

Chủ đề 03. Đồ thị phẳng

3.1. Đồ thị phẳng/Đồ thị khả phẳng

Bằng cách bỏ qua một số chi tiết về mặt kỹ thuật topo, chúng ta sẽ gọi một đường cong liên tục nằm trong mặt phẳng nối giữa hai điểm cho trước (một điểm sẽ được gọi là **điểm đầu**, một điểm sẽ được gọi là **điểm cuối**) và không có giao điểm với chính nó là một **đường cong Jordan**. Một đường cong Jordan được gọi là **khép kín/đóng** nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng với nhau.

Kết quả 3.1. (Jordan)

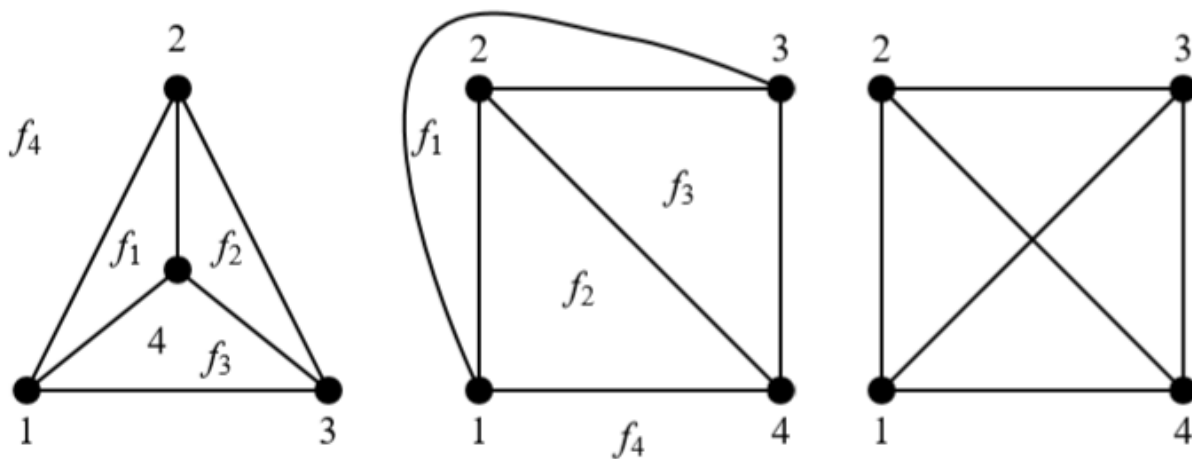
Mọi đường cong Jordan khép kín/đóng L đều chia mặt phẳng thành chính xác hai miền, một miền bị chặn và một miền không bị chặn, mỗi miền này đều nhận L làm biên.

Một miền được gọi là **liên thông** nếu mọi cặp điểm nào của nó đều được nối với nhau bởi một đường cong Jordan nào đó nằm bên trong miền đó. Theo lý thuyết đồ thị, các điểm trong mặt phẳng được xem như các đỉnh của đồ thị và các đường cong Jordan nối các điểm tương ứng được xem như các cạnh nối giữa các đỉnh tương ứng. Nếu hai đường cong Jordan có giao với nhau tại một điểm khác với điểm đầu và điểm cuối của chúng thì chúng ta nói rằng các cạnh tương ứng với chúng là **giao nhau/cắt nhau**.

Một đồ thị được gọi là **khả phẳng** nếu nó có thể được biểu diễn lại trên mặt phẳng sao cho không có cạnh nào giao nhau. Nếu một đồ thị khả phẳng được biểu diễn lại trong mặt phẳng sao cho không có cạnh nào giao nhau thì biểu diễn đó sẽ được gọi là một **đồ thị phẳng**.

Thông thường, một đồ thị phẳng được gọi là một **phép nhúng phẳng của một đồ thị khả phẳng**. Một đồ thị phẳng sẽ chia mặt phẳng chứa nó thành các miền liên thông được gọi là các mặt. Như vậy, mỗi mặt này sẽ nhận một chu trình nào đó làm biên. Số các đỉnh của một chu trình như vậy sẽ được gọi là **kích thước của mặt** đó. Với mỗi đồ thị phẳng G , chúng ta sẽ kí hiệu số mặt của đồ thị phẳng G bởi $f(G)$.

Mọi đồ thị khả phẳng đều rất nhiều phép nhúng phẳng khác nhau.



Hình vẽ minh họa ba cách biểu diễn khác nhau của cùng đồ thị K_4 nhưng chỉ có hai trong chúng là các đồ thị phẳng.

