

Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị

Lý thuyết tô màu đồ thị được bắt đầu nghiên cứu với việc đi tìm lời cho bài toán tô màu các quốc gia trên bản đồ sao cho không có hai quốc gia nào có đường biên giới chung được tô bởi cùng một màu. Nếu chúng ta biểu diễn lại các quốc gia dưới dạng các điểm nằm trong mặt phẳng và nối từng cặp điểm tương ứng với các quốc gia có đường biên giới chung thì chúng ta sẽ thu được một đồ thị phẳng. Bài toán bốn màu phát biểu rằng: “Liệu mọi đồ thị khả phẳng có thể tô được bằng 4 màu hay không?”. Vấn đề này dường như được đề cập lần đầu tiên trong một bức thư của A. De Morgan gửi cho W. R Hamilton vào năm 1852. Vào thời điểm đó, không ai nghĩ rằng đó là sự khởi đầu cho một lý thuyết mới. Phép chứng minh đầu tiên được Kempe đưa ra vào năm 1879. Phép chứng minh này tồn tại hơn 10 năm sau đó cho đến khi Heawood tìm thấy một sai lầm vào năm 1890. Heawood cũng đã chứng minh được rằng năm màu là đủ để tô màu cho bất kỳ bản đồ nào. Bài toán bốn màu đã trở thành một trong những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học rời rạc của thế kỉ 20.

Ngày nay, có lẽ ứng dụng phổ biến và đơn giản nhất của lý thuyết tô màu đồ thị là trong các hệ thống đèn giao thông. Những người đã phát minh ra đèn giao thông thậm chí còn không nhận ra họ đã thông minh như thế nào: họ là những người đầu tiên phát hiện ra rằng việc đặt các biển báo nào (dừng hoặc lái xe) là không quan trọng; điểm quan trọng ở đây là bất cứ biển báo nào họ đặt phải luôn ở các trạng thái khác nhau tại bất kỳ thời điểm nào cho hai con đường giao nhau. Tương tự như trong nhiều ứng dụng thực tế của toán học, chúng ta đã mượn màu “đỏ” và “xanh” từ các quy tắc hàng hải, thêm màu “vàng” để làm trung gian, và đặt nó ở vị trí dễ thấy nhất. Nó có thể trông rất đáng ngạc nhiên nhưng, trong lý thuyết tô màu đồ thị, không quan trọng biển nào là màu “xanh” hay biển nào là màu “đỏ”; điểm quan trọng ở đây đó là cần bao nhiêu màu khác nhau. Thay cho việc thực sự tô màu các đỉnh của đồ thị, chúng ta chỉ cần gán nhãn chúng bằng các số $1, 2, \dots, \lambda$ trong đó λ là số màu được cho trước.

4.1. Khái niệm cơ bản

Giả sử cho trước một đồ thị đơn $G = (X, E)$ và $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ là một tập các màu cho trước.

Mọi phép gán nhãn các đỉnh của đồ thị G bởi các số nằm trong tập $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ sao cho mỗi đỉnh chỉ được gán nhãn bởi duy nhất một màu nào đó đều được gọi là một **phép tô màu**.

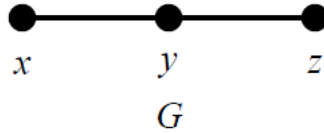
Một phép tô màu được gọi là một **phép tô thực sự** nếu mọi cặp đỉnh liên hợp nhau đều được tô bởi các màu khác nhau.

Nhận thấy rằng không phải mọi phép tô màu đều là thực sự. Trong một phép tô màu thực sự, các đỉnh được tô bởi cùng một màu sẽ tạo ra một tập độc lập. Nếu chúng ta thay đổi màu của ít nhất một đỉnh thì chúng ta sẽ thu được một phép tô màu mới. Nó có thể là một phép tô màu thực sự khác hoặc không. Kí hiệu $P(G, \lambda)$ là số tất cả các phép tô màu thực sự có thể có của một đồ thị G với tối đa λ màu cho trước. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $P(G, \lambda)$ thật ra là một đa thức theo λ , nên nó cũng thường được gọi là **đa thức sắc số**. Bất cứ khi nào chúng ta cần quan tâm đến số các màu được cho trước, chúng ta sẽ thường nói rằng chúng ta đang có một **phép λ – tô màu thực sự**. Lưu ý rằng, số màu thực sự được sử dụng trong một phép λ – tô màu thực sự có thể nhỏ hơn λ rất nhiều; tuy nhiên, nó không bao giờ có thể lớn hơn λ . Để thuận tiện cho việc trình bày, mỗi khi chúng ta nói “phép tô màu”, chúng ta có thể hiểu là đang nói tới các “phép tô màu thực sự”. Kí hiệu $\chi(G)$ là số màu nhỏ nhất có thể có tính trên tất cả phép tô màu thực sự của một đồ thị G . Chúng ta thường gọi

chỉ số $\chi(G)$ này là **sắc số của đồ thị G** . Hiển nhiên, số màu lớn nhất có thể được sử dụng trong một phép λ – tô màu thực sự sẽ là $\min\{n(G), \lambda\}$.

Do không có phép tô màu nào với ít hơn $\chi(G)$ màu nên chúng ta có thể suy ra rằng $P(G, \lambda) = 0$ với mọi số nguyên dương λ sao cho $1 \leq \lambda \leq \chi(G) - 1$. Do mọi phép tô màu với $\chi(G)$ màu đều là một phép λ – tô màu thực sự với mọi số nguyên dương $\lambda \geq \chi(G)$ nên chúng ta có thể suy ra rằng $P(G, \lambda) \geq 1$ với mọi số nguyên dương $\lambda \geq \chi(G)$. Do λ là số màu nên, trong các cuộc thảo luận của chúng ta, nó luôn nhận giá trị nguyên.

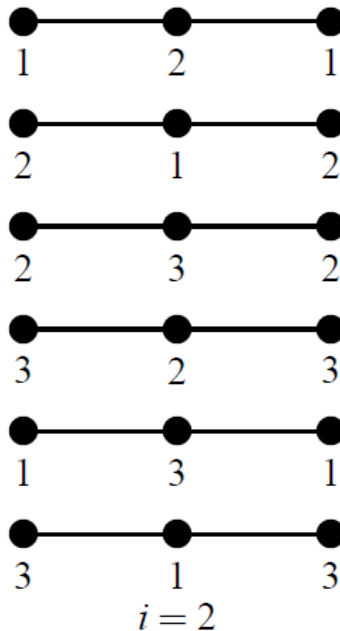
Chẳng hạn, xét đồ thị $G = (X, E)$ với $X = \{x, y, z\}$ và $E = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới.



Nhận thấy rằng do G không có bất kỳ phép 1 – tô màu thực sự nào nên $\chi(G) > 1$. Hơn nữa, G có ít nhất một phép 2 – tô màu thực sự là 1 – 2 – 1. Như vậy, $\chi(G) = 2$.

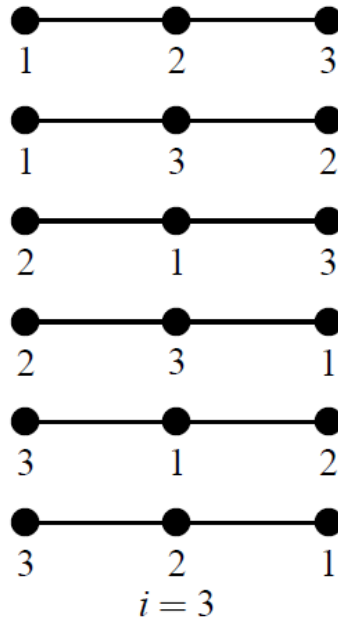
Giả sử cho trước một tập các màu $\{1, 2, 3\}$, nghĩa là $\lambda = 3$. Nhận thấy rằng do $\chi(G) = 2$ nên chúng ta suy ra được các khả năng sau của số màu thực sự i được sử dụng: $i = 2$ và $i = 3$.

Nếu $i = 2$ thì chúng ta có thể có các lựa chọn như sau: màu 1, 2, màu 2, 3, màu 1, 3. Tổng số lựa chọn là $\binom{\lambda}{i} = \binom{3}{2} = 3$. Với cách lựa chọn thứ nhất, chúng ta sẽ có các phép tô màu 1 – 2 – 1 và 2 – 1 – 2. Với cách lựa chọn thứ hai, chúng ta sẽ có các phép tô màu 2 – 3 – 2 và 3 – 2 – 3. Với cách lựa chọn cuối cùng, chúng ta sẽ có các phép tô màu 1 – 3 – 1 và 3 – 1 – 3.



Nếu $i = 3$ thì chúng ta chỉ có một lựa chọn duy nhất: màu 1, 2, 3. Để xây dựng tất cả các phép tô màu của G , chúng ta sẽ cố định đỉnh x bởi màu 1 và xây dựng hai phép tô màu của $G - x$ bằng cách hoán vị các màu 2 và 3 trên các đỉnh y và z : 1 – 2 – 3 và 1 – 3 – 2. Lập luận tương tự, nếu chúng ta cố định đỉnh x bởi màu

2 thì chúng ta sẽ có các phép tô màu: $2 - 1 - 3$ và $2 - 3 - 1$. Cuối cùng, nếu chúng ta cố định đỉnh x bởi màu 3 thì chúng ta sẽ có các phép tô màu: $3 - 1 - 2$ và $3 - 2 - 1$.



Như vậy, $P(G, 3) = 6 + 6 = 12$.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu chúng ta có phải xem xét tất cả các khả năng có thể có chỉ để xác định giá trị của $P(G, \lambda)$ hay không? Nếu không thì liệu có tồn tại một công thức tổng quát nào để giúp chúng ta có thể xác định giá trị của $P(G, \lambda)$, với mọi đồ thị G , hay không?”. Để giải quyết vấn đề này, chúng ta sẽ giới thiệu một lược đồ tổng quát để xác định $P(G, \lambda)$, với mọi đồ thị G .

Trước khi giới thiệu lược đồ tổng quát để xác định $P(G, \lambda)$, chúng ta sẽ giới thiệu thêm một số khái niệm bổ sung mới:

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ và một số nguyên dương i . Một phép tô màu thực sự của G với chính xác i màu được sử dụng thực sự sẽ được gọi là một **phép i – tô màu nghiêm ngặt**. Mỗi phép i – tô màu nghiêm ngặt như vậy đều phân hoạch tập đỉnh X thành i tập con không rỗng được gọi là các **cell**. Mỗi cell là một tập các đỉnh được tô bởi cùng một màu. Một phân hoạch như vậy được gọi là một **phân hoạch khả dĩ** và các cell tương ứng của nó được gọi là các **lớp màu**. Nói cách khác, trong một phân hoạch khả dĩ của tập đỉnh X thành i cell, các đỉnh liên hợp nhau sẽ nằm trong các cell khác nhau và mỗi cell đều là một tập đỉnh độc lập. Mặc dù, các phép tô màu thực sự và các phân hoạch khả dĩ là các khái niệm hoàn toàn khác nhau: các phép tô màu là các phép gán nhãn của các đỉnh, các phân hoạch là các phép chia của X thành các tập con không rỗng. Nhưng, chúng lại có mối quan hệ rất mật thiết với nhau.

Ngược lại với việc chỉ số λ không bị chặn trên, số màu i thực sự được sử dụng lại bị chặn: $1 \leq i \leq n(G)$.

Kí hiệu $r_i(G)$ là **số phân hoạch khả dĩ của G thành i cell**. Khi đó, vector $R(G) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ sẽ được gọi là **sắc phổ** của G .

Từ cách định nghĩa của sắc số $\chi(G)$: số màu nhỏ nhất có thể có tính trên tất cả phép tô màu thực sự của một đồ thị G , sắc phổ $R(G)$ của G sẽ luôn có dạng: $R(G) = (0, 0, \dots, 0, r_\chi, r_{\chi+1}, \dots, r_n)$.

Chẳng hạn, xét lại đồ thị $G = (X, E)$ với $X = \{x, y, z\}$ và $E = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ như trong hình vẽ ở trên.

Nếu $i = 1$ thì $r_1(G) = 0$ (điều này suy ra từ việc G không có bất kỳ phép 1 – tô màu thực sự nào)

Nếu $i = 2$ thì chúng ta sẽ thu được 6 phép tô màu thực sự. Mỗi một trong 6 phép tô màu này đều là 3 – tô màu thực sự và 2 – tô màu nghiêm ngặt. Tất cả các phép tô màu như vậy đều tạo ra duy nhất một phân hoạch khả dĩ của X : $X_1 = \{x, z\}$ (cell thứ nhất), $X_2 = \{y\}$ (cell thứ hai). Như vậy, $r_2(G) = 1$.

Nếu $i = 3$ thì chúng ta cũng sẽ thu được 6 phép tô màu thực sự. Mỗi một trong 6 phép tô màu này đều là 3 – tô màu thực sự và 3 – tô màu nghiêm ngặt. Tất cả các phép tô màu như vậy đều tạo ra duy nhất một phân hoạch khả dĩ của X : $X_1 = \{x\}$ (cell thứ nhất), $X_2 = \{y\}$ (cell thứ hai), $X_3 = \{z\}$ (cell thứ ba). Như vậy, $r_3(G) = 1$.

Tóm lại, chúng ta thu được sắc phổ $R(G)$ của G là: $R(G) = (0, 1, 1)$.

Sắc phổ $R(G)$ được gọi là **liên tục (không có khoảng trống)** nếu nó không chứa phần tử không giữa các phần tử dương. Trường hợp ngược lại, nó được gọi là **bị hổng (có khoảng trống)**.

Kết quả 4.1.1.

Với mọi đồ thị G , sắc phổ $R(G)$ đều liên tục.

Chứng minh kết quả 4.1.1.

Như chúng ta đã nhận thấy: $R(G) = (0, 0, \dots, 0, r_\chi, r_{\chi+1}, \dots, r_n)$. Từ cách định nghĩa của sắc số χ , $r_\chi > 0$.

Xét một phép tô màu nghiêm ngặt bất kỳ của G với chính xác χ màu và chọn một lớp màu bất kỳ với > 1 đỉnh. Bằng cách tách lớp màu này thành hai tập con không rỗng, chúng ta sẽ thu được một phân hoạch khả dĩ mới của X với $\chi + 1$ cell. Điều này chỉ ra rằng $r_{\chi+1} > 0$. Bằng cách lặp lại quy trình trên cho bất kỳ cell nào với > 1 đỉnh, chúng ta sẽ suy ra được $r_{\chi+2} > 0, r_{\chi+3} > 0, \dots$. Nhận thấy rằng chúng ta sẽ không thể tiếp tục tách khi tất cả các lớp màu đều chỉ còn chính xác một đỉnh. Điều này chỉ ra rằng $r_n = 1 > 0$. $\square$

Chúng ta sẽ nhận thấy rằng tính chất cơ bản này không còn đúng cho các phép tô màu của các siêu đồ thị.

Trên thực tế, có rất nhiều đánh giá khác nhau cho chặn trên của sắc số. Tuy nhiên, trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ giới thiệu một số đánh giá đơn giản sau đây.

Định lí König (Kết quả 2.3.1) cho các đồ thị lưỡng phân có thể được phát biểu lại dưới dạng các phép tô màu như sau:

Kết quả 4.1.2.

Với mọi đồ thị G , $\chi(G) \leq 2$ khi và chỉ khi nó không có chứa bất kỳ chu trình lẻ nào.

Một trong những kết quả quan trọng biểu diễn mối liên hệ giữa bậc lớn nhất $\Delta(G)$ và sắc số $\chi(G)$ của cùng một đồ thị G :

Kết quả 4.1.3. (Brooks)

Nếu G là một đồ thị liên thông khác với clique và chu trình lẻ thì $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

4.2. Cấu trúc của phép tô màu đồ thị

Giả sử cho trước đồ thị K_n và $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ là một tập các màu cho trước.

Hiển nhiên, nếu $\lambda < n$ thì K_n sẽ không có bất kỳ một phép λ – tô màu thực sự nào (điều này được suy ra từ việc tất cả các đỉnh của K_n không thể tô màu theo từng cặp phân biệt nhau chỉ bởi $\lambda < n$ màu).

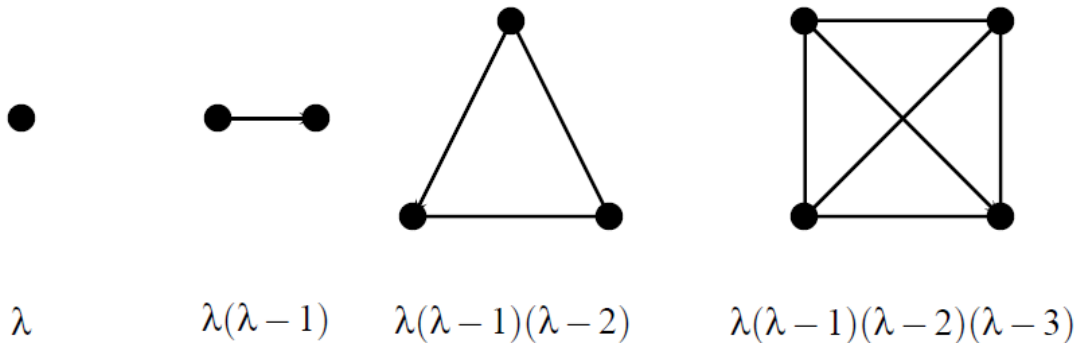
Giả sử $\lambda \geq n$. Nhận thấy rằng mọi phép gán nhãn các đỉnh của đồ thị G bởi n màu khác nhau đều dẫn đến một phép tô màu thực sự. Như vậy, $\chi(K_n)$.

Vấn đề đặt ra tiếp theo đó là: “Xác định giá trị của $P(K_n, \lambda)$?”.

Xét một phép λ – tô màu thực sự bất kỳ của K_n . Chúng ta sẽ có λ khả năng khác nhau để tô màu cho đỉnh đầu tiên. Kế tiếp, với đỉnh thứ hai, chúng ta sẽ có $(\lambda - 1)$ khả năng khác nhau để tô màu cho đỉnh thứ hai. Với đỉnh thứ ba, chúng ta sẽ có $(\lambda - 2)$ khả năng khác nhau để tô màu cho đỉnh thứ ba. Do tính đối xứng của đồ thị K_n nên thứ tự của một quy trình tô màu như trên sẽ không còn quan trọng nữa. Nếu chúng ta tiếp tục thực hiện quy trình tô màu trên cho đến khi đỉnh cuối cùng được tô màu thì chúng ta sẽ đi đến kết luận:

$$P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1).$$

Tích $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$ thường được, kí hiệu bởi $\lambda^{(n)}$, gọi là **giai thừa giảm dần**.



