Chủ đề 06. Siêu cây – Một số dạng siêu đồ thị tổng quát quá của đồ thị lưỡng phân – Siêu đồ thị chordal conformal

6.1. Siêu cây – Siêu đồ thị chordal conformal

Khái niệm siêu cây

Nhắc lại rằng cây là một đồ thị liên thông không có chứa chu trình và đại diện cho lớp các đồ thị đơn nhất.

Chúng ta cũng đã biết định nghĩa của một chu trình trong một siêu đồ thị và có vẻ như việc tổng quát quá trực tiếp sẽ là lựa chọn tốt nhất để chúng ta có thể giới thiệu các kết quả nghiên cứu về siêu đồ thị. Tuy nhiên, các thuộc tính cơ bản của các cây vẫn còn đúng cho nhiều cấu trúc tổng quát hơn là chỉ cho các siêu đồ thị không có chứa chu trình.

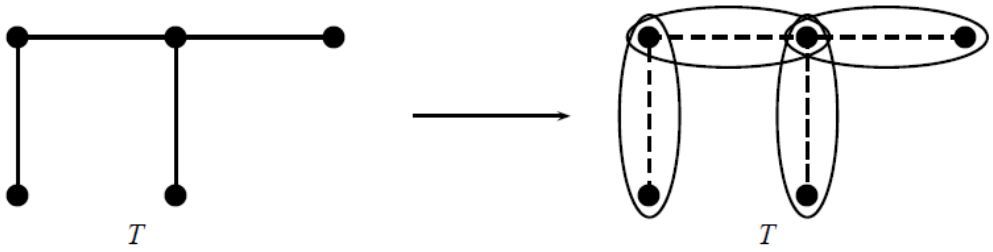
Đồ thị host của một siêu đồ thị là một đồ thị liên thông xác định trên tập đỉnh của siêu đồ thị sao cho mỗi cạnh của siêu đồ thị đều tạo ra một đồ thị con liên thông của đồ thị host. Chúng ta sẽ biểu diễn các cây host bằng các đường đứt nét.

Siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ được gọi là một ***siêu cây*** nếu tồn tại một cây host $T = (X, E)$ sao cho mỗi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều tạo ra một cây con của T.

Nói cách khác, mọi siêu cây bất kỳ đều đẳng cấu với một họ các cây con của một cây nào đó.

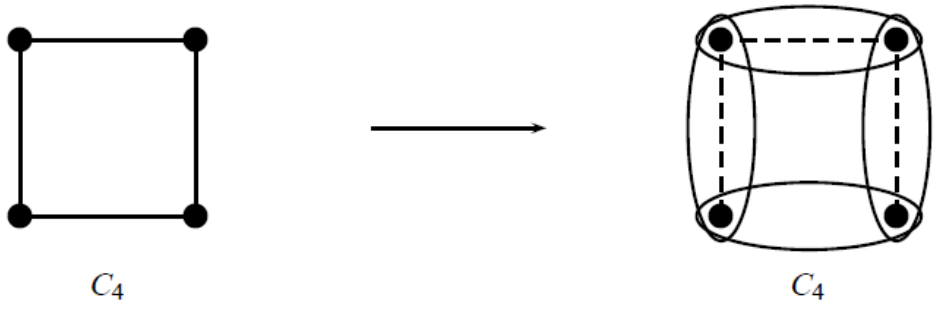
Như vậy, nếu $\mathcal{H}$ không phải là một siêu cây thì, với mọi cây xác định trên cùng một tập đỉnh của siêu đồ thị, có ít nhất một cạnh của $\mathcal{H}$ tạo ra một đồ thị không liên thông.

Mọi cây đều là một siêu cây vì nó là một cây host của chính nó.



Hình vẽ minh họa.

Ngược lại, một chu trình không thể là một siêu cây vì nó luôn có chứa một cạnh tạo ra một đồ thị không liên thông.



Hình vẽ minh họa.

Một vấn đề được phát sinh ra ở đây đó là: "Cho trước một siêu đồ thị bất kỳ, làm thế nào để chúng ta có thể xác định một cây host của nó nếu nó tồn tại ? Ngoài ra, nếu $\mathcal{H}$ không phải là một siêu cây thì làm thế nào để chúng ta có thể chứng minh được điều đó?". Chúng ta sẽ cần một vài định nghĩa và định lí mới để phát triển một thuật toán cho phép nhận dạng các siêu cây và tìm lời giải cho một số bài toán tối ưu khác.

Kết quả 6.1.1. (Buneman – Gavril – Walter)

Đồ thị tuyến tính của một siêu cây luôn là một đồ thị chordal.

Chứng minh kết quả 6.1.1.

Giả sử cho trước một siêu cây $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và $T = (X, E)$ là cây host tương ứng của nó.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo số các đỉnh $|T|$của cây T. Với $|T| = 1$, đồ thị tuyến tính của $\mathcal{H}$ là một clique, nên nó cũng là một đồ thị chordal.Với $|T|$ lớn hơn, kí hiệu x là một đỉnh pendant của cây T. Kí hiệu L' là đồ thị tuyến tính của siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ thu được từ siêu đồ thị $\mathcal{H}$ bằng phép xóa yếu đỉnh x. Do cây host của $\mathcal{H}'$ là $T - x$ nên $\mathcal{H}'$ là cũng là một siêu cây. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, L' là một đồ thị chordal.

Nếu không có cạnh nào của $\mathcal{H}$ trùng với $\{x\}$ thì $L' = L$, nên L là một đồ thị chordal. Nếu $\{x\}$ là một cây con thì tập các đỉnh láng giềng của đỉnh x trong L tạo thành một clique (điều này suy ra từ việc tất cả các cây con này đều có chứa đỉnh x). Do đó, L nhận được từ L' bằng cách bổ sung thêm một đỉnh simplicial.

Nhận thấy rằng việc bổ sung thêm một đỉnh simplicial như vậy không thể tạo ra một chu trình không chordal. Như vậy, L là một đồ thị chordal. □

Kết quả 6.1.2. (Berge)

Mọi siêu cây đều là một siêu đồ thị Helly.

Chứng minh kết quả 6.1.2.

Giả sử cho trước một siêu cây $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và $T = (X, E)$ là cây host tương ứng của nó. Để chứng minh mọi họ giao của $\mathcal{H}$ đều là một star, chúng ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $\mathcal{F}$ là một họ con giao nhau nhưng không phải là một star. Khi đó, mỗi đỉnh $x \in X$đều không liên thuộc với một cạnh $D \in \mathcal{F}$ nào đó.Đánh daub can cạnh của T là cạnh đầu tiên trên đường đi từx đến D. Do chúng ta đặt $n(T) = |X|$ dấu trên tổng số $n(T) - 1$ cạnh nên phải có một số cạnh bị đánh dấu hai lần. Do các cạnh này phải nằm trên một đường đi nào đó nằm trong T nối giữa một số thành viên D_i và D_j của $\mathcal{F}$ nên chúng không thể có giao với nhau. Như vậy, $\mathcal{F}$ không thể là một họ giao của $\mathcal{H}$, mâu thuẫn. □

Siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là ***chordal*** nếu mỗi chu trình có độ dài ≥ 4 đều có hai đỉnh không liên tiếp liên hợp nhau trong $\mathcal{H}$. Định nghĩa này được mở rộng trực tiếp từ định nghĩa của các đồ thị chordal. Như vậy, $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu đồ thị chordal khi và chỉ khi đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ của nó là một đồ thị chordal. Nếu x là một đỉnh simplicial trong đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ thì các đỉnh láng giềng của x trong $\mathcal{H}$ sẽ đôi một liên hợp nhau.

Trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, một đỉnh x được gọi là ***pendant đối với một đỉnh y*** nếu $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{D}(y)$.

Như vậy, một đỉnh pendant trong một đồ thị G sẽ là một đỉnh cô lập hoặc là pendant đối với đỉnh láng giềng duy nhất của nó còn một đỉnh pendant trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ sẽ tương ứng với một cạnh bao hàm nào đó nằm trong siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$.

Kết quả 6.1.3.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là chordal conformal nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}^*$ là một siêu cây.

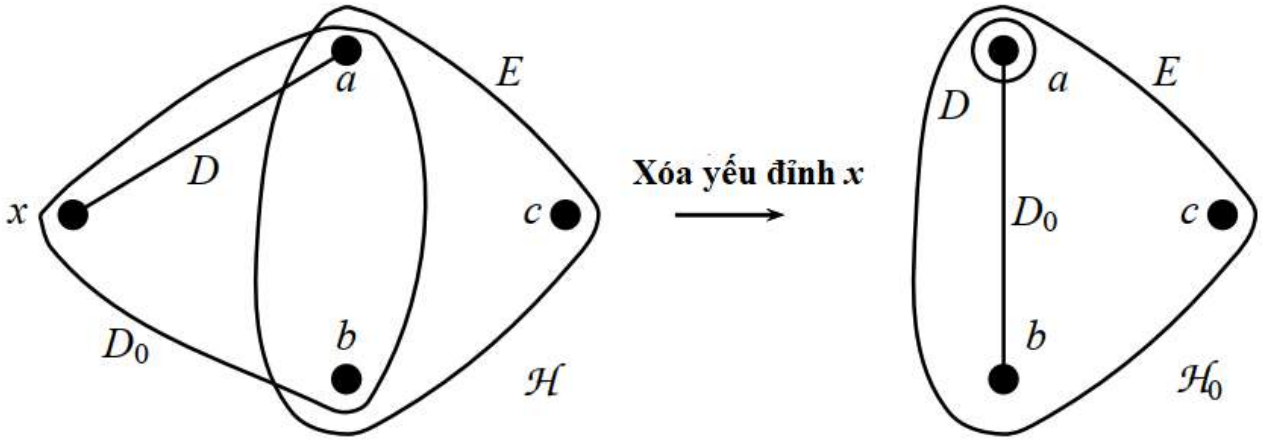
Chứng minh kết quả 6.1.3.

($\Rightarrow$) Giả sửcho trước một siêu đồ thị chordal conformal $\mathcal{H} = (Y, \mathcal{D})$. Chúng ta sẽ chứng minh siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ là một siêu cây bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $n = n(\mathcal{H})$. Với $n \leq 2$, mọi siêu đồ thị đều là một siêu cây. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $n > 2$ và khẳng định đã được kiểm chứng với mọi siêu đồ thị nhỏ hơn. Ý tưởng cho phép chứng minh của chúng ta sẽ được thực hiện theo các bước như sau: xóa yếu một đỉnh simplicial bất kỳ trong đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ khỏi $\mathcal{H}$, xác định một cây host của siêu đồ thị đối ngẫu của siêu đồ thị thu được, tái tạo lại siêu đồ thị $\mathcal{H}$ bằng cách bổ sung tuần tự các cạnh (phép toán nghịch đảo của phép toán xóa đỉnh yếu), xác định một cây host của siêu đồ thị $\mathcal{H}^*$.

Bước 1. Xây dựng một siêu đồ thị chordal conformal $\mathcal{H}_0$ và đồ thị bậc hai $(\mathcal{H}_0)_2$.

Do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị chordal nên đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ cũng sẽ là một đồ thị chordal. Như vậy, $(\mathcal{H})_2$ sẽ có chứa ít nhất một đỉnh simplicial x. Bằng cách nối đỉnh x với tất cả các đỉnh láng giềng của x trong $(\mathcal{H})_2$, chúng ta sẽ thu được một clique tối đại trong $(\mathcal{H})_2$. Từ tính chất conformal của $\mathcal{H}$, tập hợp này sẽ tương ứng với một cạnh D_0 nào đó trong $\mathcal{H}$. Do x không có thêm đỉnh láng giềng nào khác nữa nên mọi cạnh trong $\mathcal{H}$ có chứa x đều là một tập con của D_0.

Kí hiệu $\mathcal{H}_0$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$.



Hình vẽ minh họa.

Khi đó, $\mathcal{H}_0$ sẽ có tập đỉnh là $Y - \{x\}$ và tập cạnh là $\{D - \{x\}: D \in \mathcal{D}\}$. Do x là một đỉnh simplicial trong $(\mathcal{H})_2$ và cạnh $D_0 - \{x\}$ trong $\mathcal{H}_0$ chứa tất cả các đỉnh láng giềng của x trong $\mathcal{H}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng nếu xóa mạnh đỉnh x khỏi $(\mathcal{H})_2$ thì đồ thị nhận được sẽ là $(\mathcal{H}_0)_2$, nghĩa là $(\mathcal{H}_0)_2 = (\mathcal{H})_2 - x$.

Như vậy, $\mathcal{H}_0$ cũng là một đồ thị chordal.

Nhận thấy rằng hầu như tất cả các clique tối đại trong $(\mathcal{H}_0)_2$ đều giống như trong $(\mathcal{H})_2$ ngoại trừ clique tối đại với tập đỉnh D_0 bị mất và clique tối đại có chứa tập đỉnh $D_0 - \{x\}$ như một cạnh. Do $\mathcal{H}_0$có chứa $D_0 - \{x\}$ như một cạnh nên $\mathcal{H}_0$ sẽ là một đồ thị conformal.

