đồ thị chordal thì nó sẽ có chứa ít nhất một đỉnh simplicial nào đó. Điều này mâu thuẫn với giả thiết bổ sung của bài toán. Nếu không có thành phần liên thông nào của G là một đồ thị chordal thì mỗi thành phần liên thông này đều có chứa một chu trình cảm sinh C_k với $k \geq 4$. Bằng cách chọn bất kỳ hai trong số các chu trình cảm sinh này, giả sử là C_k với $k \geq 4$ và C_l với $l \geq 4$. Khi đó, C_k với $k \geq 4$ và C_l với $l \geq 4$ tạo thành một đồ thị con lattice bởi vì mỗi đỉnh đều thuộc một chu trình nào đó (C_k với $k \geq 4$ hoặc C_l với $l \geq 4$) và phần bù $\overline{C_4}$.



Như vậy, G phải là một đồ thị liên thông.

Bước 2. Xác định một đồ thị con G' và một đỉnh cosimplicial y nào đó trong G'.

Do G không phải là một đồ thị lattice nên một trong hai G và $\bar{G}$ phải có chứa một đỉnh cyclic yếu. Không giảm tính tổng quát, giả sử G có chứa một đỉnh cyclic yếu. Kí hiệu X' là tập tất cả các đỉnh cyclic yếu chứa trong G. Như vậy, $X' \neq \emptyset$.

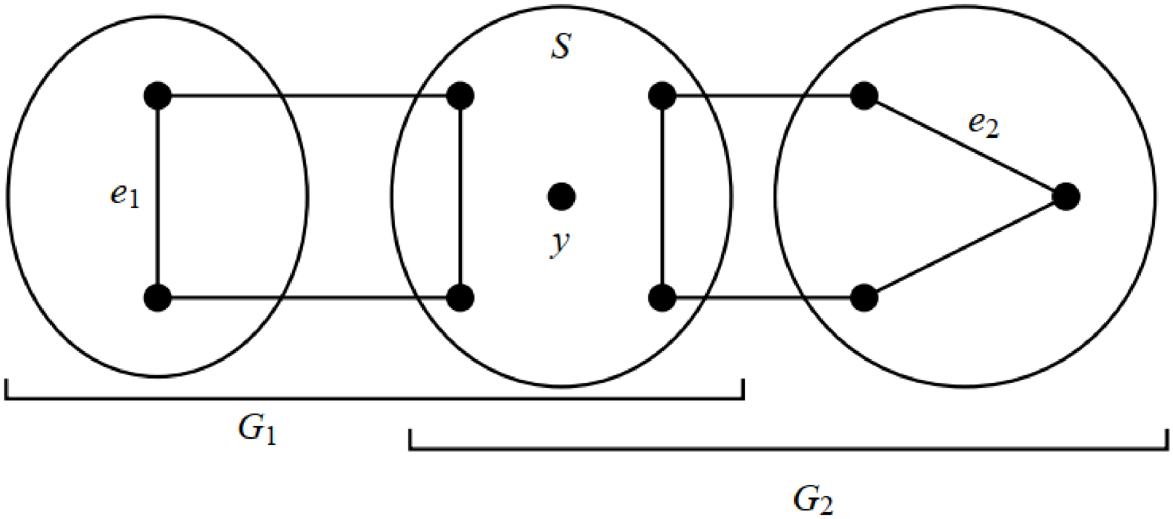
Kí hiệu $G' := G - X'$. Nhận thấy rằng đồ thị con G' có chứa ít nhất một nào đó, trong trường hợp ngược lại $X' = X$; nên tất cả các đỉnh của G đều là cyclic yếu, nghĩa là G cũng là một đồ thị chordal. Như vậy, G phải có chứa ít nhất một đỉnh simplicial nào đó, mâu thuẫn với giả thiết bổ sung của bài toán.

Do $X' \neq \emptyset$ nên chúng ta suy ra rằng $n(G') < n(G)$. Hiển nhiên, G' không có chứa bất kì đồ thị con lattice nào. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, G' sẽ có chứa một đỉnh simplicial hoặc cosimplicial nào đó; kí hiệu y là đỉnh simplicial hoặc cosimplicial này.

Do mọi đỉnh của G' đều nằm trong một chu trình cảm sinh C_k với $k \geq 4$ nên y phải là một đỉnh cosimplicial.

Bước 3. Chứng minh y cũng là một đỉnh cosimplicial trong G.

