

Mathematical Team Contest 2021

ĐIỂM TỤ CỦA DÃY SỐ THỰC

bM2e

Ngày 4 tháng 12 năm 2021

MỞ ĐẦU

Trong các bài toán dưới đây, chúng ta quan tâm đến khái niệm cơ bản sau

Điểm tụ của dãy số thực. Cho $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực, một số thực c gọi là một điểm tụ của dãy đó nếu và chỉ nếu với mỗi số thực dương d và số tự nhiên N thì luôn tồn tại số tự nhiên n lớn hơn N sao cho $|x_n - c| < d$.

Ví dụ. Xét dãy số $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ có số hạng tổng quát (shtq) cho bởi công thức

$$x_n = \frac{n + (-1)^n n}{n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dãy đã cho có một điểm tụ là $c = 2$, là bởi vì với mỗi số tự nhiên N và số thực dương d cho trước, ta chọn $n = 2N + 2 \left\lfloor \frac{1}{d} \right\rfloor + 2$, thì $n > N$ và từ $n > \frac{2}{d}$ ta có

$$|x_n - 2| = \left| \frac{-2}{n + 1} \right| = \frac{2}{n + 1} < \frac{2}{n} < d.$$

Ta cũng có thể dễ dàng thấy rằng, 0 cũng là một điểm tụ của dãy.

MỘT SỐ KẾT QUẢ CƠ BẢN

Giả sử c là một điểm tụ của dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lúc đó sẽ tồn tại số nguyên dương N_0 để sao cho

$$|x_{N_0} - c| < 1.$$

Và lại tồn tại số nguyên dương N_1 sao cho $N_1 > N_0$ để

$$|x_{N_1} - c| < \frac{1}{2}.$$

Truy toán liên tiếp sẽ thấy là tồn tại dãy số nguyên dương $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tăng ngặt, để mà với mỗi số tự nhiên k ta lại có

$$0 \leq |x_{N_k} - c| < \frac{1}{k+1}.$$

Lấy giới hạn kẹp khi k tiến ra vô cực để thấy

1. Nếu c là một điểm tụ của dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thì tồn tại một dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ để sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

Ta cũng có thể kiểm tra chiều đảo lại của khẳng định, tức là

Với $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực, và c là một hằng số thực, Khi đó, nếu tồn tại một dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ để sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$, thì c sẽ là một điểm tụ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Bây giờ, với $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực cho trước, chúng ta gọi một số nguyên dương n là "ngáo" nếu $x_n \geq x_m$ với mọi số nguyên dương m lớn hơn n . Gọi $\mathcal{N}$ là tập các số nguyên dương "ngáo", và xét hai trường hợp sau

- i, Nếu $\mathcal{N}$ là một tập hữu hạn, lúc đó ắt phải tồn tại N đủ lớn để n không là "ngáo" với mọi số nguyên dương $n \geq N$. Đặt $n_0 = N$, khi đó tồn tại số nguyên dương $n_1 > n_0$ sao cho $x_{n_1} > x_{n_0}$ do n_0 không "ngáo". Lại có $n_1 > N$, nên n_1 không "ngáo", vì thế phải tồn tại số nguyên dương $n_2 > n_1$ để $x_{n_2} > x_{n_1}$.. Cứ như vậy, sẽ tồn tại dãy tăng ngặt các số nguyên dương $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ để với mọi số tự nhiên k thì n_k không "ngáo" và điều quan trọng nhất là $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy số tăng ngặt.
- ii, Nếu $\mathcal{N}$ là một tập vô hạn, điều đó nghĩa là tồn tại một dãy tăng ngặt các số nguyên dương $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ để với mọi số tự nhiên k thì n_k là "ngáo". Điều này sẽ dẫn đến là dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ phải là một dãy đơn điệu không tăng do bản chất các số "ngáo".

