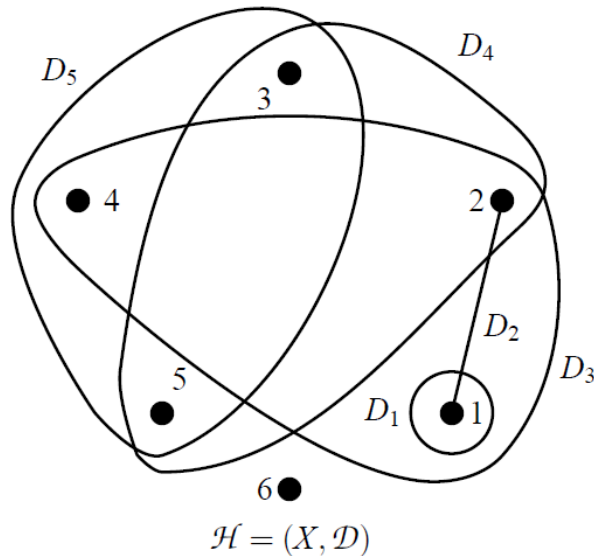


Chủ đề 05. Các khái niệm cơ bản về siêu đồ thị

5.1. Khái niệm siêu đồ thị

Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là một cặp $(X, \mathcal{D})$ gồm một tập $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và một họ $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ là một họ các tập con của X . Tập X được gọi là **tập đỉnh của siêu đồ thị** $\mathcal{H}$, kí hiệu bởi $V(\mathcal{H})$. Họ $\mathcal{D}$ được gọi là **tập cạnh của siêu đồ thị** $\mathcal{H}$, kí hiệu bởi $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Thông thường, siêu đồ thị $(X, \mathcal{D})$ cũng thường được gọi là một **hệ tập**.



Siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ trên tập đỉnh $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ với tập cạnh $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$ với

$$D_1 = \{1\}, D_2 = \{1, 2\}, D_3 = \{1, 2, 4\}, D_4 = \{2, 3, 5\}, D_5 = \{3, 4, 5\}.$$

Giá trị $|X| = n$ được gọi là **số đỉnh** của siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, kí hiệu bởi $n = n(\mathcal{H})$. Các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là **các đỉnh** và các tập $D_1, D_2, \dots, D_m$ được gọi là **các cạnh**. Số các cạnh thường được kí hiệu bởi $m = m(\mathcal{H})$. Một số cạnh có thể là các tập rỗng. Một số cạnh có thể là tập con của một số cạnh khác; trong trường hợp này chúng được gọi là **bao hàm nhau**. Trong một số trường hợp, một số cạnh có thể trùng nhau; trong trường hợp này chúng được gọi là các **cạnh bội**. Một siêu đồ thị được gọi là **đơn** nếu nó không có chứa các cạnh bao hàm nhau. Như vậy, các siêu đồ thị đơn không có chứa các cạnh rỗng và các cạnh bội. Các siêu đồ thị đơn còn được gọi là các **hệ Sperner**.

Trong một siêu đồ thị, hai đỉnh được gọi là **liên hợp** với nhau nếu có một cạnh $D \in \mathcal{D}$ chứa cả hai đỉnh này. Các đỉnh liên hợp với nhau đôi khi được gọi là láng giềng của nhau và tập tất cả các đỉnh láng giềng của một đỉnh x cho trước sẽ được gọi là **tập các láng giềng của x** , kí hiệu bởi $N(x)$. Hai cạnh được gọi là **liên hợp** với nhau nếu giao của chúng khác rỗng. Nếu một đỉnh $x \in X$ nằm trong một cạnh $D_j \in \mathcal{D}$ thì chúng được gọi là **liên thuộc** với nhau.

Với mỗi đỉnh $x \in X$, kí hiệu $\mathcal{D}(x)$ là **tập tất cả các cạnh có chứa đỉnh x** . Số $|\mathcal{D}(x)|$ được gọi là **bậc của đỉnh x** , số $|D_i|$ được gọi là **bậc (kích thước, lực lượng) của cạnh D_i** . Giá trị $\Delta(\mathcal{H}) = \max_{x \in X} |\mathcal{D}(x)|$ được gọi là **bậc lớn nhất của $\mathcal{H}$** .

Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ trong đó tất cả các đỉnh đều có bậc bằng k được gọi là **k – đều**. Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ trong đó tất cả các cạnh đều có bậc bằng k được gọi là **k – uniform**. Giá trị $r(\mathcal{H}) = \max_{D \in \mathcal{D}} |D|$ được gọi là **hạng của siêu đồ thị $\mathcal{H}$** .

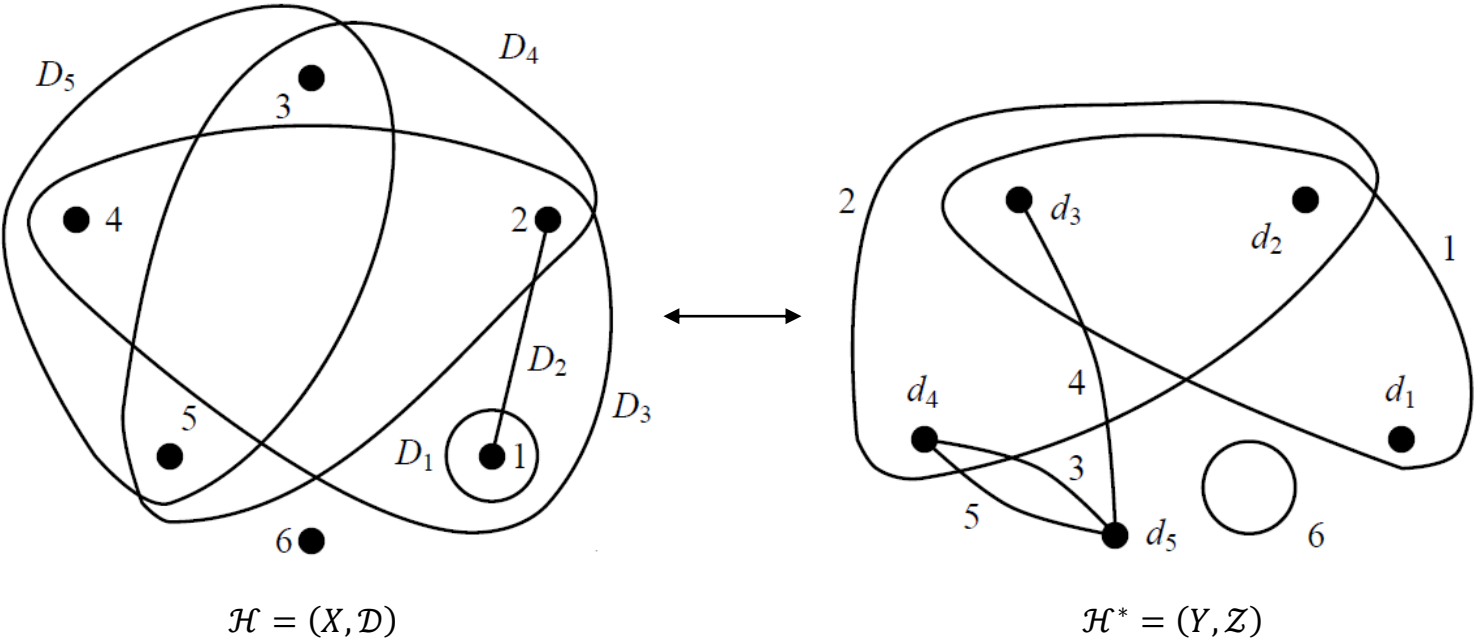
Một cạnh của siêu đồ thị không có chứa bất kì đỉnh nào được gọi là một **cạnh rỗng**. Bậc của một cạnh rỗng hiển nhiên bằng 0. Một đỉnh của siêu đồ thị không liên thuộc với bất kì cạnh nào được gọi là một **đỉnh cô lập**. Bậc của một đỉnh cô lập hiển nhiên bằng 0. Một cạnh của siêu đồ thị có bậc bằng 1 được gọi là một **cạnh khuyên**. Một đỉnh của siêu đồ thị có bậc bằng 1 được gọi là một **đỉnh pendant**.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ với $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$.