Nói chung, các đồ thị có thể có nhiều phép nhúng phẳng khác nhau với số các cạnh giao nhau khác nhau.

Số tối thiểu các cạnh giao nhau tính trên tất cả các cách biểu diễn có thể có sẽ được gọi là **số giao của một đồ thị**. Hiển nhiên, với mọi đồ thị khả phẳng, số giao của chúng luôn bằng 0.

3.2. Công thức Euler

Kết quả 3.2.1. (Euler)

Nếu G là một đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh, f mặt thì $n - m + f = 2$.

Chứng minh kết quả 3.2.1.

Kí hiệu T là một cây khung của đồ thị G . Hiển nhiên, $m(T) = n - 1$, $f(T) = 1$. Khi đó, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $n(T) - m(T) + f(T) = n - (n - 1) + 1 = 2$, nên công thức Euler được thỏa mãn đối với cây khung T .

Kế tiếp, chúng ta sẽ bổ sung thêm tuần tự các cạnh còn lại của G vào T : mỗi lần chúng ta bổ sung thêm như vậy sẽ làm tăng số cạnh và số mặt lên 1 đơn vị. Do m và f có dấu đối nhau trong công thức Euler nên công thức $n - m + f = 2$ vẫn đúng cho bản thân đồ thị G . $\square$

Kết quả 3.2.2.

Nếu G là một đồ thị khả phẳng thì tất cả các phép nhúng phẳng của G đều có số mặt bằng $m - n + 2$.

Chứng minh kết quả 3.2.2.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ việc $n(G)$, $m(G)$ là các hằng số và công thức Euler chỉ ra rằng $f(G) = m - n + 2$. $\square$

Kết quả 3.2.3.

Nếu G là một đồ thị khả phẳng liên thông không có chứa cạnh bội thì $m(G) \leq 3n(G) - 6$.

Chứng minh kết quả 3.2.3.

Xét một phép nhúng phẳng bất kỳ của G . Do G không có chứa cạnh bội nào nên kích thước của mỗi mặt ≥ 3 . Bằng cách đếm các cạnh xung quanh mỗi mặt, số nhỏ nhất các cạnh mà chúng ta có thể nhận được là $3f$. Trên thực tế, do mỗi cạnh đều được đếm hai lần nên số cạnh mà chúng ta có thể nhận được sẽ là $2m$.

Như vậy, $3f \leq 2m$. Từ công thức Euler, $f = m - n + 2$. Điều này chỉ ra rằng $3(m - n + 2) \leq 2m$, nên $m \leq 3n - 6$. $\square$

Kết quả 3.2.4.

Mọi đồ thị khả phẳng liên thông không có chứa cạnh bội đều có chứa ít nhất một đỉnh có bậc ≤ 5 .

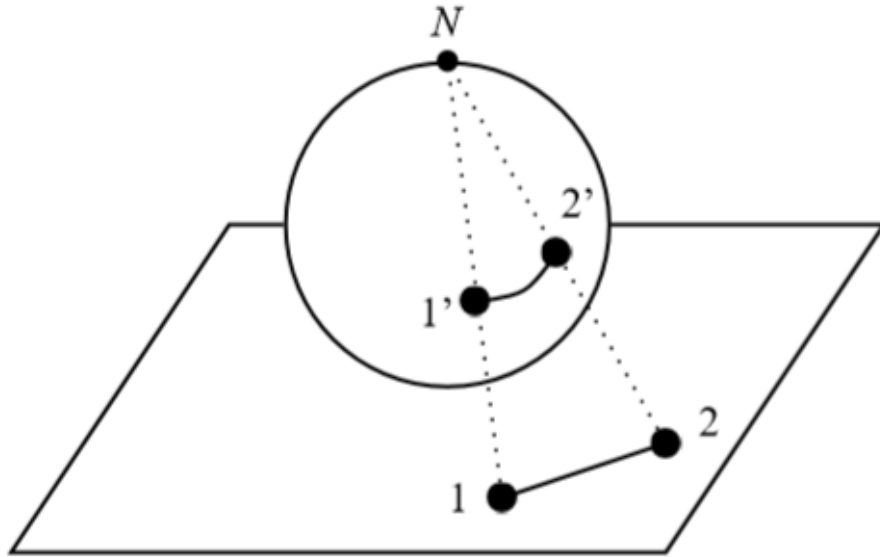
Chứng minh kết quả 3.2.4.