Hình vẽ minh họa các đồ thị đầy đủ K_1, K_2, K_3, K_4 và các đa thức sắc số $P(K_1, \lambda), P(K_2, \lambda), P(K_3, \lambda), P(K_4, \lambda)$ tương ứng.

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ không phải là một đồ thị K_n . Vấn đề đặt ra tiếp theo đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể xác định giá trị của $P(K_n, \lambda)$?”. Do G không phải là một đồ thị K_n nên nó sẽ có chứa hai đỉnh x, y không liên hợp với nhau. Như vậy, tất cả các phép λ – tô màu thực sự của G đều có thể chia thành hai lớp: x và y được tô bởi hai màu khác nhau, x và y được tô bởi cùng một màu. Nếu x và y được tô bởi hai màu khác nhau thì tất cả các phép λ – tô màu thực sự của G chính là các phép λ – tô màu thực sự của $G_1 = G \cup \{x, y\}$. Nếu x và y được tô bởi cùng một màu thì tất cả các phép λ – tô màu thực sự của G chính là các phép λ – tô màu thực sự của $G_2 = G_1 \cdot \{x, y\}$ (Lưu ý rằng $G \cdot e$ chính là đồ thị nhận được từ G sau khi co cạnh e lại). Như vậy, $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) + P(G_2, \lambda)$.

Nhận thấy rằng, so với G , G_1 có cùng tập đỉnh và tập cạnh ngoại trừ cạnh $\{x, y\}$. Đến lượt mình, G_2 cũng có cùng một tập đỉnh và tập cạnh ngoại trừ việc hai đỉnh x và y đã được thay thế bởi đỉnh xy . Như vậy, đồ thị G_1 sẽ có nhiều cạnh hơn G còn đồ thị G_2 sẽ có ít cạnh hơn G . Một trong những điểm quan trọng phải đề cập đến ở đây đó là G_2 có thể có chứa cạnh bội. Cụ thể hơn, nếu các đỉnh x và y có các đỉnh láng giềng chung trong G thì việc co cạnh $\{x, y\}$ lại sẽ dẫn đến các cạnh bội. Do, trong định nghĩa của một phép tô màu thực sự, các cạnh bội không đóng một vai trò quan trọng nào cả (chỉ tính liên hợp của các đỉnh mới quan trọng) nên chúng ta hoàn toàn có thể thay thế các cạnh bội trong đồ thị G_2 bởi các cạnh đơn tương ứng.

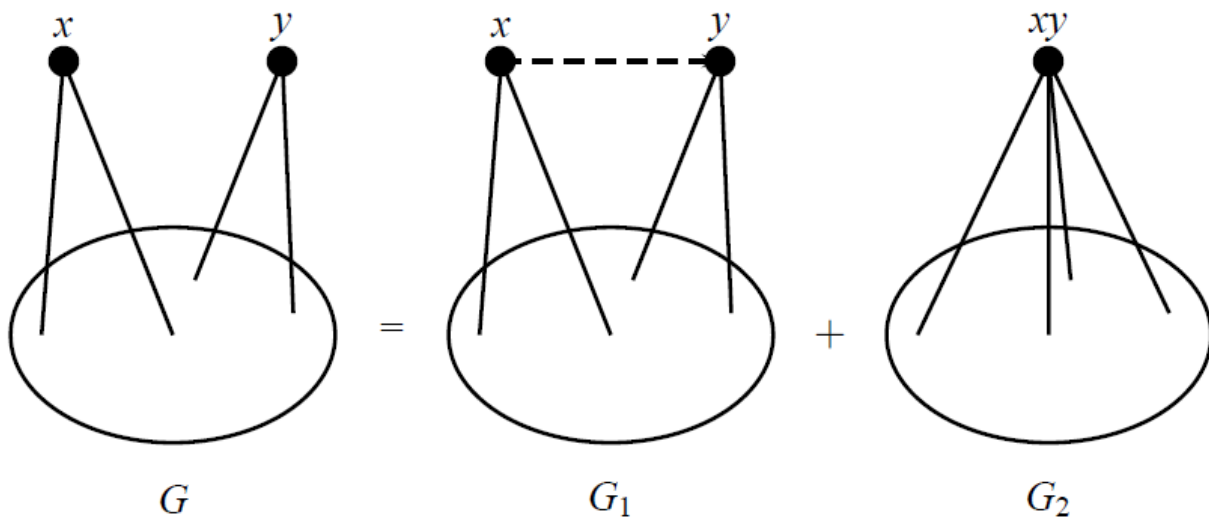
Nếu G_1 hoặc G_2 không phải là một đồ thị đầy đủ thì chúng ta hoàn toàn có thể tìm được một cặp đỉnh không liên hợp nhau và thực hiện lặp lại việc đã làm với các đỉnh x, y . Nếu $P(G_1, \lambda) = P(G_3, \lambda) + P(G_4, \lambda)$ và $P(G_2, \lambda) = P(G_5, \lambda) + P(G_6, \lambda)$ thì chúng ta sẽ thu được

$$P(G, \lambda) = P(G_3, \lambda) + P(G_4, \lambda) + P(G_5, \lambda) + P(G_6, \lambda).$$

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Khi nào thì thủ tục nêu trên dừng?”. Câu trả lời là thủ tục nêu trên chỉ dừng lại khi chúng ta không thể tìm được một cặp đỉnh nào không liên hợp nhau, nghĩa là tất cả các đồ thị thu được đều là các đồ thị đầy đủ.

Như vậy, $P(G, \lambda) = P(K_{i_1}, \lambda) + P(K_{i_2}, \lambda) + \dots + P(K_{i_s}, \lambda)$, $s \geq 1$ là một số nguyên dương nào đó.

Theo cách làm này, G_1 sẽ thu được từ G bằng “phép nối đỉnh” còn G_2 sẽ thu được từ G bằng “phép co cạnh”. Thủ tục vừa nêu ở trên cũng sẽ được gọi là **thuật toán connection – contraction**.



Hình ảnh minh họa thuật toán connection – contraction.

Do mỗi $P(K_{i_j}, \lambda)$ đều là một đa thức theo λ và tổng của các đa thức cũng là một đa thức nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $P(G, \lambda)$ là một đa thức theo λ . Nhận thấy rằng trong số tất cả các đồ thị đầy đủ $K_{i_1}, K_{i_2}, \dots$,

K_{i_s} chỉ có duy nhất một đồ thị là đẳng cấu với K_n . Cụ thể hơn, nó chính là đồ thị đầy đủ thu được từ G chỉ bằng các phép nối đỉnh. Hơn nữa, tất cả các đồ thị đầy đủ khác đều có $< n$ đỉnh bởi vì chúng đều thu được từ G bằng ít nhất một phép co cạnh nào đó. Như vậy, bậc của đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ bằng n và hệ số bậc cao nhất của nó thì bằng 1 (lưu ý rằng $P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$).

Nhắc lại rằng, lúc ban đầu, tất cả các đỉnh của G đều được gán bởi cùng một nhãn. Khi chúng ta co một cạnh lại, chúng ta nối các tên cũ lại để tạo thành một cái tên cho đỉnh mới. Kết quả là mọi đỉnh nằm trong một đồ thị K_{i_j} đều có cùng một cái tên. Tuy nhiên, chỉ có duy nhất các đỉnh nằm trong đồ thị K_n là vẫn giữ nguyên cái tên của chúng như khi nằm trong G . Nhận thấy rằng nếu tên của một đỉnh trong một đồ thị K_{i_j} nào đó là xyz thì sẽ có một phép i_j – tô màu nghiêm ngặt của G sao cho các đỉnh x, y, z được tô bởi cùng một màu. Nói cách khác, mọi đồ thị K_{i_j} đều tương ứng với một phép i_j – tô màu nghiêm ngặt nào đó của G , mỗi đỉnh của K_{i_j} đều tương ứng với một màu chung nào đó, tên kết hợp tương ứng của tất cả các đỉnh của G cũng chính là màu chúng đó.

Nhận thấy rằng nếu chúng ta so sánh tên kết hợp của các đỉnh thì sẽ không có bất kỳ đồ thị đầy đủ nào giống hệt nhau với cùng số đỉnh. Nguyên nhân cho việc này là bởi mỗi đồ thị K_{i_j} đều thu được bằng một cách duy nhất từ G . Như vậy, **số tất cả các đồ thị đầy đủ với i sẽ bằng số tất cả các phân hoạch khả dĩ của G thành i cell, nghĩa là bằng $r_i(G)$.**

Bằng cách thu thập tất cả các đồ thị đầy đủ có cùng số đỉnh và làm điều đó cho tất cả các giá trị có thể, chúng ta sẽ nhận được đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= P(K_{i_1}, \lambda) + P(K_{i_2}, \lambda) + \cdots + P(K_{i_s}, \lambda) \\ &= r_1(G)P(K_1, \lambda) + r_2(G)P(K_2, \lambda) + \cdots + r_n(G)P(K_n, \lambda). \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(G)P(K_i, \lambda). \end{aligned}$$

Do $r_1 = r_2 = \cdots = r_{\chi-1} = 0$ và $P(K_i, \lambda) = \lambda^{(n)}$ nên chúng ta sẽ thu được công thức cơ bản sau:

$$P(G, \lambda) = \sum_{i=\chi}^n r_i(G)\lambda^{(n)}.$$

Công thức trên thể hiện rõ ràng cấu trúc của các phép tô màu thực sự và mối quan hệ của chúng với các phân hoạch khả dĩ: chọn ra một phân hoạch khả dĩ bất kỳ của G thành i cell, đếm tất cả các phép tô màu có thể thu được từ phân hoạch này bằng cách hoán vị $\lambda^{(n)}$ màu, sau đó làm điều tương tự cho tất cả $r_i(G)$ phân hoạch khả dĩ, cuối cùng đếm cho tất cả các chỉ số i . Như vậy, thuật toán connection – contraction không chỉ hiển thị cấu trúc này mà nó còn chỉ ra cho chúng ta cách thức để có thể xác định $P(G, \lambda)$ với mọi đồ thị G .

Chẳng hạn, xét lại đồ thị $G = (X, E)$ với $X = \{x, y, z\}$ và $E = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ như trong hình vẽ ở trên.

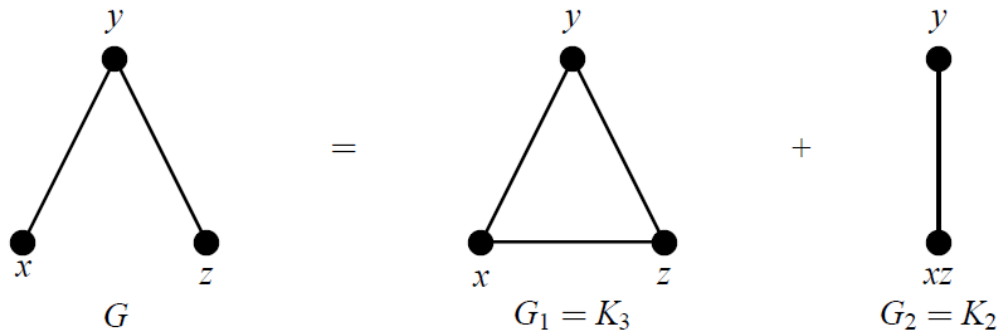
Áp dụng thuật toán connection – contraction cho đồ thị G , chúng ta thu được:

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= P(K_3, \lambda) + P(K_2, \lambda) \\ &= \lambda^{(3)} + \lambda^{(2)} \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Như vậy, không cần phải xem xét tất cả các phép tô màu, chúng ta vẫn có thể tính được

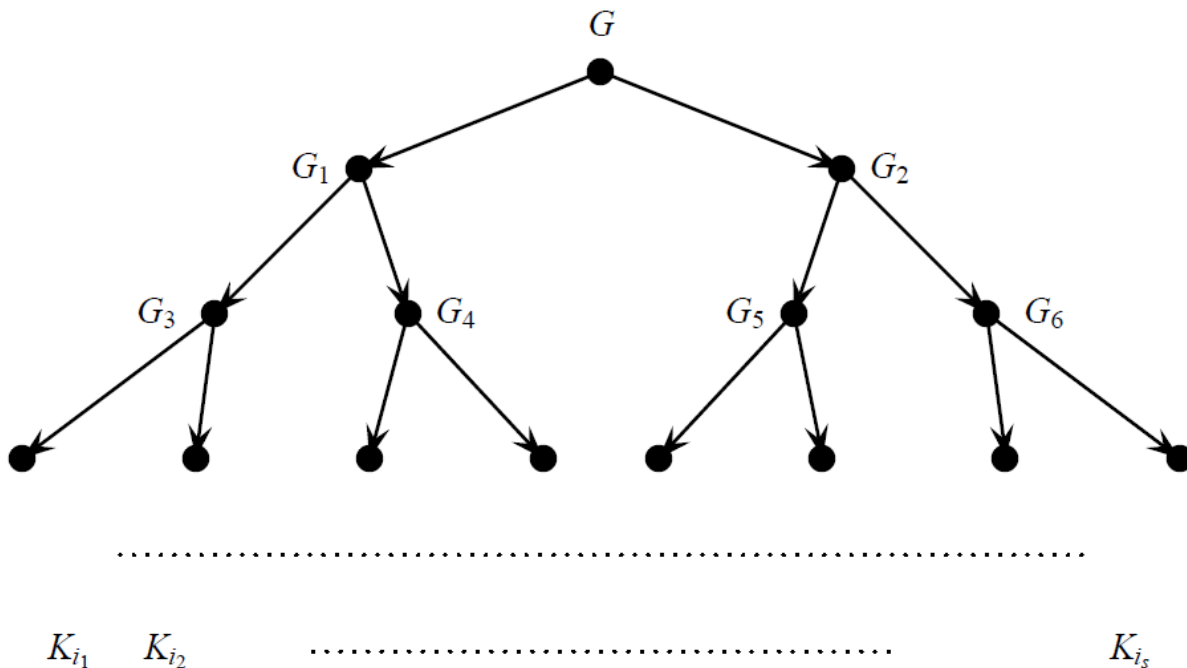
$$P(G, 3) = 3(3 - 1)^2 = 12.$$

Hơn nữa, do $(G, \lambda) = P(K_3, \lambda) + P(K_2, \lambda) = 0.P(K_1, \lambda) + 1.P(K_2, \lambda) + 1.P(K_3, \lambda)$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng sắc phổ $R(G) = (0, 1, 1)$.



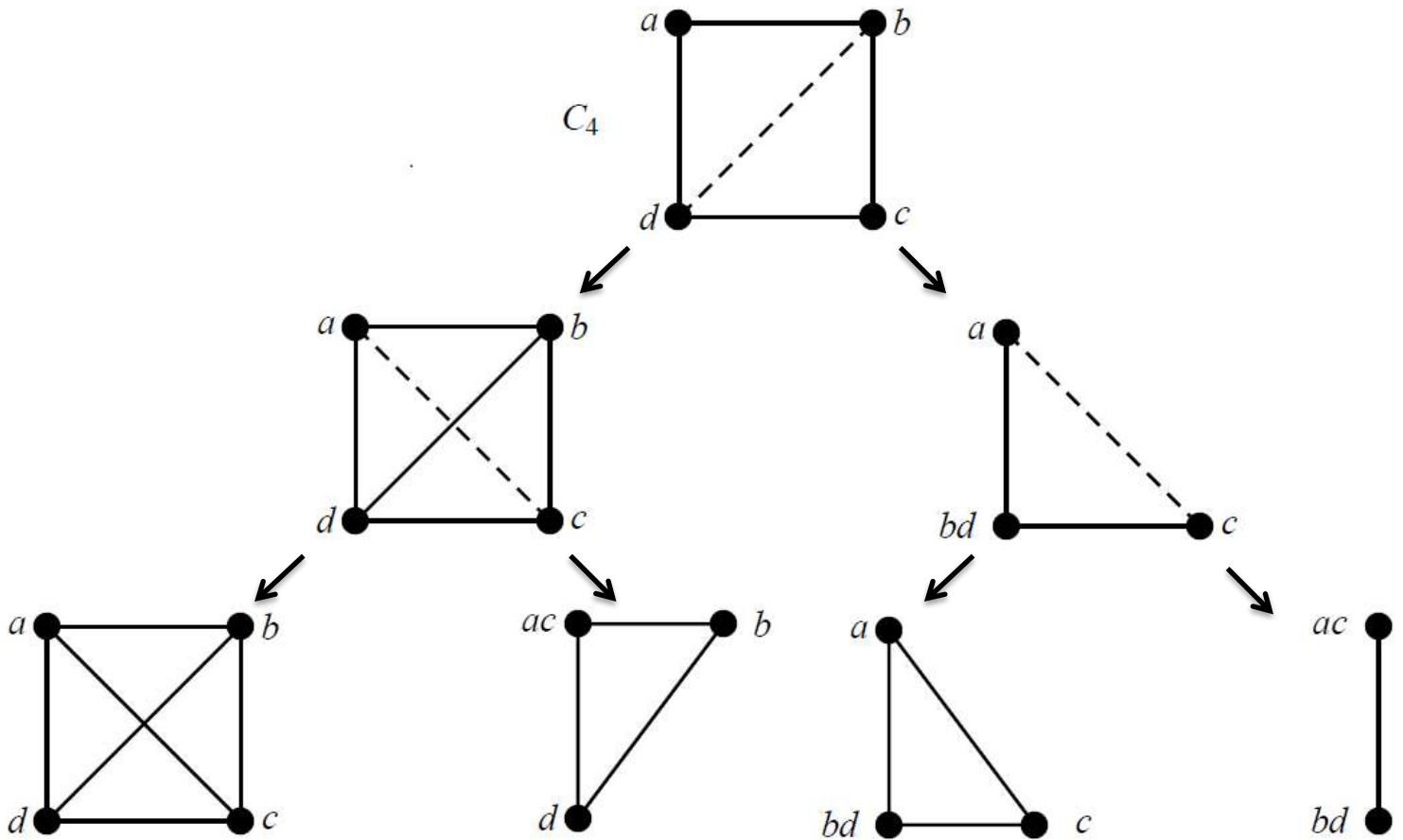
Hình vẽ minh họa thuật toán connection – contraction cho đồ thị G .