Đối ngẫu của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị $\mathcal{H}^* = (Y, \mathcal{Z})$ có tập đỉnh là $Y = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ và tập cạnh được xác định như sau:

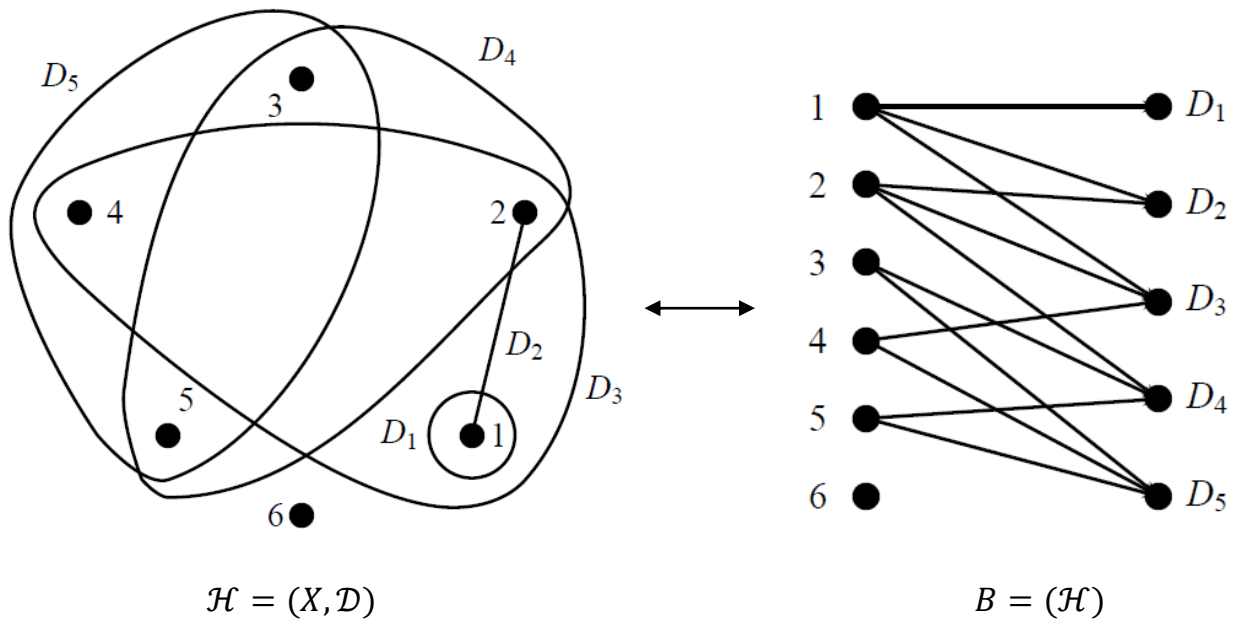
$$\mathcal{Z} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

$$X_i = \{d_j : x_i \in D_j \text{ trong } \mathcal{H}\}.$$



Dễ dàng chứng minh được rằng các đỉnh cô lập sẽ biến thành các cạnh rỗng trong siêu đồ thị đối ngẫu và ngược lại. Như vậy, cách định nghĩa siêu đồ thị đối ngẫu như trên có thể được xây dựng cho bất kì siêu đồ thị nào. Nhận thấy rằng ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H}^*)$ của siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ chính là ma trận chuyển vị của ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H})$ của siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Như vậy, chúng ta cũng có thể định nghĩa tính đối ngẫu như sau: một siêu đồ thị $\mathcal{H}^*$ là đối ngẫu của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ nếu $I(\mathcal{H}^*) = I^*(\mathcal{H})$. Hiển nhiên, nếu chúng ta chuyển vị một ma trận hai lần thì chúng ta sẽ nhận được cùng một ma trận đó, nghĩa là $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$. Nhận thấy rằng $\Delta(\mathcal{H}) = r(\mathcal{H}^*)$ và đối ngẫu của siêu đồ thị k – đều chính là một siêu đồ thị r – uniform. Định nghĩa trên cung cấp cho chúng ta một cách đơn giản để vẽ một siêu đồ thị đối ngẫu: bắt đầu với một bản vẽ của $\mathcal{H} \Rightarrow$ xây dựng ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H}) \Rightarrow$ chuyển vị để thu được ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H}^*) \Rightarrow$ một bản vẽ của siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$.

Với một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, chúng ta định nghĩa **biểu diễn lưỡng phân của $\mathcal{H}$** là một đồ thị lưỡng phân $B(\mathcal{H}) = (X, \mathcal{D}; E)$ với tập đỉnh $X \cup \mathcal{D}$ (X là phần bên trái và $\mathcal{D}$ là phần bên phải) và tập cạnh E : đỉnh $x \in X$ liên hợp với đỉnh $D \in \mathcal{D}$ trong $B(\mathcal{H})$ nếu và chỉ nếu đỉnh $x \in X$ liên thuộc với cạnh $D \in \mathcal{D}$ trong $\mathcal{H}$.



Nhận thấy rằng $B(\mathcal{H}^*)$ nhận được từ $B(\mathcal{H})$ chỉ đơn giản bằng cách hoán đổi phần bên trái và phần bên phải trong khi chúng ta vẫn bảo toàn tất cả các cạnh.

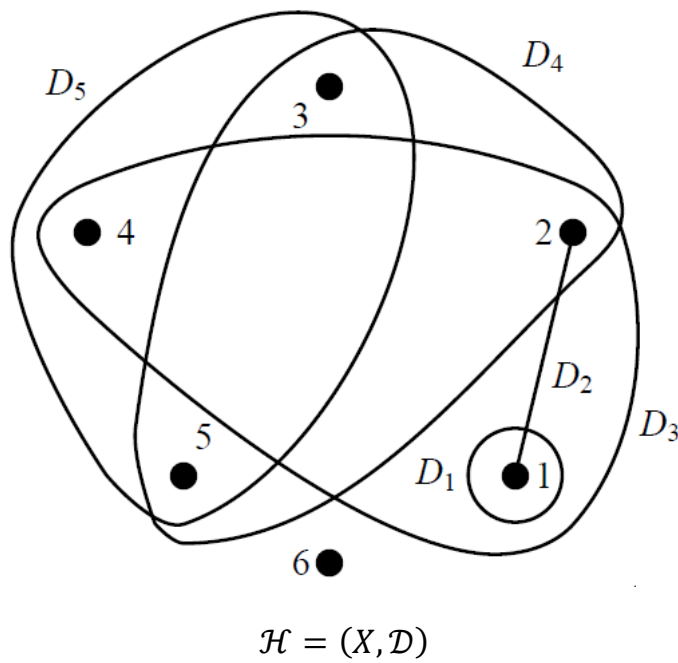
Kết quả 5.1.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Khi đó, $\sum_{i=1}^n |\mathcal{D}(x_i)| = \sum_{j=1}^m |D_j|$.

Chứng minh kết quả 5.1.1.

Xét biểu diễn lưỡng phân của $\mathcal{H}$, nghĩa là đồ thị lưỡng phân $B(\mathcal{H}) = (X, \mathcal{D}; E)$. Nếu chúng ta tính tổng bậc của các đỉnh trong phần bên trái thì chúng ta sẽ thu được vế trái của đẳng thức trên; nếu chúng ta tính tổng bậc của các đỉnh trong phần bên phải thì chúng ta sẽ thu được vế phải của đẳng thức trên. Hiển nhiên, chúng trùng nhau bởi vì cả hai đều bằng tổng số cạnh chứa trong $B(\mathcal{H})$. □

5.2. Biểu diễn siêu đồ thị.



Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ với $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$.

