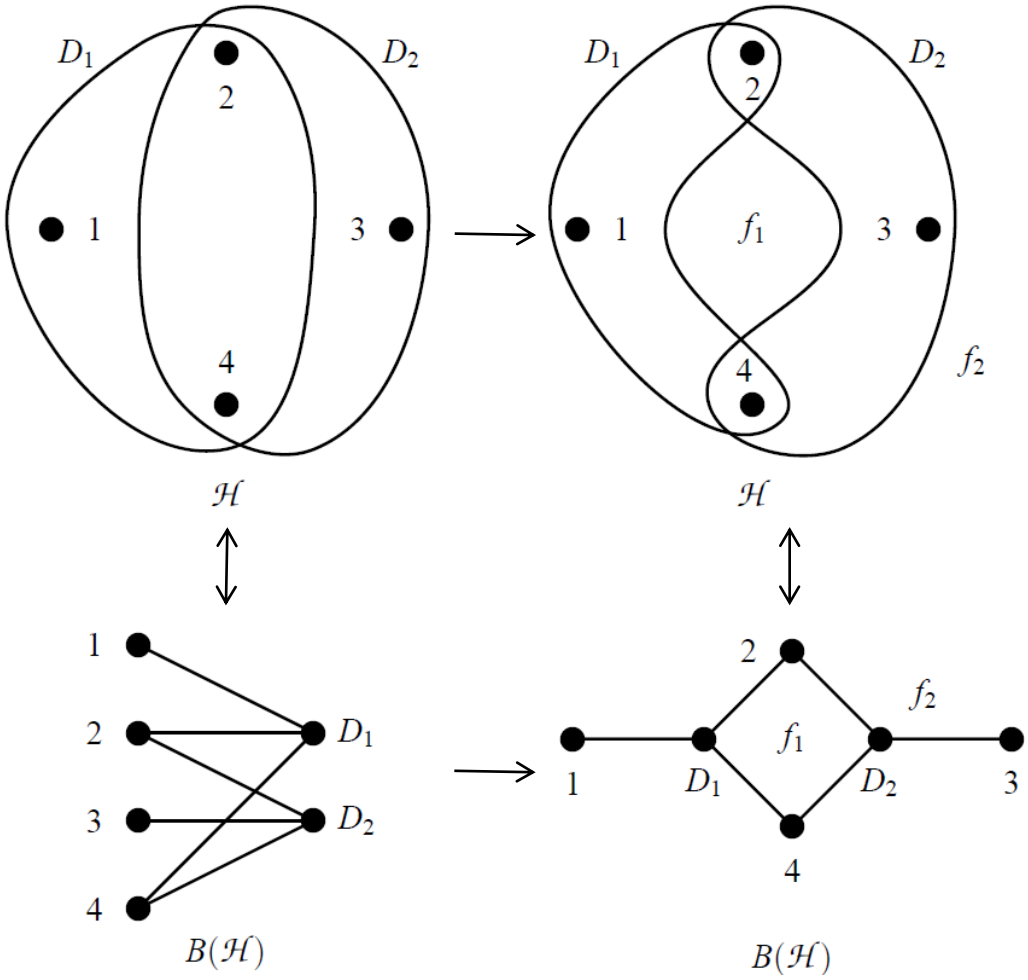
Chủ đề 07. Siêu đồ thị khả phẳng

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Nhắc lại rằng một biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H})$ của $\mathcal{H}$ là một đồ thị lưỡng phân xác định trên tập đỉnh $X \cup \mathcal{D}$ sao cho đỉnh $x \in X$ sẽ liên hợp với đỉnh $d \in \mathcal{D}$ trong $B(\mathcal{H})$ nếu và chỉ nếu $x \in \mathcal{D}$ trong $\mathcal{H}$. Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là ***khả phẳng*** nếu và chỉ nếu $B(\mathcal{H})$ là một đồ thị lưỡng phân khả phẳng.