Tóm lại, luôn có một dãy con đơn điệu $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Kết hợp với việc nếu $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn, thì theo nguyên lý Weierstrass ta có dãy $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến một giới hạn hữu hạn là một số thực c nào đó. Và, ta có được kết quả sau

2. Một dãy số thực bị chặn thì nó có ít nhất một điểm tụ.

Bằng cách xét dãy số cho bởi công thức $x_n = n + (-1)^n n$ ta thấy là một dãy có điểm tụ (có dãy con hội tụ) thì chưa chắc đã bị chặn. Một câu hỏi đặt ra hơi bị tự nhiên ở đây, đó là: *nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực không có điểm tụ nào, thì đặc điểm nó ra sao?* Với cái kết quả vừa có, ta có ngay một dấu hiệu đó là $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ không bị chặn, thậm chí nó không thể trích ra được một dãy con bị chặn, do là nếu điều ngược lại xảy đến, ta lại lấy được điểm tụ hữu hạn của cái dãy con kia, điểm tụ đó, cũng vẫn là điểm tụ của dãy ban đầu.

Câu trả lời như thế, thì cũng là tạm ổn. Nhưng chúng ta sẽ cố gắng lột tả kỹ lưỡng hơn cái bản chất ấy, bằng cách xét vài trường hợp sau đây

- i, Nếu $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ là một tập hữu hạn. Như thế, sẽ có một chỉ số N_0 nào đấy để mà cứ với $n \in \mathbb{N} : n > N_0$ thì $x_n \geq 0$. Việc đánh giá giới hạn một dãy số thực, là liên can đến những chỉ số lớn thỏa ý, cho nên thôi thì chả mất tính tổng quát tý nào, ta cứ đi giả sử luôn $N_0 = 0$, nói khác đi thì nghĩa là $x_n \geq 0$ với mọi chỉ số n . Lúc này, về trực giác, sự lớn thỏa ý thích của các phần tử của dãy cho ta phỏng đoán $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, nghĩa là cứ với mỗi số thực C , lại có một chỉ số N nào đó, để mà cứ với chỉ số n lớn hơn N ta lại có $x_n > C$. Giờ, nếu điều đó là không đúng, thì tức là tồn tại một số thực C_0 để cứ với mỗi chỉ số N lại có một chỉ số n lớn hơn N sao cho

$$x_n \leq C_0.$$

Lấy n_0 là số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn $x_{n_0} \leq C_0$, ta lại lấy tiếp được $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_1 > n_0$ và $x_{n_1} \leq C_0$. Và, việc truy toán tới tập cho thấy tồn tại một dãy chỉ số nguyên dương $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tăng ngặt thỏa mãn là

$$x_{n_k} \leq C_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Điều này dẫn đến việc là dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy bị chặn, và như đã nói ở trên ta lấy được điểm tụ của $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ và nó cũng là điểm tụ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mâu thuẫn có được cho thấy là ở tình huống này, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

- ii, Nếu $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0\}$ là một tập hữu hạn, thì một cách tương tự ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

iii, Nếu $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ và $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0\}$ đều là các tập vô hạn, khi ấy ta phân hoạch (theo chỉ số) được $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thành hai dãy con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho $a_n \geq 0 > b_n$ với mỗi chỉ số n . Bởi vì chúng cũng không có điểm tụ nào, nên nhờ những tình huống đã xét, ta có ngay

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

Tóm kết lại, ta có khẳng định sau đây

Nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực không có điểm tụ, thì

- i, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ nếu trong dãy chỉ có hữu hạn số âm..
- ii, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ nếu trong dãy chỉ có hữu hạn số không âm.
- iii, Phân hoạch được $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thành hai dãy con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

Trong tình huống dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ có vô hạn cả số âm và số dương.

□

Phần tiếp theo sau đây, ta sẽ quan tâm đến việc xem xét sự hội tụ của một dãy số thực qua điểm tụ của nó. Trước tiên, ta nhắc lại rằng nếu dãy thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến l , thì do với mỗi $d > 0$ và $N \in \mathbb{N}$ lại có một chỉ số N_d để sao cho

$$|x_n - l| < d, \forall n > N_d.$$

Với mỗi d và N như vậy, xét riêng với $n = N + N_d + 1$, thì từ $n > N$ ta thấy rằng giới hạn l của dãy chính là một điểm tụ của dãy.