Bước 2. Kiểm chứng giả thiết quy nạp của bài toán cho siêu đồ thị chordal conformal $\mathcal{H}_0$.

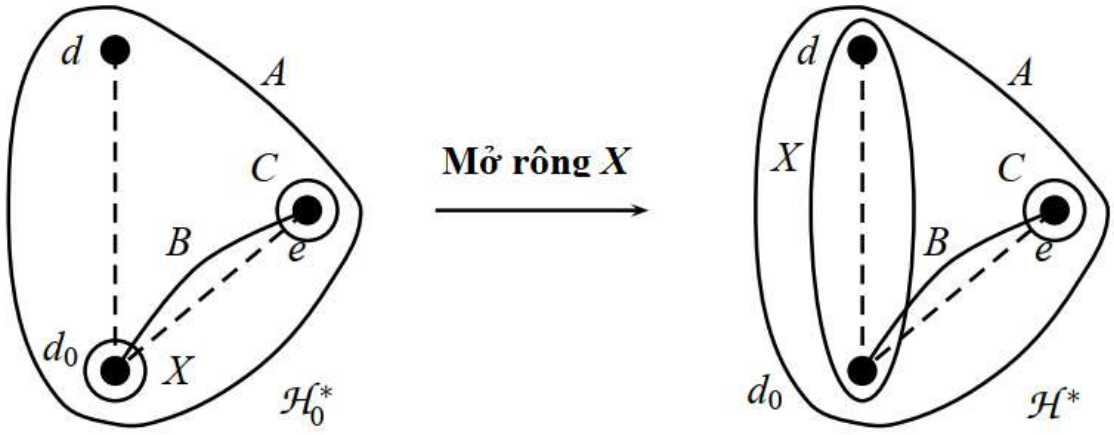
Do $\mathcal{H}_0$ là một đồ thị chordal conformal với $< n$ đỉnh nên chúng ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán cho $\mathcal{H}_0$ để suy ra rằng $\mathcal{H}_0^*$ là một siêu cây. Như vậy, tồn tại ít nhất một cây host T xác định trên tập đỉnh $\mathcal{D}' = V(\mathcal{H}_0^*)$ sao cho, với mọi đỉnh $x' \in V(\mathcal{H}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{H}_0^*)$, các phần tử của $\mathcal{D}'$ có chứa x' đều có chứa một tập các đỉnh của T cảm sinh ra một cây con nào đó của T.

Bước 3. Chứng minh bước quy nạp của bài toán.

Phần còn lại của phép chứng minh, chúng ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{H}^*$ cũng là một siêu cây. Chúng ta sẽ thực hiện điều này theo các bước như sau. Đầu tiên, chúng ta sẽ xây dựng một siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$ từ $\mathcal{H}_0$ bằng cách mở rộng cạnh $D_0 - \{x\}$ để chứa thêm đỉnh x và trở thành cạnh D_0. Việc làm này của chúng ta thật ra chính là bổ sung thêm một đỉnh bậc 1 vào $\mathcal{H}_0$. Nói cách khác, việc làm này của chúng ta thật ra chính là bổ sung thêm một đỉnh đơn vào $\mathcal{H}_0^*$. Do $D_0 - \{x\}$ là một đỉnh nằm trong $\mathcal{H}_0^*$ nên nó cũng sẽ là một đỉnh nằm trong T. Bằng cách bổ sung thêm đỉnh d_0 này như một cạnh khuyên X như là một cây con, chúng ta sẽ thu được một siêu cây $\mathcal{H}_1^*$.

Trường hợp 1. Tồn tại một đỉnh d nào đó liên hợp với d_0 trong cây host T.

Kí hiệu $\mathcal{D}_x'$ là tập các cạnh nằm trong $\mathcal{H}_0$, khác với cạnh $D_0 - \{x\}$, thu được bằng cách xóa đỉnh x khỏi các cạnh của $\mathcal{D}(x)$ nằm trong $\mathcal{H}$. Để nhận được $\mathcal{H}$ từ $\mathcal{H}_1$, chúng ta cần mở rộng các cạnh này để chúng chứa thêm đỉnh x. Với mỗi đỉnh láng giềng d của d_0 trong T, kí hiệu $D \in \mathcal{D}_x'$ là cạnh tương ứng của d trong $\mathcal{H}_0$, chúng ta sẽ mở rộng cạnh X trong $\mathcal{H}_1^*$ để nó chứa thêm đỉnh d. Việc làm này của chúng ta sẽ tạo ra một siêu cây $\mathcal{H}_2^*$ nhận T làm một cây host sao cho cạnh X sẽ tương ứng với một star x với tâm tại d_0. Các đỉnh pendant của star này đều là các đỉnh trong $\mathcal{H}_2^*$ tương ứng với các cạnh trong $\mathcal{H}_2$ mà chúng ta đã mở rộng trước đó để chúng chứa thêm đỉnh x.



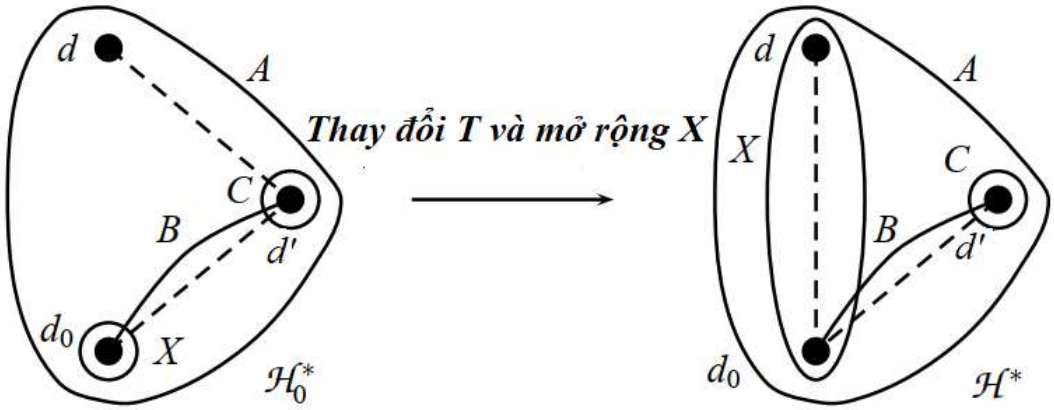
Hình vẽ minh họa.

Như vậy, $\mathcal{H}^*$ sẽ là một siêu cây.

Trường hợp 2. Không tồn tại bất kỳ đỉnh d nào trong cây host T liên hợp với d_0.

Kí hiệu $\mathcal{H}_3$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}_2$ bằng cách bổ sung thêm đỉnh x vào một cạnh $D \in \mathcal{D}'_x$ nào đó mà chúng ta chưa mở rộng trước đó. Cạnh D này của $\mathcal{H}_2$ sẽ tương ứng với một đỉnh d nào đó trong $\mathcal{H}_2^*$ là pendant đối với đỉnh d_0 (điều này suy ra từ việc các cạnh nằm trong $\mathcal{H}_2^*$ có chứa đỉnh d hoặc d_0 sẽ tương ứng với các đỉnh nằm trong $\mathcal{H}_2$ được chứa trong cạnh D hoặc D_0, nghĩa là $D \subset D_0$). Đỉnh d này trong $\mathcal{H}_2^*$ này sẽ đóng vai trò như một đỉnh của T không liên hợp với d_0. Bằng cách bổ sung thêm cạnh (d, d_0) này vào cây host T, chúng ta sẽ nhận được một chu trình duy nhất nào đó. Bằng cách xóa một cạnh (d, d') bất kỳ trên chu trình này (với $d' \neq d_0$), chúng ta sẽ nhận được một cây T_3 khác.

Do X chỉ chứa d_0 và các đỉnh láng giềng của d_0 nên chúng ta có thể mở rộng cạnh X để nó chứa thêm đỉnh d. Điều này tương ứng với việc chúng ta mở rộng cạnh D để nó chứa thêm đỉnh x và các đỉnh của cạnh X sau khi mở rộng vẫn cảm sinh một star trong T_3. Để hoàn tất phép chứng minh $\mathcal{H}_3^*$ là một siêu cây, chúng ta cần chứng minh rằng các cạnh còn lại của $\mathcal{H}_3^*$ cảm sinh một siêu cây ngay cả khi cạnh (d, d') bị xóa. Giả sử X' là một cạnh nào đó của $\mathcal{H}_2^*$ có chứa cả d và d'. Như vậy, trong siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$, đỉnh x' sẽ phải nằm trong cả cạnh D và D'. Do d là pendant đối với đỉnh d_0 trong $\mathcal{H}_2^*$ nên tất cả các cạnh nằm trong $\mathcal{H}_2^*$ có chứa d cũng sẽ chứa d_0. Như vậy, cây con trong T có chứa các đỉnh của X' không chỉ chứa các đỉnh d và d' mà còn chứa cả đường đi từ d' đến d_0. Điều này chỉ ra rằng các đỉnh của X'sẽ tạo thành một cây con trong T_3.



Hình vẽ minh họa.

Bằng cách lặp lại quá trình mở rộng này cho các cạnh còn lại của tập $\mathcal{D}'_x$ này, chúng ta sẽ tạo ra một dãy các siêu cây $\mathcal{H}_3^*, \mathcal{H}_4^*$, ... với các cây host T_3, T_4, ... Tại mỗi bước của quá trình trên, các điều kiện của bài toán vẫn được bảo toàn để đảm bảo phép lập luận đã được thực hiện cho $\mathcal{H}_3^*$ của chúng ta vẫn có thể được thực hiện cho các bước tiếp theo. Sau khi tất cả các cạnh của tập $\mathcal{D}'_x$ được mở rộng như trên, siêu cây nhận được chính là $\mathcal{H}^*$.

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{H}^*$ là một siêu cây. Từ Kết quả 6.1.1), $L(\mathcal{H}^*)$ là một đồ thị chordal. Do $(\mathcal{H})_2 = L(\mathcal{H}^*)$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $(\mathcal{H})_2$ cũng là một đồ thị chordal. Như vậy, $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu đồ thị chordal.

Giả sử R là một tập các đỉnh đôi một liên hợp nhau trong $\mathcal{H}$. Chúng sẽ tương ứng với một tập các cạnh đôi một giao nhau nào đó trong $\mathcal{H}^*$. Từ Kết quả 6.1.2), $\mathcal{H}^*$ là một siêu đồ thị Helly, nên tập các cạnh này phải có một đỉnh chung trong $\mathcal{H}^*$. Như vậy, trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$, các phần tử của R phải nằm trong cùng một cạnh chung nào đó. Điều này chỉ ra rằng các đỉnh của mọi clique chứa trong$(\mathcal{H})_2$ đều nằm trong một cạnh nào đó của $\mathcal{H}$, nghĩa là $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị conformal. □

Kết quả 6.1.4. (Flament)

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là một siêu cây nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị Helly và $L(\mathcal{H})$ là một đồ thị chordal.

Chứng minh kết quả 6.1.4.

Từ Kết quả 6.1.3), $\mathcal{H}$ là một siêu cây nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}^*$ là siêu đồ thị conformal và đồ thị bậc hai $(\mathcal{H}^*)_2$ của nó là một đồ thị chordal. Do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị Helly nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}^*$ là một siêu đồ thị conformal (Kết quả 5.6.6) và $(\mathcal{H}^*)_2 = L(\mathcal{H})$ (Kết quả 5.6.2) nên $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu cây nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị Helly và $L(\mathcal{H})$ là một đồ thị chordal. □

Siêu đồ thị clique của một đồ thị G được định nghĩa là một siêu đồ thị xác định trên tập đỉnh $V(G)$ với tập cạnh là họ các tập đỉnh của các clique tối đại nằm trong đồ thị G. Nhận thấy rằng đồ thị bậc hai của siêu đồ thị clique của một đồ thị G bất kỳ chính là đồ thị G. Hơn nữa, từ định nghĩa của một siêu đồ thị clique, mọi siêu đồ thị clique đều là conformal.

Kết quả 6.1.5.

Đối ngẫu của siêu đồ thị clique của một đồ thị chordal bất kỳ luôn là một siêu cây.

Chứng minh kết quả 6.1.5.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra trực tiếp từ Kết quả 6.1.3). □

Kết quả 6.1.6.

Đối ngẫu của một đồ thị chordal G là một siêu cây nếu và chỉ nếu G là một cây.

Chứng minh kết quả 6.1.6.

Nếu G là một cây thì do siêu đồ thị clique của G cũng chính là G nên đối ngẫu của G sẽ là một siêu cây (Kết quả 6.1.5). Nếu G^* là một siêu cây thì G sẽ là một siêu đồ thị conformal. Do tất cả các cạnh của G đều có kích thước bằng 2 nên tính conformal của G chỉ ra rằng không có clique nào nằm trong G có kích thước lớn hơn 2, nghĩa là G là một cây. □

Kết quả 6.1.7. (Gavril)

Một đồ thị G là chordal nếu và chỉ nếu nó là đồ thị tuyến tính của một siêu cây nào đó.