Hình vẽ minh họa một siêu đồ thị khả phẳng $\mathcal{H}$.

Như vậy, các đồ thị khả phẳng là trường hợp đặc biệt của các siêu đồ thị khả phẳng với tất cả các cạnh đều có kích thước bằng 2. Như chúng ta có thể nhận thấy, một phép nhúng vào mặt phẳng của một siêu đồ thị khả phẳng là một cách biểu diễn lại siêu đồ thị trên mặt phẳng sao cho mỗi đỉnh tương ứng với một điểm trong mặt phẳng và mỗi cạnh tương ứng với một miền đóng kín đồng phôi với một đĩa nào đó. Các miền này chỉ chứa các điểm tương ứng với các đỉnh của cạnh đó và không chứa các điểm tương ứng với các đỉnh của các cạnh khác. Hơn nữa, hai miền như vậy giao nhau chính xác tại các điểm tương ứng với các đỉnh nằm trong phần giao chung của các cạnh tương ứng. Theo cách định nghĩa này, các mặt của một phép nhúng phẳng của một siêu đồ thị sẽ không còn tương ứng với các miền liên thông tạo thành bởi các cạnh xung quanh mặt đó nữa.Tương tự như với các đồ thị, ***kích thước của một mặt*** sẽ được định nghĩa là số đỉnh nằm trên biên tương ứng với mặt đó.

Bằng cách sử dụng các tính chất của biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H})$, chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được một số tính chất đơn giản của một phép nhúng phẳng của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$:

Kết quả 7.1.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ là khả phẳng nếu và chỉ nếu siêu đồ thị đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ của nó là khả phẳng.

Chứng minh kết quả 7.1.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị lưỡng phân thì biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H})$ của nó sẽ là một đồ thị khả phẳng.

Biểu diễn lưỡng phân của $B(\mathcal{H}^*)$ có thể nhận được dễ dàng từ $B(\mathcal{H})$ bằng cách hoán đổi vai trò của các phần X và $\mathcal{D}$. Như vậy, $B(\mathcal{H}^*)$ cũng sẽ là một đồ thị khả phẳng, nên $\mathcal{H}^*$ sẽ là một siêu đồ thị khả phẳng. □

Nhắc lại rằng bậc của một đỉnh $x \in X$ trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được định nghĩa là $|\mathcal{D}(x)|$, chúng ta dễ dàng chứng minh được dạng mở rộng sau của công thức Euler cho các siêu đồ thị phẳng:

Kết quả 7.2. (Dạng mở rộng của công thức Euler cho các siêu đồ thị khả phẳng)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị khả phẳng $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, với $n := |X|$, $m := |\mathcal{D}|$, được nhúng vào trong mặt phẳng với f mặt.

Khi đó, $n - \sum_{i=1}^{m}(|D_i| - 1) + f = m - \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\mathcal{D}(x_j)\right| - 1\right) + f = 2.$

Chứng minh kết quả 7.2.

Xét một phép nhúng phẳng bất kỳ của biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H})$.

Phép nhúng phẳng này sẽ chứa $n' := n + m$ đỉnh, $m' := \sum_{j=1}^{m}\left|D_j\right| := \sum_{i=1}^{n}\left|\mathcal{D}(x_j)\right|$ cạnh và $f' := f$ mặt.