Nhận thấy rằng thuật toán connection – contraction hoạt động rất hiệu quả cho các đồ thị nhỏ nhưng không còn hiệu quả cho các đồ thị với n lớn. Do mỗi đồ thị đều tạo ra hai đồ thị mới nên số đồ thị sẽ tăng gấp đôi hiện tại và luôn là một lũy thừa của 2. Toàn bộ quá trình này có thể được mô tả lại dưới dạng một cây nhị phân như hình vẽ bên dưới. Mỗi cung sẽ cho biết đồ thị thu được từ đồ thị trước đó; các cung định hướng bên trái biểu thị phép nối đỉnh, các cung định hướng bên phải biểu thị phép co cạnh. Đồ thị G nằm ở mức 0, các đồ thị G_1 và G_2 nằm ở mức 1, các đồ thị G_3, G_4, G_5 và G_6 nằm ở mức 2, v.v... Không phải tất cả các đồ thị K_{ij} đều nằm ở mức cuối cùng. Một vài trong số chúng có thể xuất hiện ở các mức cao hơn.



Cây connection – contraction.

Do đa thức sắc số của mỗi đồ thị G đều được xác định duy nhất nên sẽ có một biểu diễn duy nhất của G thành một tổ hợp các đồ thị đầy đủ như được mô tả ở trên. Quan sát trên dẫn chúng ta đến kết luận rằng thứ tự mà thuật toán connection – contraction được thực hiện không còn đóng vai trò quan trọng nữa.



Hình ảnh minh họa cây connection – contraction cho chu trình C_4 .

Từ cây connection – contraction,

$$\begin{aligned}
 P(C_4, \lambda) &= 0 \cdot P(K_1, \lambda) + 1 \cdot P(K_2, \lambda) + 2 \cdot P(K_3, \lambda) + 1 \cdot P(K_4, \lambda) \\
 &= \lambda^{(2)} + 2\lambda^{(3)} + \lambda^{(4)} \\
 &= \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)[1 + 2(\lambda - 2) + (\lambda - 2)(\lambda - 3)] \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) \\
 &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda, \\
 R(C_4) &= (0, 1, 2, 1).
 \end{aligned}$$

4.3. Đa thức sắc số

Kết quả 4.3.1.

Giả sử cho trước một đồ thị không liên thông G với các thành phần liên thông là $G_1, G_2, \dots, G_k (k \geq 2)$.

Khi đó, $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)$.

Chứng minh kết quả 4.3.1.

Do mỗi thành phần liên thông đều có thể được tô màu theo cách độc lập với nhau, G_1 có $P(G_1, \lambda)$ phép λ – tô màu thực sự, G_2 có $P(G_2, \lambda)$ phép λ – tô màu thực sự, v.v... nên G sẽ có $P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)$ phép λ – tô màu thực sự. $\square$

Nhận thấy rằng kết quả trên có thể áp dụng ngay lập tức cho đồ thị rỗng E_n : do $E_n = nK_1$ và $P(K_1, \lambda) = \lambda$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $P(E_n, \lambda) = \lambda \cdot \lambda \dots \lambda = \lambda^n$.

Mặt khác, nếu chúng ta áp dụng thuật toán connection – contraction cho đồ thị E_n thì chúng ta sẽ thu được đẳng thức sau:

$$\lambda^n = S(n, 1)\lambda^{(1)} + S(n, 2)\lambda^{(2)} + \dots + S(n, n)\lambda^{(n)},$$

trong đó $S(n, i) = r_i(E_n)$ là số cách phân hoạch một tập với n phần tử thành i tập con không rỗng; những số $S(n, i)$ này thường được gọi là các **số Stirling loại hai**.

Hơn nữa, chúng ta cũng dễ dàng xác định được sắc phổ $R(E_n)$ của đồ thị E_n như sau:

$$R(E_n) = (S(n, 1), S(n, 2), \dots, S(n, n)).$$

Ngược lại, nếu chúng ta khai triển biểu thức $\lambda^{(n)}$ thì chúng ta sẽ thu được đẳng thức sau:

$$\lambda^{(n)} = s(n, 1)\lambda + s(n, 2)\lambda^2 + \dots + s(n, n)\lambda^n,$$

trong đó các số $s(n, i)$ được gọi là các **số Stirling loại một**.

Một cách tổng quát, các số Stirling đóng vai trò như là hệ số trong biểu diễn của λ^n (hoặc tương đương E_n) theo $\lambda^{(i)}$ (hoặc tương đương K_i) và $\lambda^{(n)}$ (hoặc tương đương K_n) theo λ^i (hoặc tương đương E_i). Chiều sau của nhận định trên có thể được biểu diễn lại dưới dạng một **thuật toán disconnection – contraction** như sau:

Nhắc lại rằng, trong thuật toán connection – contraction, chúng ta thu được đẳng thức sau:

$$P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) + P(G_2, \lambda),$$

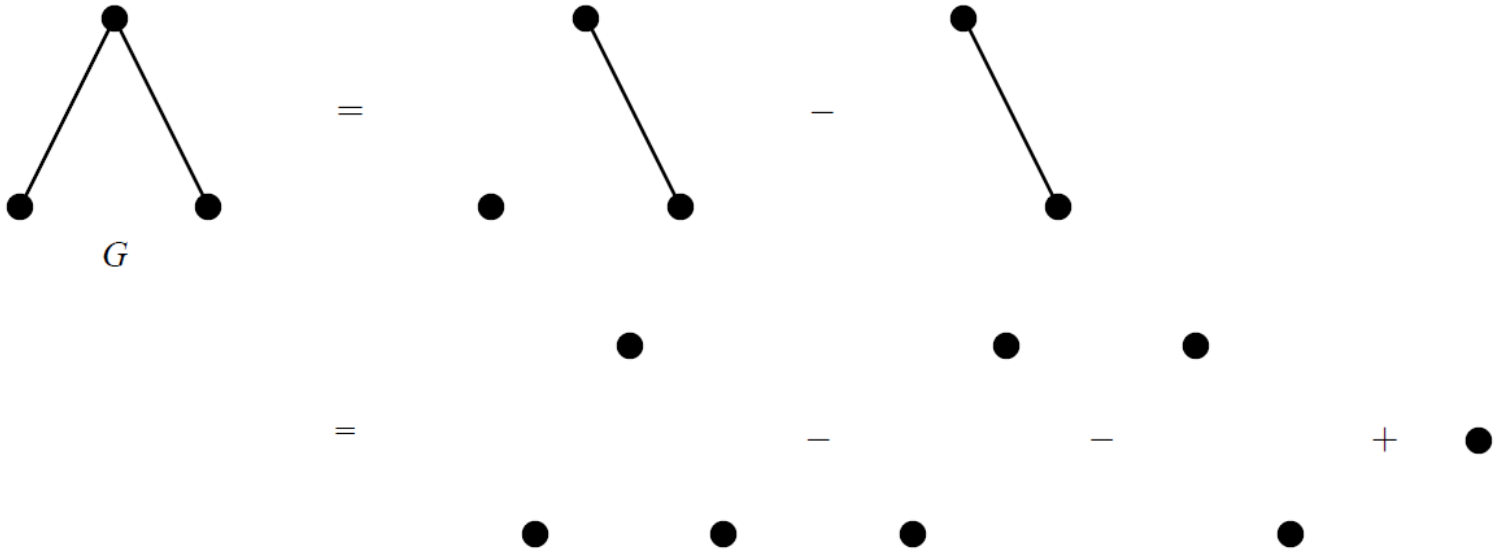
trong đó G_1 nhận được từ G bằng phép nối đỉnh còn G_2 nhận được từ G bằng phép co cạnh.

Bằng cách biểu diễn lại biểu thức trên, chúng ta dễ dàng suy ra rằng:

$$P(G_1, \lambda) = P(G, \lambda) - P(G_2, \lambda).$$

Như vậy, chúng ta có thể xem G_1 như đồ thị ban đầu, G nhận được từ G_1 bằng phép xóa cạnh, G_2 nhận được từ G_1 bằng phép co cạnh. Bằng cách thực hiện lặp lại thao tác này cho nhiều đồ thị nhất có thể, chúng ta sẽ thu được một dãy các đồ thị rỗng. Nếu thuật toán connection – contraction dẫn chúng ta đến một tổ hợp các đồ thị đầy đủ thì thuật toán disconnection – contraction lại dẫn chúng ta đến một tổ hợp các đồ thị rỗng.

Chẳng hạn, xét lại đồ thị $G = (X, E)$ với $X = \{x, y, z\}$ và $E = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ như trong hình vẽ ở trên.



Hình ảnh minh họa thuật toán disconnection – contraction cho đồ thị G .

Áp dụng thuật toán disconnection – contraction cho đồ thị G , chúng ta thu được: $G = E_3 - 2E_2 + E_1$.

Như vậy, $P(G, \lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2$.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng một đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ có thể được xác định theo hai thuật toán hoàn toàn khác nhau: thuật toán disconnection – contraction và thuật toán connection – contraction.

Kết quả sau đây mô tả lại sơ bộ hành vi của các hệ số của đa thức sắc số $P(G, \lambda)$:

Kết quả 4.3.2. (Whitney)

Đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ có bậc $n(G)$ với các hệ số nguyên đan dấu nhau và bắt đầu bởi $1, -m(G), \dots$

Chứng minh kết quả 4.3.2.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo số cạnh $m(G)$. Khẳng định trên là hiển nhiên với $m = 0$ bởi vì trong trường hợp này $G = E_n$ và $P(G, \lambda) = \lambda^n$.

Giả sử tính đúng đắn của khẳng định trên đã được chứng minh cho tất cả các đồ thị có $< m$ cạnh và G là một đồ thị với n đỉnh và $m \geq 1$ cạnh. Xét một cạnh e bất kỳ của đồ thị G . Khi đó, $G - e$ và $G \cdot e$ đều là các đồ thị có ít cạnh hơn G . Hơn nữa, $G \cdot e$ có chính xác $n - 1$ đỉnh.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, tồn tại hai dãy các số nguyên không âm $\{a_i\}$ và $\{b_i\}$ sao cho

$$P(G - e, \lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \lambda^{n-i},$$

$$P(G \cdot e, \lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i b_i \lambda^{n-1-i}.$$

Áp dụng thuật toán disconnection – contraction cho đồ thị G , chúng ta sẽ thu được hệ thức sau:

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= P(G - e, \lambda) - P(G \cdot e, \lambda) \\ &= \lambda^n - (m-1)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^i a_i \lambda^{n-i} - \dots \\ &\quad - (\lambda^{n-1} - b_1\lambda^{n-2} + \dots - (-1)^i b_{i-1}\lambda^{n-i} + \dots) \\ &= \lambda^n - m\lambda^{n-1} + (a_2 + b_1)\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^i (a_i + b_{i-1})\lambda^{n-i} - \dots \end{aligned}$$

□

Kết quả 4.3.3.

Nếu đồ thị G có chứa một clique với kích thước bằng k thì tập tất cả các phép tô màu thực sự của G có thể phân hoạch thành $\lambda^{(k)}$ lớp với $\frac{P(G, \lambda)}{\lambda^{(k)}}$ phép tô màu trong mỗi lớp đó.

Chứng minh kết quả 4.3.3.

Giả sử cho trước một đồ thị liên thông $G = (X, E)$ và một tập đỉnh $S \subseteq X$ nào đó cảm sinh ra một clique có kích thước bằng k . Giả sử cho trước λ màu nào đó. Chọn ra một phép tô màu thực sự nào đó của S với λ màu và xét tất cả các phép λ – tô màu của G có thể thu được bằng cách mở rộng phép λ – tô màu này của S . Kí hiệu N_1 là số các phép λ – tô màu của G có thể thu được bằng cách mở rộng phép λ – tô màu này của S . Chọn ra một phép tô màu thực sự khác của S với λ màu và xét tất cả các phép λ – tô màu của G có thể thu được bằng cách mở rộng phép λ – tô màu khác này của S . Kí hiệu N_2 là số các phép λ – tô màu của G có thể thu được bằng cách mở rộng phép λ – tô màu khác này của S . Chúng ta sẽ chứng minh rằng $N_1 = N_2$. Thật vậy, mọi phép tô màu nằm trong tập thứ hai đều có thể nhận được từ một phép tô màu nào đó nằm trong tập thứ nhất (và ngược lại) bằng cách hoán vị các màu. Phép hoán vị các màu i và j sẽ được hiểu là việc chúng ta tô màu lại tất cả các đỉnh đang được tô màu i bởi màu j và tất cả các đỉnh đang được tô màu j bởi màu i . Do S cảm sinh ra một clique nên tất cả các phép tô màu của S đều khác nhau và hai phép tô màu bất kỳ của S có thể thu được từ nhau bằng cách hoán vị các màu.

Kí hiệu $t = P(G_S, \lambda) = P(K_k, \lambda) = \lambda^{(k)}$. Bằng cách lặp lại lập luận trên cho từng phép tô màu trong số t phép λ – tô màu của S , chúng ta suy ra rằng $N_1 = N_2 = \dots = N_t$. Như vậy, tập tất cả $P(G, \lambda)$ phép tô màu của G có thể được phân hoạch thành t lớp với kích thước bằng nhau. Điều này cũng suy ra rằng số các phép tô màu nằm trong mỗi lớp này đều bằng $\frac{P(G, \lambda)}{\lambda^{(k)}}$. □

Nhận thấy rằng phát biểu của khẳng định trên sẽ không còn đúng nữa nếu tập S không cảm sinh ra một clique. Nếu tập S có k đỉnh và không phải là một clique thì nó sẽ có ít nhất hai đỉnh không liên hợp nhau. Đồ thị con cảm sinh bởi S sẽ có hai phép tô màu khác nhau: một phép tô màu có k màu và một phép tô màu khác có $k-1$ màu. Các phép tô màu này không thể nhận được từ nhau chỉ bằng phép hoán vị các màu. Nếu S cảm sinh ra một clique thì nó sẽ có cùng một phân hoạch khả dĩ duy nhất cho mọi phép tô màu của G .

Kết quả 4.3.4.

Giả sử cho trước một đồ thị liên thông G có chứa một tập tách S là một clique với kích thước bằng k .

Kí hiệu $G_1 = G_{X_1 \cup S}$ và $G_2 = G_{X_2 \cup S}$ là hai đồ thị con dẫn xuất tương ứng của tập tách S .

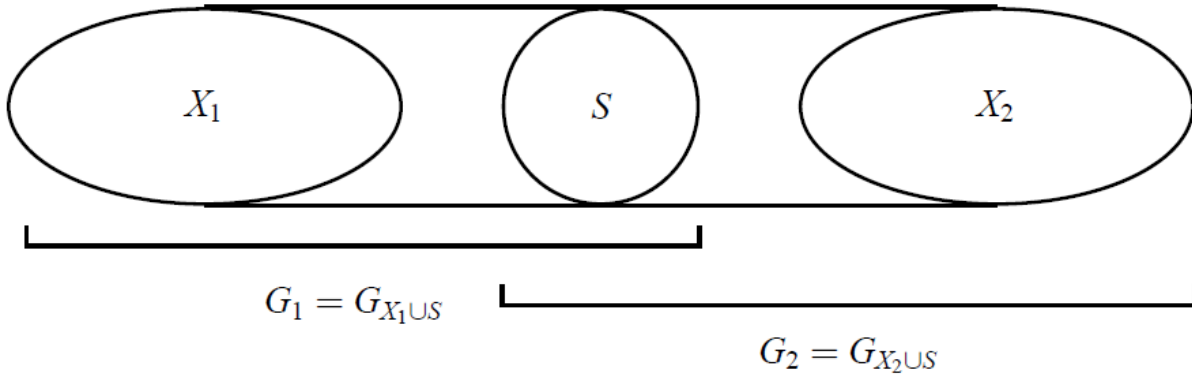
Khi đó, $P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(k)}}$.

Chứng minh kết quả 4.3.4.

Do G_S là một clique có kích thước bằng k trong $G_{X_1 \cup S}$ nên tập tất cả $P(G_{X_1 \cup S}, \lambda)$ phép tô màu của $G_{X_1 \cup S}$ có thể được phân hoạch thành $P(G_S, \lambda) = \lambda^{(k)}$ lớp. Mỗi lớp này đều chứa chính xác $\frac{P(G_{X_1 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}}$ phép tô màu.

Lập luận tương tự, tập tất cả $P(G_{X_2 \cup S}, \lambda)$ phép tô màu của $G_{X_2 \cup S}$ có thể được phân hoạch thành $P(G_S, \lambda) = \lambda^{(k)}$ lớp sao cho mỗi lớp này đều chứa chính xác $\frac{P(G_{X_2 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}}$ phép tô màu.

Nhận thấy rằng chúng ta có thể thu được mọi phép tô màu của G bằng cách tổ hợp mọi phép tô màu từ mỗi lớp của $G_{X_1 \cup S}$ với mọi phép tô màu từ lớp tương ứng của $G_{X_2 \cup S}$.



Hình vẽ minh họa.

Như vậy, tổng số phép tô màu của G sẽ được xác định bởi

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_{X_1 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \frac{P(G_{X_2 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \lambda^{(k)} = \frac{P(G_{X_1 \cup S}, \lambda)P(G_{X_2 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}}.$$

□

Kết quả 4.3.5.

Giả sử cho trước một đồ thị liên thông G có chứa một tập tách S là một clique với kích thước bằng k .

Kí hiệu $G_1, G_2, \dots, G_l$ là các đồ thị con dẫn xuất tương ứng của tập tách S .

Khi đó, $P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_l, \lambda)}{[\lambda^{(k)}]^{l-1}}$.

Chứng minh kết quả 4.3.5.

Do tập S nằm trong mọi đồ thị dẫn xuất nên chúng ta hoàn toàn có thể lặp lại lập luận tương tự cho mọi đồ thị dẫn xuất G_i ($i = 1, 2, \dots, l$). Nhận thấy rằng tất cả các phép tô màu của G đều có thể thu được bằng cách tổ hợp các phép tô màu từ mỗi lớp tương ứng của các đồ thị con dẫn xuất được tạo ra từ bất kỳ một phép tô màu nào của S . Do số các lớp này bằng $\lambda^{(k)}$ nên $P(G, \lambda) = \frac{P(G_{X_1 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \frac{P(G_{X_2 \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \dots \frac{P(G_{X_l \cup S}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \lambda^{(k)} = \frac{P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda) \dots P(G_l, \lambda)}{[\lambda^{(k)}]^{l-1}}$. □

Công thức $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda) \dots P(G_l, \lambda)$ (Kết quả 4.3.1) có thể được xem như là một trường hợp đặc biệt của công thức $P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda) \dots P(G_l, \lambda)}{[\lambda^{(k)}]^{l-1}}$ (Kết quả 4.3.5) nếu chúng ta chấp nhận quan điểm rằng một đồ thị “không liên thông” giống với một đồ thị “liên thông” có một tập tách là tập rỗng và quy ước rằng $P(\emptyset, \lambda) = 1$.