Giả sử cho trước một đồ thị khả phẳng liên thông không có chứa cạnh bội G . Nếu đồ thị G chỉ chứa tối đa không quá 6 đỉnh thì mọi đỉnh của G đều có bậc ≤ 5 . Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử đồ thị G có chứa ít nhất 7 đỉnh. Giả sử mỗi đỉnh của G đều có bậc ≥ 6 . Bằng cách đếm các cạnh xung quanh mỗi mặt, chúng ta chỉ ra được rằng $6n \leq 2m$, nên $3n \leq m$. Bằng cách kết hợp đánh giá này với Kết quả 3.2.3), chúng ta suy ra rằng $3n \leq m \leq 3n - 6$, nên $0 \leq -6$. $\square$

Nhận thấy rằng, với mọi đồ thị phẳng G và với mọi mặt bị chặn f của nó, luôn tồn tại một phép nhúng phẳng của G sao cho f sẽ trở thành một mặt không bị chặn trong phép nhúng phẳng này. Điều này có thể được biểu diễn trực quan lại bằng cách sử dụng các **phép chiếu nổi** như sau:

Giả sử cho trước một phép nhúng phẳng của G . Đặt một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng đang khảo sát và ánh xạ mặt phẳng lên mặt cầu tới điểm cực bắc N như trong hình vẽ. Bằng cách làm này, chúng ta sẽ thu được ảnh của G trên mặt cầu này. Chúng ta xoay mặt cầu sao cho mặt bị chặn f chứa trực tiếp điểm cực bắc N . Với điểm cực bắc N' mới, chúng ta chiếu mặt cầu trở lại mặt phẳng và thu được một phép nhúng

phẳng mới của G sao cho mặt f bị chặn trong phép nhúng phẳng đầu tiên sẽ trở thành mặt f' không bị chặn trong phép nhúng phẳng mới nhận được này.



Hình vẽ minh họa phép chiếu nổi.

Kết quả 3.2.5.

Một đồ thị có thể biểu diễn lại trên mặt cầu sao cho không có cạnh nào giao nhau nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị khả phẳng.

Kết quả trên dẫn đến quan sát sau đây về các khối đa diện (các khối 3 – chiều được giới hạn bởi các giao tuyến của các mặt phẳng):

Kết quả 3.2.6.

Nếu một khối đa diện lồi có n đỉnh, m cạnh, f mặt thì $n - m + f = 2$.

Chứng minh kết quả 3.2.6.

Giả sử cho trước một đa diện lồi như vậy. Đặt nó vào một hình cầu và chiếu nó lên mặt cầu tương ứng. Các đỉnh và các cạnh của một đa diện lồi như vậy sẽ tạo thành một phép nhúng của một đồ thị trên mặt cầu tương ứng. Kế tiếp, chúng ta sẽ sử dụng phép chiếu nổi để chiếu nó lên mặt phẳng và nhận được một phép nhúng phẳng của đồ thị tương ứng. Các đỉnh, các cạnh và các mặt của phép nhúng này sẽ tương ứng với các đỉnh, các cạnh và các mặt của khối đa diện lồi ban đầu. $\square$