Giả sử x là một đỉnh bất kỳ nằm trong X'. Do G là một đồ thị liên thông và x không phải là một đỉnh cosimplicial nên tồn tại một tập tách tối tiểu không rỗng S của G nằm trong tập láng giềng $N(x)$.



Từ Kết quả 2.2.12), S cảm sinh một clique nào đó trong G.

Giả sử G_1, G_2 là các đồ thị con cảm sinh của G sao cho $G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = S$ và không có bất kỳ cạnh nào nằm giữa $G_1 - S$ và $G_2 - S$.

Nếu có ít nhất một trong các đồ thị G_1 và G_2 là đồ thị chordal thì sẽ tồn tại một đỉnh simplicial nằm trong $G_1 - S$ hoặc $G_2 - S$. Điều này chỉ ra rằng G sẽ có chứa một đỉnh simplicial nào đó, mâu thuẫn với giả thiết bổ sung của bài toán.

Như vậy, G_1 có chứa một chu trình cảm sinh C_k với $k \geq 4$ và G_2 có chứa một chu trình cảm sinh C_l với

$l \geq 4$. Do S là một clique nên tồn tại một cạnh e_1 nào đó của chu trình C_k nằm hoàn toàn trong $G_1 - S$. Lập luận tương tự, tồn tại một cạnh e_2 nào đó của chu trình C_l nằm hoàn toàn trong $G_2 - S$. Như vậy, tất cả các đầu mút của e_1, e_2 đều nằm trong G'. Do y là một đỉnh cosimplicial trong G' nên tất cả các đỉnh không phải láng giềng của y trong G' phải đôi một rời nhau. Nếu y nằm trong $G_1 - S$ thì cả hai đầu mút của e_2 đều không phải là láng giềng của nhau. Nếu y nằm trong $G_2 - S$ thì cả hai đầu mút của e_1 đều không phải là láng giềng của nhau. Như vậy, khả năng duy nhất có thể xảy ra ở đây đó là y phải nằm trong tập S. Tuy nhiên, do $S \subseteq N(x)$ nên chúng ta nhận thấy rằng y là một đỉnh liên hợp của đỉnh x. Do x là một đỉnh được chọn bất kỳ nằm trong X' nên y phải liên hợp với tất cả các đỉnh nằm trong X'. Như vậy, y là một đỉnh cosimplicial trong G. Điều mâu thuẫn này kết thúc phép chứng minh của kết quả 2.2.13). □

2.3. Đồ thị lưỡng phân

Kết quả 2.3.1. (König)

Một đồ thị là lưỡng phân khi và chỉ khi nó không có chứa bất kỳ một chu trình lẻ nào.

Chứng minh kết quả 2.3.1.

(⇒) Giả sử G là một đồ thị lưỡng phân với phân hoạch đỉnh tương ứng là A và B, C_k là một chu trình bất kỳ chứa trong G đi qua một đỉnh $x \in A$ nào đó. Bằng cách di chuyển qua tất cả các đỉnh của chu trình C_k bắt đầu tại x theo bất kỳ hướng nào. Do G là một đồ thị lưỡng phân nên mỗi lần di chuyển như vậy thật ra là chúng ta đang di chuyển giữa các phần A và B. Do chúng ta kết thúc quá trình nêu trên tại x nên k là một số chẵn.

(⇐) Giả sử G là một đồ thị liên thông không tầm thường với $n \geq 2$ đỉnh và không có chứa bất kì chu trình lẻ nào; chọn ra một đỉnh $x \in X$ bất kì nằm trong G.

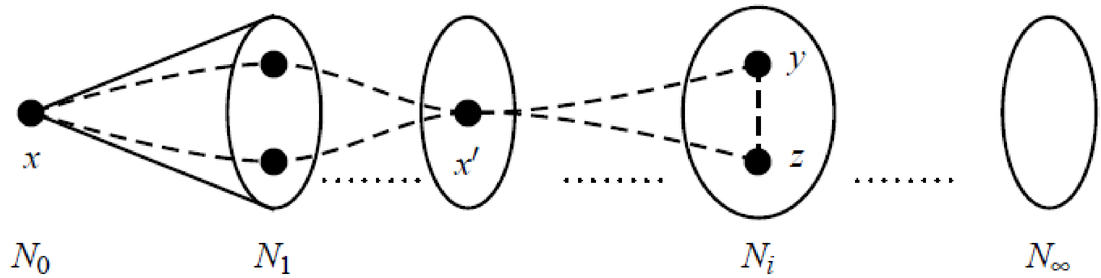
Kí hiệu N_i là tập các đỉnh có khoảng cách đến đỉnh x bằng i.