Kết quả 4.3.6.

Nếu G là một đồ thị liên thông có chứa một đỉnh simplicial với bậc k thì $P(G, \lambda) = (\lambda - k)P(G - x, \lambda)$.

Chứng minh kết quả 4.3.6.

Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị đầy đủ thì $G = K_{k+1}$, $G - x = K_k$, nên $P(G, \lambda) = (\lambda - k)P(G - x, \lambda)$

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử G không phải là một đồ thị đầy đủ.

Khi đó, tập các đỉnh láng giềng $N(x)$ sẽ là một tập tách được cảm sinh bởi một clique với k đỉnh.

Áp dụng Kết quả 4.3.4) cho $G_1 = G - x$, $G_2 = K_{k+1}$, $G_S = K_k$, chúng ta suy ra rằng:

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= \frac{P(G_1, \lambda) P(K_{k+1}, \lambda)}{\lambda^{(k)}} \\ &= \frac{P(G - x, \lambda) \lambda^{(k+1)}}{\lambda^{(k)}} \\ &= (\lambda - k)P(G - x, \lambda) \end{aligned}$$

□

Kết quả 4.3.7.

Nếu đồ thị G có chứa một đỉnh simplicial với bậc k thì $r_i(G) = (i - k) r_i(G - x) + r_{i-1}(G - x)$.

Chứng minh kết quả 4.3.7.

Nhắc lại rằng $r_i(G)$ là số phân hoạch khả dĩ của một đồ thị G thành i cell. Hơn nữa, nó sẽ trùng với số phép i – tô màu nghiêm ngặt của G nếu chúng ta không đếm số hoán vị của các màu. Nếu x được tô bởi một trong các màu đã được sử dụng trong $G - x$ thì chúng ta sẽ có $(i - k) r_i(G - x)$ khả năng tô màu khác nhau có thể xảy ra (điều này suy ra từ việc tất cả các màu nằm trong tập các láng giềng của x đều phải khác nhau). Nếu đỉnh x được tô bởi một màu chưa được sử dụng trong $G - x$ thì chúng ta sẽ có $r_{i-1}(G - x)$ khả năng tô màu khác nhau có thể xảy ra. Như vậy, $r_i(G) = (i - k) r_i(G - x) + r_{i-1}(G - x)$. □

Kết quả 4.3.8.

$$S(n, i) = iS(n - 1, i) + S(n - 1, i - 1)$$

Chứng minh kết quả 4.3.8.

Áp dụng Kết quả 4.3.7) cho đồ thị E_n với x là một đỉnh bất kỳ của E_n (lưu ý rằng $r_i(E_n) = S(n, i)$ và mọi đỉnh của E_n đều có thể xem như một đỉnh simplicial với bậc 0). $\square$

4.4. Phép tô màu của các đồ thị chordal

Đồ thị chordal đóng một vị trí đặc biệt quan trọng trong lý thuyết về các phép tô màu vì các nghiệm của các đa thức sắc số của chúng có nhiều tính chất rất đẹp. Nhắc lại nếu G là một đồ thị chordal thì G sẽ có một dãy sắp thứ tự khử simplicial, nghĩa là G có thể phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh simplicial khỏi G .

Giả sử cho trước một đồ thị chordal $G_1 = (X, E), |X| = n$, và $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một dãy sắp thứ tự simplicial tương ứng của G_1 . Kí hiệu $G_2 = G_1 - x_1, G_3 = G_2 - x_2, \dots, G_n = G_{n-1} - x_{n-1} = \{x_n\}$ sao cho $G_{n+1} = G_n - x_n = \emptyset$. Điều này chỉ ra rằng mỗi đỉnh x_i đều là một đỉnh simplicial với bậc k_i trong đồ thị G_i .

Áp dụng Kết quả 4.3.6) cho mỗi đồ thị G_i trong dãy sắp thứ tự ở trên, chúng ta suy ra rằng:

$$\begin{aligned} P(G_1, \lambda) &= (\lambda - k_1)P(G_2, \lambda) \\ &= (\lambda - k_1)(\lambda - k_2)P(G_3, \lambda) \\ &= \dots \\ &= (\lambda - k_1)(\lambda - k_2) \dots (\lambda - k_n) \end{aligned}$$

Chúng ta có thể nhận thấy rằng tất cả các nghiệm của $P(G_1, \lambda)$ đều là các số nguyên và bằng với bậc của đỉnh simplicial tương ứng. Do G_n chỉ bao gồm duy nhất một đỉnh x_n nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $k_n = 0$. Điều này chỉ ra rằng $\lambda = 0$ sẽ là một nghiệm của đa thức sắc số $P(G_1, \lambda)$. Nếu G_1 là một đồ thị không liên thông thì trong mỗi thành phần liên thông đều sẽ có một đỉnh cuối cùng với bậc bằng 0. Như vậy, số bội của nghiệm $\lambda = 0$ sẽ bằng số thành phần liên thông của đồ thị G_1 .

Từ cách định nghĩa của chỉ số clique $\omega(G_1)$, G_1 có chứa một đồ thị con đầy đủ xác định trên $\omega(G_1)$ đỉnh, nên $\omega(G_1) - 1$ sẽ là giá trị lớn nhất có thể có trong số tất cả các bậc k_i . Như vậy, chúng ta cũng thu được nghiệm thứ hai $\lambda = \omega(G_1) - 1$ của đa thức sắc số $P(G_1, \lambda)$. Nhắc lại rằng đánh giá $\omega(G_1) \leq \chi(G_1)$ chỉ ra rằng không có phép tô màu thực sự nào sử dụng ít hơn $\omega(G_1)$ màu. Do đó, mọi số nguyên nằm trong khoảng đóng $[0, \omega(G_1) - 1]$ đều là một nghiệm của $P(G_1, \lambda)$. Như vậy, mọi nghiệm $\lambda = k_i$ đều là các số nguyên nằm trong khoảng $[0, \omega(G_1) - 1]$, một số trong số chúng có thể bị trùng nhau nhưng không có khoảng trống nằm giữa những số nguyên này.

Sau cùng, chúng ta sẽ chứng minh $\chi(G_1) = \omega(G_1)$ bằng cách chỉ ra một phép $\omega(G_1) -$ tô màu thực sự cho các đỉnh của G_1 theo thứ tự nghịch đảo của dãy σ , nghĩa là $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$. Trong trường hợp tổng quát, quy trình này thường được gọi là **thuật toán tô màu trên đường thẳng** bởi vì tất cả các đỉnh của đồ thị G_1 có thể được đặt trên đường thẳng thực và thực hiện tô màu từ trái sang phải (hoặc từ phải sang trái). Điểm

Lí thú ở đây đó chúng ta có thể tô màu các đỉnh của G_1 một cách tuần tự để có được một phép tô màu thực sự của đồ thị G_1 .

Để làm được điều đó, đầu tiên, chúng ta tô màu đỉnh x_n bằng màu 1. Kế tiếp, nếu x_{n-1} không thể tô được bằng màu 1 thì chúng ta sẽ tô màu đỉnh x_{n-1} bằng màu 2. Với đỉnh x_{n-2} , chúng ta sẽ thử tô màu nó bằng màu 1; nếu không thể tô được bằng màu 1 thì chúng ta sẽ tô màu đỉnh x_{n-2} bằng màu 2; nếu không thể tô được bằng màu 2 thì chúng ta sẽ tô màu đỉnh x_{n-2} bằng màu 3. Lặp lại quy trình tô màu trên, mỗi lần, chúng ta hãy thử sử dụng màu có chỉ số nhỏ nhất có thể. Nếu không thể tô được bằng các màu này thì chúng ta mới sử dụng màu mới. Đây chính là nguyên nhân giải thích cho việc thuật toán tô màu trên đường thẳng đôi khi còn được gọi là **thuật toán tô màu tham lam**. Do bậc lớn nhất trong số tất cả các bậc k_i là $\omega(G_1) - 1$ nên chúng ta sẽ thu được một phép tô màu của G_1 bởi $\omega(G_1)$ màu. Điều này chỉ ra rằng $\omega(G_1) = \chi(G_1)$.

Bằng cách kết hợp tất cả các phân tích nêu ở trên, chúng ta suy ra được khẳng định sau:

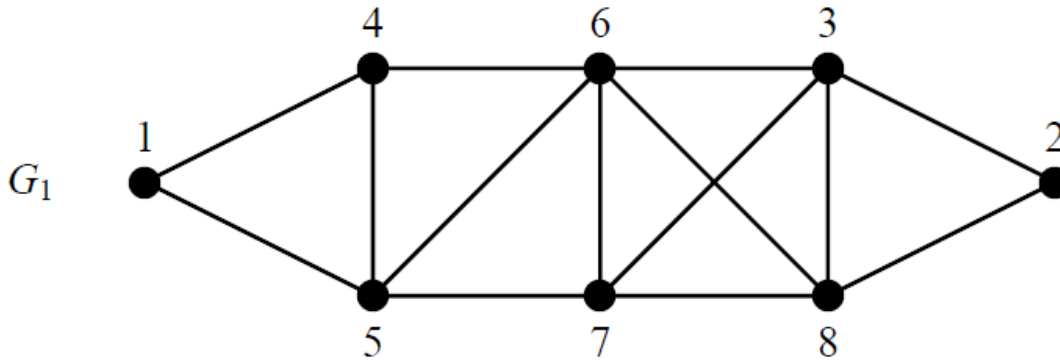
Kết quả 4.4.1.

Nếu G là một đồ thị chordal thì đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ của nó sẽ có dạng

$$P(G, \lambda) = \lambda^{s_0} (\lambda - 1)^{s_1} (\lambda - 2)^{s_2} \dots (\lambda - \chi(G) + 1)^{s_{\chi-1}},$$

trong đó $s_i \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots, \chi - 1$) là số các đỉnh simplicial có bậc bằng i nằm trong dãy sắp thứ tự khử simplicial của G .

Chẳng hạn, xét đồ thị chordal G_1 như trong hình vẽ bên dưới.

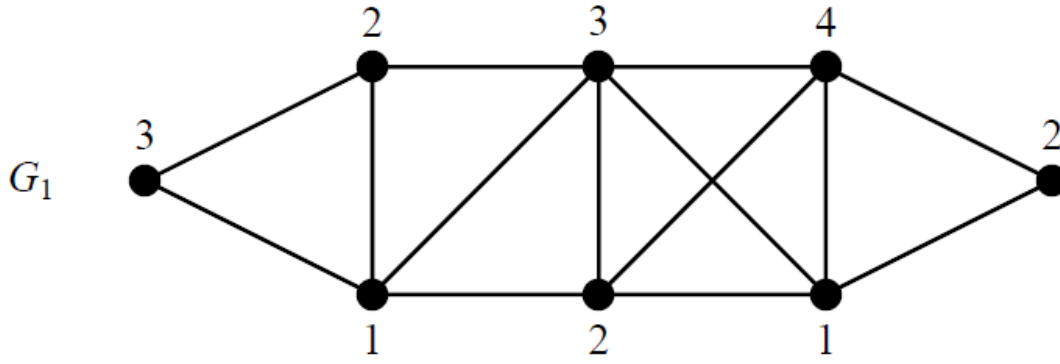


Như chúng ta có thể thấy, G_1 có một dãy sắp thứ tự khử simplicial là $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Bậc tương ứng của các đỉnh simplicial trong dãy σ lần lượt là: 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 0. Chúng đều là nghiệm của đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ và chúng đều nằm trong khoảng đóng $[0, 3]$.

Như vậy,

$$\begin{aligned} P(G_1, \lambda) &= (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 0) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^5(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Do các đỉnh 3, 6, 7, 8 tạo thành clique tối đại duy nhất nằm trong G_1 nên $\chi(G_1) = \omega(G_1) = 4$. Thuật toán tô màu trên đường thẳng được thực hiện theo thứ tự 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (thứ tự nghịch của dãy σ) sẽ tạo ra một phép 4 – tô màu thực sự của đồ thị G_1 .



Hình ảnh minh họa thuật toán tô màu trên đường thẳng

Lưu ý rằng có thể có các phép 4 – tô màu thực sự khác của đồ thị G_1 ; tổng số phép 4 – tô màu thực sự của đồ thị G_1 là $P(G_1, 4) = 4(4 - 1)(4 - 2)^5(4 - 3) = 384$.

Trên thực tế, sẽ rất khó để chúng ta có thể xác định được chính xác số các phép tô màu thực sự theo cách làm thủ công bằng cách vét cạn tất cả các trường hợp. Thậm chí là nếu chúng ta có sử dụng thuật toán connection – contraction đã được phát triển cho tất cả các đồ thị như ở trên thì cũng không tốt hơn được là bao. Cấu trúc đặc biệt của các đồ thị chordal giúp chúng ta có thể phát triển một thuật toán hiệu quả để xác định số các phép tô màu thực sự cho mọi số lượng màu cho sẵn. Tuy nhiên, cấu trúc đặc biệt của các đồ thị chordal còn vượt xa hơn nhiều những điều vừa kể ở trên. Phần còn lại của mục này sẽ được dành để trình bày một số tính chất như vậy của các đồ thị chordal.

Kết quả 4.4.2.

Nếu T_n là một cây xác định trên n đỉnh thì $P(T_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

Chứng minh kết quả 4.4.2.

Nhắc lại rằng các cây là trường hợp đặc biệt của các đồ thị chordal và các đỉnh pendant là trường hợp đặc biệt của các đỉnh simplicial. Phân tích T_n bằng cách loại bỏ dần các đỉnh pendant. Chúng ta thu được $(n - 1)$ đỉnh bậc 1 và một đỉnh bậc 0, nghĩa là $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1, k_n = 0$. $\square$

Kết quả 4.4.3.

Nếu C_n là một chu trình xác định trên n đỉnh thì $P(C_n, \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$.

Chứng minh kết quả 4.4.3.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của công thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số n . Với $n = 1, 2, 3$, tính đúng đắn của công thức trên là hiển nhiên (mặc dù C_1 và C_2 không phải là các đồ thị đơn nhưng công thức trên vẫn được thỏa mãn).

Giả sử công thức trên đã được chứng minh với mọi chu trình xác định trên $< n$ đỉnh. Xét một chu trình C_n bất kỳ. Áp dụng thuật toán disconnection – contraction, chúng ta suy ra được rằng:

$$\begin{aligned} P(C_n, \lambda) &= P(T_n, \lambda) - P(C_{n-1}, \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - [(\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1)] \end{aligned}$$

$$= (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

□

Kế tiếp, chúng ta sẽ nêu ra một số điều kiện cần và đủ của một đồ thị chordal có liên quan đến các đa thức sắc số:

Kết quả 4.4.4.

Một đồ thị G là chordal nếu và chỉ nếu, với mọi đồ thị con cảm sinh G' của G , đa thức sắc số $P(G', \lambda)$ của nó sẽ dạng:

$$P(G', \lambda) = \lambda^{s'_0}(\lambda - 1)^{s'_1} \dots (\lambda - \chi' + 1)^{s'_{\chi'-1}},$$

trong đó $\chi' = \chi'(G')$, $s'_i \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots, \chi' - 1$) là số các đỉnh simplicial có bậc bằng i nằm trong dãy sắp thứ tự khử simplicial của G' .

Chứng minh kết quả 4.4.4.

($\Rightarrow$) Mọi đồ thị con cảm sinh của một đồ thị chordal cũng là một đồ thị chordal. Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ Kết quả 4.4.1).

($\Leftarrow$) Nếu G không phải là một đồ thị chordal thì nó sẽ có chứa một chu trình C_k , $k \geq 4$, như một đồ thị con cảm sinh. Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $\chi(C_k) = 2$ nếu k là một số chẵn và $\chi(C_k) = 3$ nếu k là một số lẻ. Như vậy, tất cả các nghiệm của $P(C_n, \lambda)$ đều phải nằm trong tập $\{0, 1, 2\}$. Từ Kết quả 4.4.3), $P(C_k, \lambda) = (\lambda - 1)^k + (-1)^k(\lambda - 1)$. Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $P(C_k, \lambda)$ là một đa thức có bậc ≥ 4 với ít nhất một nghiệm phức, mâu thuẫn. □

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$, $A \subset X$ là một tập tách bất kỳ, $G'_1 = (X_1, E_1)$, $G'_2 = (X_2, E_2), \dots$, $G'_k = (X_k, E_k)$, $k \geq 2$, là các thành phần liên thông thu được sau khi chúng ta loại bỏ tập tách A cùng với tất cả các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị G .

Nếu G là một đồ thị không liên thông với l thành phần liên thông thì, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $k > l$. Như vậy, $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k \cup A = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$. Nhắc lại rằng các đồ thị con dẫn xuất tương ứng với tập tách S thường sẽ được kí hiệu lại dưới dạng:

$$G_A = G_0, G_{X_1 \cup A} = G_1, G_{X_2 \cup A} = G_2, \dots, G_{X_k \cup A} = G_k.$$

Kết quả 4.4.5.

Một đồ thị $G = (X, E)$ là chordal nếu và chỉ nếu, với mọi đồ thị con cảm sinh $G' = (X', E')$ và, với mọi tập tách $A' \subset X'$ của G' ,

$$P(G', \lambda) = \frac{P(G'_1, \lambda)P(G'_2, \lambda) \dots P(G'_k, \lambda)}{P(G'_0, \lambda)^{k-1}}$$

Chứng minh kết quả 4.4.5.