Chứng minh kết quả 6.1.7.

(⇒) Nếu G là một đồ thị chordal thì Kết quả 6.1.5) chỉ ra rằng đối ngẫu của siêu đồ thị clique của nó sẽ là một siêu cây. Các đỉnh của siêu cây sẽ là các clique tối đại của đồ thị G và các clique cùng chứa một đỉnh cho trước nào đó của G sẽ tạo thành một cây con của cây host. Hơn nữa, các đỉnh của G sẽ liên hợp nhau nếu và chỉ nếu chúng xuất hiện trong cùng một clique tối đại. Điều này chỉ ra rằng các cây con có chứa chúng phải có một đỉnh chung trong cây host.

(⇐) Tính đúng đắn của khẳng định này được suy ra từ Kết quả 6.1.3). □

Các siêu đồ thị chordal conformal còn được gọi các ***siêu đồ thị α − acyclic***. Trong một số công trình khác, các siêu cây còn được gọi là các ***siêu đồ thị arboreal*** còn các siêu đồ thị chordal conformal thì được gọi là các ***siêu đồ thị coarboreal***.

Thuật toán nhận dạng một siêu cây/Thuật toán xác định tập transversal tối tiểu (cặp ghép tối đại) cho một siêu cây.

Trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, một đỉnh $x \in X$ sẽ được gọi là một ***đỉnh transversal*** nếu tồn tại một cạnh khuyên $D \in \mathcal{D}$ sao cho $D = \{x\}$. Điều này có nghĩa là đỉnh$x$nằm trong mọi tập transversal của $\mathcal{H}$ bao gồm cả những tập transversal tối tiểu. Một đỉnh transversal trong $\mathcal{H}$ sẽ trở thành một cạnh X trong $\mathcal{H}^*$sao cho cạnh Xcó chứa một đỉnh d chỉ nằm trong X.

Nhắc lại rằng, trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, một đỉnh $x \in X$ sẽ được gọi là một ***đỉnh pendant*** nếu tồn tại một đỉnh$y \in X$, $y \neq x$, sao cho $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{D}(y)$. Một đỉnh y như vậy sẽ được gọi là một ***đỉnh twin của x***. Trong siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$, một đỉnh pendant x sẽ trở thành một cạnh X sao cho nó được chứa như một tập con trong cạnh Y tương ứng với đỉnh twin y của x, nghĩa là X là một cạnh bao hàm nhau. Nếu $\mathcal{H}$ có chứa ít nhất hai đỉnh thì mọi đỉnh cô lập đều là một đỉnh pendant (điều này suy ra từ việc $\mathcal{D}(x) = \emptyset$ với mọi đỉnh cô lập x). Nhận thấy rằng mọi đỉnh pendant đều không thể là một đỉnh transversal ngược lại mọi đỉnh transversal đều không thể là một đỉnh pendant.

Kết quả 6.1.8.

Nếu $x \in X$ là một đỉnh pendant trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là một siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$ thì:

(1) Tồn tại một tập độc lập tối đại $S \subseteq X$ sao cho $x \in S$;

(2) $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1)$;

(3) $\alpha(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H}_1) + 1$;

(4) $v(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H}_1)$;

(5) Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây thì $\mathcal{H}_1$ cũng là một siêu cây.

Chứng minh kết quả 6.1.8.

(1) Từ định nghĩa của một đỉnh pendant, tồn tại một đỉnh twin y của x sao cho$\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{D}(y)$. Chúng ta xem xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. y nằm trong một tập transversal tối tiểu $T \subseteq X$.

Khi đó, $x \notin T$ (điều này suy ra từ tính tối tiểu của transversal T: trường hợp ngược lại, $T_1 \coloneqq T - \{x\}$ cũng sẽ là một tập transversal của $\mathcal{H}$ với $|T_1| = |T| - 1 = \tau(\mathcal{H}) - 1$). Như vậy, $x \in X - T = S$ với S là một tập độc lập tối đại nằm trong X.

Trường hợp 2. y không nằm trong bất kỳ một tập transversal tối tiểu nào của $\mathcal{H}$.

Nếu tồn tại một tập transversal tối tiểu T_1 sao cho $x \in T_1$ thì $T_2 = (T_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ sẽ là một tập transversal tối tiểu của $\mathcal{H}$, mâu thuẫn với giả thiết y không nằm trong bất kỳ một tập transversal tối tiểu nào của $\mathcal{H}$.Như vậy, cũng tồn tại một tập độc lập tối đại $S \subseteq X$ sao cho $x \in S$.

(2) Nhận thấy rằng do việc xóa yếu một đỉnh khỏi một siêu đồ thị cho trước không làm giảm đi kích thước của một tập transversal tối tiểu nên $\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}_1)$. Mặt khác, khẳng định (1) chỉ ra rằng $\mathcal{H}$ có chứa một tập transversal tối tiểu nào đó không có chứa x. Như vậy, việc xóa yếu đỉnh x sẽ không thể làm tăng kích thước của tập transversal tối tiểu này, nên$\tau(\mathcal{H}) \geq \tau(\mathcal{H}_1)$. Như vậy, $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1)$.

(3) Do $\alpha(\mathcal{H}) + \tau(\mathcal{H}) = |X|$, $\alpha(\mathcal{H}_1) + \tau(\mathcal{H}_1) = |X| - 1$, $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1)$ nên $\alpha(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H}_1) + 1$.

(4) Do mọi cặp ghép tối đại của $\mathcal{H}$ đều là một cặp ghép trong $\mathcal{H}_1$ nên $v(\mathcal{H}) \leq v(\mathcal{H}_1)$. Mặt khác, trong siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$, không có cặp ghép nào chứa quá hai cạnh nằm trong $\mathcal{D}(x)$ (điều này suy ra từ việc x là một đỉnh pendant). Điều này chỉ ra rằng mọi cặp ghép trong $\mathcal{H}_1$ đều là một cặp ghép trong $\mathcal{H}$, nên $v(\mathcal{H}) \geq v(\mathcal{H}_1)$.

Như vậy, $v(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H}_1)$.

(5) Từ Kết quả 6.1.3), $\mathcal{H}$ là một siêu cây nếu và chỉ nếu nó là một siêu đồ thị Helly và $L(\mathcal{H})$ là một đồ thị chordal. Do x là một đỉnh pendant nên $\mathcal{H}_1$ cũng sẽ là một siêu đồ thị Helly. Hơn nữa, $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H}_1)$.

Như vậy, nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây thì $\mathcal{H}_1$ cũng sẽ là một siêu cây. □

Kết quả 6.1.9.

Nếu $x \in X$ là một đỉnh pendant trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là một siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$ thì:

(1) x nằm trong mọi tập transversal của $\mathcal{H}$;

(2) $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1) + 1$;

(3) $\alpha(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H}_1)$;

(4) $v(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H}_1) + 1$;

(5) Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây thì $\mathcal{H}_1$ cũng là một siêu cây.

Chứng minh kết quả 6.1.9.

(1) Tính đúng đắn của khẳng định này được suy ra từ định nghĩa của một transversal và sự thật rằng $\{x\} \in \mathcal{D}$.

(2) Kí hiệu $T_1 \subseteq X_1 \coloneqq X - \{x\}$ là một tập transversal của $\mathcal{H}_1$. Khi đó,$T_2 \coloneqq T_1 \cup \{x\} \subset X$ cũng là một tập transversal của $\mathcal{H}$, nên $\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}_1) + 1$. Mặt khác, nếu T là một tập transversal tối tiểu của $\mathcal{H}$ thì

$T_0 \coloneqq T - \{x\}$ cũng là một tập transversal của $\mathcal{H}_1$, nên $\tau(\mathcal{H}) \geq \tau(\mathcal{H}_1) + 1$. Như vậy, $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1) + 1$.

(3) Do $\alpha(\mathcal{H}) + \tau(\mathcal{H}) = |X|$, $\alpha(\mathcal{H}_1) + \tau(\mathcal{H}_1) = |X| - 1$, $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}_1) + 1$ nên $\alpha(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H}_1)$.

(4) Do x là một đỉnh transversal nên, với mọi cặp ghép tối đại $\mathcal{F}$ của $\mathcal{H}_1$, họ $\mathcal{F} \cup \{x\}$ cũng là một cặp ghép của $\mathcal{H}$. Điều này chỉ ra rằng $v(\mathcal{H}) \geq v(\mathcal{H}_1) + 1$. Nhận thấy rằng do việc xóa mạnh một đỉnh khỏi một siêu đồ thị cho trước không thể làm giảm kích thước của cặp ghép tối đại nhiều hơn 1 đơn vị nên $v(\mathcal{H}) - 1 \leq v(\mathcal{H}_1)$. Như vậy, $v(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H}_1) + 1$.

(5) Nhận thấy rằng mọi siêu đồ thị con cảm sinh của một siêu cây cũng là một siêu cây. Ngay cả khi $\mathcal{H}_1$ là một siêu đồ thị không liên thông, mỗi thành phần liên thông của nó cũng là một siêu cây, nên cây host tương ứng cho toàn $\mathcal{H}_1$ có thể thu được bằng cách nối tuần tự các cây host tương ứng của mỗi thành phần liên thông bằng các cạnh. □

Kết quả 6.1.10.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $|X| \geq 2$, là một siêu cây thì nó sẽ có chứa ít nhất hai đỉnh sao cho mỗi một trong số chúng sẽ là một đỉnh pendant hoặc một đỉnh transversal.

Chứng minh kết quả 6.1.10.

Do $\mathcal{H}$ là một siêu cây nên sẽ tồn tại một cây T đóng vai trò là một cây host. Cây T sẽ có ít nhất hai đỉnh pendant. Hiển nhiên, mỗi đỉnh pendant này sẽ là một đỉnh pendant hoặc một đỉnh transversal trong siêu đồ thị $\mathcal{H}$. □

Kết quả 6.1.11.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây thì nó sẽ thỏa mãn tính chất König, nghĩa là $\tau(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$.

Chứng minh kết quả 6.1.11.

Do $\mathcal{H}$ là một siêu cây nên nó sẽ có chứa ít nhất hai đỉnh sao cho mỗi một trong số chúng sẽ là một đỉnh pendant hoặc một đỉnh transversal. Như vậy, chúng ta hoàn toàn có thể phân tích $\mathcal{H}$ tuần tự bằng cách xóa yếu một đỉnh pendant hoặc xóa mạnh một đỉnh transversal. Kết quả 6.1.8) và Kết quả 6.1.9) đảm bảo rằng, sau suốt quá trình phân tích như vậy, chúng ta sẽ thu được mộtdãy các siêu cây. Hơn nữa, kích thước τ của tập transversal tối tiểu hoặc thay đổi hoặc không thay đổi đồng thời với kích thước v của cặp ghép tối đại.Tại bước cuối cùng của quá trình phân tích trên, chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị với chỉ duy nhất một đỉnh. Nếu nó là một đỉnh pendant (cô lập) thì $\tau = v = 0$; nếu nó là một đỉnh transversal thì $\tau = v = 1$. Như vậy, tại mỗi bước của quá trình phân tích trên, chúng ta sẽ luôn có đẳng thức $\tau = v$, nên $\tau(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$. □

Khẳng định trên có thể được nhìn nhận lại theo một cách khác. Nhắc lại rằng Kết quả 4.6.1) chỉ ra rằng đồ thị G là perfect nếu và chỉ nếu phần bù $\bar{G}$ của nó cũng perfect. Kết quả 4.6.2) chỉ ra rằng mọi đồ thị chordal cũng đều là một đồ thị perfect. Như vậy, với mọi đồ thị chordal, $\chi = \omega$ và $\theta = \alpha$. Chúng ta cũng biết rằng nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây thì $L(\mathcal{H})$ sẽ là một đồ thị chordal. Như vậy, $\theta\big(L(\mathcal{H})\big) = \alpha(L(\mathcal{H}))$. Do $\mathcal{H}$ cũng là một siêu đồ thị Helly nên kích thước của một tập transversal tối tiểu của $\mathcal{H}$ sẽ bằng với chỉ số phủ clique của $L(\mathcal{H})$, nghĩa là $\tau(\mathcal{H}) = \theta\big(L(\mathcal{H})\big)$. Từ định nghĩa của $L(\mathcal{H})$, kích thước của một cặp ghép tối đại của $\mathcal{H}$ sẽ bằng kích thước của một tập độc lập yếu tối đại của $L(\mathcal{H})$, nghĩa là $v(\mathcal{H}) = \alpha(L(\mathcal{H}))$.

Như vậy, $\tau(\mathcal{H}) = v(\mathcal{H})$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ đề xuất một thuật toán đơn giản để nhận dạng các siêu cây. Nó được dựa trên Kết quả 6.1.10) và phép xóa yếu các đỉnh và các cạnh.

Thuật toán nhận dạng một siêu cây

INPUT: Siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$.