3.3. Định lý Kuratowski/Thuật toán kiểm tra tính khả phẳng của một đồ thị

Định lý Kuratowski

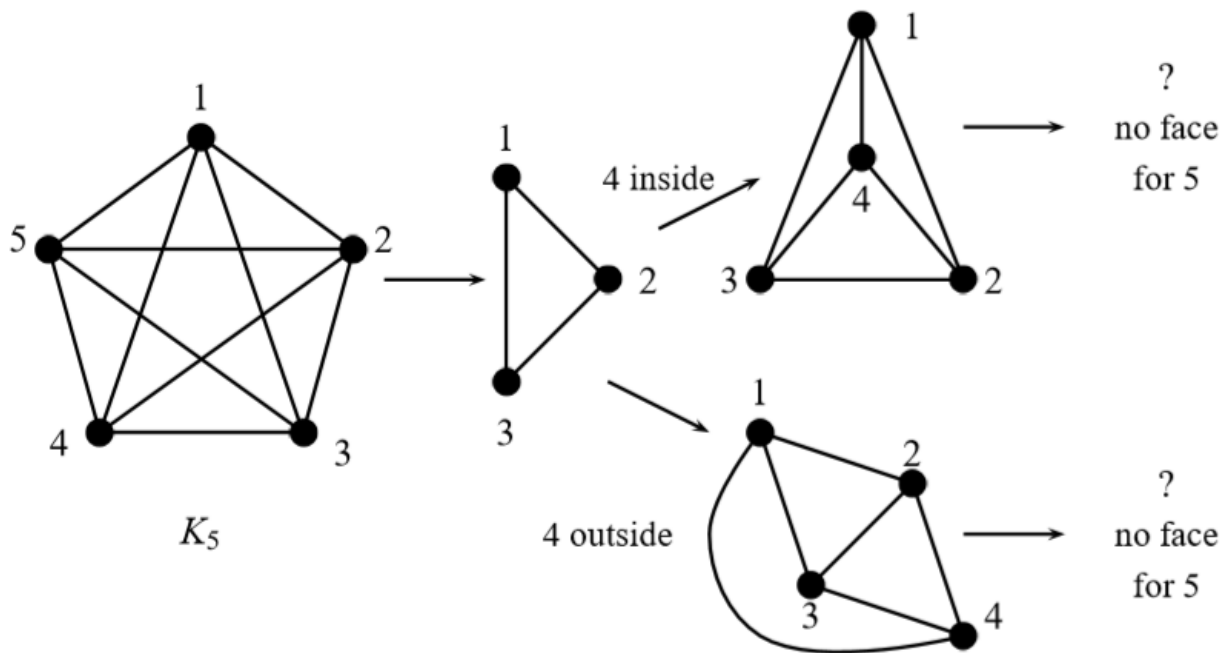
Kết quả 3.3.1.

K_5 và $K_{3,3}$ đều là các đồ thị không khả phẳng.

Chứng minh kết quả 3.3.1.

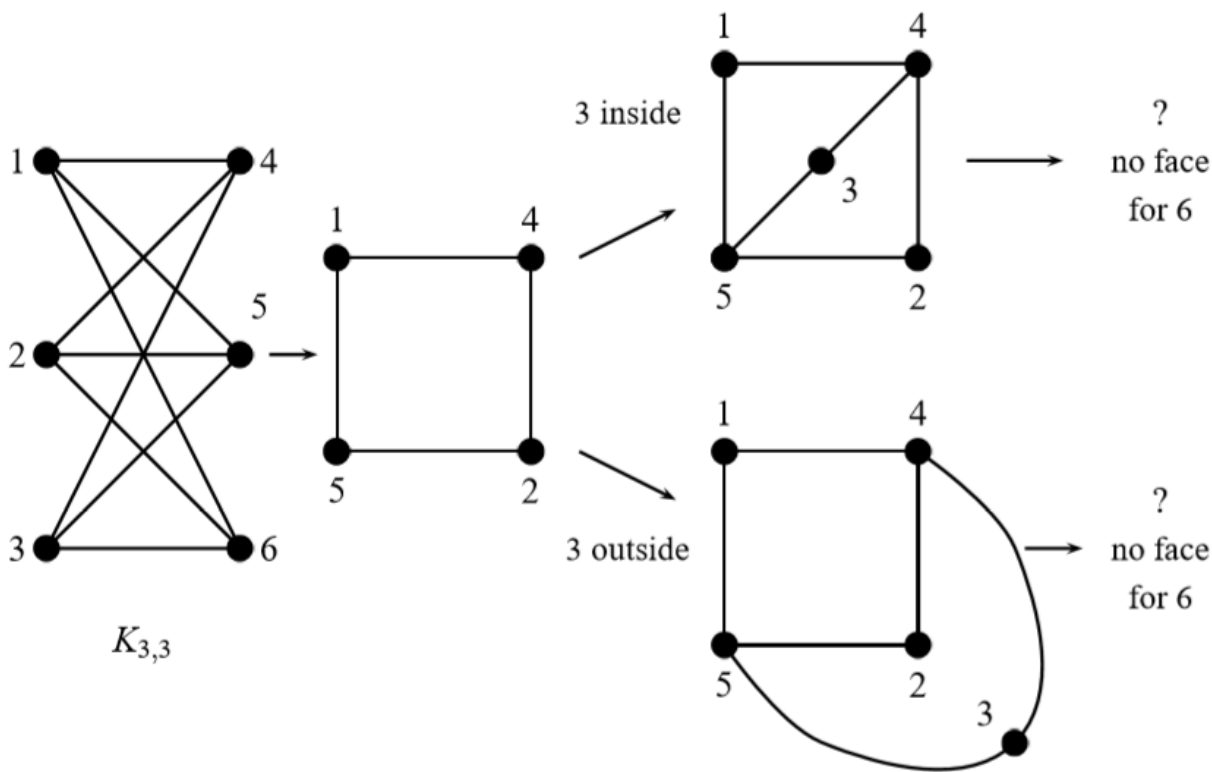
Giả sử K_5 là một đồ thị khả phẳng. Do K_5 có chứa chu trình $1 - 2 - 3$ nên bất kỳ phép nhúng phẳng nào của K_5 cũng phải chứa chu trình này. Chu trình này sẽ chia mặt phẳng thành hai mặt. Đỉnh 4 có thể được nhúng bên trong hoặc bên ngoài của chu trình này. Trong cả hai trường hợp, do đỉnh 4 liên hợp với các đỉnh 1, 2, 3 nên mặt trong hoặc mặt ngoài này đều được chia thành ba mặt với kích thước mỗi mặt như vậy luôn bằng 3. Như vậy, tất cả các mặt nằm trong mặt phẳng đều phải có kích thước bằng 3. Phần việc còn lại của chúng ta là tìm một mặt trong số đó để nhúng đỉnh 5. Tuy nhiên, do đỉnh 5 có bậc bằng 4 nên chúng ta không thể tìm được mặt nào trong số đó để nhúng đỉnh 5. Lập luận tương tự, nếu chúng ta chọn đỉnh 5