Nếu như dãy đã cho có một giới hạn khác l là l' , thì với $d = \frac{|l - l'|}{2}$, sẽ phải tồn tại các chỉ số N_1, N_2 để mà cứ với $n > N_1$ thì $|x_n - l| < d$, còn với $n > N_2$ thì $|x_n - l'| < d$, chọn $n = N_1 + N_2 + 1$ từ $n > N_1, n > N_2$ để mà có mâu thuẫn

$$2d = |l - l'| \leq |x_n - l| + |x_n - l'| < d + d.$$

Vậy ta có được khẳng định sau đây

3. Nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

Nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực hội tụ đến l , khi đó sẽ có một chỉ số nguyên

dương n_1 để $|x_n - l| < 1, \forall n > n_1$. Từ bất đẳng thức $|x_n| \leq |x_n - l| + |l|$, và việc đặt $M = 1 + |l| + |x_0| + |x_1| \dots + |x_{n_1}|$, thế thì có

$$|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tức là một dãy hội tụ thì sẽ bị chặn, sự bị chặn dẫn đến dãy đó có ít nhất một điểm tụ là số thực c nào đó. Bây giờ nếu dãy đã cho có thêm một điểm tụ khác c là c' , thì với số thực dương $d = \frac{1}{2}|c - c'|$ và số nguyên dương N tùy ý, sẽ phải tồn tại các chỉ số n_c và $n_{c'}$ lớn hơn N để

$$|x_{n_c} - c| < d, \quad |x_{n_{c'}} - c'| < d.$$

Nhưng điều đó, dẫn đến mâu thuẫn là

$$2d = |c - c'| \leq |x_{n_c} - c| + |x_{n_{c'}} - c'| < d + d.$$

Vậy, ta có được kết quả sau

4. Nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực hội tụ thì nó bị chặn, và đồng thời nó có một điểm tụ duy nhất.

□

Những kết quả ở phía trên đã cho ta thấy: nếu một dãy số thực mà hội tụ, thì nó bị chặn, giới hạn dãy đồng thời cũng là điểm tụ duy nhất của dãy. Giờ ta sẽ xét tình huống đảo lại, ta lấy ra một dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bị chặn và có duy nhất một điểm tụ là c . Lúc này, nếu dãy ấy hội tụ thì c chính là giới hạn của dãy. Nếu điều đó không đúng, thì phải tồn tại một số thực dương d_0 , để với mọi số nguyên dương N sẽ tồn tại số nguyên dương n_N sao cho $n_N > N$ và thỏa mãn đánh giá sau

$$|x_{n_N} - c| \geq d_0.$$

Chọn $N = 1$, khi đó sẽ tồn tại số nguyên dương $n_0 > 1$ sao cho $|x_{n_0} - c| \geq d_0$. Lại theo suy diễn đó với $N = n_0$, sẽ tồn tại số nguyên dương $n_1 > n_0$ sao cho $|x_{n_1} - c| \geq d_0$. Cứ như vậy, qua truy toán, ta có một dãy tăng ngặt các số nguyên dương $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ để sao cho với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$|x_{n_k} - c| \geq d_0.$$

Lúc này xét dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, nó cũng là dãy bị chặn do $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bị chặn, bởi thế lại trích ra được từ nó một dãy con $(x_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ hội tụ, dãy này cũng vẫn là dãy con của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ban đầu, nên điểm tụ của nó phải là c theo giả thiết. Vì $d_0 > 0$ nên phải tồn tại số nguyên dương T sao cho với mỗi $i > T$ ta có

$$|x_{n_{k_i}} - c| < d_0.$$

Nhưng điều đó, trái với tính chất của dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mà ta đã xây dựng ở trên.

Mâu thuẫn vừa nhận được, cho ta

5. Một dãy số thực bị chặn và có duy nhất một điểm tụ là c , thì dãy số đó sẽ hội tụ đến c .

Như vậy, ta có thêm một mảnh khóc để xét sự hội tụ qua việc soi xét điểm tụ, thay cho việc loằng ngoằng chứng minh sự hội tụ như thông thường, ta chỉ cần chỉ ra dãy bị chặn và có điểm tụ duy nhất. Một ví dụ, là bài toán sau đây

8. Ứng với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức

$$f_n(x) = C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^3 x^{2n-3} + \dots + C_{2n}^{2n-1} x - \frac{1}{2}.$$

1. Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương n sẽ tồn tại duy nhất một số thực r_n là nghiệm của đa thức $f_n(x)$.
2. Với r_n định nghĩa ở ý trên, chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr_n$.