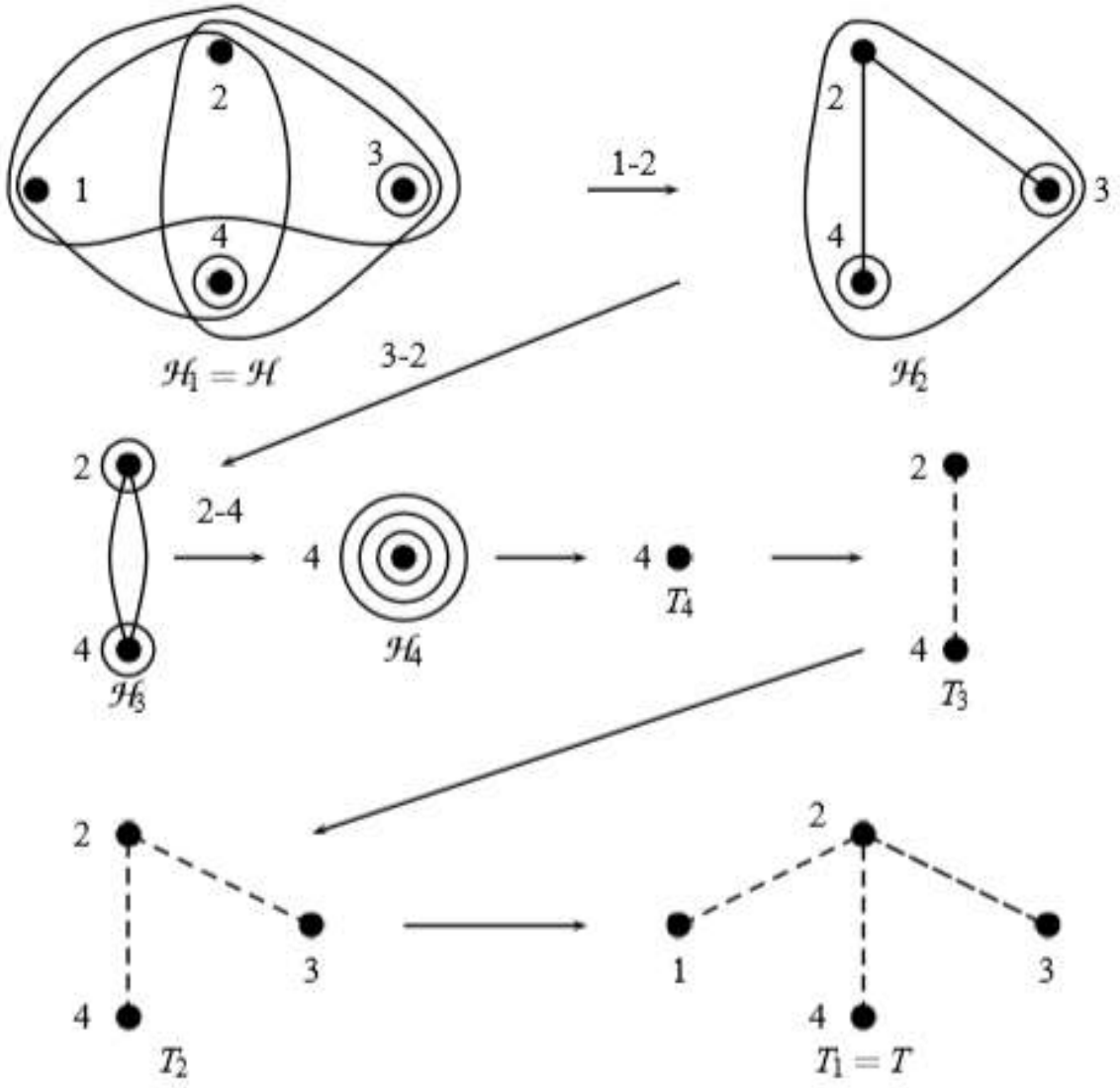
OUTPUT: Cây host T, nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây; "Không", nếu $\mathcal{H}$ không phải là một siêu cây.

1. Tìm một đỉnh pendant hoặc một đỉnh transversal (một đỉnh transversal như vậy sẽ trở thành một đỉnh pendant nếu chúng ta xóa yếu tất cả các cạnh khuyên liên thuộc với nó trong $\mathcal{H}$) trong $\mathcal{H}$. Nếu không có đỉnh nào như vậy thì xuất "KHÔNG" và kết thúc thuật toán.

2. Xóa yếu đỉnh pendant và giữ nguyên đỉnh twin của nó. Tiếp tục thực hiện bước 1) và 2) của thuật toán cho đến khi chỉ còn lại một đỉnh duy nhất.

3. Bắt đầu với đỉnh còn lại ở trên, chúng ta xây dựng cây host T bằng cách bổ sung thêm các đỉnh theo thứ tự đảo ngược; mỗi lần chúng ta bổ sung thêm một đỉnh như vậy, chúng ta sẽ nối nó với đỉnh twin của đỉnh đó.

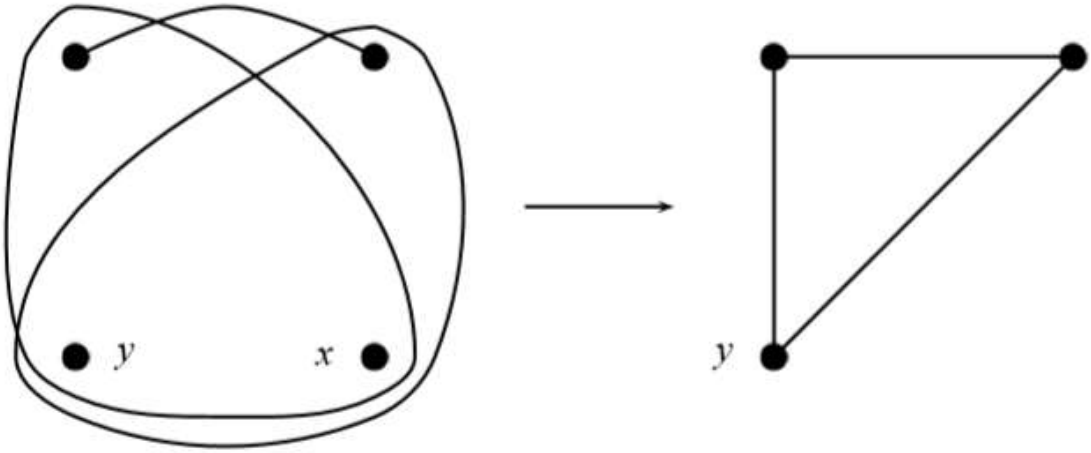
4. Xuất cây T và kết thúc thuật toán.



Hình vẽ minh họa thuật toán nhận dạng siêu cây cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Chẳng hạn, nếu chạy thuật toán nhận dạng siêu cây cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$ thì chúng ta sẽ nhận được cây host T như trên hình vẽ. Mũi tên với $1-2$ trên đó có nghĩa là đỉnh pendant 1 bị xóa yếu khỏi $\mathcal{H}$, đỉnh twin 2 của nó được giữ nguyên và kí hiệu $\mathcal{H}_2$ là siêu đồ thị nhận được. Siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$ không chứa bất kỳ đỉnh pendant nào. Tuy nhiên, đỉnh 3 sẽ trở thành một đỉnh pendant với đỉnh twin là 2 sau khi chúng ta xóa yếu cạnh khuyên $\{3\}$. Tương tự, đỉnh 2 trong $\mathcal{H}_3$ cũng sẽ trở thành một đỉnh pendant với đỉnh twin là 4 sau khi chúng ta xóa yếu cạnh khuyên $\{2\}$. Sau cùng, siêu đồ thị $\mathcal{H}_4$ chỉ còn lại một đỉnh duy nhất. Như vậy, dãy thứ tự đỉnh của chúng ta sẽ là: 1, 3, 2, 4. Tại thời điểm này của thuật toán, chúng ta sẽ tiến hành xây dựng cây host T bắt đầu bởi cây T_4. Bằng cách bổ sung thêm các đỉnh theo thứ tự đảo ngược 4, 2, 3, 1 và nối chúng với các đỉnh twin tương ứng. Cuối cùng, chúng ta sẽ thu được cây host T của $\mathcal{H}$.

Tương tự, nếu chúng ta chạy thuật toán nhận dạng siêu cây cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$ như trong hình vẽ bên dưới thì chúng ta sẽ tìm được một đỉnh pendant x với đỉnh twin y tương ứng. Sau khi xóa yếu đỉnh x khỏi siêu đồ thị, chúng ta sẽ thu được một đồ thị tam giác không có chứa bất kỳ một đỉnh pendant hay đỉnh transversal nào. Khi đó, thuật toán nhận dạng siêu cây kết thúc và chúng ta nhận được câu trả lời "KHÔNG".



Hình vẽ minh họa thuật toán nhận dạng siêu cây cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Một điều thú vị đáng lưu ý ở đây đó là đầu ra của thuật toán nhận dạng siêu cây hoàn toàn không phụ thuộc vào thứ tự xóa của các đỉnh và các cạnh. Một điểm lưu ý quan trọng khác ở đây đó là, trong ma trận lien thuộc của một siêu đồ thị, một đỉnh pendant có thể nhận được bằng cách sau: hàng tương ứng với đỉnh pendant này có chứa 1 trong cùng các cột như hàng tương ứng với đỉnh twin.

Thuật toán xác định tập transversal tối tiểu (cặp ghép tối đại) cho một siêu cây

INPUT: Siêu cây $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$.

OUTPUT: Tập transversal tối tiểu $T \subseteq X$ và cặp ghép tối đại $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.

1. Đặt $T \coloneqq \emptyset$, $\mathcal{F} \coloneqq \emptyset$.

2. Tìm một đỉnh pendant hoặc một đỉnh transversal.

3. Nếu đỉnh tìm được là một đỉnh pendant thì xóa yếu đỉnh này khỏi $\mathcal{H}$.

4. Nếu đỉnh tìm được là một đỉnh transversal thì bổ sung thêm đỉnh này vào T, bổ sung thêm cạnh khuyên liên thuộc với đỉnh này vào $\mathcal{F}$, và xóa mạnh đỉnh này khỏi $\mathcal{H}$.

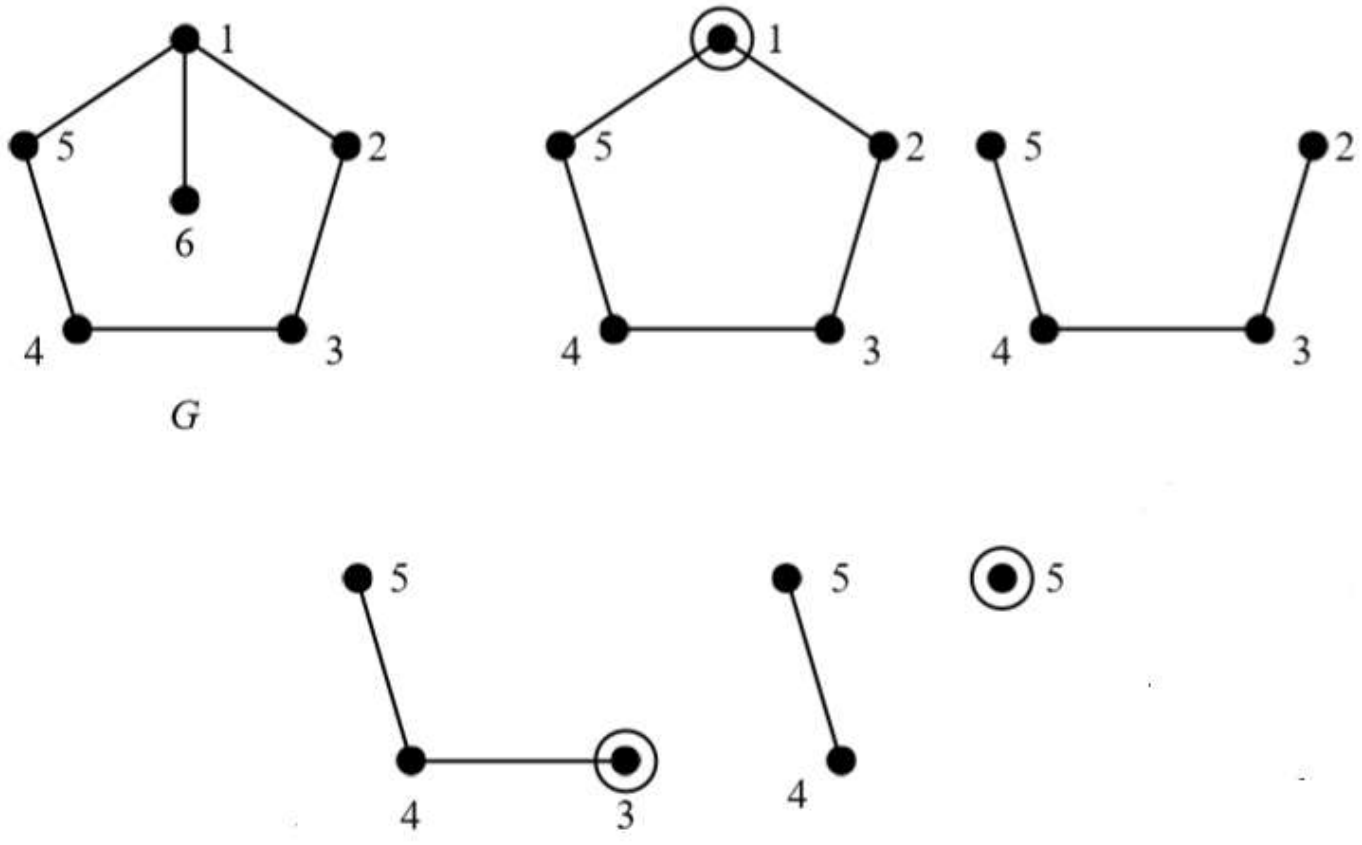
5. Lặp lại các bước từ 2 đến 4 nhiều lần nhất có thể.