để nhúng vào bên trong hoặc bên ngoài chu trình 1 – 2 – 3 thì chúng ta sẽ không thể tìm được mặt nào trong số đó để nhúng tiếp đỉnh 4. Điều này chỉ ra rằng đồ thị K_5 không thể biểu diễn lại trong mặt phẳng sao cho không có cạnh nào giao nhau, nghĩa là K_5 không thể là một đồ thị khả phẳng.



Hình vẽ minh họa phân tích cho đồ thị K_5 .

Giả sử $K_{3,3}$ là một đồ thị khả phẳng. Do $K_{3,3}$ là một đồ thị lưỡng phân nên, không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng các đỉnh 1,2,3 tạo thành phần đầu tiên và các đỉnh 4,5,6 tạo thành phần thứ hai như trong hình vẽ.



Hình vẽ minh họa phân tích cho đồ thị $K_{3,3}$.

Do $K_{3,3}$ có chứa chu trình 1 – 4 – 2 – 5 nên bất kỳ phép nhúng phẳng nào của $K_{3,3}$ cũng phải chứa chu trình này. Chu trình này sẽ chia mặt phẳng thành hai mặt. Đỉnh 3 có thể được nhúng bên trong hoặc bên ngoài của chu trình này. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng đỉnh 3 được nhúng bên trong chu trình này. Như vậy, chúng ta có thể chọn một trong ba mặt khác nhau để nhúng đỉnh 6 vào. Nếu chúng

ta nhúng đỉnh 6 vào mặt $1 - 4 - 3 - 5$ thì nó sẽ không thể liên hợp với đỉnh 2 được. Nếu chúng ta nhúng đỉnh 6 vào mặt $1 - 4 - 2 - 5$ thì nó sẽ không thể liên hợp với đỉnh 3 được. Nếu chúng ta nhúng đỉnh 6 vào mặt $2 - 4 - 3 - 5$ thì nó sẽ không thể liên hợp với đỉnh 1 được. Như vậy, chúng ta không thể tìm được mặt nào trong số ba mặt này để nhúng đỉnh 6. Lập luận tương tự cho trường hợp đỉnh 3 được nhúng bên ngoài chu trình $1 - 4 - 2 - 5$. Nếu chúng ta chọn đỉnh 3 để nhúng vào bên trong hoặc bên ngoài chu trình $1 - 4 - 2 - 5$ thì chúng ta sẽ không thể tìm được mặt nào trong số đó để nhúng tiếp đỉnh 6.

Điều này chỉ ra rằng đồ thị $K_{3,3}$ không thể biểu diễn lại trong mặt phẳng sao cho không có cạnh nào giao nhau, nghĩa là $K_{3,3}$ không thể là một đồ thị khả phẳng. □

Nếu một đồ thị là khả phẳng thì mọi đồ thị con của nó rõ ràng cũng là khả phẳng. Nếu một đồ thị có chứa một đồ thị con không khả phẳng thì bản thân nó không thể là một đồ thị khả phẳng được. Kết quả 3.3.1) chỉ ra rằng mọi đồ thị có chứa K_5 hoặc $K_{3,3}$ dưới dạng một đồ thị con đều không thể khả phẳng. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu mọi đồ thị không khả phẳng có chứa K_5 hoặc $K_{3,3}$ dưới dạng một đồ thị con hay không?”. Câu trả lời cho vấn đề này là nó có thể không chứa K_5 hoặc $K_{3,3}$ dưới dạng một đồ thị con nhưng nó phải chứa các đồ thị con có liên quan chặt chẽ với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