Bằng cách áp dụng công thức Euler cho biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H})$, chúng ta suy ra được rằng:

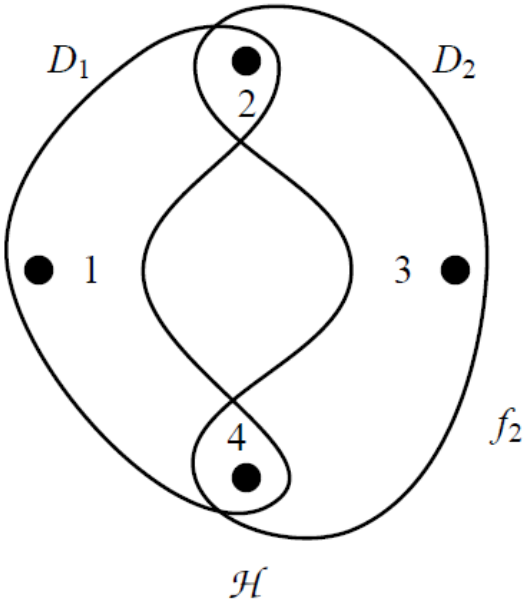
$$n' - m' + f' = 2.$$

Từ đẳng thức $m' = \sum_{j=1}^{m}\left|D_j\right|$, chúng ta dễ dàng suy ra được rằng:

$$n - \sum_{i=1}^{m}(|D_i| - 1) + f = 2.$$

Từ đẳng thức $m' = \sum_{i=1}^{n}\left|\mathcal{D}(x_j)\right|$, chúng ta dễ dàng suy ra được rằng:

$$m - \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\mathcal{D}(x_j)\right| - 1\right) + f = 2.$$ □



Hình ảnh minh họa phép nhúng phẳng của siêu đồ thị $\mathcal{H}$,

$$n - \sum_{i=1}^{m}(|D_i| - 1) + f = 4 - (2 + 2) + 2 = 2,$$

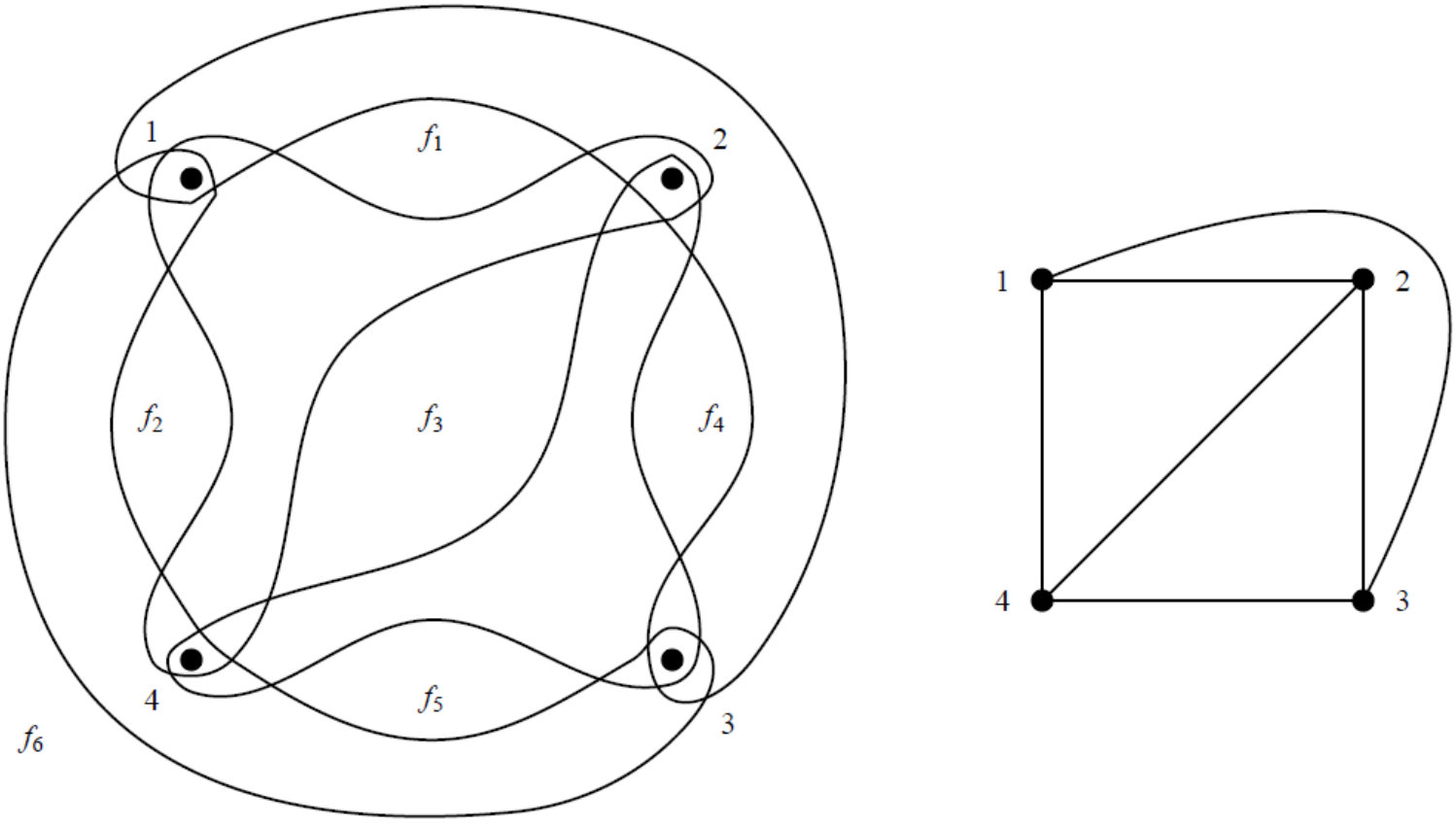
$$m - \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\mathcal{D}(x_j)\right| - 1\right) + f = 2 - (0 + 1 + 0 + 1) + 2 = 2.$$