6. Xuất $T, \mathcal{F}$ và kết thúc thuật toán.

Cơ sở lý thuyết của thuật toán nêu trên được dựa trên Kết quả 6.1.8) và Kết quả 6.1.9). Trong thực tế khi vận hành thuật toán, chúng ta sẽ cần theo dõi tất cả các sự thay đổi diễn ra trong các cạnh; bao gồm cả những cạnh khuyên nằm trong các cặp ghép tối đại thực sự (những cạnh ban đầu mà từ đó cạnh khuyên được tạo ra bằng tất cả các phép xóa trước đó). Tuy nhiên, một điểm đáng chú ý của thuật toán trên là nó vẫn hoạt động cho các lớp siêu đồ thị tổng quát hơn nhiều so với các siêu cây. Một cách giải thích đơn giản cho hiện tượng này nằm ở việc phép xóa mạnh các đỉnh có thể làm thay đổi các đặc điểm cấu trúc của một siêu đồ thị theo hướng mà nó trở nên giống với các siêu cây hơn chứ không phải là một siêu cây ngay từ lúc ban đầu.

Một ví dụ đơn giản cho nhận định này có thể được minh họa trong hình vẽ bên dưới đây. Mặc dù, G không phải là một siêu cây nhưng nó vẫn có chứa một đỉnh pendant là 6. Việc xóa yếu đỉnh 6 sẽ biến đỉnh 1 trở thành một đỉnh transversal. Việc xóa mạnh đỉnh 1 sẽ tạo ra một đồ thị với hai đỉnh pendant là 2 và 5. Việc xóa yếu đỉnh 2 sẽ làm cho đỉnh 3 trở thành một đỉnh transversal. Việc xóa mạnh đỉnh 3 sẽ làm cho đỉnh 4 trở thành một đỉnh transversal. Việc xóa yếu đỉnh 4 sẽ làm cho đỉnh 5 trở thành một đỉnh transversal. Kết thúc thuật toán, chúng ta tìm được tập transversal tối tiểu $T = \{1,3,5\}$ và cặp ghép tối đại $\mathcal{F} = \{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\}$.

Như vậy, $\tau(G) = \upsilon(G)$.



Hình vẽ minh họa thuật toán xác định tập transversal tối tiểu (cặp ghép tối đại) cho đồ thị G.

Chỉ số chu trình của một siêu đồ thị

Nhận thấy rằng các chu trình đóng một vai trò quan trọng trong một đồ thị (một siêu đồ thị). Chúng chính là nguyên nhân chính gây ra sự phức tạp cho các bài toán tối ưu hóa gặp trong thực tế. Như vậy, một vấn đề quan trọng mà chúng ta cần phải giải quyết đó là: "Có bao nhiêu chu trình nằm trong một đồ thị hoặc một siêu đồ thị cho trước? Các chu trình được cấu trúc (nghĩa là chúng có thêm những tính chất bổ sung) như thế nào?". Nhắc lại rằng, với mọi đồ thị đơn liên thông G, chỉ số chu trình $\Lambda(G)$ của G sẽ được tính bởi công thức $\Lambda(G) = m(G) - n(G) + 1$. Công thức tương tự cũng đúng cho các đa đồ thị: nếu chúng ta bổ sung thêm vào G một số cạnh khuyên hoặc cạnh bội nào đó thì mỗi lần thực hiện bổ sung như vậy sẽ tạo ra thêm duy nhất một chu trình trong cây khung cho trước và làm tăng số các cạnh $m = m(G)$. Mọi cạnh bổ sung thêm như vậy (thậm chí cả các cạnh khuyên) đều có thể coi như một "dây cung" của cây khung. Theo cách nhìn nhận này, chỉ số chu trình sẽ đóng vai trò như một thước đo để đánh giá "khoảng cách" giữa đa đồ thị so với cây.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra rằng chỉ số chu trình Λ có thể được tổng quát quá lên cho các siêu đồ thị:

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một đa đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là một ***đa đồ thị bậc hai tổng quát của $\mathcal{H}$***, kí hiệu bởi $[\mathcal{H}]_2$, nếu nó có thể nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách như sau:

1. Bổ sung thêm vào E tất cả các cạnh khuyên và các cạnh có kích thước bằng 2 của $\mathcal{H}$;

2. Thay thế tất cả các cạnh có kích thước ≥ 3 của $\mathcal{H}$ bởi một đồ thị đầy đủ xác định trên cùng tập đỉnh đó và bổ sung thêm vào E tất cả các cạnh của đồ thị đầy đủ này.

Như vậy, $(\mathcal{H})_2 = [\mathcal{H}]_2$ nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị đơn. Chúng ta sẽ gọi mọi đa đồ thị không có chứa chu trình nào với độ dài ≥ 3 là một ***đa rừng***. ***Trọng lượng của một đa rừng T***, kí hiệu bởi $w(T)$, được định nghĩa là số cạnh có kích thước bằng 2 chứa trong T; các cạnh khuyên được xem như có trọng lượng bằng 0. Nếu T là một đa rừng thì kí hiệu $\overline{T}$ là rừng thu được từ T bằng cách xóa yếu tất cả các cạnh khuyên và thay thế các cạnh bội bởi một cạnh duy nhất nối giữa hai đỉnh đó. Như vậy, $\overline{T} = (T)_2$. Một đỉnh x sẽ được gọi là ***pendant*** trong đa rừng T nếu nó là một đỉnh pendant trong $\overline{T}$.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và $T = (X, E)$ là một đa rừng khung của đa đồ thị $[\mathcal{H}]_2$. Để thuận tiện cho việc trình bày, trong suốt phần này của bài viết, chúng ta sẽ gọi mọi đa rừng khung như vậy là một "rừng".

Kết quả 6.1.12.

Với mọi rừng T của đa đồ thị $[\mathcal{H}]_2$, $w(T) \leq \sum_{D \in \mathcal{D}}(|D| - 1)$.

Chứng minh kết quả 6.1.12.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ việc mọi cạnh khuyên $D \in \mathcal{D}$ chỉ có thể đóng góp cho rừng T tối đa không quá $|D| - 1$ cạnh có kích thước bằng 2 (điều này suy ra trực tiếp từ cách định nghĩa của một rừng T). □

Nhận thấy rằng mọi cạnh khuyên chứa trong một siêu đồ thị (hoặc một đa đồ thị) cho trước đều có thể được coi như một chu trình với độ dài bằng 1 (nhắc lại rằng chúng ta luôn giả định rằng các siêu đồ thị đang khảo sát không có chứa các cạnh rỗng). Kí hiệu $l(\mathcal{H}, T)$ là số cạnh khuyên của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ không nằm trong rừng T. Nhắc lại rằng, chúng ta có thể coi các cạnh khuyên này như các "dây cung" của rừng T.

Chỉ số chu trình tổng quát $\Lambda(\mathcal{H},T)$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ ứng với rừng T được xác định bởi công thức

$$\Lambda(\mathcal{H},T)=\sum_{D\in\mathcal{D}}(|D|-1)-w(T)+l(\mathcal{H},T).$$

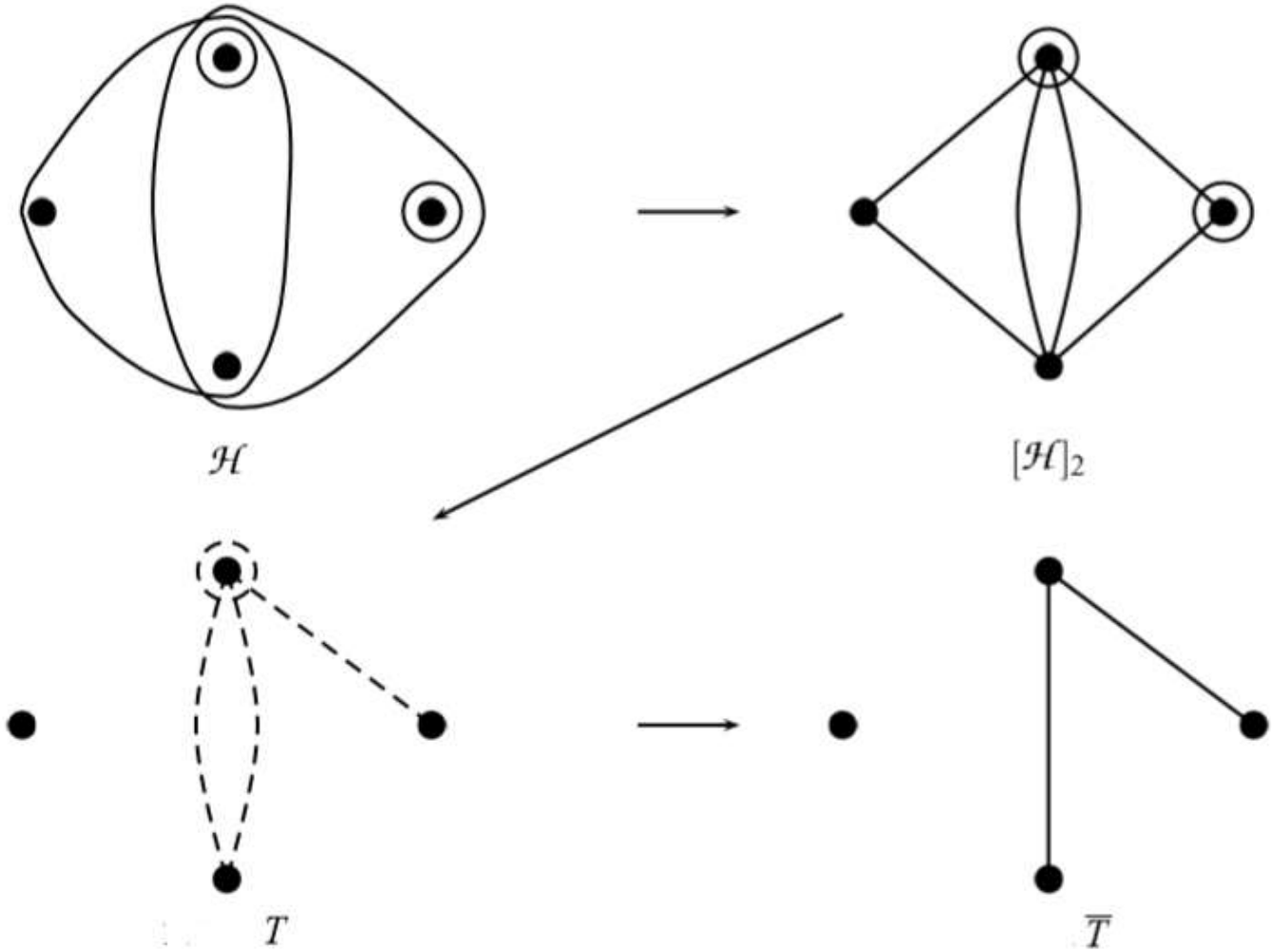
Giả sử cho trước một siêu đồ thị liên thông $\mathcal{H}$ (có thể chứa cạnh khuyên và cạnh bội). Khi đó, $[\mathcal{H}]_2=\mathcal{H}$.

Nếu chúng ta thay thế một cây khung T bất kỳ nào đó (hiển nhiên cây T này không có chứa cạnh khuyên hay cạnh bội nào) cho rừng T trong định nghĩa trên thì $w(T)=|X|-1=n-1$. Do tất cả các cạnh khuyên của $\mathcal{H}$ đều có đóng góp vào $l(\mathcal{H},T)$, nên

$$\Lambda(\mathcal{H},T)=\sum_{|D|=2}(|D|-1)-w(T)+l(\mathcal{H},T)=|D|-(|X|-1)=m-n+1.$$

Điều này chỉ ra rằng $\Lambda(\mathcal{H},T)$ chính là dạng tổng quát của chỉ số chu trình $\Lambda(G,T)$ của một đa đồ thị G cho các siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và rừng T tương ứng như trong hình vẽ bên dưới.



Nhận thấy rằng do rừng T có chứa ba cạnh có kích thước bằng 2, một đỉnh cô lập và chỉ một trong hai cạnh khuyên của $\mathcal{H}$ nên $w(T)=3$.