Chúng ta nhận được phân hoạch sau của tập đỉnh X:

$$X = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k.$$

Nhận thấy rằng bất kỳ cạnh nào của G đều nối các đỉnh nằm trong cùng một tập N_i hoặc nối các đỉnh nằm trong các tập N_i kế tiếp nhau.

Bây giờ, chúng ta sẽ xây dựng một phân hoạch lưỡng phân (A, B, E) của G bằng cách đặt vào A tất cả các tập N_i có chỉ số chẵn và đặt vào B tất cả các tập N_i có chỉ số lẻ, nên $X = A \cup B$. Phần còn lại của phép chứng minh, chúng ta sẽ chỉ ra rằng không có bất kỳ cạnh nào của G nằm trong cùng một tập N_i. Ngược lại, giả sử tồn tại một cạnh $e = \{y, z\}$ sao cho $y, z \in N_i$ với một chỉ số $i > 0$ nào đó.



Xét một $(x, y) -$ đường đi nhỏ nhất và một $(x, z) -$ đường đi nhỏ nhất nằm trong G. Chúng có thể có các đỉnh chung khác x. Nhận thấy rằng mọi đường đi con của một đường đi nhỏ nhất cũng là một đường đi nhỏ nhất. Kí hiệu x' là đỉnh chung cuối cùng tính từ x. Khi đó, $(x', y) -$ đường đi và $(x', z) -$ đường đi này đều có cùng chiều dài, chúng ta tạm giả sử chiều dài chung của hai đường đi này là l, và không có bất kỳ đỉnh chung nào khác ngoài x'. Như vậy, các đường đi này cùng với cạnh e tạo thành một chu trình C_{2l+1}, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. □

Ý tưởng cho phép chứng minh của định lí König không chỉ cho phép chúng ta nhận biết khi nào thì một đồ thị cho trước là lưỡng phân mà còn được sử dụng để tìm lời giải cho nhiều vấn đề khác.

Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng.

INPUT: Đồ thị $G = (X, E)$.

OUTPUT: Phép gán nhãn các đỉnh của G bởi các số 0,1,2, ...

1. Đầu tiên, chọn ra một đỉnh bất kỳ chưa được gán nhãn và gán nhãn nó bởi 0; đặt $i \coloneqq 0$;

2. Gán nhãn bởi $i + 1$ cho tất cả các đỉnh chưa được gán nhãn và liên hợp với các đỉnh đã được gãn nhãn bởi i;

3. Nếu có các đỉnh chưa được gán nhãn liên hợp với các đỉnh đã được gán nhãn thì đặt $i \coloneqq i + 1$ và quay trở lại bước 2;

4. Kết thúc thuật toán.

Hiển nhiên, mỗi đỉnh được gán nhãn của G đều được gán nhãn bởi khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh ban đầu. Để kiểm tra xem G có phải là một đồ thị lưỡng phân hay không, chúng ta chỉ cần thực hiện thêm một bước nữa là đủ: chứng minh rằng không có hai đỉnh nào được gán bởi cùng một nhãn liên hợp nhau. Nếu hai đỉnh phân biệt được gán bởi cùng một nhãn cảm sinh ra một cạnh thì sẽ tồn tại một chu trình lẻ. Từ Kết quả 2.3.1), G không thể là một đồ thị lưỡng phân. Nếu G là một đồ thị liên thông thì thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng sẽ gán nhãn tất cả các đỉnh của G. Nếu G không phải là một đồ thị liên thông thì sẽ có một số đỉnh vẫn chưa được gán nhãn bởi thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng; chúng ta có thể chạy lại thuật toán từ bất kỳ một đỉnh nào vẫn chưa được gán nhãn. Số lần chạy lại thuật toán trên sẽ trùng với số thành phần liên thông của G.

Để xác định khoảng cách giữa hai đỉnh bất kỳ - độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh bất kỳ của G, chúng ta chỉ cần chạy thuật toán từ bất kì đỉnh nào trong số hai đỉnh này và nhãn của đỉnh thứ hai chính là khoảng cách cần tìm.