Ma trận liên thuộc. Ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H})$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là một ma trận $(a_{ij})_{n \times m}$ sao cho phần tử a_{ij} của ma trận bằng 1 nếu $x_i \in D_j$, trường hợp ngược lại nó sẽ bằng 0.

$$I(\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

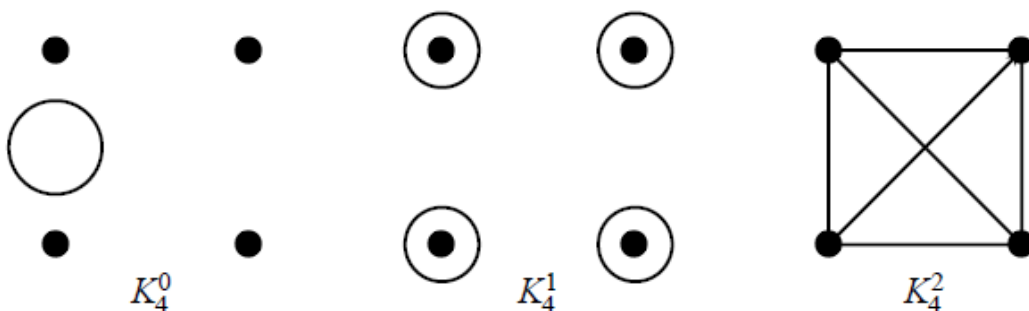
Ma trận liên hợp. Ma trận liên hợp $A(\mathcal{H})$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là một ma trận $(a_{ij})_{n \times n}$ sao cho phần tử a_{ij} của ma trận bằng 1 nếu $\mathcal{D}(x_i) \cap \mathcal{D}(x_j) \neq \emptyset$, trường hợp ngược lại nó sẽ bằng 0.

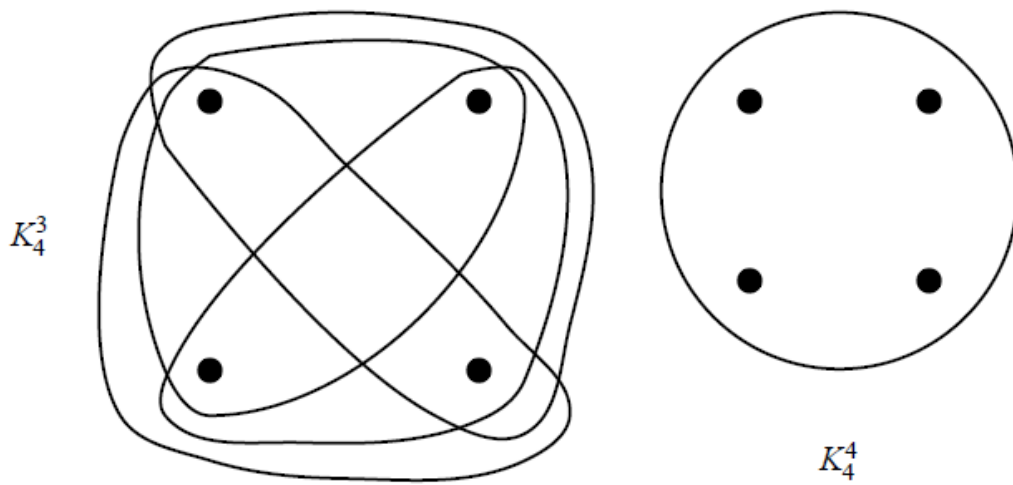
$$A(\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3. Một số lớp siêu đồ thị đơn giản.

Siêu đồ thị đầy đủ. Với mỗi $0 \leq r \leq n$, chúng ta định nghĩa một **siêu đồ thị r – uniform đầy đủ** là một siêu đồ thị đơn $K_n^r = (X, \mathcal{D})$ sao cho $|X| = n$ và $\mathcal{D}(K_n^r)$ chính là họ tất cả các r – tập con của tập X . Siêu đồ thị r – uniform đầy đủ và tập các cạnh của nó đều được kí hiệu bởi K_n^r , nghĩa là $K_n^r = (X, K_n^r)$ trong đó $|X| = n$.

Như vậy, một đồ thị đầy đủ trên n đỉnh chính là một siêu đồ thị 2 – uniform đầy đủ K_n^2 và chúng cũng được kí hiệu lại dưới dạng K_n .





Hình ảnh minh họa $K_4^0, K_4^1, K_4^2, K_4^3, K_4^4$.

Với mỗi $n \geq 0$ và với mọi r sao cho $n \geq r \geq 0$, số cạnh của siêu đồ thị K_n^r được xác định bởi công thức:

$$|\mathcal{D}(K_n^r)| = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}.$$

Đường đi và chu trình. Trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, một dãy thay phiên $\mu = x_0 D_0 x_1 D_1 x_2 \dots x_{t-1} D_{t-1} x_t$ gồm các đỉnh phân biệt $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ và các cạnh phân biệt $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{t-1}$ sao cho $x_i, x_{i+1} \in D_i$

($i = 0, 1, \dots, t-1$) được gọi là một **đường đi nối các đỉnh x_0 và x_t** (hoặc (x_0, x_t) – **đường đi**). Nếu $x_0 = x_t$ thì đường đi này được gọi là một **chu trình**. Giá trị của chỉ số t lần lượt được gọi là **chiều dài của đường đi/ chiều dài chu trình**.

Siêu đồ thị liên thông. Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ được gọi là **liên thông** nếu hai đỉnh bất kì đều được nối với nhau bởi một đường đi nào đó. Nếu $\mathcal{H}$ không liên thông thì $\mathcal{H}$ sẽ là hợp của hai hoặc nhiều hơn các siêu đồ thị liên thông; mỗi siêu đồ thị liên thông này được gọi là một **thành phần liên thông** của siêu đồ thị ban đầu.

Siêu đồ thị lưỡng phân. Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ được gọi là một **lưỡng phân** nếu tập đỉnh X của nó có thể được phân hoạch thành hai tập rời nhau X_1, X_2 (X_1, X_2 được gọi là các **phần** của đồ thị lưỡng phân G) sao cho mọi cạnh có lực lượng ≥ 2 đều có chứa các đỉnh thuộc các phần khác nhau.

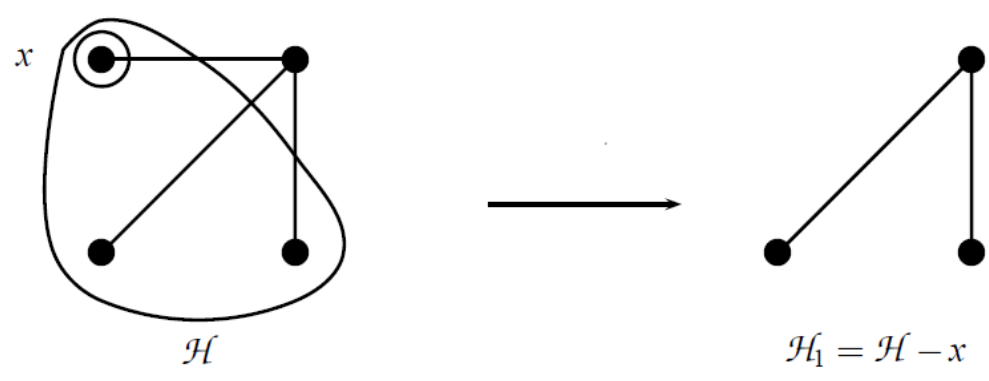
Phép đẳng cấu siêu đồ thị. Hai siêu đồ thị (không nhất thiết phải là các siêu đồ thị đơn) $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và $\mathcal{H}' = (X', \mathcal{D}')$ được gọi là **đẳng cấu**, kí hiệu bởi $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$, nếu có một phép tương ứng một – một giữa các tập đỉnh X và X' và một phép tương ứng một – một giữa các tập cạnh $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ sao cho, với mọi đỉnh $x \in X$ và với mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$, $x \in D$ khi và chỉ khi đỉnh tương ứng $x' \in X'$ nằm trong cạnh tương ứng $D' \in \mathcal{D}'$. Bằng cách sử dụng thuật ngữ của lý thuyết đồ thị, chúng ta nói rằng hai siêu đồ thị là đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi các biểu diễn lưỡng phân của chúng đẳng cấu với nhau theo nghĩa đồ thị.

5.4. Các phép toán cơ bản trên siêu đồ thị.

Tương tự như trong lý thuyết đồ thị, chúng ta thường áp dụng các phép toán trên siêu đồ thị để thu được một siêu đồ thị từ một siêu đồ thị khác. Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét một số phép toán cơ bản trong số đó.

Phép xóa một đỉnh. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và một đỉnh $x \in X$.