Lời giải. Trước hết ta nhận thấy rằng

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n} - (1-x)^{2n} - 1}{2}.$$

1. Với $x \leq 0$ thì có $|x+1| \leq 1 + |x| = 1 - x$, kéo theo đánh giá sau

$$f_n(x) = \frac{|x+1|^{2n} - |1-x|^{2n} - 1}{2} < 0.$$

Vậy, đa thức $f_n(x)$ sẽ không thể có nghiệm r thỏa mãn $r \leq 0$. Còn với $x > 0$, chúng ta để ý là $f_n(0)f_n(1) = -\frac{4^n-1}{4} < 0$ nên theo định lý Bolzano-Cauchy áp dụng lên hàm liên tục $f_n(x)$ sẽ tồn tại $r_n \in (0; 1)$ là nghiệm của $f_n(x)$. Nghiệm này của $f_n(x)$ là duy nhất trên $(0; +\infty)$, bởi lẽ là với $x > 0$ ta có $x+1 = 1 + |x| > |x-1|$ để kéo theo

$$(f_n(x))' = n(x+1)^{2n-1} - n(x-1)^{2n-1} > 0.$$

2. Từ lý lẽ ở ý trên, với mỗi số nguyên dương n ta có $r_n \in (0; 1)$, theo bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$1 + 2nr_n \leq (1 + r_n)^{2n} = (1 - r_n)^{2n} + 1 < 1 + 1.$$

Đặt $nr_n = a_n$, khi đó dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là dãy bị chặn do $0 < a_n < \frac{1}{2}$, cho nên nó có ít nhất một điểm tụ, giả sử $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ là dãy con hội tụ đến l . Khi đó ta thấy rằng do $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{n_k} = 0$, nên

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left((1 + r_{n_k})^{2n_k} - (1 + r_{n_k})^{2n_k} - 1 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\left((1 + r_{n_k})^{\frac{1}{r_{n_k}}} \right)^{2a_{n_k}} - \left((1 - r_{n_k})^{\frac{1}{r_{n_k}}} \right)^{2a_{n_k}} - 1 \right) \\ &= e^{2l} - e^{-2l} - 1. \end{aligned}$$

Giải phương trình ẩn l , để thấy điểm tụ duy nhất là $l_0 = \sqrt{\ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}$. Vì thế, dãy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là một dãy hội tụ về l_0 , nghĩa là

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nr_n = \sqrt{\ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}.$$

□

Giờ ta xét tình huống một dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ có hai điểm tụ là a và b với $a < b$, đồng thời nó có sai phân hội tụ về 0, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Lấy một số thực c trong khoảng mở $(a; b)$ bất kỳ, xét $d = \min \{c - a, b - c\}$, giả sử c không là điểm tụ của dãy, lúc đó sẽ tồn tại số thực dương d_0 và số nguyên dương n_0 để sao cho $d_0 < \frac{1}{2}d$ và với mỗi chỉ số n lớn hơn n_0 , ta có

$$|x_n - c| \geq d_0.$$

Từ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, ta thấy là tồn tại chỉ số n_1 lớn hơn n_0 để sao cho

$$|x_{n+1} - x_n| < d_0, \quad \forall n > n_1.$$

Do a là một điểm tụ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nên tồn tại chỉ số $n^* > n_1$ để $|x_{n^*} - a| < d_0$, kết hợp $c - a \geq d > 2d_0$ để có

$$x_{n^*} < a + d_0 = c - (c - a) + d_0 \leq c - d + d_0 < c - d_0.$$

Vì $n_* + 1 > n^* > n_1 > n_0$ nên ta lại có được

$$|x_{n^*+1} - c| \geq d_0.$$

Điều này dẫn đến hoặc là $x_{n^*+1} \geq c + d_0$ hoặc là $x_{n^*+1} \leq c - d_0$. Nhưng khả năng thứ nhất không xảy ra, vì nó kéo đến mâu thuẫn $|x_{n^*+1} - x_{n^*}| \geq 2d_0 > d_0$ trong khi $n^* > n_1$, nghĩa là ta lại có $x_{n^*+1} \leq c - d_0$. Qua việc truy toán nhận được