($\Rightarrow$) Do mọi đồ thị con cảm sinh của một đồ thị chordal cũng là một đồ thị chordal nên chúng ta chỉ cần kiểm chứng được tính đúng đắn của khẳng định trên cho $G' = G$ là đủ. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|X| = n$. Với $n = 2, 3, 4$, tính đúng

đến của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đã được kiểm chứng là đúng với tất cả các đồ thị chordal có ít hơn n đỉnh với $n > 4$. Giả sử $x_0 \in X$ là một đỉnh simplicial với bậc bằng p trong đồ thị G . Có hai trường hợp có thể xảy ra như sau:

Trường hợp 1. $x_0 \notin A$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $x_0 \in X_1$. Do A là một tập tách và x_0 là một đỉnh simplicial trong G nên $N(x_0) \subseteq X_1 \cup A$. Như vậy, x_0 là một đỉnh simplicial trong G_1 .

Áp dụng Kết quả 4.3.6) cho đồ thị G_1 , chúng ta suy ra rằng:

$$P(G_1, \lambda) = (\lambda - p)P(G_1 - x_0, \lambda).$$

Áp dụng Kết quả 4.3.6) cho đồ thị G , chúng ta suy ra rằng:

$$P(G, \lambda) = (\lambda - p)P(G - x_0, \lambda).$$

Nhận thấy rằng A cũng là một tập tách trong $G - x_0$ với cùng số đồ thị dẫn xuất như trong G . Hơn nữa, $n(G - x_0) < n(G) = n$, nên, từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta suy ra rằng:

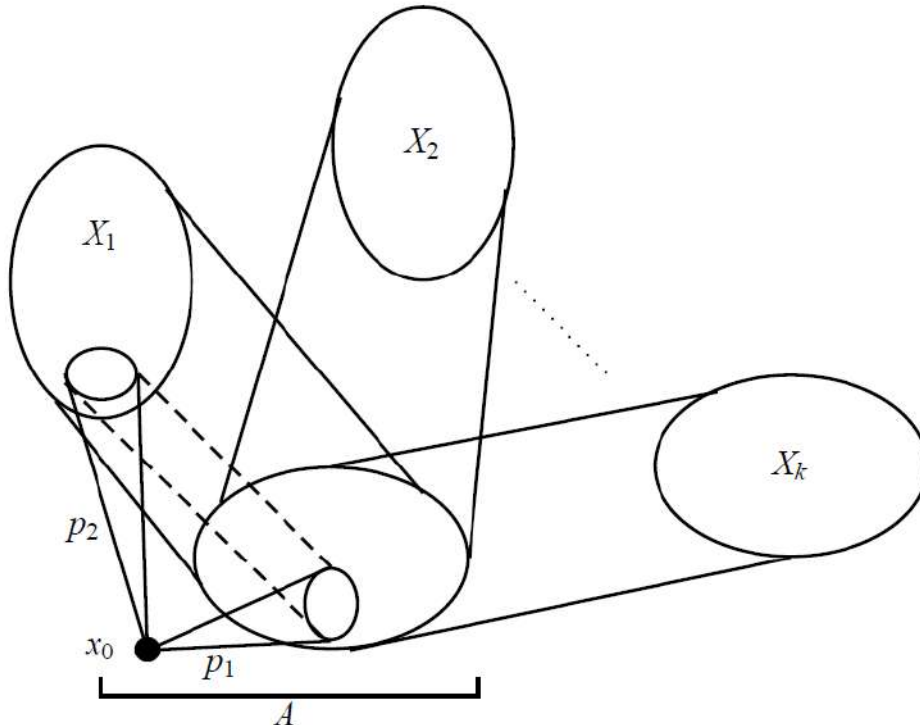
$$P(G - x_0, \lambda) = \frac{P(G_1 - x_0, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)}{P(G_0, \lambda)^{k-1}}$$

. Bằng cách nhân cả hai vế của đẳng thức trên với nhân tử $(\lambda - p)$, chúng ta suy ra rằng:

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)}{P(G_0, \lambda)^{k-1}}$$

Trường hợp 2. $x_0 \in A$.

Kí hiệu $p_1 := |N(x_0) \cap A|$. Do $N(x_0)$ cảm sinh ra một đồ thị đầy đủ nên $p - p_1 = p_2$ đỉnh còn lại của $N(x_0)$ sẽ nằm trong nhiều nhất một tập X_i , $1 \leq i \leq n$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử p_2 đỉnh còn lại của $N(x_0)$ đều nằm trong tập X_1 .



Hình vẽ minh họa.

Khi đó, $\{x_0\} \cup N(x_0) \subseteq X_1 \cup A$, $N(x_0) \cap A \subseteq X_i \cup A$, $1 \leq i \leq k$.

Nhận thấy rằng x_0 là một đỉnh simplicial trong G_1 với bậc p . Hơn nữa, x_0 cũng là một đỉnh simplicial trong các đồ thị con G_i ($i = 0, 2, 3, \dots, k$) với bậc p_1 .

Áp dụng Kết quả 4.3.6) cho đồ thị G , chúng ta suy ra rằng:

$$P(G, \lambda) = (\lambda - p)P(G - x_0, \lambda).$$

Nhận thấy rằng $A - x_0$ cũng là một tập tách trong $G - x_0$ với cùng số đồ thị dẫn xuất như trong G . Hơn nữa, $n(G - x_0) < n(G) = n$, nên, từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta suy ra rằng:

$$P(G - x_0, \lambda) = \frac{P(G'_1, \lambda)P(G'_2, \lambda) \dots P(G'_k, \lambda)}{P(G'_0, \lambda)^{k-1}}$$

trong đó G'_i nhận được từ đồ thị G_i , $i = 0, 1, \dots, k$, bằng cách xóa đỉnh x_0 .

Áp dụng Kết quả 4.3.6) cho các đồ thị G_i , $i = 0, 1, \dots, k$, chúng ta suy ra rằng:

$$P(G_1, \lambda) = (\lambda - p)P(G'_1, \lambda)$$

$$P(G_i, \lambda) = (\lambda - p_1)P(G'_i, \lambda), i = 0, 2, \dots, k.$$

Như vậy, chúng ta suy ra rằng:

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)}{P(G_0, \lambda)^{k-1}}$$

($\Leftarrow$) Giả sử G không phải là một đồ thị chordal. Khi đó, G có chứa một chu trình C_k , $k \geq 4$, dưới dạng một đồ thị con cảm sinh. Giả sử x là một đỉnh bất kỳ nằm trên chu trình C_k . Do $N(x)$ là một tập tách nên, áp dụng kết quả của chiều thuận, chúng ta suy ra rằng:

$$P(C_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2 \lambda(\lambda - 1)^{k-2} \lambda^{-2} = (\lambda - 1)^k \neq P(C_k, \lambda) \quad \square$$

Như chúng ta có thể nhận thấy, công thức $P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \dots P(G_k, \lambda)}{P(G_0, \lambda)^{k-1}}$ là đúng đối với mọi đồ thị tùy ý với điều kiện là tập tách cảm sinh ra một đồ thị đầy đủ (Kết quả 4.3.5). Kết quả 4.4.5) lại chỉ ra rằng, trong một đồ thị chordal, công thức này là đúng đối với mọi tập tách bất kỳ. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng công thức này cũng đúng cả khi G là một đồ thị không liên thông và G_A là một tập tách rỗng. Nếu chúng ta chấp nhận quan điểm $P(\phi, \lambda) = 1$ thì công thức này sẽ chuyển thành công thức tính đa thức sắc số cho các đồ thị không liên thông G với các thành phần liên thông tương ứng là $G_1, \dots, G_k$ (trường hợp $A = \phi$).

Từ quan điểm nêu trên, chúng ta có thể xem các đồ thị chordal như là các “đồ thị đầy đủ có tập tách”. Tuy nhiên, Kết quả 4.4.5) còn chỉ ra một hệ quả quan trọng khác sau đây:

Với mọi đồ thị G , xét hàm $W(G, \lambda) := \frac{\lambda P(G, \lambda - 1)}{P(G, \lambda)}$.

Kết quả 4.4.6. (Công thức universal)

Một đồ thị $G = (X, E)$ là chordal nếu và chỉ nếu, với mọi đồ thị con cảm sinh liên thông $G' = (X', E')$ và mọi đỉnh $x \in X'$, chúng ta luôn có đẳng thức sau:

$$P(G', \lambda) = P(G' - x, \lambda)W(G'_{N(x)}, \lambda)$$

Chứng minh kết quả 4.4.6.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một đồ thị chordal G . Do mọi đồ thị con cảm sinh của một đồ thị chordal cũng là một đồ thị chordal nên chúng ta chỉ cần chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên cho $G' = G$ là đủ. Như vậy, không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị chordal liên thông và $x \in X$ là một đỉnh bất kỳ nào đó.

Trường hợp 1. $X = \{x\} \cup N(x)$.

Do, trong mọi phép λ – tô màu của G , đỉnh x luôn có một màu riêng biệt nên

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= \lambda P(G - x, \lambda - 1) \\ &= \frac{P(G - x, \lambda)}{P(G - x, \lambda)} \lambda P(G - x, \lambda - 1) \\ &= P(G - x, \lambda)W(G_{N(x)}, \lambda). \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $X \neq \{x\} \cup N(x)$.

Do G là một đồ thị liên thông nên đồ thị con $G_{N(x)}$ cũng là một tập tách.

Áp dụng Kết quả 4.4.5), chúng ta suy ra rằng:

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= \frac{P(G - x, \lambda)P(G_{\{x\} \cup N(x)}, \lambda)}{P(G_{N(x)}, \lambda)} \\ &= P(G - x, \lambda) \frac{\lambda P(G_{N(x)}, \lambda - 1)}{P(G_{N(x)}, \lambda)} \\ &= P(G - x, \lambda)W(G_{N(x)}, \lambda). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Giả sử G không phải là một đồ thị chordal và công thức $P(G', \lambda) = P(G' - x, \lambda)W(G'_{N(x)}, \lambda)$ đúng với mọi đồ thị con liên thông G' . Khi đó, G có chứa một chu trình cảm sinh C_k , $k \geq 4$. Giả sử x là một đỉnh bất kỳ của chu trình C_k . Nhận thấy rằng $C_k - x$ là một cây xác định trên $(k - 1)$ đỉnh và $(C_k)_{N(x)} = E_2$.

Chúng ta nhận thấy rằng $P(C_k - x, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{k-2}$ và $W((C_k)_{N(x)}, \lambda) = \lambda^{-1}(\lambda - 1)^2$, nên

$$P(C_k, \lambda) = P(C_k - x, \lambda)W((C_k)_{N(x)}, \lambda) = (\lambda - 1)^k \neq P(C_k, \lambda), \text{ mâu thuẫn}$$

□

Kết quả 4.4.7.

Nếu x là một đỉnh simplicial với bậc bằng $k \geq 0$ trong một đồ thị chordal G thì

$$P(G, \lambda) = (\lambda - k)P(G - x, \lambda).$$

Chứng minh kết quả 4.4.7.

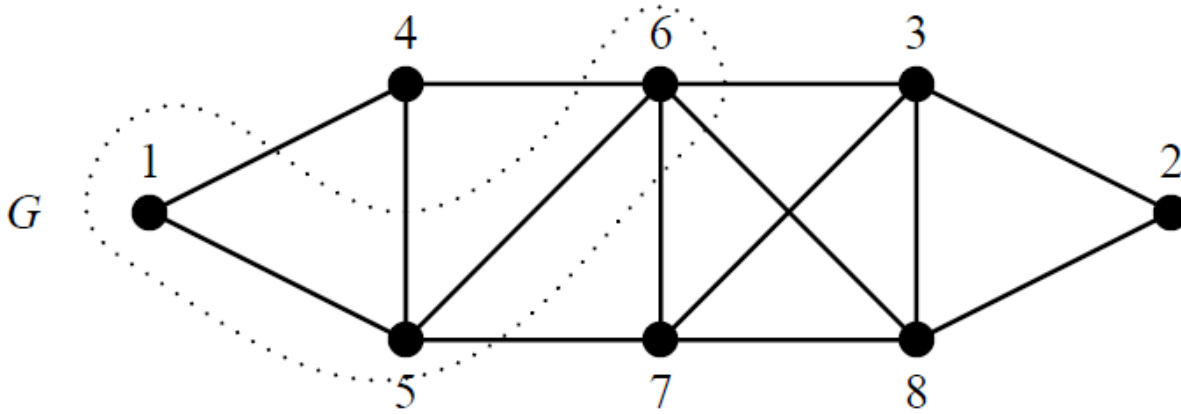
Từ giả thiết của bài toán, $N(x) = K_k$, nên $W(G_{N(x)}, \lambda) = W(K_k, \lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)^{(k)}}{\lambda^{(k)}} = \lambda - k$.

Áp dụng Kết quả 4.4.6), chúng ta suy ra rằng

$$P(G, \lambda) = P(G - x, \lambda)W(G_{N(x)}, \lambda) = (\lambda - k)P(G - x, \lambda). \quad \square$$

Như vậy, phép phân tích một đồ thị chordal bằng cách sử dụng một dãy sắp thứ tự khủ simplicial chỉ là một trường hợp đặc biệt của phép phân tích tổng quát bằng cách loại bỏ dần các đỉnh theo một dãy sắp thứ tự tùy ý và sử dụng Kết quả 4.4.6).

Chẳng hạn, xét đồ thị chordal G như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa cách áp dụng của công thức universal.

Giả sử chúng ta xóa đỉnh không simplicial là 4 và thu được một đồ thị G_1 . Để xác định đa thức sắc số $P(G, \lambda)$ từ đồ thị G_1 , chúng ta chỉ cần nhân đa thức sắc số $P(G_1, \lambda)$ với $W(G_{N(4)}, \lambda)$. Do $N(4) = \{1, 5, 6\}$ nên đồ thị con cảm sinh $G_{N(4)}$ sẽ là một cây xác định trên 3 đỉnh được khoanh lại bởi các dấu chấm tròn như trong hình vẽ.

$$\text{Nhu vậy, } W(G_{N(4)}, \lambda) = \frac{\lambda P(T_3, \lambda-1)}{P(T_3, \lambda)} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2}{\lambda(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda-2)^2}{\lambda-1}.$$

Nếu chúng ta phân tích G_1 bằng cách loại bỏ dần các đỉnh simplicial theo thứ tự 1, 5, 6, 7, 8, 3, 2 thì bậc của các đỉnh simplicial lần lượt sẽ là: 1, 2, 3, 2, 2, 1, 0. Chúng ta sẽ dễ dàng tính được

$$P(G_1, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3(\lambda - 3).$$

$$\text{Nhu vậy, } P(G, \lambda) = W(G_{N(4)}, \lambda)P(G_1, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3(\lambda - 3) \frac{(\lambda-2)^2}{\lambda-1} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^5(\lambda - 3).$$

4.5. Phép tô màu của các đồ thị khả phẳng

Nhắc lại rằng với một đồ thị $G = (X, E)$ bất kỳ, chỉ số Szekeres – Wilf được định nghĩa bởi công thức

$$M(G) = \max_{X' \subseteq X} \min_{x \in G' = (X', E')} d(x),$$

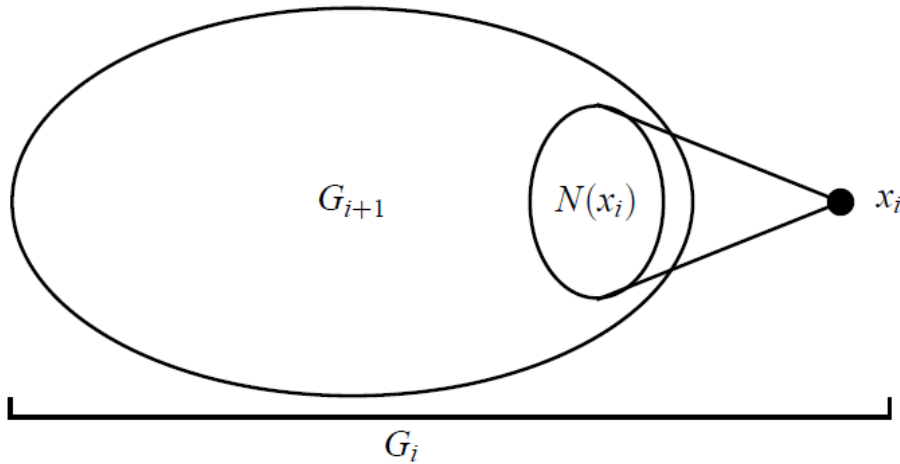
trong đó $d(x)$ là bậc của đỉnh x trong đồ thị con G' cảm sinh bởi tập đỉnh con X' . Như chúng ta đã đề cập đến ở mục “2.2. Đồ thị chordal/Đồ thị tam giác phân”, chỉ số này có thể dễ dàng tính được bằng cách loại bỏ dần các đỉnh có bậc nhỏ nhất; bậc lớn nhất nhận được trong thủ tục này chính là chỉ số $M(G)$.

Kết quả 4.5.1.

Với mọi đồ thị G , $\chi(G) \leq M(G) + 1$.

Chứng minh kết quả 4.5.1.

Phân tích G bằng cách loại bỏ dần các đỉnh có bậc nhỏ nhất. Chúng ta sẽ thu được một dãy các đồ thị $G_1 = G, G_2, \dots, G_n$ và một dãy các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_n$ tương ứng sao cho mỗi đỉnh x_i đều là một đỉnh có bậc nhỏ nhất trong đồ thị $G_i, i = 1, \dots, n$. Kế tiếp, chúng ta áp dụng thuật toán tô màu trên đường thẳng cho đồ thị G bằng cách tái tạo nó lại theo thứ tự $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Điều này có nghĩa là chúng ta sẽ tô màu các đỉnh theo thứ tự $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ sao cho mỗi lần tô màu như vậy chúng ta luôn sử dụng ít màu nhất có thể được. Trong dãy sắp thứ tự $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ này, số tối đa các đỉnh láng giềng đã được tô màu của đỉnh x_i sẽ là $M(G)$.



Hình vẽ minh họa: G_{i+1} đã được tô màu, x_i chưa được tô màu.

Trường hợp xấu nhất xảy ra khi tất cả $M(G)$ đỉnh láng giềng của x_i đều có màu đối một phân biệt nhau (trường hợp ngược lại, chúng ta chỉ cần gán cho đỉnh x_i màu đầu tiên bị thiếu). Sau đó, chúng ta sẽ gán màu thứ $(M(G) + 1)$ cho đỉnh x_i và tiếp tục áp dụng thuật toán tô màu trên đường thẳng. Mặc dù trường hợp xấu nhất có thể xảy ra một vài lần nhưng tổng số màu được sử dụng trong phép tô màu không bao giờ vượt quá $(M(G) + 1)$. $\square$

Kết quả 4.5.2.