Phép xóa một đỉnh mạnh. *Phép xóa đỉnh x mạnh khỏi $\mathcal{H}$* được định nghĩa là việc chúng ta xóa x khỏi X và xóa khỏi tập $\mathcal{D}$ tất cả các cạnh của $\mathcal{H}$ có chứa x . Kí hiệu $\mathcal{D}(x)$ là tập các cạnh có chứa đỉnh x trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Nếu chúng ta kí hiệu $X_1 := X - \{x\}$ và $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D} - \mathcal{D}(x)$ thì phép xóa đỉnh x mạnh khỏi $\mathcal{H}$ sẽ thu được siêu đồ thị $\mathcal{H}_1 = (X_1, \mathcal{D}_1)$.

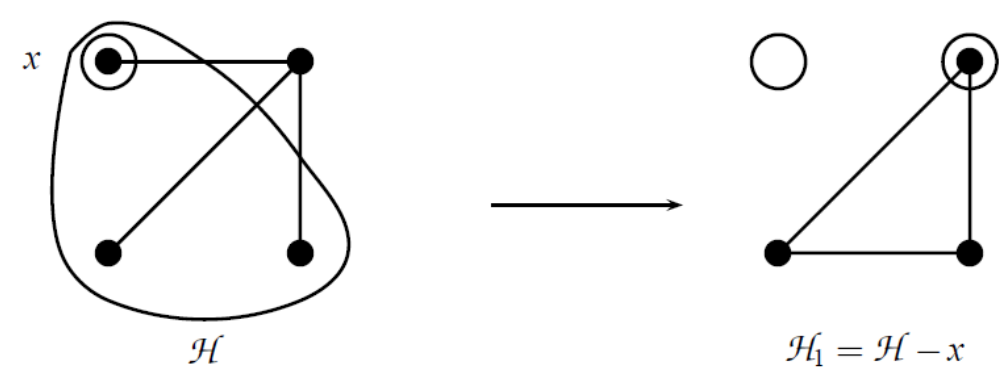


Phép xóa đỉnh x mạnh.

Chúng ta kí hiệu phép toán này lại dưới dạng $\mathcal{H}_1 =: \mathcal{H} - x$. Trong siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$, chúng ta có thể chọn và xóa một đỉnh khác để có được một siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$, v.v... Việc xóa liên tiếp các đỉnh như vậy sẽ dẫn chúng ta đến một dãy các siêu đồ thị $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ Tương tự như trong lý thuyết đồ thị, cách tiếp cận như vậy rất phổ biến và rất hữu ích trong việc phát triển nhiều thuật toán và phép chứng minh của một loạt các định lí bằng cách sử dụng nguyên lí quy nạp toán học.

Thông thường, chúng ta muốn xóa bỏ một tập đỉnh con nào đó của X ; nó tương đương với việc chúng ta thực hiện liên tiếp một dãy các phép xóa một đỉnh mạnh theo bất kỳ thứ tự nào. Chúng ta sẽ thấy rằng các siêu đồ thị thu được bằng cách xóa mạnh các đỉnh đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết về các siêu đồ thị. Do các đỉnh bị xóa khỏi siêu đồ thị cùng với tất cả các cạnh liên thuộc với nó nên phép xóa này thường được gọi là phép xóa mạnh.

Phép xóa một đỉnh yếu. *Phép xóa đỉnh x yếu khỏi $\mathcal{H}$* được định nghĩa là việc xóa x khỏi tập X và khỏi các cạnh của $\mathcal{D}(x)$. Nếu đỉnh x bị xóa yếu khỏi $\mathcal{H}$ thì chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$.



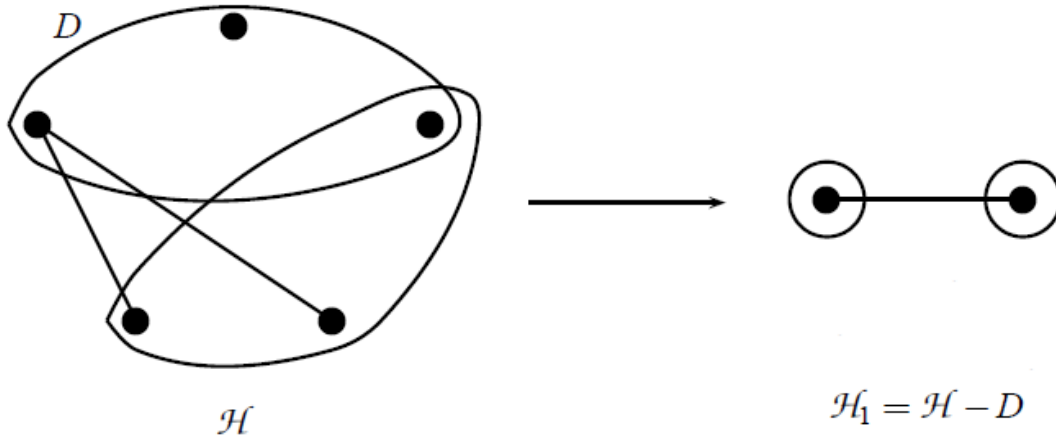
Phép xóa đỉnh x yếu.

Chúng ta cũng kí hiệu phép toán này lại dưới dạng $\mathcal{H}_1 =: \mathcal{H} - x$.

Nhắc lại rằng trong lý thuyết đồ thị, các cạnh khuyên được biểu diễn bởi các đường cong nối đỉnh với chính nó; trong lý thuyết siêu đồ thị, các cạnh khuyên được biểu diễn bởi các vòng tròn đơn; điều này phản ánh ý tưởng cơ bản của lý thuyết siêu đồ thị là họ các tập hợp hơn là các đường thẳng và đường cong như trong lý thuyết đồ thị.

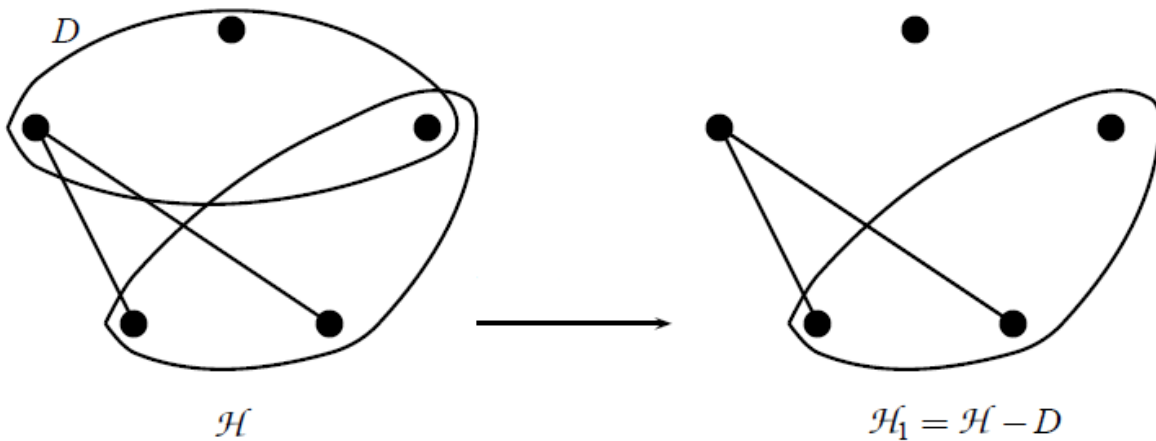
Phép xóa một cạnh.

Phép xóa một cạnh mạnh. *Phép xóa cạnh D mạnh khỏi $\mathcal{H}$* được định nghĩa là việc xóa bỏ cạnh D khỏi tập $\mathcal{D}$ và xóa yếu tất cả các đỉnh của cạnh D khỏi tập X . Chúng ta sẽ kí hiệu phép toán này lại dưới dạng $\mathcal{H}_1 =: \mathcal{H} - D$.



Phép xóa cạnh D mạnh.