Như vậy, $\Lambda(\mathcal{H},T)=\sum_{|D|=2}(|D|-1)-w(T)+l(\mathcal{H},T)=2+2+0+0-3+1=2$.

Từ cách định nghĩa của đa đồ thị bậc hai tổng quát $[\mathcal{H}]_2$, chúng ta nhận thấy rằng, với mọi rừng $T = (X, E)$ cho trước, tập các cạnh của một đồ thị đầy đủ tạo ra bởi một cạnh D sẽ được chia thành hai tập con: một tập hợp các cạnh nằm trong T và một tập hợp các cạnh không nằm trong T.

Hiển nhiên, nếu có $|D| - 1$ cạnh có kích thước bằng 2 nằm trong T (giá trị lớn nhất có thể có) thì các đồ thị con mà chúng tạo ra trên T đều là các đồ thị liên thông. Nếu có ít hơn $|D| - 1$ cạnh có kích thước bằng 2 nằm trong T thì những cạnh đó sẽ tạo ra một đồ thị con không liên thông. Kí hiệu E_D là tập các cạnh có kích thước bằng 2 được tạo ra bởi đồ thị bậc hai của D và nằm trong T; và $c(T, D)$ là số thành phần liên thông nằm trong một đồ thị con như vậy.

Kết quả 6.1.13.

$$\Lambda(\mathcal{H}, T) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (c(T, D) - 1) + l(\mathcal{H}, T).$$

Chứng minh kết quả 6.1.13.

Đầu tiên, chúng ta nhận thấy rằng, với mọi cạnh D sao cho $|D| \geq 2$, $c(T, D) = |D| - |E_D|$.

Kế tiếp, từ cách định nghĩa của chúng ta, $w(T) = \sum_{|D| \geq 2} |E_D|$.

Hiển nhiên, với mọi cạnh khuyên D, $c(T, D) = 1$, nên

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathcal{H}, T) &= \sum_{D \in \mathcal{D}} (|D| - 1) - w(T) + l(\mathcal{H}, T) \\
&=_{\text{loại bỏ các đỉnh khuyên}} \sum_{|D| \geq 2} (|D| - 1) - w(T) + l(\mathcal{H}, T) \\
&= \sum_{|D| \geq 2} (|D| - 1) - \sum_{|D| \geq 2} |E_D| + l(\mathcal{H}, T) \\
&= \sum_{|D| \geq 2} (|D| - |E_D| - 1) + l(\mathcal{H}, T) \\
&=_{c(T,D) = |D| - |E_D|} \sum_{|D| \geq 2} (c(T, D) - 1) + l(\mathcal{H}, T) \\
&=_{c(T,D) = 1, \text{với mọi cạnh khuyên } D} \sum_{D \in \mathcal{D}} (c(T, D) - 1) + l(\mathcal{H}, T).
\end{aligned}$$

□

Kết quả 6.1.14.

Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và mọi rừng T của $\mathcal{H}$, $\Lambda(\mathcal{H}, T) \geq 0$.

Chứng minh kết quả 6.1.14.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ Kết quả 6.1.12) và $l(\mathcal{H}, T) \geq 0$. □

Kết quả 6.1.15. (Acharya – Las Vergnas)

Một siêu đồ thị liên thông $\mathcal{H}$ sẽ có $\Lambda(\mathcal{H}, T) = 0$ nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây và T là một đa cây với trọng lượng lớn nhất và có chứa tất cả các cạnh khuyên của $\mathcal{H}$.

Chứng minh kết quả 6.1.15.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị liên thông $\mathcal{H}$ với $\Lambda(\mathcal{H}, T) = 0$. Từ Kết quả 6.1.13), $c(T, D) = 1$, với mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$, và $l(\mathcal{H}, T) = 0$. Điều này chỉ ra rằng đồ thị bậc hai của mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều tạo ra một đồ

thị con liên thông trong T và tất cả các cạnh khuyên của $\mathcal{H}$ đều nằm trong T. Nói cách khác, do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị liên thông nên sẽ có một cây $\overline{T}$ sao cho mọi cạnh của $\mathcal{H}$ đều tạo ra một cây con của $\overline{T}$ (cây $\overline{T}$ có thể nhận được từ T bằng cách thay các cạnh bội bởi các cạnh khuyên và xóa các cạnh khuyên). Như vậy, $\overline{T}$ là một cây host, nên $\mathcal{H}$ là một siêu cây. Hơn nữa, do $c(T, D) = 1$, với mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$, nên đánh giá nêu trong Kết quả 6.1.12) sẽ trở thành một đẳng thức, nghĩa là $w(T) = \sum_{D\in\mathcal{D}}(|D| - 1)$. Điều này chỉ ra rằng T là một đa cây với trọng lượng lớn nhất.

($\Leftarrow$) Hiển nhiên, $l(\mathcal{H}, T) = 0$. Do T là một đa cây với trọng lượng lớn nhất nên $w(T) = \sum_{D\in\mathcal{D}}(|D| - 1)$ (Kết quả 6.1.12). Như vậy, $\Lambda(\mathcal{H}, T) = 0$. □

Kết quả 6.1.16. (Voloshin)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $x \in X$ là một đỉnh pendant của $\mathcal{H}$ sao cho $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{D}(y)$ với một đỉnh $y \in X$ nào đó, T là một rừng con của $[\mathcal{H}]_2$.

Khi đó, tồn tại một rừng con T_1 của $[\mathcal{H}]_2$ sao cho:

1. x liên hợp với y trong rừng con T_1 và x cũng là một đỉnh pendant trong $\overline{T_1}$.

2. $w(T_1) = w(T)$.

Kết quả 6.1.17. (Voloshin)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $x \in X$, T là một rừng của $[\mathcal{H}]_2$, $\mathcal{D}_T(x)$ là tập các cạnh của T có chứa đỉnh x, và m_2 là số các cạnh có kích thước bằng 2 nằm trong $\mathcal{H}$ nhưng không nằm trong T.

Kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$, T_1 là một rừng con của T nhận được từ T bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi T.

Khi đó, $\Lambda(\mathcal{H}, T) = \Lambda(\mathcal{H}_1, T_1) + |\mathcal{D}(x)| - |\mathcal{D}_T(x)| - m_2$.

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị $\mathcal{H}$, đỉnh x và rừng T tương ứng như trong hình vẽ bên dưới.

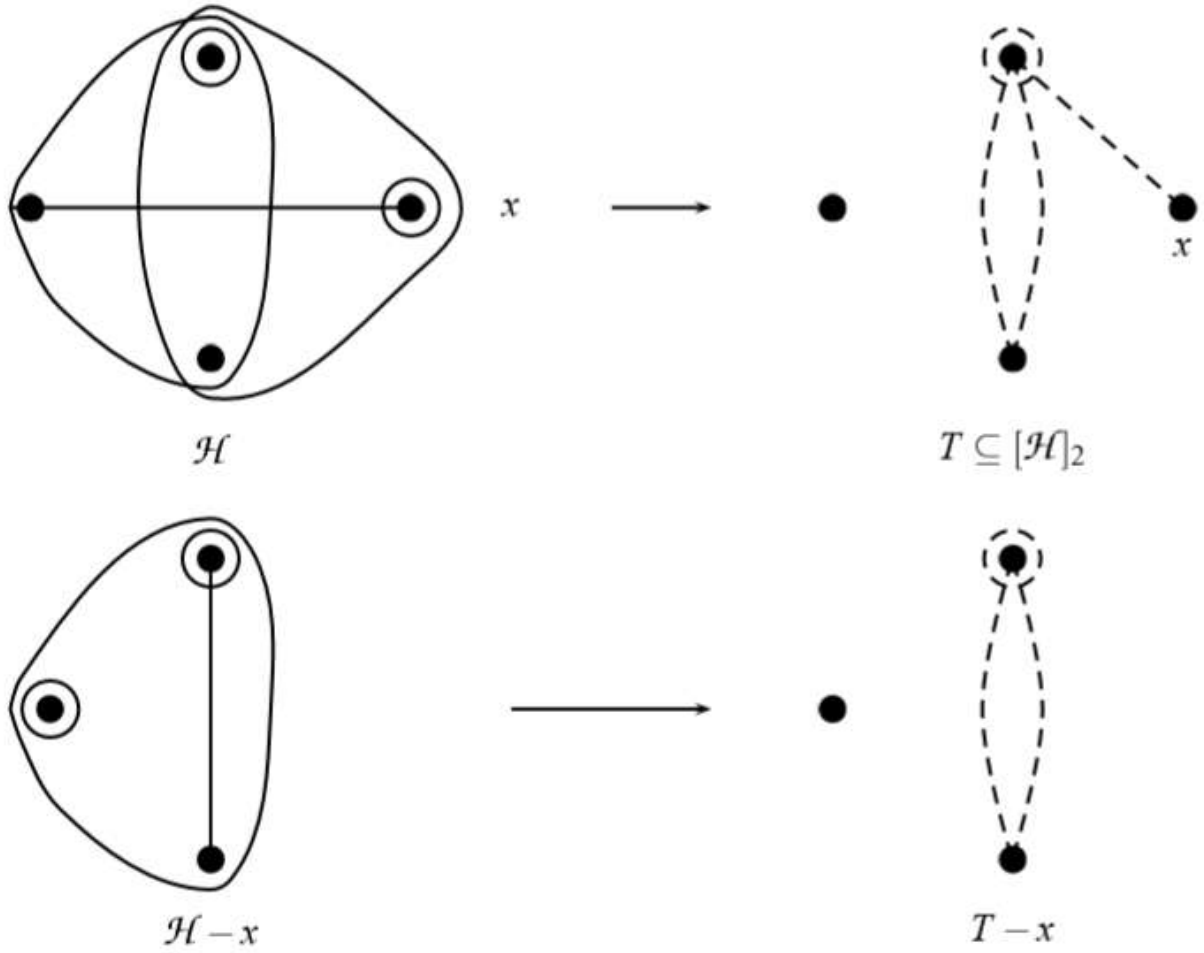
Từ cách định nghĩa của $\Lambda(\mathcal{H}, T)$, $\Lambda(\mathcal{H}, T) = 2 + 2 + 1 + 0 + 0 - 3 + 1 = 3$.

Nếu chúng ta xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$ và xóa mạnh đỉnh x khỏi T thì chúng ta sẽ nhận được tương ứng là siêu $\mathcal{H} - x$ và rừng $T - x$.

Một lần nữa, từ cách định nghĩa của $\Lambda(\mathcal{H} - x, T - x)$, $\Lambda(\mathcal{H} - x, T - x) = 2 + 1 + 0 + 0 - 2 + 1 = 2$.

Nhận thấy rằng $|\mathcal{D}(x)| = 3$, $|\mathcal{D}_T(x)| = 1$, $m_2 = 1$, nên

$$\Lambda(\mathcal{H}, T) = 3 = 2 + 3 - 1 - 1 = \Lambda(\mathcal{H}_1, T_1) + |\mathcal{D}(x)| - |\mathcal{D}_T(x)| - m_2.$$



Hình vẽ minh họa.

Kết quả 6.1.18.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $x \in X$, T là một rừng của $[\mathcal{H}]_2$, $\mathcal{D}_T(x)$ là tập các cạnh của T có chứa đỉnh x, và m_2 là số các cạnh có kích thước bằng 2 nằm trong $\mathcal{H}$ nhưng không nằm trong T.

Kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$, T_1 là một rừng con của T nhận được từ T bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi T.

Khi đó, $\Lambda(\mathcal{H}, T) = \Lambda(\mathcal{H}_1, T_1)$ nếu và chỉ nếu $|\mathcal{D}(x)| = |\mathcal{D}_T(x)| + m_2$.

Kết quả 6.1.19.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, T là một rừng của $[\mathcal{H}]_2$ với trọng lượng lớn nhất, $x \in X$ là một đỉnh pendant và liên hợp với y trong $\overline{T}$.

Kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$, T_1 là rừng nhận được từ T bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi T.

Khi đó, T_1 là một rừng với trọng lượng lớn nhất nằm trong $[\mathcal{H}_1]_2$ và $w(T_1) = w(T) - |\mathcal{D}_T(x)|$.

Chứng minh kết quả 6.1.19.

Giả sử tồn tại một rừng khung T_1' khác với trọng lượng lớn nhất nằm trong $[\mathcal{H}_1]_2$.

Hiển nhiên, $w(T_1') \geq w(T_1)$. Nếu T_1 không phải là một rừng với trọng lượng lớn nhất nằm trong $[\mathcal{H}_1]_2$ thì $w(T_1') \geq w(T_1) + 1$. Xét rừng con T_1' trong $[\mathcal{H}]_2$. Để biến T_1' thành một rừng khung của $[\mathcal{H}]_2$, chúng ta sẽ bổ sung thêm đỉnh x vào T_1' và nối nó với đỉnh y bằng $|\mathcal{D}_T(x)|$ cạnh. Kí hiệu T' là rừng thu được.