Nếu G là một đồ thị khả phẳng thì $\chi(G) \leq 6$.

Chứng minh kết quả 4.5.2.

Nhắc lại rằng nếu G là một đồ thị khả phẳng thì G sẽ có chứa một đỉnh có bậc ≤ 5 (Kết quả 3.2.4). Hơn nữa, mọi đồ thị con của G cũng là một đồ thị khả phẳng. Do đó, trong mọi phép phân tích nào của G bằng cách loại bỏ dần các đỉnh có bậc nhỏ nhất, bậc của mọi đỉnh không bao giờ vượt quá 5. Như vậy, $M(G) \leq 5$.

Từ Kết quả 4.5.1), $\chi(G) \leq 6$. □

Kết quả 4.5.3. (Định lí năm màu/Heawood)

Nếu G là một đồ thị khả phẳng thì $\chi(G) \leq 5$.

Chứng minh kết quả 4.5.3.

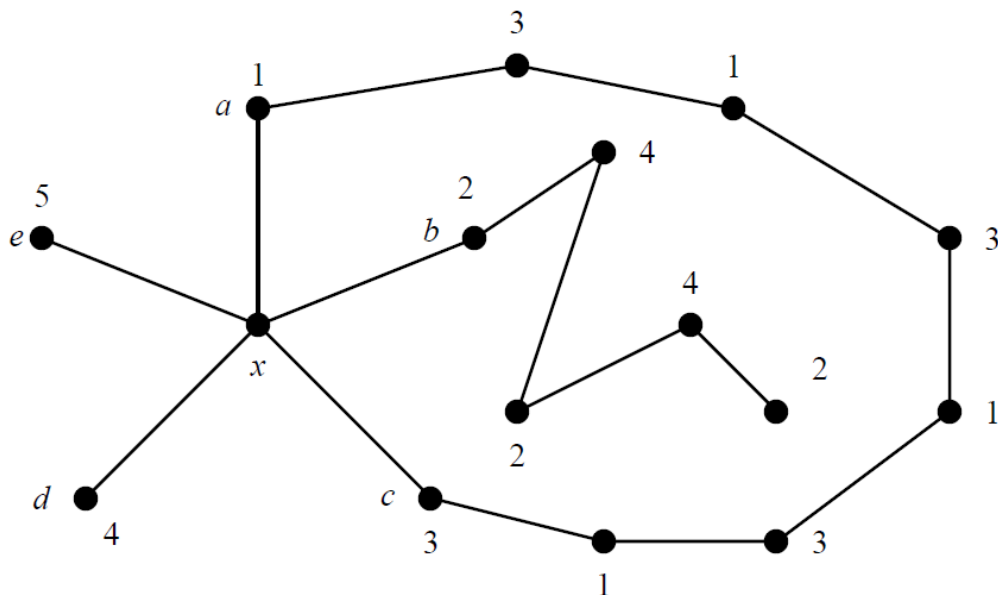
Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $n = n(G)$. Hiển nhiên, tất cả các đồ thị khả phẳng có ≤ 5 đỉnh đều là 5 – colourable.

Kế tiếp, giả sử rằng tính đúng đắn của khẳng định trên đã được kiểm chứng cho tất cả các đồ thị khả phẳng có $< n$ đỉnh, nghĩa là tất cả các đồ thị khả phẳng có $< n$ đỉnh đều là 5 – colourable. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\chi(G) \leq 5$. Từ Kết quả 3.2.4), G sẽ có chứa một đỉnh x có bậc $d(x) \leq 5$. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $\chi(G - x) \leq 5$. Xét một phép 5 – tô màu thực sự bất kỳ của $G - x$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng luôn có cách để chúng ta gán một màu cho đỉnh x sao cho G là 5 – colourable. Theo cách làm này, tất cả các đỉnh của $N(x)$ cũng được tô bằng cùng một số màu như G . Chúng ta sẽ có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Số màu được sử dụng trong $N(x) \leq 4$. Khi đó, chúng ta sẽ gán màu thứ 5 cho đỉnh x và thu được một phép 5 – tô màu của G .

Trường hợp 2. Số màu được sử dụng trong $N(x)$ bằng 5. Như vậy, $d(x) = 5$. Ý tưởng chính của phần còn lại của phép chứng minh này là chỉ ra rằng chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng một phép 5 – tô màu thực sự khác của $G - x$ chỉ sử dụng 4 màu trong tập láng giềng $N(x)$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, kí hiệu $N(x) = \{a, b, c, d, e\}$ với các màu tương ứng là 1, 2, 3, 4, 5.



Hình vẽ minh họa.

Trường hợp con 2.1. Trong phép 5 – tô màu của $G - x$, tồn tại một (a, c) – đường đi P với tất cả các đỉnh được tô màu thay phiên nhau bởi hai màu 1 và 3 như trong hình vẽ ở trên. Đường đi P cùng với cạnh ax và xc tạo thành một chu trình C trong mặt phẳng với tất cả các đỉnh được tô bởi hai màu 1 và 3, và đỉnh x chưa được tô bởi màu nào. Bằng cách hoán đổi các màu 2 và 4 trên các đỉnh nằm trong mặt phẳng bên trong chu trình C . Nhận thấy rằng việc tô màu lại như vậy sẽ không làm ảnh hưởng đến các màu 2 và 4 nằm trong mặt phẳng bên ngoài chu trình C . Như vậy, sau khi chúng ta hoán đổi các màu 2 và 4 như trên, đỉnh 4 vẫn được giữ nguyên màu 4. Chúng ta sẽ thu được một phép 5 – tô màu thực sự của $G - x$ trong đó các đỉnh d và b đều được tô bởi cùng màu 4. Trong phép tô màu mới này, màu 2 sẽ bị thiếu trong tập láng giềng $N(x)$. Bằng cách gán màu 2 cho đỉnh x , chúng ta thu được một phép 5 – tô màu thực sự của G .

Trường hợp con 2.2. Trong phép 5 – tô màu của $G - x$, không tồn tại bất kỳ (a, c) – đường đi P nào với tất cả các đỉnh được tô màu thay phiên nhau bởi hai màu 1 và 3. Kí hiệu G_{13} là đồ thị con của $G - x$ cảm sinh bởi các đỉnh được tô bởi hai màu 1 và 3. Khi đó, G_{13} là một đồ thị không liên thông và các đỉnh a và c sẽ phải nằm trong các thành phần liên thông khác nhau của G_{13} . Bằng cách hoán đổi các màu 1 và 3 trong thành phần liên thông của G_{13} có chứa đỉnh a . Chúng ta sẽ thu được một phép 5 – tô màu thực sự của $G - x$ trong đó màu 1 bị thiếu trong tập láng giềng $N(x)$. Bằng cách gán màu 1 cho đỉnh x , chúng ta thu được một phép 5 – tô màu thực sự của G . □

Kết quả 4.5.4. (Định lí bốn màu/Appel – Haken - Koch)

Nếu G là một đồ thị khả phẳng thì $\chi(G) \leq 4$.

Phép chứng minh của Kempe – Phép chứng minh sai nổi tiếng nhất trong lịch sử của lý thuyết đồ thị.

Chúng ta sẽ “chứng minh” tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $n = n(G)$. Do K_5 không phải là một đồ thị khả phẳng nên tất cả các đồ thị khả phẳng có ≤ 5 đỉnh đều là 4 – colourable.

Kế tiếp, giả sử rằng tính đúng đắn của khẳng định trên đã được kiểm chứng cho tất cả các đồ thị khả phẳng có $< n$ đỉnh, nghĩa là tất cả các đồ thị khả phẳng có $< n$ đỉnh đều là 4 – colourable. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\chi(G) \leq 4$. Nhắc lại rằng bất kỳ đồ thị phẳng nào cũng đều có thể chuyển thành một đồ thị tam giác phân phẳng (một đồ thị phẳng với tất cả các cạnh đều là các tam giác) bằng cách bổ sung thêm các cạnh nào đó. Nếu chúng ta có thể chứng minh rằng mọi đồ thị tam giác phân phẳng đều là 4 – colourable thì chúng ta cũng sẽ chứng minh được rằng mọi đồ thị phẳng đều là 4 – colourable. Như vậy, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng G là một đồ thị tam giác phân phẳng.

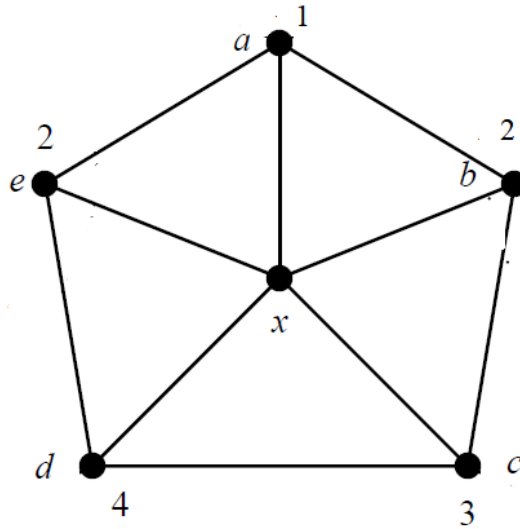
Từ Kết quả 3.2.4), G có chứa ít nhất một đỉnh x có bậc $d(x) \leq 5$. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $\chi(G - x) \leq 4$. Xét một phép 4 – tô màu thực sự bất kỳ của $G - x$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng luôn có cách để chúng ta gán một màu cho đỉnh x sao cho G là 4 – colourable. Theo cách làm này, tất cả các đỉnh của $N(x)$ cũng được tô bằng cùng một số màu như G . Chúng ta sẽ có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Số màu được sử dụng trong $N(x) \leq 3$. Khi đó, chúng ta sẽ gán màu thứ 4 cho đỉnh x và thu được một phép 4 – tô màu của G .

Trường hợp 2. Số màu được sử dụng trong $N(x)$ bằng 4. Như vậy, $d(x) = 4$ hoặc $d(x) = 5$.

Trường hợp con 2.1. $d(x) = 4$. Bằng cách áp dụng cùng một phép suy luận như đã trình bày trong chứng minh của Kết quả 4.5.3) cho $G' = G - e$, chúng cũng thu được một phép 4 – tô màu thực sự của G .

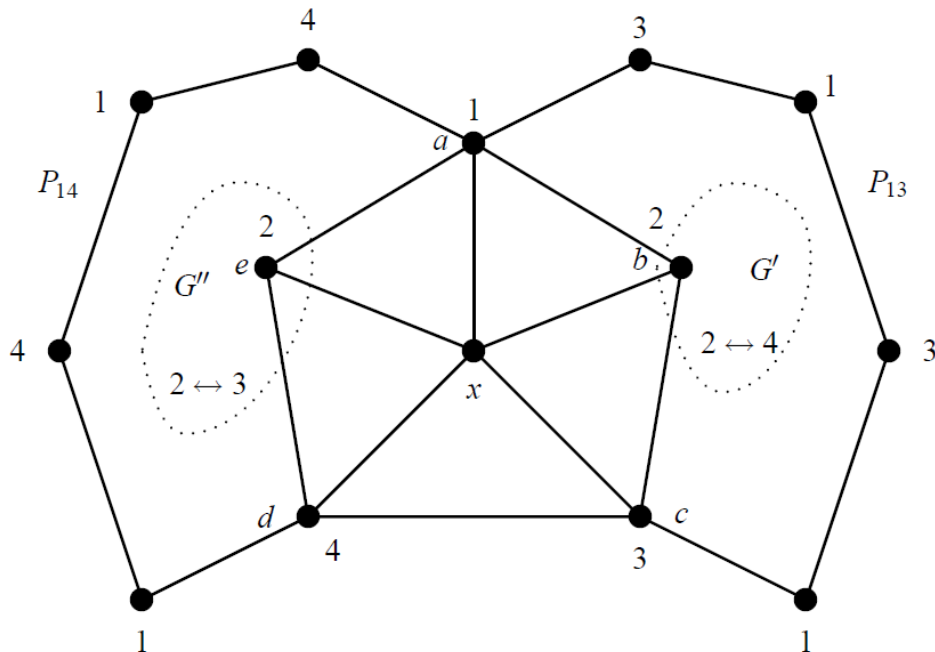
Trường hợp con 2.2. $d(x) = 5$. Do số màu được sử dụng trong $N(x)$ là 4 nên sẽ phải có hai đỉnh nào đó được tô bởi cùng một màu. Kí hiệu $N(x) = \{a, b, c, d, e\}$ với các màu tương ứng là 1, 2, 3, 4. Do chúng ta giả sử rằng G là một đồ thị tam giác phân nên các đỉnh được tô bởi cùng một màu không thể nằm liên tiếp nhau theo thứ tự a, b, c, d, e . Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng các màu 1, 2, 3, 4 được phân bố như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa.

Kí hiệu G_{ij} là đồ thị con cảm sinh bởi các đỉnh được tô bởi các màu i và j , P_{ij} là một đường đi nào đó với tất cả các đỉnh được tô màu thay phiên nhau bởi các màu i và j .

Trường hợp 2.2.1. Trong phép 4 – tô màu của $G - x$, tồn tại một (a, c) – đường đi P_{13} cũng như tồn tại một (a, d) – đường đi P_{14} như trong hình vẽ ở trên.



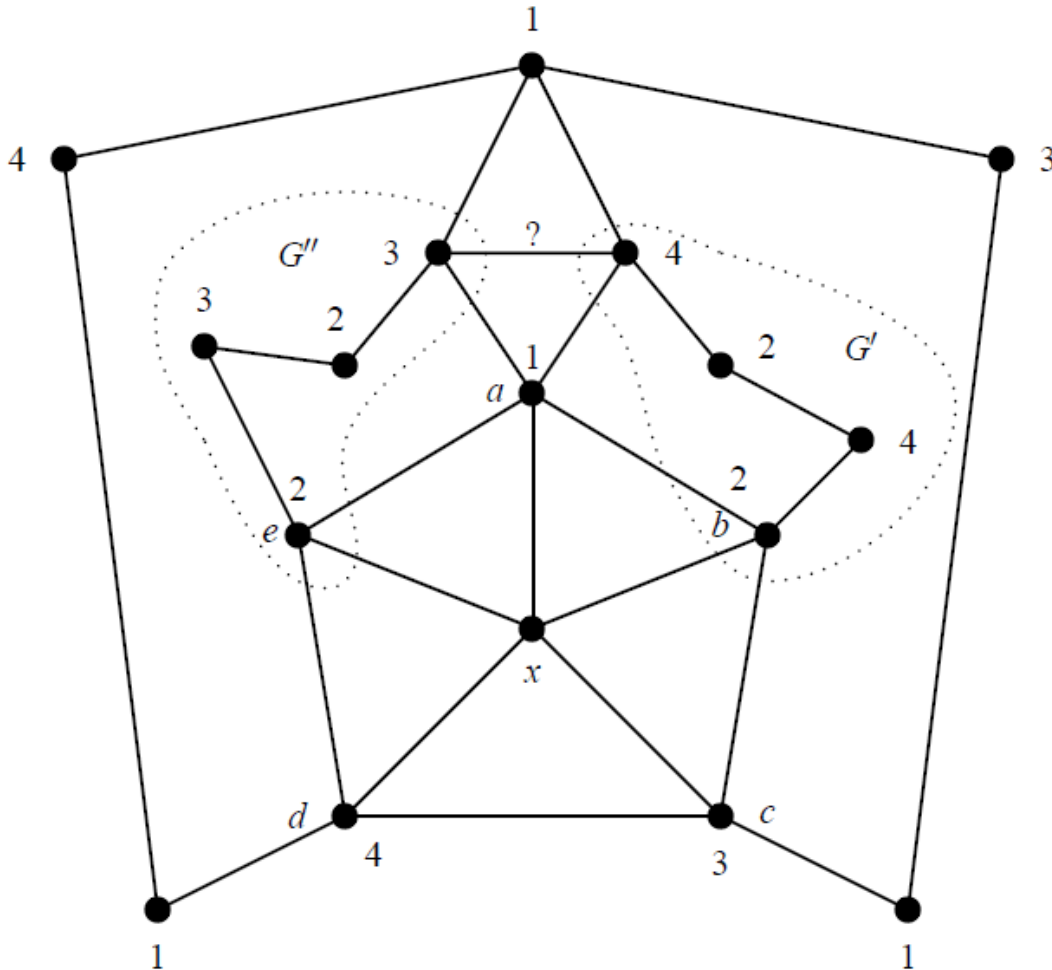
Hình vẽ minh họa phép chứng minh của Kempe.

Nhận thấy rằng thành phần liên thông G' của G_{24} có chứa đỉnh b sẽ được tách ra khỏi đỉnh d và e bởi chu trình $P_{13} \cup \{ax\} \cup \{xc\}$. Lập luận tương tự thành phần liên thông G'' của G_{23} có chứa đỉnh e sẽ được tách ra khỏi đỉnh b và c bởi chu trình $P_{14} \cup \{ax\} \cup \{xd\}$. Kế tiếp, chúng ta sẽ hoán đổi màu 2 với màu 4 trong G' và màu 2 với màu 3 trong G'' . Việc tô màu lại như vậy sẽ loại bỏ màu 2 khỏi $N(x)$. Bằng cách gán màu 2 cho đỉnh x , chúng ta thu được một phép 4 – tô màu thực sự của G .

Trường hợp 2.2.2. Trong phép 4 – tô màu của $G - x$, không tồn tại bất kỳ (a, c) – đường đi P_{13} hoặc (a, d) – đường đi P_{14} nào.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng không tồn tại bất kỳ (a, c) – đường đi P_{13} nào. Khi đó, đồ thị con G_{13} là một đồ thị không liên thông và các đỉnh a và c phải nằm trong các thành phần liên thông khác nhau của G_{13} . Bằng cách hoán đổi màu 1 và 3 trong thành phần liên thông có chứa đỉnh a , chúng ta sẽ loại bỏ màu 1 khỏi $N(x)$. Bằng cách gán màu 1 cho đỉnh x , chúng ta thu được một phép 4 – tô màu thực sự của G . Lập luận tương tự cho trường hợp không tồn tại bất kỳ (a, d) – đường đi P_{14} nào. $\square$

Một câu hỏi được đặt ra ở đây đó là: “Lỗi sai trong lập luận của Kempe nằm ở đâu?”. Câu trả lời cho vấn đề này được mô tả lại trong hình vẽ bên dưới đây. Mấu chốt vấn đề nằm ở chỗ, trong trường hợp con 2.2.1, (a, c) – đường đi P_{13} và (a, d) – đường đi P_{14} có thể giao nhau tại một đỉnh được tô bởi màu 1.