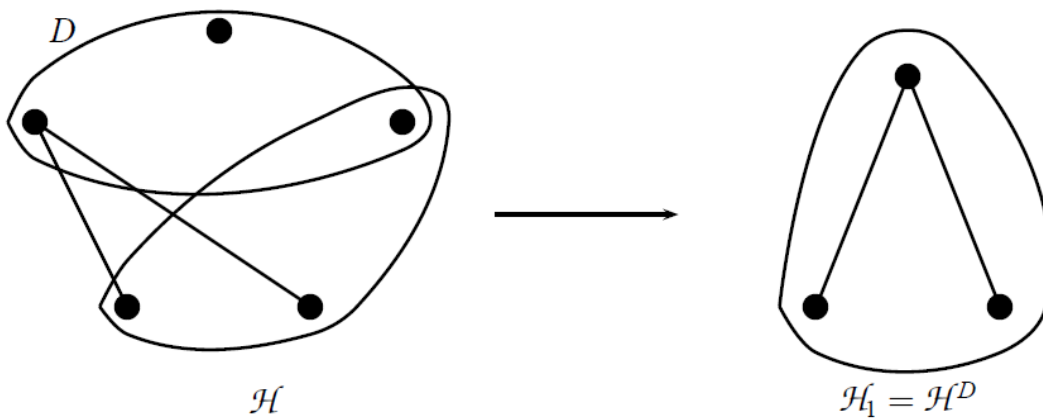
Phép xóa một cạnh yếu. *Phép xóa cạnh D yếu khỏi $\mathcal{H}$* được định nghĩa là việc xóa bỏ cạnh D khỏi tập $\mathcal{D}$. Trong trường hợp này, chúng ta cũng sẽ kí hiệu phép toán này lại dưới dạng $\mathcal{H}_1 =: \mathcal{H} - D$.



Phép xóa cạnh D yếu.

Phép co một cạnh. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và một cạnh $D \in \mathcal{D}$.

1. Xóa yếu cạnh D khỏi $\mathcal{H}$;
2. Thay thế tất cả các đỉnh nằm trong cạnh D bởi một đỉnh duy nhất nằm trong mỗi cạnh $D' \in \mathcal{D}$ sao cho $D' \cap D \neq \emptyset$.



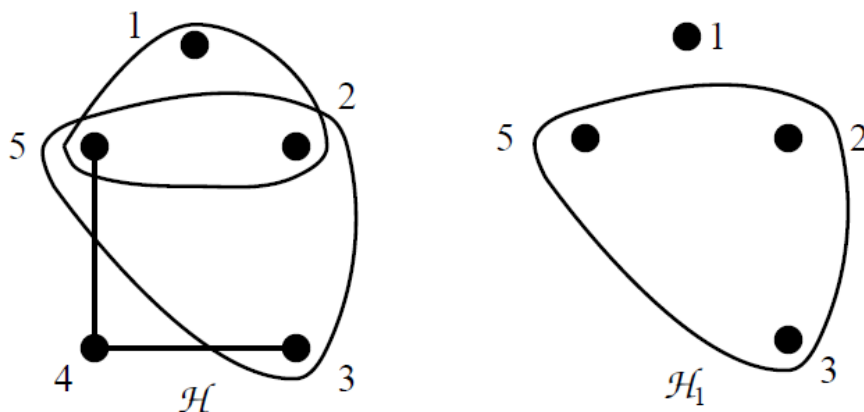
Phép co cạnh D .

Phép lấy phần bù. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. *Phần bù của siêu đồ thị $\mathcal{H}$* được kí hiệu bởi $\bar{\mathcal{H}}$ là một siêu đồ thị xác định trên tập đỉnh X trong đó hai đỉnh $x_i, x_j \in X$ sẽ liên hợp với nhau trong $\bar{\mathcal{H}}$ khi và chỉ khi hai đỉnh $x_i, x_j \in X$ rời nhau trong $\mathcal{H}$.

5.5. Một số loại siêu đồ thị con cơ bản.

Bằng cách thực hiện các phép xóa đỉnh mạnh và xóa cạnh mạnh và yếu từ một siêu đồ thị cho trước nào đó, chúng ta có thể thu được các loại đồ thị con khác nhau. Như chúng ta sẽ thấy, nhiều khái niệm được trình bày trong phần này có những ý tưởng ban đầu được gợi ý từ lý thuyết đồ thị.

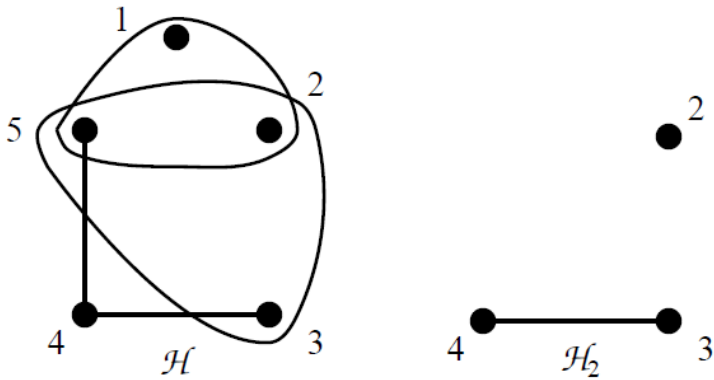
Siêu đồ thị con. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}' = (X', \mathcal{D}')$ được gọi là một *siêu đồ thị con của $\mathcal{H}$* nếu $X' \subseteq X$ và $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$. Trong trường hợp này, chúng ta kí hiệu $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$. Hiển nhiên, $\mathcal{H}'$ có thể nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa mạnh các đỉnh nằm trong tập $X - X'$ (tuần tự theo bất kỳ thứ tự nào hoặc cùng một lúc) và xóa yếu tất cả các cạnh còn lại nằm trong $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$ (tuần tự theo bất kỳ thứ tự nào hoặc cùng một lúc).



Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và siêu đồ thị con $\mathcal{H}_1$.

Siêu đồ thị con cảm sinh. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}' = (X', \mathcal{D}')$ được gọi là một *siêu đồ thị con cảm sinh của siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$* nếu $X' \subseteq X$ và tất cả các cạnh của $\mathcal{H}$ hoàn toàn chứa trong X' đều là một cạnh nằm trong $\mathcal{D}'$. Thông thường, chúng ta nói rằng $\mathcal{H}'$ là một *siêu đồ thị con cảm sinh bởi X'* . Siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}'$ có thể nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa mạnh các đỉnh nằm trong tập $X - X'$ (tuần tự theo bất kỳ thứ tự nào hoặc cùng một lúc). Siêu đồ thị con cảm sinh là một trường hợp đặc biệt của

siêu đồ thị con. Một siêu đồ thị con không thể là cảm sinh nếu có ít nhất một cạnh của $\mathcal{H}$ là một tập con của X' , bị thiếu. Trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$, chúng ta thường kí hiệu một siêu đồ thị con cảm sinh bởi một tập $Y \subseteq X$ bởi $\mathcal{H}_Y$.



Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}_2$.

Siêu đồ thị con từng phần. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị con $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ sao cho $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{D}')$ được gọi là một **siêu đồ thị con từng phần**. Như vậy, các siêu đồ thị con từng phần có cùng tập đỉnh với siêu đồ thị ban đầu và có thể thu được từ siêu đồ thị ban đầu bằng cách chỉ xóa yếu các cạnh của nó. Mọi đồ thị con khung của một đồ thị cho trước đều là một siêu đồ thị con từng phần.

Clique. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị con $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ đẳng cấu với một siêu đồ thị K_n^r sẽ được gọi là một **r – clique của $\mathcal{H}$** . Kích thước lớn nhất có thể có của một clique chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số clique của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\omega(\mathcal{H})$. Hiển nhiên, $1 \leq \omega(\mathcal{H}) \leq |X|$.

Tập độc lập yếu / tập ổn định yếu. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị con $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ không có chứa cạnh nào của $\mathcal{H}$ sẽ được gọi là một **tập độc lập yếu/ tập ổn định yếu của $\mathcal{H}$** . Kích thước lớn nhất có thể có của một tập độc lập yếu/ tập ổn định yếu chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số độc lập yếu/ chỉ số ổn định yếu của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\alpha(\mathcal{H})$. Hiển nhiên, $1 \leq \alpha(\mathcal{H}) \leq |X|$.