Một siêu đồ thị đơn khả phẳng $\mathcal{H}$ được gọi là ***tối đại*** nếu chúng ta bổ sung thêm bất kỳ cạnh mới nào có kích thước ≥ 2 cũng biến nó thành một siêu đồ thị không khả phẳng. Như vậy, một phép nhúng phẳng của một siêu đồ thị khả phẳng $\mathcal{H}$ được gọi là ***tối đại*** nếu và chỉ nếu mọi mặt của nó đều có kích thước bằng 2, hoặc tương đương, nếu và chỉ nếu mọi mặt trong phép nhúng phẳng của biểu diễn lưỡng phân của $B(\mathcal{H})$ đều có kích thước bằng 4.

Tính tối đại này chỉ mang tính tương đối: trong mỗi mặt như vậy, chúng ta có thể chèn thêm một cạnh bất kỳ có kích thước bằng 2. Tuy nhiên, nếu một siêu đồ thị khả phẳng $\mathcal{H}$ không tối đại thì sẽ có ít nhất một mặt có kích thước ≥ 3, nên chúng ta có thể chèn thêm một cạnh có kích thước ≥ 3 vào mặt này.

Nếu chúng ta biểu diễn lại các mặt của một siêu đồ thị phẳng tối đại dưới dạng các đường cong nối giữa hai đỉnh đó thì chúng ta sẽ thu được một đồ thị phẳng với các mặt tương ứng với các cạnh của siêu đồ thị ban đầu. Theo cách định nghĩa này, một đồ thị phẳng sẽ tương ứng với một phép nhúng phẳng của một siêu đồ thị khả phẳng tối đại sao cho các mặt của đồ thị sẽ tương ứng với các cạnh của siêu đồ thị.

Lưu ý rằng quan hệ đối ngẫu "mặt – cạnh" mà chúng ta vừa xét khác với quan hệ đối ngẫu siêu đồ thị "đỉnh – cạnh" và quan hệ đối ngẫu cổ điển "đỉnh – mặt" mà chúng ta đã khảo sát ở "Chủ đề 03. Đồ thị khả phẳng".



Hình ảnh minh họa siêu đồ thị khả phẳng tối đại K_4^3 và đối ngẫu "mặt – cạnh" K_4 của nó.