Ngược lại với thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng, có một thuật toán tìm kiếm khác trong đồ thị được gọi là thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu. Tiếp theo, chúng ta sẽ trình bày ý tưởng của thuật toán nay như sau:

Giả sử chúng ta cần tìm một cây khung trong một đồ thị liên thông G cho trước. Chọn một đỉnh bất kỳ và tuyến bố rằng nó được ghé thăm đầu tiên. Chọn một đỉnh bất kỳ chưa được ghé thăm liên hợp với đỉnh được ghé thăm thứ k, chúng ta tuyên bố rằng nó là đỉnh ghé thăm thứ $k+1$ và bổ sung thêm cạnh nối giữa đỉnh ghé thăm thứ k với đỉnh ghé thăm thứ $k+1$ vào cây khung. Nếu có các cạnh nối giữa đỉnh ghé thăm thứ $k+1$ với các đỉnh đã được ghé thăm trước đó, các cạnh như vậy được gọi là các ***cạnh quay lui***, chúng ta chọn một đỉnh chưa được ghé thăm khác liên hợp với đỉnh được ghé thăm thứ k và lặp lại quy trình này miễn là khả thi. Chúng ta sẽ bị mắc kẹt khi có một đỉnh nào đó không có các đỉnh láng giềng chưa được ghé thăm trước đó. Tại thời điểm này, chúng ta sẽ quay trở lại đỉnh được ghé thăm thứ $k-1$ – đỉnh mà đỉnh được ghé thăm thứ k đã được ghé thăm trước đó (bước này được gọi là ***bước quay lui***) và tìm kiếm một đỉnh láng giềng chưa được ghé thăm khác. Nếu có một đỉnh láng giềng khác như vậy thì chúng ta sẽ ghé thăm nó và lặp lại quy trình này. Nếu không có một đỉnh láng giềng khác nào như vậy thì chúng ta quay lui lại một bước nữa và lặp lại quy trình này một lần nữa. Chúng ta bổ sung thêm vào cây khung một cạnh tại một thời điểm khi ghé thăm một đỉnh mới; các cạnh quy lui không được bổ sung vào vì chúng tạo thành các chu trình với các cạnh của cây khung. Hiển nhiên, thuật toán sẽ dừng lại tại đỉnh được ghé thăm đầu tiên. Đỉnh đó được gọi là ***đỉnh gốc*** của cây khung. Tương tự như thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng, thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu có thể được áp dụng để giải quyết một số các bài toán tìm kiếm khác nhau.

Bây giờ chúng ta sẽ tiếp tục thảo luận về các đồ thị lưỡng phân. Giả sử cho trước một đồ thị $G=(X,E)$.

Tập láng giềng $N(S)$ của một tập đỉnh $S \subseteq X$ được định nghĩa là hợp của tất cả các tập láng giềng của các đỉnh nằm trong tập S ngoại trừ chính tập S, nghĩa là $N(S)=\bigcup_{x\in S} N(x) \setminus S$.

Nếu $G=(X,Y;E)$ là một đồ thị lưỡng phân thì tập láng giềng của bất kỳ tập con nào của X cũng nằm trong Y và tập láng giềng của bất kỳ tập con nào của Y cũng nằm trong X. Chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu $N_G(S)$ để nhấn mạnh rằng tập láng giềng được xem xét trong đồ thị G.

Nhắc lại rằng một cặp ghép là một tập các cạnh đôi một rời nhau. Chúng ta nói rằng một ***cặp ghép M phủ một tập đỉnh S*** nếu mỗi đỉnh nằm trong tập đỉnh S đều liên thuộc với một cạnh nào đó của cặp ghép M.

Kết quả 2.3.2. (Hall)

Một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ có một cặp ghép M phủ X khi và chỉ khi, với mọi tập đỉnh con $S \subseteq X$,

$$|N_G(S)| \geq |S|.$$

Chứng minh kết quả 2.3.2.

($\Rightarrow$) Nếu $G = (X, Y; E)$ có một cặp ghép M phủ X thì hiển nhiên rằng mọi tập đỉnh $S \subseteq X$ đều có tối thiểu $|S|$ đỉnh láng giềng nằm trong Y, nghĩa là $|N_G(S)| \geq |S|$.

($\Leftarrow$) Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của chiều đảo của khẳng định trên bằng quy nạp toán học theo chỉ số $|X|$. Nếu $|X| = 1$ thì, từ định nghĩa của một đồ thị lưỡng phân, đỉnh đơn x của tập X sẽ có tối thiểu một đỉnh láng giềng y nằm trong Y, nên cạnh xy chính là cặp ghép cần tìm.