Hình ảnh minh họa lỗi sai trong phép chứng minh của Kempe.

Khi đó, sau khi chúng ta hoán đổi hai màu 2, 4 trong G' và hai màu 2, 3 trong G'' , chúng ta sẽ thu được một cặp đỉnh liên hợp nhau nhưng được tô bởi cùng màu 2, nghĩa là phép tô màu mới nhận được không phải là một phép tô màu thực sự của G .

Phép chứng minh mà chúng ta vừa trình bày ở trên được giới thiệu lần đầu tiên bởi Kempe vào năm 1879. Một mặt, phép chứng minh trên là một ví dụ tuyệt vời cho việc sử dụng các hình vẽ trong việc chứng minh các kết quả trong lý thuyết đồ thị. Mặt khác, phép chứng minh này cũng thể hiện rõ ràng những hạn chế của việc chúng ta sử dụng các hình vẽ trong việc chứng minh các kết quả trong lý thuyết đồ thị.

Vào năm 1890, Headwood đã tìm ra được lỗi nêu trên trong phép chứng minh của Kempe. Từ đó, định lý bốn màu đã trở thành một trong những bài toán nổi tiếng nhất trong mảng toán học rời rạc trong thế kỷ 20 trước những năm 1977. Vào năm 1976, Appel, Haken, Koch đã chứng minh hoàn chỉnh lần đầu tiên định lý bốn màu này. Bên cạnh việc xuất hiện nhiều cách chứng minh sai lầm, việc đi tìm lời giải cho định lý bốn màu cũng đã tạo ra nhiều hướng nghiên cứu mới trong lý thuyết đồ thị. Chẳng hạn, chỉ một hướng nghiên cứu phụ của đa thức sắc số được Birkhoff giới thiệu vào năm 1912 với mục đích giải quyết định lý bốn màu bằng con đường phương pháp đếm cũng đã được hơn 500 bài báo nghiên cứu.

Ý tưởng chính trong phép chứng minh cuối cùng của Appel, Haken, Koch thật ra khá là đơn giản: phương pháp quy nạp toán học theo số đỉnh của đồ thị. Tuy nhiên, số lượng trường hợp phải khảo sát là rất lớn. Mặc dù phép chứng minh của Kempe là sai nhưng ý tưởng của ông về việc sử dụng các đường đi được tô màu thay phiên và việc tô màu lại các đồ thị con tương ứng vẫn được sử dụng trong phép chứng minh cuối cùng. Đường đi mà các đỉnh được tô màu thay phiên nhau bởi hai màu nào đó sẽ được gọi là **đường đi Kempe**.

Trong một đồ thị tam giác phân phẳng, một **cấu hình** là một đồ thị con dẫn xuất tương ứng với một chu trình tách. Nói cách khác, nó là một đồ thị con được cảm sinh bởi chu trình và tất cả các đỉnh nằm bên trong chu trình đó. Về cơ bản, nó có cùng một ý tưởng như khi chúng ta đã sử dụng đối với các đồ thị chordal. Trong các đồ thị chordal, các tập tách là các clique còn, trong các đồ thị tam giác phân phẳng, các tập tách là các chu trình.

Trong một đồ thị tam giác phân phẳng, một cấu hình được gọi là **reducible** nếu mọi phép 4 – tô màu của chu trình tương ứng đều có thể mở rộng thành một phép 4 – tô màu cho toàn bộ đồ thị tam giác phân phẳng.

Có hai điểm cơ bản sau đây trong phép chứng minh cuối cùng:

1) Chứng minh rằng mọi đồ thị tam giác phân phẳng đều có chứa một cấu hình nằm trong một danh sách các **cấu hình cơ bản không thể tránh khỏi**.

2) Chứng minh rằng mọi cấu hình nằm trong danh sách các cấu hình cơ bản không thể tránh khỏi đều là reducible.

Năm 1976, Appel, Haken, Koch đã dành hơn 1,200 giờ tính toán trên máy tính để xác định hơn 1,936 cấu hình cơ bản không thể tránh khỏi và chứng minh rằng tất cả chúng đều là reducible.

Năm 1996, Robertson, Sanders, Seymour, Thomas đã cải thiện lại phép chứng minh cuối cùng bằng cách tìm ra một tập chỉ gồm 663 cấu hình cơ bản không thể tránh khỏi !.

4.6. Đồ thị hoàn hảo

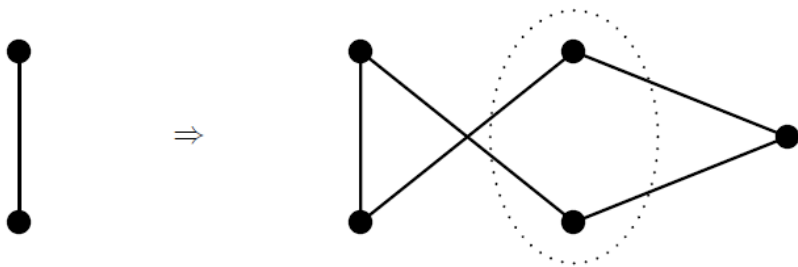
Nhắc lại rằng bất kỳ đồ thị G nào cũng đều có chứa một clique tối đại nào đó với kích thước bằng $\omega(G)$.

Do các đỉnh của clique này đều đôi một liên hợp với nhau bất kỳ phép tô màu thực sự nào của G cũng đều yêu cầu ít nhất $\omega(G)$ màu, nghĩa là $\chi(G) \geq \omega(G)$. Có thể có các đồ thị với $\chi(G) = \omega(G)$ và cũng có thể có các đồ thị với $\chi(G) > \omega(G)$. Chẳng hạn, $\chi(C_4) = \omega(C_4)$ nhưng $\chi(C_5) = 3 > 2 = \omega(C_4)$.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Hiệu số $\chi(G) - \omega(G)$ có thể lớn đến mức nào?”. Câu trả lời cho vấn đề này là nó có thể lớn tùy ý bao nhiêu cũng được.

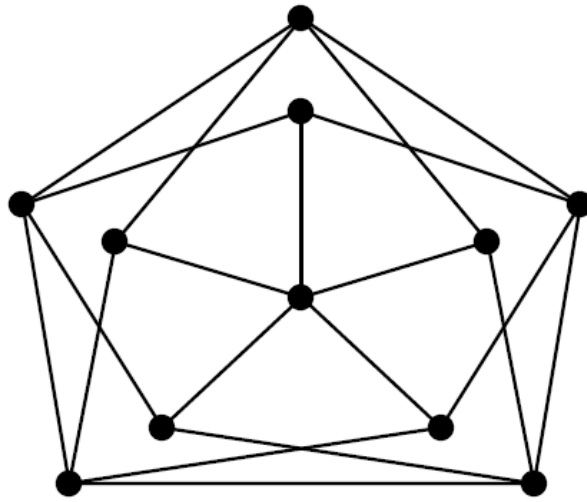
Xét **cấu hình Mycielski** như sau. Hai đỉnh được gọi là **bản sao của nhau** nếu chúng có một đỉnh láng giềng chung nhưng không liên hợp với nhau. Nói cách khác, bản sao của một đỉnh nghĩa là chúng ta bổ sung thêm một đỉnh mới liên hợp với tất cả các đỉnh láng giềng của một đỉnh cho trước. Một đỉnh được gọi là **universal** nếu nó liên hợp với tất cả các đỉnh khác của đồ thị. Trong một đồ thị đầy đủ, tất cả các đỉnh đều là universal. Tổng quát hơn, nếu chúng ta bổ sung thêm một đỉnh mới vào đồ thị và biến nó thành một đỉnh universal thì kích thước của clique tối đại sẽ tăng thêm 1 đơn vị. Đồng thời, nó cũng làm tăng giá trị của sắc số lên 1 đơn vị bởi vì đỉnh universal sẽ yêu cầu chúng ta phải bổ sung thêm 1 màu mới.

Bắt đầu với đồ thị K_2 . Chúng ta tạo ra các bản sao của mỗi đỉnh. Kế tiếp, chúng ta bổ sung thêm một đỉnh mới liên hợp với tất cả các đỉnh bản sao. Chúng ta sẽ thu được đồ thị C_5 . Đỉnh mới bổ sung thêm này sẽ “universal” với tất cả các đỉnh bản sao nhưng việc chúng ta bổ sung thêm đỉnh mới này lại không tạo ra thêm bất kỳ đồ thị tam giác nào. Như vậy, nó sẽ không làm tăng giá trị của chỉ số clique $\omega(G)$. Tuy nhiên, nó lại làm tăng giá trị của sắc số $\chi(G)$. Đây chính là thủ thuật chính của phép xây dựng của chúng ta.



Hình vẽ minh họa.

Bây giờ, chúng ta lặp lại quy trình trên cho đồ thị C_5 : tạo ra các bản sao của mỗi đỉnh và bổ sung thêm một đỉnh mới liên hợp với tất cả các đỉnh bản sao này. Đồ thị thu được sẽ được gọi là **đồ thị Grötzsch**. Nhận thấy rằng $\chi(G) = 4$ và $\omega(G) = 2$. Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng nếu chúng ta lặp lại quy trình nêu trên k lần thì chúng ta sẽ thu được một đồ thị với $\chi(G) - \omega(G) = k$. Điều này chỉ ra rằng luôn tồn tại các đồ thị với hiệu số $\chi(G) - \omega(G)$ lớn tùy ý bao nhiêu cũng được. Nếu chúng ta nhìn nhận $\omega(G)$ như một chặn dưới của sắc số $\chi(G)$ thì một câu hỏi mới được đặt ra ở đây đó là: “Những đồ thị như thế nào sẽ thỏa mãn hệ thức $\chi(G) = \omega(G)$?”.



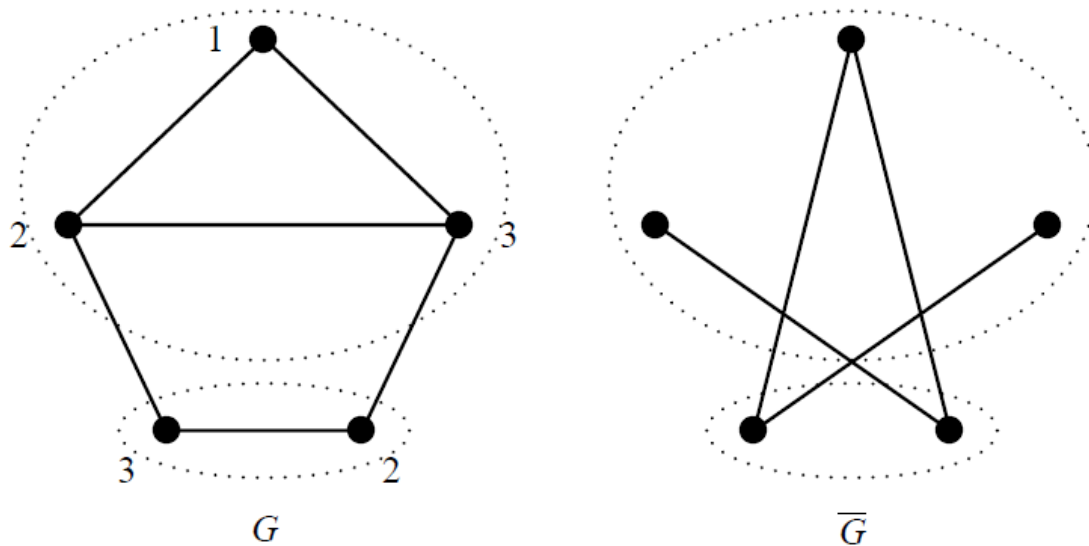
Hình vẽ minh họa đồ thị Grötzsch.

Trong lý thuyết đồ thị, nếu chúng ta chứng minh được tính đúng đắn của một thuộc tính nào đó cho một đồ thị thì rất tự nhiên chúng ta cũng mong muốn rằng thuộc tính này cũng được thỏa mãn cho mỗi đồ thị con cảm sinh của nó. Nguyên nhân chính cho việc làm nêu trên của chúng ta nằm ở chỗ chúng ta có thể áp dụng nguyên lý quy nạp toán học theo số đỉnh để chứng minh được nhiều kết quả khác của thuộc tính đó hơn.

Một đồ thị G được gọi là **hoàn hảo** nếu $\chi(G') = \omega(G')$ với mọi đồ thị con cảm sinh G' của G bao gồm cả chính đồ thị G .

Nhận thấy rằng tính hoàn hảo của các đồ thị có liên quan đến khái niệm phân bù của các đồ thị. Nhắc lại rằng chỉ số phủ clique $\theta(G)$ của một đồ thị G là số nhỏ nhất các clique chứa trong đồ thị G sao cho mỗi đỉnh đều thuộc đúng một clique này. Chúng ta sẽ nói rằng các clique “phủ” tập đỉnh của đồ thị G . Do mọi clique chứa trong G đều tạo ra một tập độc lập trong phân bù $\bar{G}$ nên chúng ta có thể kết luận rằng mọi phép tô màu của G đều tương đương với một phép phủ clique của $\bar{G}$, nghĩa là $\chi(G) = \theta(\bar{G})$. Như vậy, nếu $\bar{G}$ là một đồ thị hoàn hảo thì $\theta(G') = \alpha(G')$ với mọi đồ thị con cảm sinh G' của G bao gồm cả chính đồ thị G .

Chẳng hạn, xét đồ thị G như trong hình vẽ bên dưới đây.



Hình vẽ minh họa đồ thị hoàn hảo G và phân bù $\bar{G}$.

Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $\chi(G) = 3, \omega(G) = 3$ và $\alpha(G) = 2, \theta(G) = 2$. Tương tự, với phần bù $\bar{G}$, $\chi(\bar{G}) = 2, \omega(\bar{G}) = 2$ và $\alpha(\bar{G}) = 3, \theta(\bar{G}) = 3$. Chúng ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng G và $\bar{G}$ đều là các đồ thị hoàn hảo.

Một ví dụ khác cho các đồ thị không hoàn hảo là C_5 : $\chi(C_5) = 3, \omega(C_5) = 2, \alpha(C_5) = 2, \theta(C_5) = 3$. Chúng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng C_5 và $\bar{C}_5$ đều là các đồ thị không hoàn hảo.

Một câu hỏi được đặt ra ở đây đó là: “Các đồ thị và các phần bù cư xử tương tự nhau đối với tính hoàn hảo. Liệu đây có phải là một định lý hay không?”. Nói cách khác: “Liệu có thể xảy ra trường hợp G là một đồ thị hoàn hảo nhưng $\bar{G}$ không phải là một đồ thị hoàn hảo hay không?”. Câu trả lời cho vấn đề này là không. Khẳng định này lần đầu tiên được phát biểu như là **giả thuyết đồ thị hoàn hảo yếu** của Berge vào năm 1960 và được chứng minh lần đầu tiên bởi Lovász vào năm 1972 (phép chứng minh này sử dụng phương pháp tiếp cận sử dụng các siêu đồ thị).

Kết quả 4.6.1 (Định lý đồ thị hoàn hảo yếu/Lovász)

Một đồ thị G là hoàn hảo nếu và chỉ nếu phần bù $\bar{G}$ của nó cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Kết quả 4.6.2.

Nếu G là một đồ thị chordal thì G cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 4.6.2.

Giả sử cho trước một đồ thị chordal G . Do mọi đồ thị con cảm sinh G' của G cũng là một đồ thị chordal nên chúng ta chỉ cần chứng minh $\chi(G) = \omega(G)$ là đủ. Do G là một đồ thị chordal nên nó sẽ có ít nhất một dãy sắp thứ tự khủ simplicial. Bằng cách áp dụng thuật toán tô màu trên đường thẳng cho đồ thị G theo thứ tự nghịch đảo như chúng ta đã làm trong mục “**Phép tô màu của các đồ thị chordal**”. Nhắc lại rằng bậc lớn nhất đạt được khi thực hiện thuật toán này là $\omega(G) - 1$. Như vậy, $\chi(G) = \omega(G)$, nghĩa là G là một đồ thị hoàn hảo. □

Kết quả 4.6.3.

Nếu G là một đồ thị giả tam giác phân thì G cũng là một đồ thị hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 4.6.3.

Giả sử cho trước một đồ thị giả tam giác phân G . Khi đó, G có thể phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh simplicial hoặc cosimplicial (simplicial trong phần bù $\bar{G}$ của nó) tại mỗi bước. Với mọi đồ thị con cảm sinh G' của G , dãy sắp thứ tự các đỉnh của G này sẽ tạo ra một dãy sắp thứ tự các đỉnh của G' với cùng tính chất. Như vậy, G' có thể phân tích bằng cách loại bỏ dần các đỉnh simplicial hoặc cosimplicial tại mỗi bước. Điều này có nghĩa là G' cũng là một đồ thị giả tam giác phân. Do đó, tương tự như đối với các đồ thị chordal, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta chỉ cần chứng minh $\chi(G) = \omega(G)$ là đủ.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số đỉnh $n(G)$. Với $n = 3, 4, 5$, tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đã được kiểm

chúng là đúng với mọi đồ thị giả tam giác phân có $< n$ đỉnh với $n := n(G)$. Từ cách định nghĩa của một đồ thị giả tam giác phân, G có chứa một đỉnh x là simplicial trong G hoặc $\bar{G}$.

Trường hợp 1. x là một đỉnh simplicial trong G . Xét một phép tô màu thực sự của $G - x$ bởi $\chi(G - x) = \omega(G - x)$ màu. Nếu $\omega(G) = \omega(G - x)$ thì $|N(x)| \leq \omega(G - x) - 1$, nên chúng ta có thể sử dụng một màu bị thiếu nào đó trong $N(x)$ để tô màu cho đỉnh x . Nếu $\omega(G) = \omega(G - x) + 1$ thì $|N(x)| = \omega(G - x)$, nên chúng ta phải sử dụng một màu mới để tô cho đỉnh x . Trong cả hai trường hợp này, chúng ta đều thu được một phép tô màu thực sự của G với $\chi(G) = \omega(G)$ màu. Như vậy, G là một đồ thị hoàn hảo.