Tập độc lập mạnh/ tập ổn định mạnh. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một tập đỉnh con $S \subseteq X$ được gọi là một **tập độc lập mạnh/ tập ổn định mạnh của $\mathcal{H}$** nếu $|S \cap T| \leq 1$ với mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$. Kích thước lớn nhất có thể có của một tập độc lập mạnh/ tập ổn định mạnh chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số độc lập mạnh/ chỉ số ổn định mạnh của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\bar{\alpha}(\mathcal{H})$. Hiển nhiên, với mọi đồ thị G , $\alpha(G) = \bar{\alpha}(G)$.

Transversal. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một tập đỉnh con $T \subseteq X$ được gọi là một **transversal của $\mathcal{H}$** nếu $|T \cap D| \geq 1$ với mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$, nghĩa là mọi tập $S = X - T$ đều là một tập độc lập yếu/tập ổn định yếu. Kích thước nhỏ nhất có thể có của một tập transversal chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số transversal của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\tau(\mathcal{H})$. Từ định nghĩa của chỉ số transversal của $\mathcal{H}$, $\alpha(\mathcal{H}) + \tau(\mathcal{H}) = |X|$.

Cặp ghép. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một tập cạnh con $M \subseteq \mathcal{D}$ được gọi là một **cặp ghép của $\mathcal{H}$** nếu nó là một tập các cạnh không có đỉnh chung nào với nhau. Một **cặp ghép hoàn hảo** là một cặp ghép có chứa mọi đỉnh của siêu đồ thị. Kích thước lớn nhất có thể có của một cặp ghép chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **kích thước tối đại của cặp ghép**, kí hiệu bởi $\nu(\mathcal{H})$. Nhận thấy rằng mọi cặp ghép của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ đều là một tập độc lập mạnh/tập ổn định mạnh trong siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$. Như vậy, $\nu(\mathcal{H}) = \bar{\alpha}(\mathcal{H}^*)$.

Nhận thấy rằng do mọi tập transversal đều có chứa ít nhất một đỉnh nằm trong mỗi cạnh của một cặp ghép bất kì nên $\tau(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H})$. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là thỏa mãn **tính chất König** nếu $\tau(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}) = \bar{\alpha}(\mathcal{H}^*)$.

Tập phủ đỉnh. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một tập cạnh con $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ được gọi là một **tập phủ đỉnh của $\mathcal{H}$** nếu hợp tất cả các cạnh nằm trong $\mathcal{D}'$ chính là tập đỉnh X . Chúng ta nói rằng $\mathcal{D}'$ **phủ $\mathcal{H}$** . Kích thước nhỏ nhất có thể có của một tập phủ đỉnh chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số phủ đỉnh của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\rho(\mathcal{H})$. Nhận thấy mọi tập phủ đỉnh của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ đều là một tập transversal trong siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$. Như vậy, $\rho(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}^*)$. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là thỏa mãn **tính chất đối ngẫu König** nếu $\rho(\mathcal{H}) = \bar{\alpha}(\mathcal{H}^*)$.

Siêu đồ thị phụ. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ được gọi là một **siêu đồ thị phụ** của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ nếu $\mathcal{H}'$ có thể nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách thực hiện một dãy các phép xóa đỉnh, phép xóa cạnh và phép co cạnh.

5.6. Tính Helly và tính conformal.

Nhiều thuộc tính khác nhau của siêu đồ thị có thể được mô hình hóa và giải quyết bằng cách sử dụng ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị:

Đồ thị tuyến tính/ Đồ thị bậc nhất $L(\mathcal{H})/(\mathcal{H})_1$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ (đôi khi được gọi là **đồ thị giao của họ $\mathcal{D}$**) là một đồ thị với tập đỉnh là họ $\mathcal{D}$ và hai đỉnh D_i, D_j sẽ liên hợp với nhau khi và chỉ khi các cạnh tương ứng của chúng cắt nhau, nghĩa là $L(\mathcal{H}) = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$ trong đó $\{D_i, D_j\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow D_i \cap D_j \neq \emptyset$.

Đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là một đồ thị với tập đỉnh là tập X và hai đỉnh x_i, x_j sẽ liên hợp với nhau khi và chỉ khi cả hai đều thuộc cùng một cạnh, nghĩa là $(\mathcal{H})_2 = (X, \mathcal{E})$ trong đó $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{D}(x_i) \cap \mathcal{D}(x_j) \neq \emptyset$.

Kết quả 5.6.1. Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H})_2 = L(\mathcal{H}^*)$.

Chứng minh kết quả 5.6.1.

Thật vậy, đồ thị $(\mathcal{H})_2$ có tập đỉnh X biến thành tập cạnh của $\mathcal{H}^*$, đến lượt mình, tập cạnh của $\mathcal{H}^*$ sẽ biến thành tập đỉnh của $L(\mathcal{H}^*)$; nên hai đồ thị $(\mathcal{H})_2$ và $L(\mathcal{H}^*)$ có cùng một tập đỉnh. Hơn nữa, hai đỉnh bất kì trong $(\mathcal{H})_2$ sẽ liên hợp với nhau $\Leftrightarrow$ chúng nằm trong cùng một cạnh trong $\mathcal{H} \Leftrightarrow$ các cạnh tương ứng của chúng trong siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ có giao với nhau $\Leftrightarrow$ các cạnh tương ứng của chúng trong $L(\mathcal{H}^*)$ liên hợp với nhau. □

Kết quả 5.6.2. Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$, $L(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}^*)_2$.

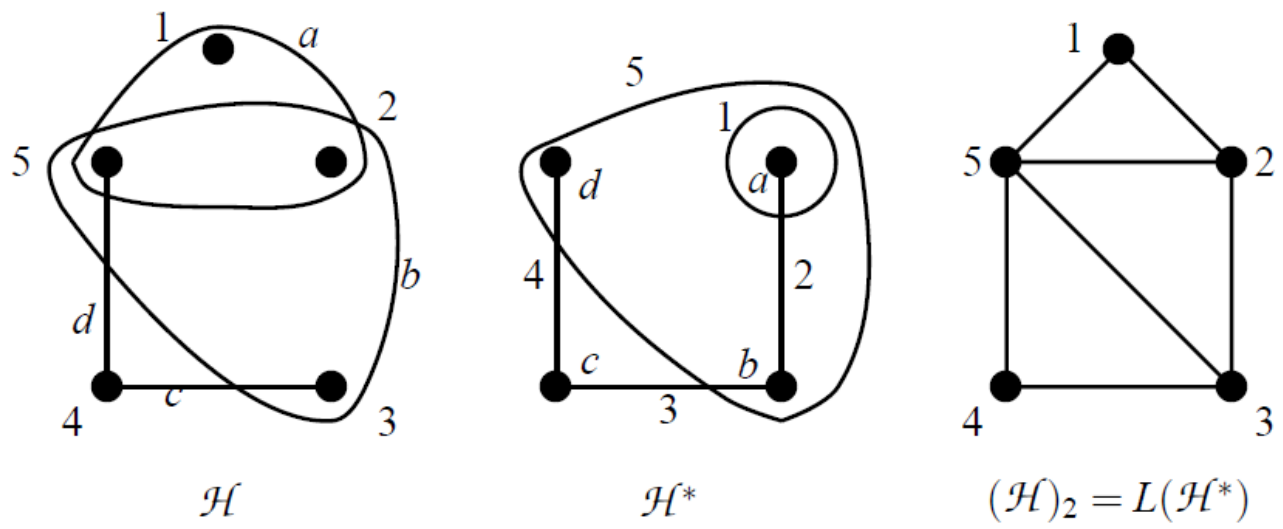
Chứng minh kết quả 5.6.2.

Áp dụng đẳng thức $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$ và Kết quả 5.6.1) cho siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$. □

Kết quả 5.6.3. Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$, $v(\mathcal{H}) = \alpha(L(\mathcal{H}))$ và $v(\mathcal{H}^*) = \alpha((\mathcal{H})_2)$.

Chứng minh kết quả 5.6.3.