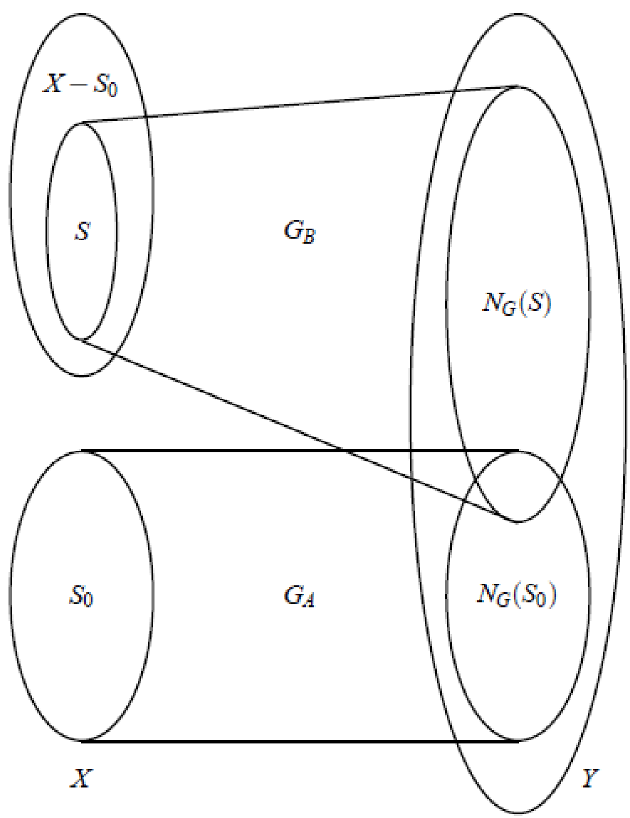
Giả sử $|X| > 1$ và khẳng định đã được chứng minh là đúng với mọi đồ thị lưỡng phân với phần bên xác định trên $< |X|$ đỉnh. Chúng ta sẽ xem xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Với mọi tập đỉnh con $S \subseteq X, S \neq X$, $|S| < |N_G(S)|$. (1)

Xét một cạnh xy bất kỳ của G. Bằng cách xóa mạnh các đỉnh x và y khỏi G và kí hiệu đồ thị lưỡng phân nhận được lại dưới dạng $G' = (X', Y'; E')$. Hiển nhiên, $|X'| = |X| - 1 < |X|$. Do chỉ có chính xác một đỉnh bị xóa khỏi tập Y nên đánh giá (1) chỉ ra rằng, với mọi tập đỉnh con $S' \subseteq X'$, $|S'| \leq |N_{G'}(S')|$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, tồn tại một cặp ghép M' trong G' phủ X'. Bằng cách bổ sung thêm cạnh xy vào G', chúng ta thu được một cặp ghép M phủ X trong G.

Trường hợp 2. Tồn tại một tập đỉnh con $S_0 \subseteq X, S_0 \neq X, |S_0| = |N_G(S_0)|$. (2)



Chúng ta chia tập đỉnh X của G thành hai tập con $A \coloneqq S_0 \cup N_G(S_0), B \coloneqq (X \cup Y) \setminus A$ và xét hai đồ thị con cảm sinh G_A, G_B.

Trong đồ thị G_A, với mọi tập đỉnh con $S \subseteq S_0$, chúng ta đều có $N_{G_A}(S) = N_G(S)$.

Như vậy, $|S| \leq \left|N_{G_A}(S)\right|$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, G_A có một cặp ghép M' phủ S_0.

Trong đồ thị G_B, với mọi tập đỉnh con $S \subseteq X - S_0$, chúng ta đều có $N_{G_B}(S) = N_G(S) \setminus N_G(S_0)$.

Như vậy, $|S_0| + |S| = |S_0 \cup S| \leq |N_G(S_0 \cup S)| = |N_G(S_0)| + \left|N_{G_B}(S)\right|$.

Do $|S_0| = |N_G(S_0)|$ (điều này suy ra từ hệ thức (2)) nên chúng ta suy ra rằng $|S| \leq \left|N_{G_B}(S)\right|$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, G_B có một cặp ghép M'' phủ $X - S_0$.

Bằng cách kết hợp các cặp ghép M' và M'', chúng ta thu được một cặp ghép M của G phủ X. □

Kết quả 2.3.3.

Mọi đồ thị lưỡng phân đều có ít nhất một cặp ghép hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 2.3.3.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $k -$ đều $(k \geq 1)$ $G = (X, Y; E)$. Bằng cách đếm bậc của các đỉnh nằm trong X và Y, chúng ta suy ra rằng $k|X| = k|Y|$, nên $|X| = |Y|$. Điều này chỉ ra rằng mọi cặp ghép phủ X đều phủ Y và ngược lại.