Khi đó, $w(T') = w(T_1') + |\mathcal{D}_T(x)| \geq w(T_1) + 1 + |\mathcal{D}_T(x)| = w(T) + 1$, mâu thuẫn với giả thiết về tính tối đại của T. Như vậy, $w(T_1') = w(T_1)$. □

Nhận thấy rằng giá trị của chỉ số chu trình tổng quát $\Lambda(\mathcal{H}, T)$ sẽ phụ thuộc vào trọng lượng $w(T)$ của rừng T và rừng T có thể được chọn theo nhiều cách khác nhau từ đa đồ thị $[\mathcal{H}]_2$. Một vấn đề đặt ra cho chúng ta đó là: "Làm thế nào để chúng ta có thể thoát khỏi sự phụ thuộc đó ?". Câu trả lời cho vấn đề này đã được gợi ý trong Kết quả 6.1.15): chúng ta chỉ cần xem xét các rừng với trọng lượng lớn nhất và có chứa tất cả các cạnh khuyên của $\mathcal{H}$.

Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$, kí hiệu $w(\mathcal{H}) = max_T w(T)$.

Chỉ số chu trình của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được xác định bởi công thức

$$\Lambda(\mathcal{H}) = min_T \Lambda(\mathcal{H}, T) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (|D| - 1) - w(\mathcal{H}).$$

Kết quả 6.1.20.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $x \in X$ là một đỉnh pendant của $\mathcal{H}$.

Kí hiệu $\mathcal{H}_1$ là siêu đồ thị nhận được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$.

Khi đó, $\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(\mathcal{H}_1)$.

Chứng minh kết quả 6.1.20.

Giả sử $y \in X$ là đỉnh twin của x. Từ Kết quả 6.1.16), tồn tại một rừng con T của $[\mathcal{H}]_2$ với trọng lượng lớn nhất sao cho x là một đỉnh pendant và x liên hợp với y trong $\bar{T}$. Nếu x có liên thuộc với các cạnh có kích thước bằng 2 nào đó nằm trong $\mathcal{H}$ thì tất cả các cạnh như vậy đều sẽ nối x với y (điều này suy ra từ việc x là một đỉnh pendant). Do T là một rừng với trọng số lớn nhất nên tất cả các cạnh này đều phải nằm trong T.

Bằng cách áp dụng Kết quả 6.1.17) (hoặc Kết quả 6.1.18): $m_2 = 0$ và $|\mathcal{D}(x)| = |\mathcal{D}_T(x)|$,

$$\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(\mathcal{H}, T) = \Lambda(\mathcal{H}_1, T_1).$$

Từ Kết quả 6.1.19), T_1 là một rừng với trọng lượng lớn nhất nằm trong $[\mathcal{H}_1]_2$, nên $\Lambda(\mathcal{H}_1, T_1) = \Lambda(\mathcal{H}_1)$.

Như vậy, $\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(\mathcal{H}_1)$. □

Kết quả 6.1.21.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương nhau:

(1) $\mathcal{H}$ có thể phân tích bằng cách xóa yếu liên tiếp các đỉnh pendant và các cạnh khuyên khỏi $\mathcal{H}$;

(2) $\Lambda(\mathcal{H}) = 0$;

(3) $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị.

Chứng minh kết quả 6.1.21.

$(1) \Rightarrow (2)$ Tính đúng đắn của khẳng định này suy ra từ Kết quả 6.1.20) và hiển nhiên rằng các cạnh khuyên không đóng góp gì nhiều vào $\Lambda(\mathcal{H})$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Tính đúng đắn của khẳng định này suy ra từ Kết quả 6.1.15).

$(3) \Rightarrow (1)$ Tính đúng đắn của khẳng định này suy ra từ Kết quả 6.1.8). □

Sau cùng, chúng ta sẽ trình bày một thuật toán đơn giản để xác định giá trị của chỉ số chu trình $\Lambda(\mathcal{H})$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ cho trước.

Thuật toán xác định giá trị của chỉ số chu trình $\Lambda(\mathcal{H})$

INPUT: Siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$.

OUTPUT: Giá trị của chỉ số chu trình $\Lambda(\mathcal{H})$.

1. Xây dựng đa đồ thị bậc hai $[\mathcal{H}]_2$.

2. Trong đa đồ thị bậc hai $[\mathcal{H}]_2$, xóa tất cả các cạnh khuyên và thay thế các cạnh bội bởi các cạnh khuyên có trọng số bằng bội số. Chúng ta thu được một trọng đồ G.

3. Trong trọng đồ G, xác định một cây khung T với trọng lượng lớn nhất, nghĩa là $w(T) = w(\mathcal{H})$.

4. Tính giá trị $\Lambda(\mathcal{H}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (|D| - 1) - w(\mathcal{H})$.

5. Xuất giá trị $\Lambda(\mathcal{H})$ và kết thúc thuật toán.

Bước 3) của thuật toán trên có thể được thực hiện bằng thuật toán Kruskal (Kết quả 2.1.7) đã nêu trong mục "**Cây khung tối tiểu**".

6.2. Một số dạng siêu đồ thị tổng quát của đồ thị lưỡng phân

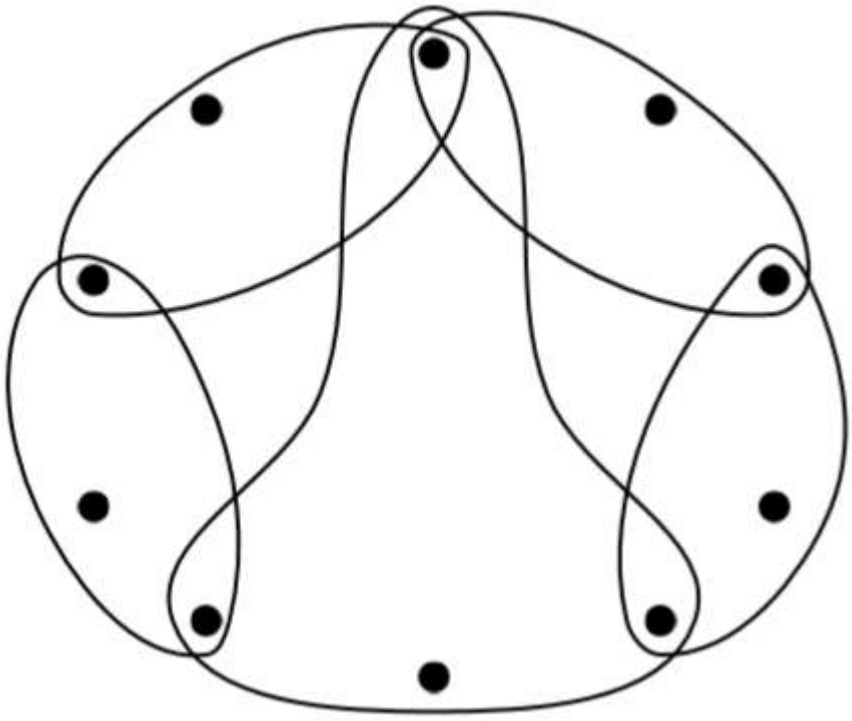
Trong thực tế, một số lớp siêu đồ thị có đặc tính cấu trúc rất đẹp. Phần lớn chúng đều được giới thiệu dưới dạng là một dạng tổng quát của các đồ thị lưỡng phân. Như vậy, chúng sẽ có liên quan ít hay nhiều đến các phép tô màu của một siêu đồ thị. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ xem xét một số lớp siêu đồ thị trong số chúng còn các phép tô màu của một siêu đồ thị sẽ được thảo luận trong ‘‘***Chủ đề 08. Phép tô màu siêu đồ thị***”.

Siêu đồ thị cân bằng

Nhắc lại rằng, trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, một dãy thay phiên $\mu = x_0 D_0 x_1 D_1 x_2 \dots x_{t-1} D_{t-1} x_t$ gồm các đỉnh phân biệt $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ và các cạnh phân biệt $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{t-1}$ sao cho $x_i, x_{i+1} \in D_i$ $(i = 0,1, \dots, t-1)$ được gọi là một ***chu trình*** nếu $x_t = x_0$. Gía trị của chỉ số t sẽ được gọi là chiều dài của chu trình. Một chu trình được gọi là ***chu trình chẵn/hoặc chu trình lẻ*** nếu chiều dài của chu trình đó tương ứng là một số chẵn /hoặc một số lẻ. Như chúng ta có thể nhận thấy, trong cùng một chu trình, các đỉnh và các cạnh có vai trò như nhau: mọi cạnh của chu trình đều có chứa hai đỉnh liên tiếp của chu trình, và mọi đỉnh của chu trình đều nằm trong hai cạnh liên tiếp của chu trình. Tính chất này được sử dụng rất rộng nhiều trong các vấn đề liên quan đến tính đối ngẫu của các siêu đồ thị.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là ***cân bằng*** nếu mọi chu trình lẻ với chiều dài ≥ 3 đều có chứa một cạnh có chứa ba đỉnh của chu trình; một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là ***cân bằng hoàn toàn*** nếu mọi chu trình với chiều dài ≥ 3 đều có chứa một cạnh có chứa ba đỉnh của chu trình.

Một chu trình được gọi là ***cân bằng*** nếu nó có chứa một cạnh có chứa ba đỉnh của chu trình này. Hiển nhiên, mọi siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn đều là một siêu đồ thị cân bằng.



Hình vẽ minh họa một chu trình cân bằng.

Nhận thấy rằng do các chu trình đóng vai trò như một siêu đồ thị con từng phần (có thể có các đỉnh cô lập) nên mọi siêu đồ thị con từng phần của một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn) cũng là một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn).

Kết quả 6.2.1.

Đối ngẫu của một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn) cũng là một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn).

Chứng minh kết quả 6.2.1.

Nhận thấy rằng nếu một cạnh của chu trình có chứa ba đỉnh của chu trình đó thì sẽ có một đỉnh được chứa trong ba cạnh của chu trình này. Qua phép lấy đối ngẫu, các chu trình cũng sẽ trở thành các chu trình mới có cùng độ dài. Như vậy, chúng ta dễ dàng suy ra rằng đối ngẫu của một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn) cũng là một siêu đồ thị cân bằng (hoàn toàn). □

Kết quả 6.2.2. (Berge)

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là cân bằng khi và chỉ khi mọi siêu đồ thị con $\mathcal{H}'$ thu được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu đỉnh các đỉnh đều là $2-$ colourable.

Kết quả 6.2.3. (Berge – Las Vergnas)

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là cân bằng khi và chỉ khi mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ đều thỏa mãn tính chất König.

Nhận thấy rằng do mọi siêu đồ thị cân bằng đều bất biến đối với phép lấy đối ngẫu nên hiển nhiên chúng cũng sẽ có tính chất König.

Kết quả 6.2.4. (Berge)

Mọi siêu đồ thị cân bằng đều thỏa mãn tính chất Helly và tính chất conformal.

Chứng minh kết quả 6.2.4.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị cân bằng $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ là một họ giao nhau nào đó chứa trong $\mathcal{H}$.

Từ Kết quả 6.2.3), $\tau(\mathcal{H}') = v(\mathcal{H}')$. Tuy nhiên, $v(\mathcal{H}') = 1$ (điều này suy ra từ việc mọi cặp ghép chỉ có chứa tối đa một cạnh từ mọi họ giao nhau). Như vậy, $\tau(\mathcal{H}') = 1$, nghĩa là tồn tại một đỉnh chung cho tất cả các cạnh của $\mathcal{H}'$. Điều này chỉ ra rằng $\mathcal{H}'$ là một star. Do đó, $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị Helly. Do đối ngẫu của một siêu đồ thị cân bằng cũng là một siêu đồ thị cân bằng nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\mathcal{H}$ cũng thỏa mãn tính chất conformal. □

Kết quả 6.2.5.

Mọi siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn đều là một siêu cây.

Chứng minh kết quả 6.2.5.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn $\mathcal{H}$. Do mọi chu trình với chiều dài ≥ 3 đều có chứa một cạnh liên thuộc với ba đỉnh nào đó của chu trình đó nên đồ thị tuyến tính $L(G)$ của nó sẽ là một đồ thị chordal. Do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng nên nó cũng sẽ là một siêu đồ thị Helly (Kết quả 6.2.4). Từ Kết quả 6.1.4), $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu cây. □

Kết quả 6.2.6.

Mọi siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn đều là một siêu đồ thị chordal conformal.