Trường hợp 2. x là một đỉnh simplicial trong $\bar{G}$. Nhận thấy rằng đồ thị $G - x$ cũng là một đồ thị giả tam giác phân có $< n$ đỉnh. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $G - x$ sẽ là một đồ thị hoàn hảo. Từ Kết quả 4.6.1), $\bar{G} - x$ sẽ là một đồ thị giả tam giác phân hoàn hảo. Nhận thấy rằng đồ thị $\bar{G}$ có thể nhận được từ $\bar{G} - x$ bằng cách bổ sung thêm đỉnh simplicial x . Từ trường hợp 1), $\bar{G}$ là một đồ thị hoàn hảo. Từ Kết quả 4.6.1), G cũng là một đồ thị hoàn hảo. $\square$

Nhận thấy rằng có nhiều loại đồ thị hoàn hảo khác nhau: các đồ thị lưỡng phân, các **đồ thị chordal yếu** (không chứa bất kỳ chu trình cảm sinh có độ dài ≥ 5 trong G và $\bar{G}$), các **đồ thị hoàn hảo mạnh** (mọi đồ thị con cảm sinh đều có chứa một tập độc lập có giao với tất cả các clique tối đại), các **đồ thị Meyniel** (mỗi chu trình lẻ có độ dài ≥ 5 đều có chứa ít nhất hai dây cung), các **đồ thị Berge** (không chứa bất kỳ chu trình cảm sinh lẻ có độ dài ≥ 5 và phần bù của nó), v.v... Các ví dụ và kết quả nêu ở trên làm nảy sinh ý tưởng rằng các chu trình lẻ có độ dài ≥ 5 và phần bù của nó chính là nguyên nhân ngăn cản một đồ thị trở nên hoàn hảo. Phỏng đoán này được Berge đưa ra vào năm 1960 và được đặt tên là **giả thuyết đồ thị hoàn hảo mạnh**.

Ngày nay, nó đã trở thành một trong những kết quả quan trọng nhất trong lý thuyết đồ thị của thời đại chúng ta:

Kết quả 4.6.3. (Định lý đồ thị hoàn hảo mạnh/Chudnovsky – Robertson – Seymour – Thomas)

Một đồ thị G là hoàn hảo nếu và chỉ nếu nó không có chứa chu trình cảm sinh C_{2k+1} và $\overline{C_{2k+1}}$ ($k \geq 2$) nào

Một trong những lợi ích cơ bản khi chúng ta có một đồ thị hoàn hảo là chúng cho phép giải quyết các bài toán tối ưu như: sắc số, chỉ số phủ clique, chỉ số độc lập, chỉ số clique, v.v... với một thuật toán với thời gian đa thức.

4.7. Phép tô màu cạnh/Định lý Vizing

Trong lý thuyết tô màu đồ thị, chúng ta cũng có thể tô màu các cạnh của đồ thị thay cho việc tô màu các đỉnh. Trong các phép tô màu như vậy, các cạnh song song sẽ tạo ra sự khác biệt đáng kể nhưng các cạnh khuyên thì chỉ tạo ra sự bất tiện. Để thuận tiện cho việc trình bày, chúng ta sẽ tạm loại bỏ các cạnh khuyên.

Giả sử cho trước một đồ thị $G = (X, E)$ có thể có các cạnh song song nhưng không có chứa các cạnh khuyên và một số nguyên dương $\lambda > 0$.

Một **phép λ – tô màu cạnh thực sự của G** là một phép gán nhãn mỗi cạnh của G với một màu nằm trong tập $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ sao cho tất cả các cạnh liên thuộc với một đỉnh cho trước nào đó đều được tô bởi các màu phân biệt.

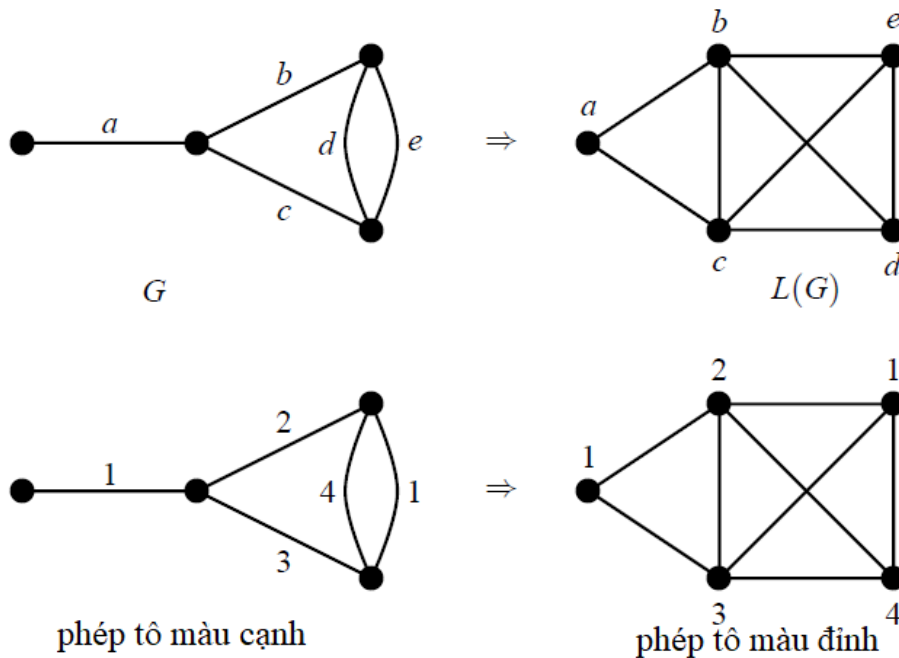
Một đồ thị được gọi là **k – colourable cạnh** nếu nó có ít nhất một phép tô màu cạnh thực sự với tối đa không quá k màu.

Do số màu tối đa có thể sử dụng là bằng $|E|$ nên chúng ta sẽ chỉ quan tâm chủ yếu đến số màu tối thiểu có thể sử dụng là chính. Để không bị nhầm lẫn với khái niệm sắc số đã giới thiệu ở mục trước, số màu tối thiểu có thể sử dụng tính trên tất cả các phép tô màu cạnh thực sự được gọi là **sắc số cạnh của đồ thị G** , kí hiệu bởi $\chi'(G)$.

Trong mọi phép tô màu cạnh thực sự của đồ thị $G = (X, E)$, các cạnh được tô bởi cùng một màu sẽ đại diện cho một cặp ghép nào đó. Như vậy, một phép tô màu cạnh của G có thể xem như một là phân hoạch của tập cạnh E thành một số các cặp ghép nào đó. Khi đó, sắc số cạnh $\chi'(G)$ sẽ là số tối thiểu các cặp ghép phân biệt tính trên tất cả các phân hoạch như vậy.

Nhận thấy rằng các phép tô màu cạnh của G có thể được biểu diễn lại dưới dạng các phép tô màu đỉnh của một đồ thị phụ G' với các đỉnh biểu diễn cho các cạnh của G . Với mỗi đồ thị $G = (X, E)$, chúng ta xây dựng một đồ thị đơn $G' = (X', E')$ sao cho $X' = E$ và E' được tạo ra theo cách sau: hai đỉnh trong G' là liên hợp với nhau nếu và chỉ nếu các cạnh tương ứng của chúng có một đỉnh chung trong G . Đồ thị G' được gọi là **đồ thị tuyến tính của G** , kí hiệu bởi $L(G)$.

Chẳng hạn, xét đồ thị G và đồ thị tuyến tính $L(G)$ như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa.

Chúng ta dễ dàng thấy mọi phép tô màu cạnh thực sự của G đều tương ứng với một phép tô màu đỉnh thực sự của G' và ngược lại. Như vậy, $\chi'(G) = \chi(L(G))$, với mọi đồ thị G không có chứa các cạnh khuyên.

Kí hiệu $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất có thể có của đồ thị G . Hiển nhiên, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Như vậy, bậc lớn nhất Δ đóng vai trò đối với sắc số cạnh χ' tương tự như vai trò của chỉ số clique ω đối với sắc số đỉnh χ , $\chi \geq \omega$.

Một câu hỏi được đặt ra ở đây đó là: “Liệu hiệu số $\chi'(G) - \Delta(G)$ có thể lớn tùy ý hay không?”. Đáng ngạc nhiên là câu trả lời cho câu hỏi này lại là $\chi'(G)$ có giá trị rất gần với $\Delta(G)$.

Kết quả 4.7.1. (Vizing)

Nếu G là một đồ thị đơn thì $\chi'(G) = \Delta(G)$ hoặc $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Chứng minh kết quả 4.7.1.

Các đồ thị C_{2k} và C_{2k+1} là các ví dụ đơn giản nhất cho thấy rằng luôn tồn tại các đồ thị nhận cả hai giá trị trên của $\chi'(G)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng mọi đồ thị đơn G đều có thể được tô bởi $\Delta(G) + 1$ màu phân biệt.

Giả sử cho trước một đồ thị đơn G . Chọn ra $\Delta(G) + 1$ màu phân biệt bất kỳ và sử dụng chúng để tô màu cho càng nhiều cạnh của đồ thị G càng tốt sao cho hai cạnh cùng liên thuộc với một đỉnh đều được tô bởi hai màu phân biệt. Nếu tất cả các cạnh đều được tô màu thì chúng ta hoàn tất phép chứng minh. Trường hợp ngược lại, chúng ta thu được một phép tô màu cạnh thực sự một phần của G . Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử cạnh chưa được tô màu có dạng xy_0 (cạnh nối đỉnh x với đỉnh y_0). Chúng ta sẽ tô màu lại các cạnh của đồ thị sao cho xy_0 trở thành một cạnh được tô màu và số các cạnh được tô màu ban đầu vẫn được giữ nguyên. Sau khi lặp lại quy trình này nhiều lần nhất có thể, chúng ta sẽ thu được một phép tô màu cạnh thực sự của G . Do chúng ta sử dụng $\Delta(G) + 1$ màu để tô và $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất có thể có của đồ thị G nên, tại mỗi đỉnh của đồ thị, luôn có ít nhất một màu bị thiếu. Chúng ta sẽ có bốn trường hợp sau:

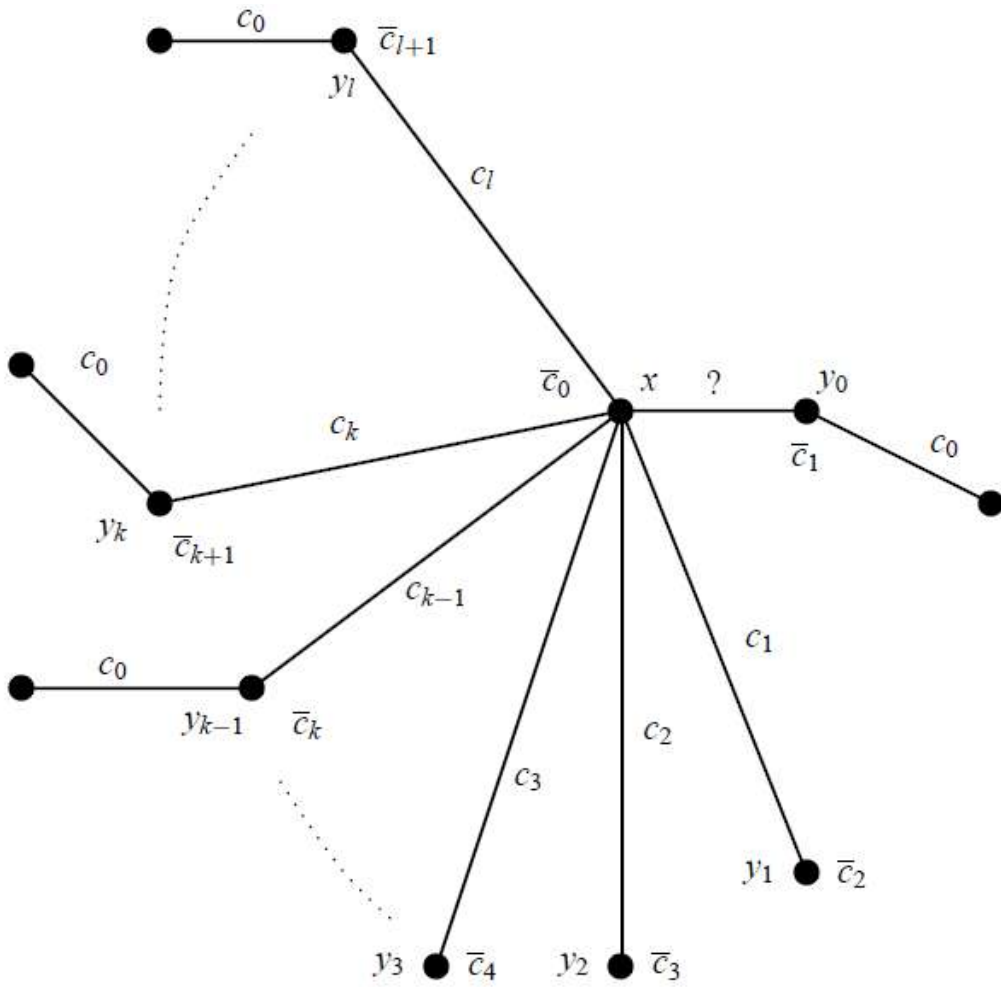
Trường hợp 1. Màu c bị thiếu ở cả hai đỉnh x và y_0 . Tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c .

Trường hợp 2. Không có màu nào bị thiếu đồng thời ở cả hai đỉnh x và y_0 . Kí hiệu c_0 là một màu bị thiếu ở đỉnh x và c_1 là một màu bị thiếu ở đỉnh y_0 . Nếu tồn tại một cạnh xy_k được tô bởi màu c_1 với cả hai đầu mút đều bị thiếu một màu c_i nào đó thì chúng ta tô màu lại cạnh xy_k bởi màu c_i và tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c_1 .

Trường hợp 3. Không có cạnh xy_k nào được tô bởi màu c_1 với cả hai đầu mút đều bị thiếu cùng một màu nào đó. Cạnh xy_1 được tô bởi màu c_1 ; kí hiệu c_2 là một màu nào đó bị thiếu ở đỉnh y_1 . Cạnh xy_2 được tô bởi màu c_2 ; kí hiệu c_3 là một màu nào đó bị thiếu ở đỉnh y_2 . Cạnh xy_3 được tô bởi màu c_3 ; kí hiệu c_4 là một màu nào đó bị thiếu ở đỉnh y_3 , v.v... như trong hình vẽ minh họa bên dưới ($\bar{c}_i$ là một màu nào đó bị thiếu ở đỉnh y_i). Giả sử thủ tục này được thực hiện lặp lại cho đến khi có một màu c_{l+1} nào đó bị thiếu đồng thời ở cả hai đỉnh x và y_l . Khi đó, chúng ta tô màu lại mỗi cạnh xy_i từ màu c_i sang màu c_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, l$. Chúng ta sẽ gọi thủ tục này là **phép tô màu lại downshifting từ đỉnh y_l** . Chúng ta quay trở lại trường hợp khi màu c_1 bị thiếu ở đỉnh x . Do nó cũng bị thiếu ở đỉnh y_0 nên chúng ta tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c_1 .

Trường hợp 4. Nếu chúng ta không bao giờ gặp trường hợp có một số màu bị thiếu ở cả hai đầu mút của một cạnh nào đó thì, trong dãy các màu $c_1, c_2, c_3, \dots$, sớm hay muộn cũng sẽ có một màu c_{l+1} nào đó bị lặp lại (điều này suy ra từ việc số các màu được sử dụng là hữu hạn).

Kí hiệu $c_{l+1} = c_k$ là lần lặp lại màu đầu tiên, $1 \leq k \leq l$. Nhận thấy rằng màu c_0 có ở tất cả các đỉnh láng giềng của x nhưng nó lại bị thiếu ở đỉnh x . Xét một đường đi Kempe P gồm các cạnh được tô màu thay phiên nhau bởi hai màu c_0, c_k và bắt đầu ngay tại đỉnh y_l . Do chúng ta đã tô màu các cạnh này nên mỗi đỉnh có thể có nhiều nhất hai cạnh được tô màu bởi các màu c_0 và c_k . Như vậy, chỉ có thể có duy nhất một đường đi P như vậy.



Hình vẽ minh họa.

Trường hợp con 4.1. P đi qua đỉnh y_k và kết thúc tại đỉnh x . Bằng cách hoán đổi các màu c_0 và c_k dọc theo đường đi P , chúng ta thu được một phép tô màu mới trong đó màu c_k bị thiếu ở cả hai đầu mút của cạnh xy_k . Thực hiện phép tô màu lại downshifting từ đỉnh y_k và tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c_1 .

Trường hợp con 4.2. P đi qua đỉnh y_{k-1} và kết thúc tại đỉnh y_{k-1} . Một lần nữa, bằng cách hoán đổi các màu c_0 và c_k dọc theo đường đi P , chúng ta thu được một phép tô màu mới trong đó màu c_0 bị thiếu ở đỉnh y_{k-1} . Do nó cũng bị thiếu ở đỉnh x nên chúng ta có thể tô lại cạnh xy_{k-1} bởi màu c_0 . Thực hiện phép tô màu lại downshifting từ đỉnh y_{k-1} và tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c_1 .

Trường hợp con 4.3. P không bao giờ đi qua đỉnh y_k hoặc y_{k-1} . Do c_k có mặt tại đỉnh x nên đường đi P không bao giờ đi qua đỉnh x . Bằng cách hoán đổi các màu c_0 và c_k dọc theo đường đi P , chúng ta sẽ thu được một phép tô màu mới trong đó màu c_0 có mặt tại đỉnh y_l . Thực hiện phép tô màu lại downshifting từ đỉnh y_l và tô màu lại cạnh xy_0 bởi màu c_1 . □

Kết quả trên phân chia tập tất cả các đồ thị đơn thành hai lớp: Lớp 1) gồm các đồ thị với $\chi'(G) = \Delta(G)$ và Lớp 2) gồm các đồ thị với $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Nếu một đồ thị G có các cạnh bội (nhưng không có chứa các cạnh khuyên) thì **bội số $\mu(G)$** được định nghĩa là số tối đa các cạnh khuyên nối giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị G . Khi đó, Kết quả 4.7.1) có thể được khái quát hóa lại như sau:

Kết quả 4.7.2. (Vizing)

Nếu G là một đa đồ thị không có chứa cạnh khuyên với bội số $\mu(G)$ thì $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

Kết quả 4.7.3. (König)

Nếu G là một đồ thị lưỡng phân thì $\chi'(G) = \Delta(G)$.