Chúng ta sẽ nói hai đồ thị G_1 và G_2 là **đồng phôi** nếu cả hai đều có thể nhận được từ một đồ thị G_3 bằng cách thay thế một số cạnh bởi một số đường đi. Nói cách khác, chúng ta chỉ cần đặt thêm một số đỉnh bổ sung trên một số cạnh của G_3 . Hiển nhiên, mọi sự thay thế như vậy sẽ không làm thay đổi tính phẳng của G_3 : nếu G_3 là một đồ thị khả phẳng thì cả hai đồ thị G_1 và G_2 đều khả phẳng và ngược lại. Chẳng hạn, hai chu trình C_k và C_l bất kỳ với $k, l \geq 3$ đều đồng phôi với nhau (điều này suy ra từ việc cả hai đều có thể nhận được từ chu trình C_3 bằng cách thay thế như vậy). Nhận thấy rằng mọi đồ thị đồng phôi với K_5 và $K_{3,3}$ đều không thể là một đồ thị khả phẳng ngay cả khi nó không chứa K_5 và $K_{3,3}$ dưới dạng một đồ thị con.

Kết quả kế tiếp là một trong những định lý cơ bản nổi tiếng nhất trong lý thuyết đồ thị hiện đại. Nó chỉ ra rằng các đồ thị đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$ chính là nguyên nhân gây ra tính không phẳng của một đồ thị.

Kết quả 3.3.2. (Kuratowski)

Một đồ thị là khả phẳng nếu và chỉ nếu nó không chứa bất kì đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

Chứng minh kết quả 3.3.2.

Chúng ta sẽ bỏ qua phép chứng minh đầy đủ cho khẳng định này vì nó khá dài và liên quan đến nhiều kết quả phụ khác. Phép chứng minh chi tiết có thể được tìm thấy trong các tài liệu chuyên khảo về đồ thị hoặc topo hiện đại. Ý tưởng của phép chứng minh này có thể được diễn tả lại khá chi tiết qua một số bước như sau:

1. Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị khả phẳng thì, với mọi cạnh bất kỳ của G , luôn tồn tại một phép nhúng sao cho cạnh đó thuộc mặt không bị chặn. Phép nhúng này có thể nhận được bằng cách sử dụng phép chiếu nổi.
2. Giả sử đồ thị G có chứa một tập tách với hai đỉnh, giả sử là $\{x, y\}$, với các đồ thị con dẫn xuất tương ứng là G_1 và G_2 . Kí hiệu $G'_i := G_i \cup \{x, y\}$. Sử dụng nhận xét nêu trong Bước 1) của phép chứng minh, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu G là một đồ thị không khả phẳng thì sẽ có ít nhất một trong các đồ thị G'_1 và G'_2 cũng là một đồ thị không khả phẳng.
3. Khẳng định trên chỉ ra rằng mọi đồ thị không khả phẳng tối thiểu đều là một đồ thị 3 – liên thông. Nói cách khác, chúng ta chỉ cần xem xét các đồ thị 3 – liên thông là đủ.
4. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh một bổ đề phụ phát biểu rằng: “Mọi đồ thị 3 – liên thông xác định trên ≥ 5 đỉnh đều có chứa một cạnh nào đó mà khi chúng ta co cạnh này lại sẽ không làm thay đổi tính 3 – liên thông của nó”.

5. Kế tiếp, chúng ta sẽ chứng minh thêm một bổ đề phụ khác phát biểu rằng: “Giả sử cho trước một đồ thị G . Kí hiệu G' là đồ thị nhận được từ G bằng cách co một cạnh nào đó lại. Khi đó, nếu G' có chứa các đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì đồ thị G ban đầu cũng có chứa các đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$ ”.

6. Sau cùng, chúng ta sẽ chứng minh rằng: “Nếu G là một đồ thị 3 – liên thông không có chứa đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì G sẽ có ít nhất một phép nhúng phẳng nào đó”. Phép chứng minh cho khẳng định này sẽ được thực hiện bằng phương pháp quy nạp toán học.