Từ định nghĩa của chỉ số $v(\mathcal{H})$, $v(\mathcal{H})$ là số tối đại các cạnh của $\mathcal{H}$ đôi một rời nhau; từ định nghĩa của đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H})$, số tối đại các cạnh của $\mathcal{H}$ đôi một rời nhau chính là số tối đại các đỉnh của $L(\mathcal{H})$ đôi một rời nhau, nghĩa là $v(\mathcal{H}) = \alpha(L(\mathcal{H}))$. Lập luận tương tự, chúng ta cũng chứng minh được rằng số tối đại các cạnh của $\mathcal{H}^*$ đôi một rời nhau bằng số tối đại các đỉnh của



Hình vẽ minh họa $v(\mathcal{H}^*) = \alpha((\mathcal{H})_2) = 2$. □

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là thỏa mãn **tính chất Helly** nếu, với mọi họ con các cạnh bất kì của nó, điều kiện sau được thỏa mãn: *nếu hai cạnh bất kì của họ con này có giao với nhau thì toàn bộ họ con này cũng sẽ có giao với nhau.*

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là một **họ giao** nếu tất cả các cạnh của nó đôi một có giao với nhau, nghĩa là $L(\mathcal{H})$ là một đồ thị đầy đủ. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là một **sao** nếu có một đỉnh nằm trong tất cả các cạnh. Hiển nhiên, các siêu đồ thị sao là trường hợp đặc biệt của một họ giao. Trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$, số các cạnh trong một họ con giao tối đại chứa trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ chính là $\omega(L(\mathcal{H}))$. Một ví dụ đơn giản về một họ giao nhưng không phải là một sao là đồ thị tam giác K_3 : cả ba cạnh đều đôi một có giao với nhau nhưng chúng không có bất kỳ một đỉnh chung nào. Theo các thuật ngữ nêu trên, một siêu đồ thị là Helly khi và chỉ khi mọi siêu đồ thị con từng phần đại diện cho một họ giao đều là một sao.

Tính chất Helly đóng một vai trò quan trọng trong các bài toán tối ưu hóa siêu đồ thị. Chúng ta hãy xem xét bài toán xác định một tập transversal tối tiểu/ hoặc một tập độc lập yếu tối đại của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ cho trước. Nhận thấy rằng mọi clique nằm trong đồ thị $L(\mathcal{H})$ đều đại diện cho một họ giao nằm trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và ngược lại. Nếu $\mathcal{H}$ là Helly thì mọi họ con giao nằm trong $\mathcal{H}$ đều là một sao. Do đó, mọi tập transversal nằm trong $\mathcal{H}$ đều đại diện cho một tập các clique phủ đỉnh $L(\mathcal{H})$. Như vậy, $\tau(\mathcal{H}) = \theta(L(\mathcal{H}))$, nghĩa là bài toán xác định một tập transversal tối tiểu nằm trong $\mathcal{H}$ được chuyển thành bài toán xác định một tập tối tiểu các clique phủ đỉnh $L(\mathcal{H})$. Như chúng ta đã biết từ trước, bài toán xác định một tập tối tiểu các clique phủ đỉnh $L(\mathcal{H})$ tương đương với bài toán xác định sắc số $\chi(\overline{L(\mathcal{H})})$. Chúng ta có thể thấy rằng tồn tại một mối quan hệ giữa các tập transversal của $\mathcal{H}$ và các phân hoạch khả dĩ của phần bù $\overline{L(\mathcal{H})}$. Nếu $\mathcal{H}$ không Helly thì chúng ta không có mối quan hệ này, nên chúng ta không thể sử dụng $\overline{L(\mathcal{H})}$ để xác định $\tau(\mathcal{H})$.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **conformal** nếu tất cả các clique tối đại nằm trong $(\mathcal{H})_2$ đều được chứa trong một cạnh nào đó của $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}$ không có chứa các cạnh bao hàm nhau thì nó là conformal khi và chỉ khi các cạnh của $\mathcal{H}$ chính là các clique tối đại của đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$. Nói cách khác, bất kỳ siêu đồ thị conformal nào cũng có thể thu được từ một đồ thị đơn bằng cách đặt tập các clique tối đại của nó làm tập cạnh của siêu đồ thị conformal và có thể bổ sung thêm các cạnh bao hàm nhau trong trường hợp cần thiết. Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ ngầm thừa nhận rằng trong các kết quả tiếp theo đây các siêu đồ thị được xem xét không có chứa các đỉnh cô lập.

Kết quả 5.6.4.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là conformal khi và chỉ khi, với mọi $Y \subseteq X$ cảm sinh một clique trong $(\mathcal{H})_2$, tồn tại một cạnh $D \in \mathcal{D}$ sao cho $Y \subseteq D$.

Chứng minh kết quả 5.6.4.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị conformal $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $G = (\mathcal{H})_2$ và $Y \subseteq X$ là một tập đỉnh bất kỳ sao cho G_Y là một clique. Do mọi clique đều là một đồ thị con với ít nhất một clique tối đại nên tồn tại một tập $Z \subseteq X$ sao cho $Y \subseteq Z$ và G_Z là một clique. Khi đó, $Z = D$ với một cạnh $D \in \mathcal{D}$ nào đó (điều này suy ra từ việc $\mathcal{H}$ là conformal).

Như vậy, $Y \subseteq D$ với một cạnh $D \in \mathcal{D}$ nào đó.

($\Leftarrow$) Giả sử rằng với mọi $Y \subseteq X$ cảm sinh một clique trong $(\mathcal{H})_2$ đều tồn tại một cạnh $D \in \mathcal{D}$ sao cho $Y \subseteq D$.

Để chứng minh $\mathcal{H}$ là conformal, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng họ $\mathcal{D}'$ các cạnh tối đại của $\mathcal{H}$ và họ $\mathcal{C}$ các clique của G đồng nhất với nhau, nghĩa là $\mathcal{D}' = \mathcal{C}$.

Chứng minh $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{C}$. Giả sử $D \in \mathcal{D}'$ là một cạnh tối đại bất kỳ chứa trong $\mathcal{H}$. Từ định nghĩa của $G = (\mathcal{H})_2$, các đỉnh của D đôi một liên hợp nhau trong G , nghĩa là G_D là một clique. Clique G_D sẽ được chứa trong một clique tối đại $C \in \mathcal{C}$ nào đó, nghĩa là $D \subseteq C$. Từ giả thiết của bài toán, với mọi clique C của G , tồn tại một cạnh $D' \in \mathcal{D}$ sao cho $C \subseteq D'$. Như vậy, $D \subseteq C \subseteq D'$. Tuy nhiên, do D là một cạnh tối đại nên $D = C = D'$, nghĩa là $D \in \mathcal{C}$. Do đó, $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{C}$.

Chứng minh $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}'$. Giả sử $C \in \mathcal{C}$ là một clique tối đại bất kỳ nằm trong $\mathcal{C}$. Từ định nghĩa của một clique, các đỉnh của C đôi một liên hợp với nhau. Từ giả thiết của bài toán, tồn tại một cạnh $D \in \mathcal{D}$ sao cho $C \subseteq D$. Đồng thời, tồn tại một cạnh $D' \in \mathcal{D}'$ sao cho $D \subseteq D'$. Do các đỉnh của D' đôi một liên hợp nhau trong G nên tồn tại một clique tối đại C' sao cho $D' \subseteq C'$. Tuy nhiên, do C là clique tối đại và $C \subseteq D' \subseteq C'$ nên $C = D = C'$, nghĩa là $C \in \mathcal{D}'$. Do đó, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}'$. $\square$

Kết quả 5.6.5. (Gilmore)

Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là conformal khi và chỉ khi, với ba cạnh D_1, D_2, D_3 bất kỳ, tồn tại một cạnh D sao cho $(D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1) \subseteq D$.

Chứng minh kết quả 5.6.5.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị conformal $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và D_1, D_2, D_3 là các cạnh bất kỳ của $\mathcal{H}$. Do các đỉnh của $(D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1)$ đôi một liên hợp với nhau nên chúng cảm sinh một clique trong $(\mathcal{H})_2$.

Từ Kết quả 5.6.4), tồn tại một cạnh D sao cho $(D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1) \subseteq D$.

($\Leftarrow$) Giả sử rằng, với ba cạnh D_1, D_2, D_3 bất kỳ, tồn tại một cạnh D sao cho $(D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1) \subseteq D$.