$$x_n \leq c - d_0, \forall n \geq n^*.$$

Theo giả thiết, b cũng là điểm tụ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nên có chỉ số n lớn hơn n^* để

$$|x_n - b| < d_0.$$

Và điều đó, kết hợp với $x_n \leq c - d_0$ do $n > n^*$ cho ta mâu thuẫn là

$$b - d_0 < x_n \leq c - d_0.$$

Từ đó, ta đi đến khẳng định sau

6. Với $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy số thực bị chặn và thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Khi đó, nếu a và b là các điểm tụ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ với $a < b$ và số thực c thỏa mãn $a < c < b$, thì c là một điểm tụ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Như vậy, nếu một dãy có hai điểm tụ là a và b với $a < b$, thì nó sẽ có vô hạn không đếm được các điểm tụ, là các số thực ở trong đoạn đóng $[a; b]$. Kết quả vừa có được, lại cho ta thêm một mảnh khốe khi xét sự hội tụ của một dãy số thực. Đó là nếu một dãy số thực bị chặn, có sai phân hội tụ về 0, và có hữu hạn các điểm tụ, thì dãy đó phải có duy nhất một điểm tụ, và vì thế phải hội tụ. Một ví dụ, là bài toán sau đây

9. Cho $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, đồng thời

$$(x_{n+1} - x_n)(x_n^2 x_{n+1}^2 - x_n - x_{n+1}) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy hội tụ.

Lời giải. Từ giả thiết, với mỗi số tự nhiên n ta có ngay

$$\left(x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}^2}\right) - \left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right) = \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_n^2 x_{n+1}^2 - x_n - x_{n+1})}{x_n^2 x_{n+1}^2} \leq 0.$$

Đến đây, nếu với mỗi số tự nhiên n ta đặt

$$x_n + \frac{1}{x_n^2} = y_n.$$

Thế thì $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy dương và đơn điệu không tăng, theo nguyên lý Weierstrass nó sẽ phải hội tụ đến số thực không âm L nào đó, chú ý $L \geq 1$ do là theo bất đẳng thức AM-GM ta có đánh giá sau với mỗi chỉ số n

$$y_n = x_n + \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}x_n \cdot \frac{1}{2}x_n \cdot \frac{1}{x_n^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Nếu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ không bị chặn trên, lúc đấy từ các khảo sát phía trên ta thấy là nó phải có một dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \infty$, và ta có mâu thuẫn là

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_{n_k} + \frac{1}{x_{n_k}^2} \right) = \infty.$$

Vậy, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bị chặn trên, nên có một số thực C dương để với mỗi chỉ số n ta có

$$0 < x_n < C.$$

Lúc này do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, nên với mỗi $d > 0$ lại có một chỉ số N để mà

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right| < \frac{d}{C}, \quad \forall n > N.$$

Cho thấy là, với mỗi số thực dương d lại có chỉ số N sao cho

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{x_n} |x_{n+1} - x_n| = C \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right| < d, \quad \forall n > N.$$

Nói khác đi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Giờ nếu c là một điểm tụ nào đó của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (đã tồn tại một điểm tụ như thế, do việc nó bị chặn), ta giả sử $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ là dãy con của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ về c , và có

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{N_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_{N_k} + \frac{1}{x_{N_k}^2} \right) = c + \frac{1}{c^2}.$$

Vậy, c là nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - Lx + 1 = 0$, và vì phương trình ấy chỉ có không quá ba nghiệm, cho nên theo các kết quả phía trên $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sẽ phải là một dãy hội tụ. □

Một câu hỏi đặt ra luôn: vậy, thế có tồn tại hay không một dãy số thực bị chặn, có sai phân tụ về 0 và có hai điểm tụ phân biệt (từ đó có vô hạn không đếm được

các điểm tụ) hay không?. Để trả lời câu hỏi đó, ta nghĩ ngay đến sự trù mật của các số hữu tỷ, ở đây, để đảm bảo tính bị chặn, ta lấy các số hữu tỷ thuộc đoạn đóng $[0; 1]$. Và, tiến hành sắp dãy chạy zíc-zắc theo cái bảng tam giác như sau

0					
0	1				
1	$\frac{1}{2}$	0			
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1		
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
.....					