Trong đồ thị G , chúng ta co một cạnh (điều này được đảm bảo bởi Bước 4) lại để thu được một đồ thị G' có số đỉnh ít hơn. Từ Bước 4), G' cũng sẽ là một đồ thị 3 – liên thông. Từ Bước 5), G' không thể chứa bất kì đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$. Như vậy, từ giả thiết quy nạp của bài toán, tồn tại ít nhất một phép nhúng phẳng của đồ thị G' . Điểm mấu chốt cuối cùng trong lập luận của chúng ta là xem xét một số trường hợp có thể xảy ra khi chúng ta muốn tái tạo lại đồ thị G ban đầu từ đồ thị G' . Trong mỗi trường hợp như vậy, chúng ta sẽ chỉ ra rằng luôn có thể xây dựng một phép nhúng phẳng của G ngoại trừ trường hợp nó có chứa các đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$. $\square$

Thuật toán kiểm tra tính khả phẳng của một đồ thị

Mặc dù có rất nhiều thuật toán khác nhau để giúp chúng ta có thể xác định xem một đồ thị cho trước có khả phẳng hay không. Tuy nhiên, phần lớn trong số chúng không bao giờ yêu cầu chúng ta phải tìm kiếm một đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

Sau đây, chúng ta sẽ trình bày cụ thể một thuật toán kiểm tra như vậy:

Giả sử cho trước một đồ thị G và một đồ thị con $G' \subseteq G$ (G' không nhất thiết phải là một đồ thị con cảm sinh). Nếu chúng ta xóa các đỉnh của G' khỏi G thì chúng ta sẽ thu được một số thành phần liên thông (có thể bằng 0). Một **fragment của G đối với G'** được định nghĩa là một trong những đối tượng sau:

- 1) Một cạnh của G không nằm trong G' nhưng nối hai đỉnh của G' ;
- 2) Một thành phần liên thông của $G - V(G')$ cùng với các cạnh nối nó với G' (các đỉnh này sẽ được gọi là các đỉnh của phần đính kèm của G').

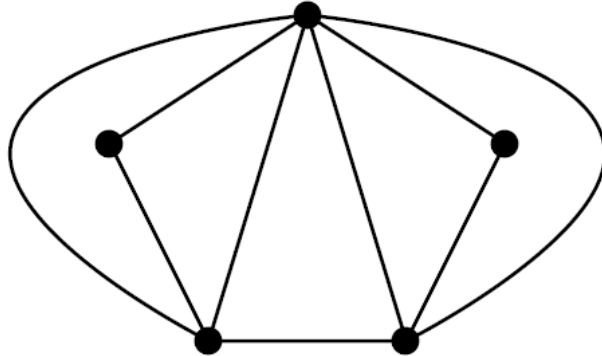
Giả sử cho trước G' là một đồ thị phẳng (thuật toán thường được bắt đầu với một chu trình). Tìm tất cả các fragment của G đối với G' . Với mỗi fragment A , xác định một tập gồm các mặt $F(A)$ có chứa tất cả các đỉnh của fragment A . Nếu $F(A) = \emptyset$, với mọi fragment A , thì G sẽ là một đồ thị không liên thông. Nếu $|F(A)| = 1$ với một fragment A nào đó thì chúng ta sẽ chọn A cho bước lặp tiếp theo. Nếu $|F(A)| > 1$, với mọi fragment A , thì chúng ta có thể chọn một fragment A bất kỳ cho bước lặp tiếp theo.

Kế tiếp, chọn bất kỳ một đường đi nào nối hai đỉnh của phần đính kèm của fragment A đã chọn. Nhúng đường đi vào bên trong một mặt nào đó nằm trong $F(A)$. Kí hiệu G' là đồ thị phẳng thu được và lặp lại các thủ tục trên, nghĩa là chúng ta sẽ tìm một tập các fragment mới và, với mỗi fragment mới này, chúng ta sẽ tìm tất cả các mặt có thể có chứa trong nó, v.v... Nếu chúng ta nhận lại được đồ thị G ban đầu thì G sẽ là một đồ thị khả phẳng. Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng thuật toán trên hoạt động hoàn toàn chính xác; nghĩa là nếu G là một đồ thị khả phẳng thì thuật toán này sẽ chỉ ra cho chúng ta một phép nhúng phẳng như vậy, trường hợp ngược lại thuật toán này sẽ dừng lại ở một đồ thị con $G' \neq G$ nào đó.

3.4. Đồ thị tam giác phân phẳng/Đồ thị đối ngẫu

Đồ thị tam giác phân phẳng

Một đồ thị đơn liên thông khả phẳng được gọi là một **đồ thị tam giác phân phẳng** nếu mọi mặt của nó, kể cả mặt không bị chặn, đều đại diện cho một đồ thị tam giác, nghĩa là kích thước của mọi mặt đều bằng 3.