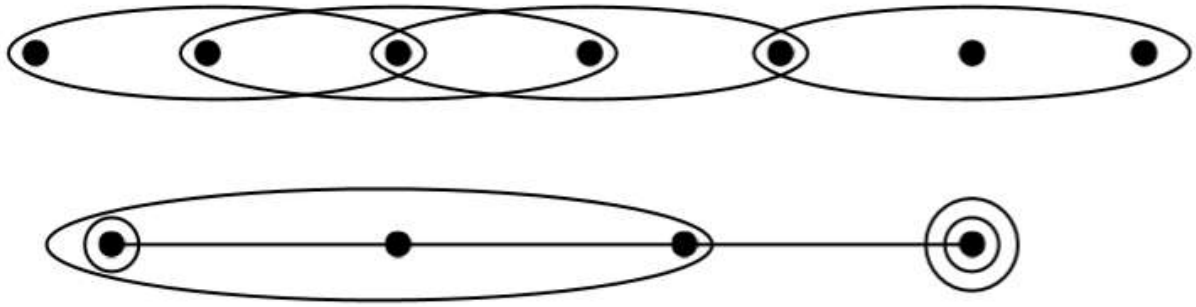
Chứng minh kết quả 6.2.6.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn $\mathcal{H}$. Do mọi chu trình với chiều dài ≥ 3 đều có chứa một cạnh liên thuộc với ba đỉnh nào đó của chu trình đó nên đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ của nó sẽ là một đồ thị chordal và $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị chordal. Do $\mathcal{H}$ là cân bằng nên nó cũng sẽ là một siêu đồ thị conformal.

Như vậy, $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu đồ thị chordal conformal. □

Siêu đồ thị interval

Một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ sẽ được gọi là một ***siêu đồ thị interval*** nếu tồn tại một dãy sắp thứ tự tuyến tính $x_1, x_2, \dots, x_n$ của các đỉnh sao cho mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều tạo ra một khoảng nằm trong dãy sắp thứ tự tuyến tính này. Nói cách khác, các đỉnh của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ có thể được đặt trên đường thẳng thực sao cho mọi cạnh của $\mathcal{H}$ đều có thể xem là một khoảng của đường thẳng thực này.



Hình vẽ minh họa các siêu đồ thị interval.

Kết quả 6.2.7.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị interval thì $\mathcal{H}$ sẽ là một siêu đồ thị Helly và đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H})$ cũng là một đồ thị chordal.

Chứng minh kết quả 6.2.7.

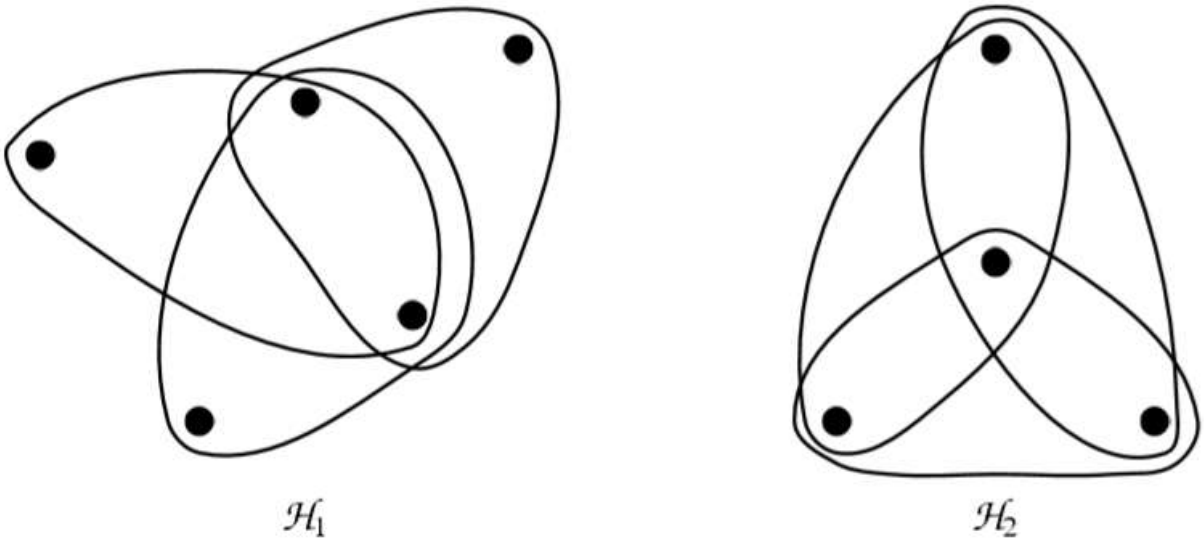
Nhận thấy rằng mọi siêu đồ thị interval đều là một siêu cây với cây host là một đường đi. Tính đúng đắn của khẳng định trên suy ra từ Kết quả 6.1.4). □

Kết quả 6.2.8.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị interval không có chứa các cạnh bao hàm nhau thì đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ của nó cũng sẽ là một siêu đồ thị interval.

Chứng minh kết quả 6.2.8.

Giả sử các đỉnh của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ có thể được đặt trên đường thẳng thực sao cho mọi cạnh của $\mathcal{H}$ đều là một khoảng của đường thẳng này. Đánh số thứ tự các cạnh của $\mathcal{H}$ bằng với số thứ tự của đỉnh bên trái của mỗi cạnh. Do $\mathcal{H}$ không có chứa cạnh bao hàm nhau nào nên mọi đỉnh của $\mathcal{H}$ sẽ là đỉnh bên trái của tối đa một cạnh nào đó. Như vậy, chúng ta đã xác định được duy nhất một dãy sắp thứ tự tuyến tính của các cạnh. Nhận thấy rằng, với mỗi đỉnh của siêu đồ thị $\mathcal{H}$, tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh này đều xuất hiện đúng theo thứ tự nêu trong dãy sắp thứ tự này. Điều này chỉ ra rằng siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ của nó cũng sẽ là một siêu đồ thị interval. □



Hình ảnh minh họa hai siêu đồ thị interval sao cho hai siêu đồ thị là đối ngẫu của nhau.

Kết quả 6.2.9.

Mọi siêu đồ thị interval đều là một siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn.

Chứng minh kết quả 6.2.9.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị interval $\mathcal{H}$ sao cho các đỉnh của $\mathcal{H}$ là các điểm trên đường thẳng thực theo thứ tự từ trái sang phải. Xét một chu trình bất kỳ nào đó của $\mathcal{H}$ với chiều dài ≥ 3. Nhận thấy rằng cạnh đầu tiên bên trái của chu trình này sẽ có giao với cạnh thứ hai của chu trình, cạnh thứ hai của chu trình sẽ có giao với cạnh thứ ba của chu trình ,v.v… Nếu cứ tiếp tục như vậy thì sớm hay muộn cạnh cuối cùng của chu trình cũng sẽ có giao với cạnh đầu tiên của chu trình. Điều này chỉ ra rằng chu trình này phải có chứa ba đỉnh nào đó của chính chu trình này. Như vậy, $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị cân bằng hoàn toàn. □

Siêu đồ thị normal

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. ***Sắc số cạnh*** của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu các cạnh của $\mathcal{H}$ sao cho không có hai cạnh giao nhau nào được tô bởi cùng một màu.

Tương tự như đối với các đồ thị, chúng ta sẽ kí hiệu chỉ số sắc số cạnh của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ bởi $\chi'(\mathcal{H})$.

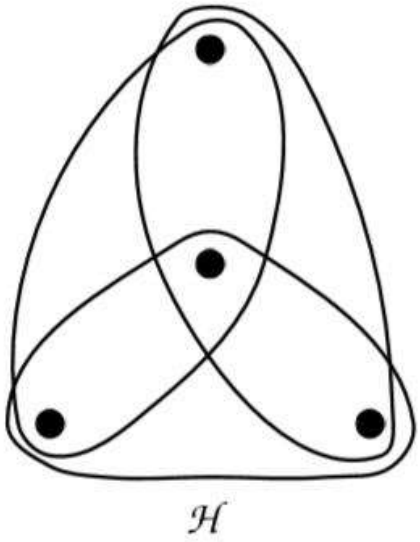
Hiển nhiên, $\chi'(\mathcal{H}) = \chi(L(\mathcal{H}))$. Khi đó, chúng ta sẽ thu được đánh giá sau: $\chi'(\mathcal{H}) \geq \omega(L(\mathcal{H})) \geq \Delta(\mathcal{H})$.

Chúng ta sẽ nói rằng siêu đồ thị $\mathcal{H}$ có ***đặc tính tô màu cạnh*** nếu $\chi'(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$. Đặc tính tô màu cạnh của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ chỉ ra rằng nếu chúng ta lấy đối ngẫu thì $\chi((\mathcal{H}^*)_2) = \omega((\mathcal{H}^*)_2)$.

Sau cùng, một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ sẽ được gọi là normal nếu mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ đều có đặc tính tô màu cạnh, nghĩa là

$$\chi'(\mathcal{H}') = \Delta(\mathcal{H}').$$

Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng mọi siêu đồ thị cân bằng đều là một siêu đồ thị normal nên chúng cũng sẽ có đặc tính tô màu cạnh. Tuy nhiên, chiều ngược lại của khẳng định trên không hoàn toàn đúng:



$\mathcal{H}$

Hình vẽ minh họa $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị normal nhưng không phải là một siêu đồ thị cân bằng.

Kết quả 6.2.10.

Mọi siêu cây đều là một siêu đồ thị normal.

Chứng minh kết quả 6.2.10.

Nhận thấy rằng mọi siêu đồ thị con từng phần của một siêu cây đều là một siêu cây. Từ Kết quả 6.1.4), mọi siêu đồ thị con từng phần này cũng là các siêu đồ thị Helly và đồ thị tuyến tính của chúng cũng là các đồ thị chordal. Điều này chỉ ra rằng đồ thị tuyến tính của các siêu đồ thị con từng phần này cũng là các đồ thị hoàn hảo. Như vậy, với chính bản thân siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và với mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$, chúng ta luôn có đẳng thức sau:

$$\chi'(\mathcal{H}) = \chi(L(\mathcal{H})) = \omega(L(\mathcal{H})) = \Delta(\mathcal{H}).$$ □

Kết quả 6.2.11. (Fournier – Las Vergnas)

Mọi siêu đồ thị normal đều là $2-$ colourable.

Kết quả 6.2.12. (Lovász)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương nhau:

(1) $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị normal;

(2) Mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ đều có tính chất König.

Kết quả 6.2.13.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là normal nếu và chỉ nếu $\mathcal{H}$ thỏa mãn tính chất Helly và đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H})$ của nó là một đồ thị hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 6.2.13.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị normal $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Từ Kết quả 6.2.12), mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ đều có tính chất König. Đặc biệt, nếu $\mathcal{H}'$ là một họ giao nhau thì $\tau(\mathcal{H}') = \upsilon(\mathcal{H}')$, nghĩa là $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị Helly. Như vậy, $\mathcal{H}^*$ sẽ là một siêu đồ thị conformal. Hơn nữa, $\chi'(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$, nghĩa là $\chi((\mathcal{H}^*)_2) = \omega((\mathcal{H}^*)_2)$. Nhận thấy rằng do đẳng thức này cũng đúng với mọi đồ thị con cảm sinh của $(\mathcal{H}^*)_2$ nên $(\mathcal{H}^*)_2$ sẽ phải là một đồ thị hoàn hảo. Do $L(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}^*)_2$ nên tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên.

($\Leftarrow$) Giả sử cho trước một siêu đồ thị Helly $\mathcal{H}$ sao cho đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H})$ của nó là một đồ thị hoàn hảo. Khi đó, các cạnh tối đại của siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ chính là các clique tối đại của đồ thị bậc hai $(\mathcal{H}^*)_2 = L(\mathcal{H})$. Nhận thấy rằng do $\chi((\mathcal{H}^*)_2) = \omega((\mathcal{H}^*)_2)$ (điều này suy ra từ việc đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H})$ là một đồ thị hoàn hảo) nên $\chi'(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$. Lập luận tương tự, với mọi siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$, chúng ta cũng có đẳng thức sau: $\chi'(\mathcal{H}') = \chi((\mathcal{H}'^*)_2) = \omega((\mathcal{H}'^*)_2) = \Delta(\mathcal{H}')$. □

Về mặt lịch sử, các siêu đồ thị normal được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1972 bởi nhà toán học Lovász với cách gọi tên là các siêu đồ thị Helly với đồ thị tuyến tính hoàn hảo. Các siêu đồ thị này đóng vai trò như một công cụ lý thuyết siêu đồ thị đầu tiên được sử dụng để giải quyết một trong những giả thuyết toán học đáng chú ý nhất trong lý thuyết đồ thị hiện đại – giả thuyết của Berge về các đồ thị hoàn hảo yếu. Giả thuyết của Berge về các đồ thị hoàn hảo yếu phát biểu rằng: "Một đồ thị là hoàn hảo nếu và chỉ nếu phần bù của nó cũng là một đồ thị hoàn hảo" (Kết quả 4.6.1). Cụ thể hơn, nó chính là phần tiếp nối của Kết quả 6.2.12) khi chúng ta thiết lập một phép chứng minh cho sự kiện: "Với mọi siêu đồ thị normal, mọi siêu đồ thị con từng phần đều có tính chất König. Về sau, các nhà toán học khác đã tìm ra được một phéo chứng minh thuần túy lý thuyết đồ thị cho giả thuyết này. Đây không phải là trường hợp duy nhất khi phép chứng minh đầu tiên cho một giả thuyết được tìm thấy bằng cách sử dụng lý thuyết siêu đồ thị và sau đó lời giải của giả thuyết được diễn giải lại bằng cách sử dụng một dạng ngôn ngữ toán học khác.