Xét một tập đỉnh con $S \subseteq X$ bất kỳ. Do G là một đồ thị $k -$ đều nên số các cạnh i nối giữa S và $N_G(S)$ được xác định bởi công thức $i = k|S|$. Do mỗi đỉnh nằm trong $N_G(S)$ đều có bậc k nên $i \leq k|N_G(S)|$. Như vậy, với mọi tập đỉnh con $S \subseteq X$, $|S| \leq |N_G(S)|$. Từ Kết quả 2.3.2), G có ít nhất một cặp ghép hoàn hảo. □

Nhắc lại rằng $\tau(G)$ là kích thước nhỏ nhất có thể có của một tập transversal trong một đồ thị G, nghĩa là số đỉnh nhỏ nhất có thể có để liên thuộc với tất cả các cạnh của một đồ thị G. Như chúng ta đã đề cập trong mục 1.5), với mọi đồ thị G, $\tau(G) \geq \nu(G)$.

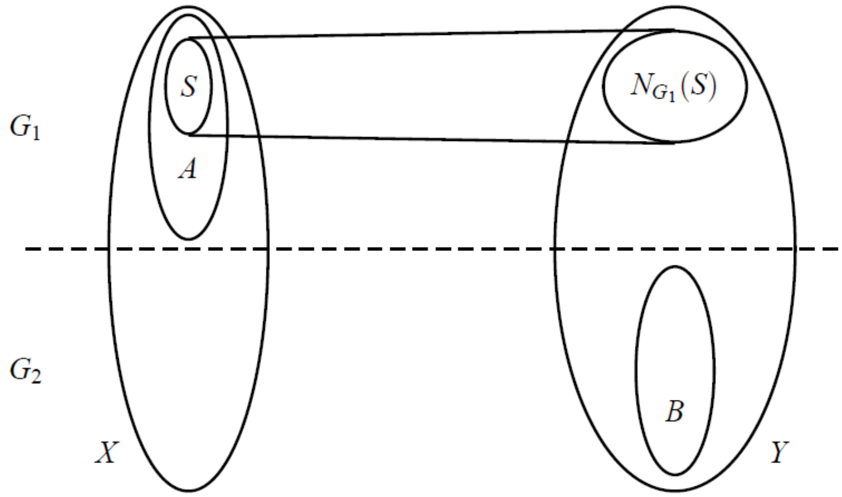
Kết quả 2.3.4. (König)

Với mọi đồ thị lưỡng phân G, $\tau(G) = \nu(G)$.

Chứng minh kết quả 2.3.4.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ và $T \subseteq X \cup Y$ là một transversal tối tiểu của G.

Chúng ta sẽ xây dựng một cặp ghép với kích thước bằng $\tau(G) = |T|$ để kết thúc phép chứng minh của bài toán.



Kí hiệu $A \coloneqq X \cap T$, $B \coloneqq Y \cap T$ và $G_1 \coloneqq G_{A \cup (Y \setminus B)}$, $G_2 \coloneqq G_{B \cup (X \setminus A)}$. Do $A \cup B$ là một tập transversal nên không có cạnh nào nằm giữa $Y \setminus B$ và $X \setminus A$. Với mỗi tập đỉnh con $S \subseteq A$, xét tập láng giềng $N_{G_1}(S)$. Nếu $\left|N_{G_1}(S)\right| < |S|$ thì chúng ta có thể thay thế S bởi $N_{G_1}(S)$ và thu được một tập transversal nhỏ hơn T của G (do $N_{G_1}(S)$ liên thuộc với tất cả các cạnh có liên thuộc với S nhưng không liên thuộc với B). Do T là một tập transversal tối tiểu nên điều này là không thể xảy ra, nên $\left|N_{G_1}(S)\right| \geq |S|$ với mọi tập đỉnh con $S \subseteq A$. Từ Kết quả 2.3.2), G_1 sẽ có một cặp ghép M' phủ A. Lập luận tương tự cho đồ thị G_2, G_2 cũng sẽ có một cặp ghép M'' phủ B. Do các đồ thị G_1 và G_2 có các tập đỉnh rời nhau nên, bằng cách kết hợp các cặp ghép M' và M'', chúng ta thu được một cặp ghép M của G với $|A| + |B| = |T| = \tau(G)$. Như vậy, $\tau(G) = \nu(G)$. □