Hình vẽ đồ thị tam giác phân phẳng.

Một đồ thị đơn (khả) phẳng được gọi là một **đồ thị (khả) phẳng tối đại** nếu chúng ta bổ sung thêm bất kỳ cạnh mới nào vào nó đều sẽ dẫn đến một đồ thị không khả phẳng.

Chúng ta có thể chứng minh được rằng hai khái niệm trình bày ở trên là tương đương nhau, nghĩa là một đồ thị là tam giác phân phẳng nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị phẳng tối đại. Khẳng định này sẽ giúp chúng ta xác định được số cạnh có thể có chứa trong một đồ thị phẳng tối đại:

Kết quả 3.4.1.

Với mọi đồ thị phẳng tối đại, $m = 3n - 6$.

Chứng minh kết quả 3.4.1.

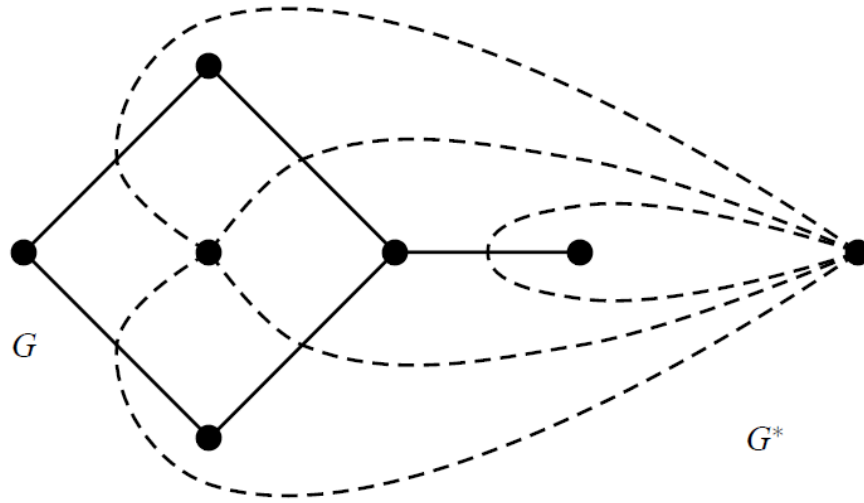
Bằng cách đếm các cạnh xung quanh mỗi mặt, chúng ta thu được $3f = 2m$. Bằng cách thay f vào công thức Euler, chúng ta suy ra rằng $m = 3n - 6$. □

Mọi đồ thị phẳng đều có thể được xem như đồ thị con khung của một đồ thị tam giác phân phẳng nào đó (điều này có thể thu được bằng cách thêm lần lượt các cạnh vào một đồ thị phẳng cho trước). Các đồ thị tam giác phân phẳng đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết đồ thị hiện đại vì đôi khi chúng ta chỉ cần chứng minh tính đúng đắn của khẳng định cho các đồ thị tam giác phân phẳng là đủ để đảm bảo tính đúng đắn của khẳng định cho tất cả các đồ thị khả phẳng.

Đồ thị đôi ngẫu

Giả sử cho trước một đồ thị phẳng G . Chúng ta có thể xây dựng được một đồ thị phẳng khác được gọi là **đồ thị đôi ngẫu của G** , kí hiệu bởi G^* , như sau:

- (1) Trong mỗi mặt của đồ thị phẳng G , chọn ra một điểm nào đó để làm một đỉnh của G^* .
- (2) Với mỗi cạnh của G ngăn cách hai mặt f_i và f_j , dựng một cạnh của G^* nối hai đỉnh f_i và f_j .



Hình vẽ minh họa đồ thị phẳng G và đôi ngẫu G^* của nó.

Hiển nhiên, $n(G^*) = f$, $m(G^*) = m$, $f(G^*) = n$.

Kết quả 3.4.2.

Nếu G là một đồ thị đơn liên thông khả phẳng thì $(G^*)^*$ sẽ đẳng cấu với G .

Chứng minh kết quả 3.4.2.

Tính đúng đắn của khẳng định trên suy ra từ việc chúng ta hoàn toàn có thể dựng lại đồ thị G từ phép nhúng phẳng của G^* bằng cách sử dụng cùng một cách như trên. □

Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng các đồ thị đôi ngẫu được tạo ra từ các phép nhúng phẳng khác nhau của cùng một đồ thị khả phẳng G có thể sẽ không đẳng cấu với nhau.