Để hoàn tất phép chứng minh, chúng ta sẽ chỉ ra rằng điều kiện nêu trong Kết quả 5.6.4) được thỏa mãn bằng phương pháp quy nạp toán học theo số $|Y|$ trong đó Y là tập các cặp đỉnh liên hợp của đồ thị $(\mathcal{H})_2$. Nếu $|Y| = 1$ thì đỉnh duy nhất của Y sẽ được chứa trong một cạnh nào đó của $\mathcal{H}$ (trường hợp ngược lại, nó sẽ là một đỉnh cô lập). Nếu $|Y| = 2$ thì hai đỉnh của Y sẽ liên hợp nhau và, từ định nghĩa của $(\mathcal{H})_2$, tồn tại một cạnh D sao cho $Y \subseteq D$.

D. Giả sử điều kiện nêu trong Kết quả 5.6.4) được thỏa mãn với mọi Y sao cho $|Y| < k$, $k \geq 3$ và Y là một tập con của các đỉnh nào đó cảm sinh ra một clique có kích thước bằng k trong $(\mathcal{H})_2$.

Do $|Y| \geq 3$ nên chúng ta có thể chọn ra các đỉnh $x_1, x_2, x_3 \in Y$ và đặt $Y_i := Y - \{x_i\}, i = 1, 2, 3$.

Nhận thấy rằng $Y = (Y_1 \cap Y_2) \cup (Y_2 \cap Y_3) \cup (Y_3 \cap Y_1)$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, tồn tại các cạnh D_1, D_2, D_3 sao cho $Y_i \subseteq D_i, i = 1, 2, 3$.

Điều này chỉ ra rằng $Y \subseteq (D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1)$.

Từ giả thiết của bài toán, chúng ta suy ra được rằng $Y \subseteq D$ với một cạnh $D \in \mathcal{D}$ nào đó.

Như vậy, mọi tập đỉnh con gồm các đỉnh đôi một liên hợp nhau nằm trong $(\mathcal{H})_2$ đều nằm trong một cạnh nào đó của $\mathcal{H}$.

Từ Kết quả 5.6.4), $\mathcal{H}$ là conformal. □

Kết quả 5.6.6.

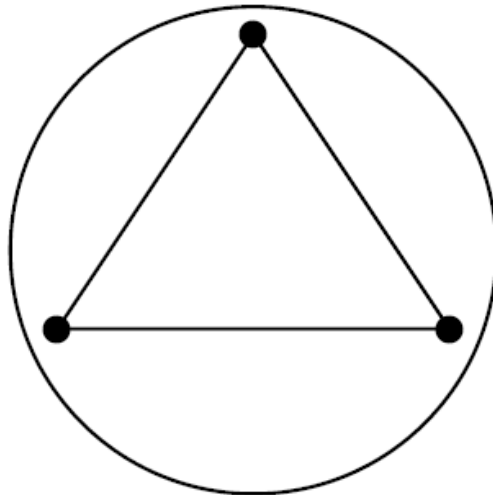
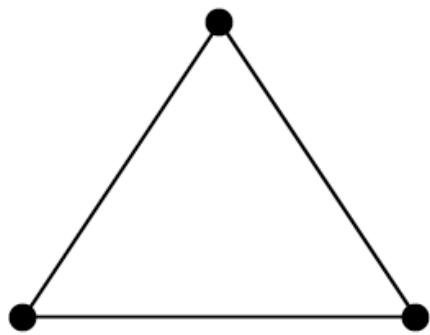
Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là conformal khi và chỉ khi đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ là Helly.

Chứng minh kết quả 5.6.6.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị conformal $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Chọn ra một họ con các cạnh giao nhau bất kỳ nằm trong $\mathcal{H}^*$, chúng ta tạm giả sử là $X_1, X_2, \dots, X_k$. Trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$, chúng tương ứng với một họ các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ đôi một liên hợp với nhau. Do $\mathcal{H}$ là conformal nên tồn tại một cạnh D sao cho $x_1, x_2, \dots, x_k \in D$ (điều này suy ra từ Kết quả 5.6.4). Điều này chỉ ra rằng, trong $\mathcal{H}^*$, tồn tại một đỉnh d sao cho $d \in X_1, d \in X_2, \dots, d \in X_k$, nghĩa là $d \in X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k$. Như vậy, mọi họ con giao nhau của $\mathcal{H}^*$ đều là một star, nghĩa là đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ là Helly.

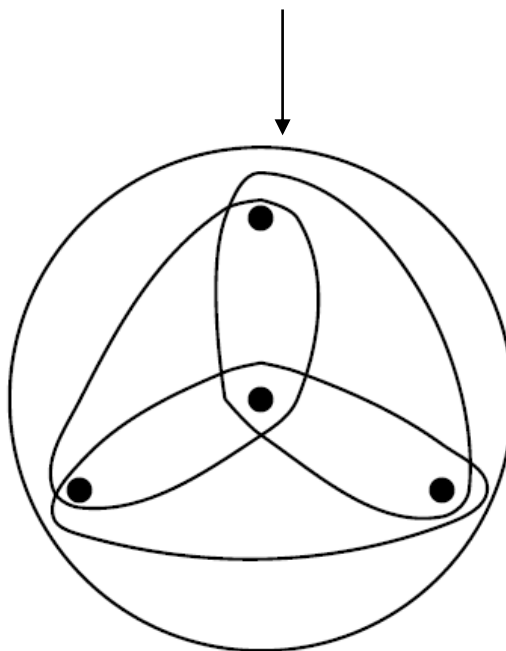
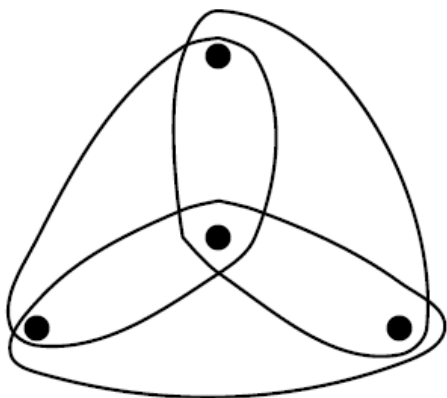
($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{H}^*$ là một siêu đồ thị Helly. Khi đó, mọi họ con giao nhau của $\mathcal{H}^*$ đều là một star. Như vậy, trong $\mathcal{H}$, mọi tập đỉnh con gồm các đỉnh đôi một liên hợp nhau đều nằm trong một cạnh nào đó. Từ Kết quả 5.6.4), $\mathcal{H}$ là conformal. □

Một ví dụ đơn giản để chỉ ra mối liên hệ giữa tính Helly và tính conformal chính là đồ thị tam giác K_3 . Hiển nhiên, bản thân đồ thị K_3 không phải là Helly và cũng không phải là conformal. Thật vậy, K_3 là một họ giao nhau nhưng không phải là một star; nó là một clique nhưng không chứa trong bất kỳ cạnh nào. Nếu chúng ta bổ sung thêm vào $\mathcal{H}$ một cạnh bất kỳ chứa tất cả các đỉnh thì chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị conformal $\mathcal{H}_1$. Nếu chúng ta bổ sung thêm vào $\mathcal{H}$ một đỉnh bất kỳ liên thuộc với tất cả các cạnh thì chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị Helly $\mathcal{H}_2$. Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_1^*$. Nếu chúng ta bổ sung thêm vào $\mathcal{H}_2$ một cạnh bất kỳ chứa tất cả các đỉnh thì chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị $\mathcal{H}_3$ vừa là Helly vừa là conformal.



$\mathcal{H} = K_3$ không conformal và Helly

$\mathcal{H}_1$ conformal nhưng không Helly



$\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_1^*$ Helly nhưng không conformal

$\mathcal{H}_3 \cong \mathcal{H}_3^*$ vừa Helly vừa conformal

Một siêu đồ thị được gọi là **tự đối ngẫu** nếu $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$. Hiển nhiên, ma trận liên thuộc của một siêu đồ thị tự đối ngẫu là một ma trận vuông đối xứng. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **biconformal** nếu cả $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}^*$ đều conformal.

Như vậy, nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị biconformal thì cả $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}^*$ đều Helly.