Cái bảng đó, được mô tả nôm na là: ở dòng thứ $2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ gồm các số sắp tăng dần từ trái qua phải là $\frac{j-1}{2k-1}$ với $1 \leq j \leq 2k$. Còn ở dòng thứ $2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ gồm các số sắp giảm dần từ trái qua phải là $\frac{2k+1-j}{2k}$ với $1 \leq j \leq 2k$. Với những ai không thích nôm na, thì số hạng tổng quát của dãy đó là

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n = 0. \\ \frac{n - 2k^2 + k}{2k - 1}, & \text{nếu } 2k^2 - k \leq n < 2k^2 + k, k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{2k^2 + 3k - n}{2k}, & \text{nếu } 2k^2 + k \leq n < 2(k+1)^2 - (k+1), k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Rõ ràng, $x_{n+1} - x_n = 0$ nếu x_n và x_{n+1} khác dòng, còn nếu x_n và x_{n+1} cùng nằm trên dòng l với $l > 1$ thì $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{l-1}$. Khi chỉ số n tiến ra vô cùng thì l cũng tiến ra vô cùng, và vì vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

Các phần tử của dãy cũng là các số hữu tỷ nằm trong đoạn đóng $[0; 1]$, và đồng thời trên mỗi dòng đều có số 0 và số 1. Tức là có các dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ và $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$

của dãy đó thỏa mãn $x_{n_k} = 0$, $x_{N_k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Và, ta có câu trả lời cho bài toán sau

7. *Xây dựng một dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i, Với mọi số tự nhiên n ta đều có $x_n \in \mathbb{Q}$ và $0 \leq x_n \leq 1$.

ii, Dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ có hai điểm tụ là 0 và 1.

iii, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Với dãy vừa xây dựng được, nhìn vào bảng thì ta thấy là mọi số hữu tỷ thuộc đoạn đóng $[0; 1]$ đều là điểm tụ của dãy, do là mỗi số hữu tỷ ấy đều xuất hiện ở vô hạn dòng. Tuy nhiên, thực ra ta đâu cần nhìn vào bảng đó, với việc dãy đó có hai điểm tụ là 0 và 1, thì nhờ kết quả ở phía trên, ta thấy ngay là nó có tập các điểm tụ là $[0; 1]$. □

Bây giờ, nếu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy vẫn thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ nhưng là dãy tăng ngặt và không bị chặn, lúc đó thì nó không có điểm tụ nào hết, và do đó ta có được $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Lúc đấy do $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ nên với mỗi số thực dương d tùy ý, lại sẽ có một chỉ số N_d để cứ với mỗi chỉ số $n > N_d$ ta có

$$a_n < a_{n+1} < a_n + d.$$

Và vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, nên cứ với số nguyên K thỏa mãn $K > a_{N_d}$ thì

$$S_K = \{n \in \mathbb{N} : n > N_d, a_n \geq K\} \neq \emptyset.$$

Theo nguyên lý cực hạn, ta lấy được $N_K = \min S_K$ và vì vai trò của N_K , nên

$$K - d < a_{N_K} - d < a_{N_K-1} < K.$$

Cho ta $1 - d < \{a_{N_K-1}\} < 1$, và $0 < \{a_{N_K}\} < d$. Từ sự tùy chọn của K và d , ta có được 0 và 1 là một điểm tụ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ở đây

$$x_n = \{a_n\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Và dễ dàng, ta có tập điểm tụ của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sẽ là $[0; 1]$. Đó cũng là câu trả lời cho bài toán sau đây, khi ta xét dãy

$$a_n = 29\sqrt{n} + 5\sqrt[3]{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

10. *Tìm tất cả các điểm tụ của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, có công thức số hạng tổng quát*

$$x_n = \left\{ 29\sqrt{n} + 5\sqrt[3]{n+1} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Xin kết thúc chủ đề ở đây. Nếu ai quan tâm đến chủ đề, thì việc tìm kiếm các vấn đề liên quan và phát triển nó, đó sẽ là việc của các bạn.