

Lý thuyết đồ thị hiện đại (nâng cao)

Trương Phước Nhân, 09/02/2022

Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản

Chủ đề 02. Bài toán thiết kế mạng điện

Chủ đề 03. Khái niệm luồng – Tính liên thông – Cặp ghép

Chủ đề 04. Các bài toán cực trị đồ thị

Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị

Chủ đề 06. Lý thuyết Ramsey

Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên

Chủ đề 08. Đồ thị – Cấu trúc nhóm – Ma trận

Chủ đề 09. Đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị

Chủ đề 10. Đa thức Tutte

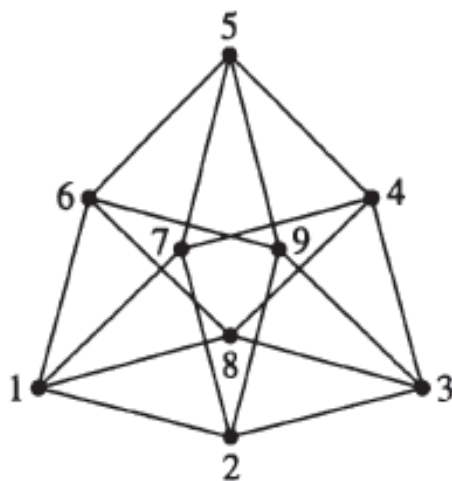
Nội dung của bài viết này là một loạt các bản nâng cấp cho các vấn đề đã được giới thiệu trước đó trong “**Lý thuyết đồ thị hiện đại (cơ bản)**”.

Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản

1.1. Đồ thị

Đồ thị G là một cặp sắp thứ tự của các tập rời nhau (V, E) trong đó E là một tập con của tập $[V]^2$ gồm các cặp không sắp thứ tự của tập V . Trừ khi có những giả thiết phụ bổ sung thêm, chúng ta sẽ chỉ xem xét các đồ thị hữu hạn, nghĩa là V và E đều là các tập hữu hạn. Tập E được gọi là **tập đỉnh** còn tập V được gọi là **tập cạnh**. Nếu G là một đồ thị thì $V = V(G)$ kí hiệu tập các đỉnh của G và $E = E(G)$ kí hiệu tập các cạnh của G . Một cạnh $\{x, y\}$ được gọi là **nối giữa các đỉnh x và y** và được kí hiệu đơn giản lại bởi xy . Do đó, xy và yx là các cách kí hiệu khác nhau của cùng một cạnh; các đỉnh x và y được gọi là các đầu mút của cạnh này. Nếu $xy \in E(G)$ thì x và y được gọi là **các đỉnh liên hợp** (hoặc **các đỉnh láng giềng**) của G , các đỉnh x và y được gọi là các đỉnh liên thuộc với cạnh xy . Hai cạnh cũng được gọi là **liên hợp với nhau** nếu chúng có chính xác một đầu mút chung nào đó.

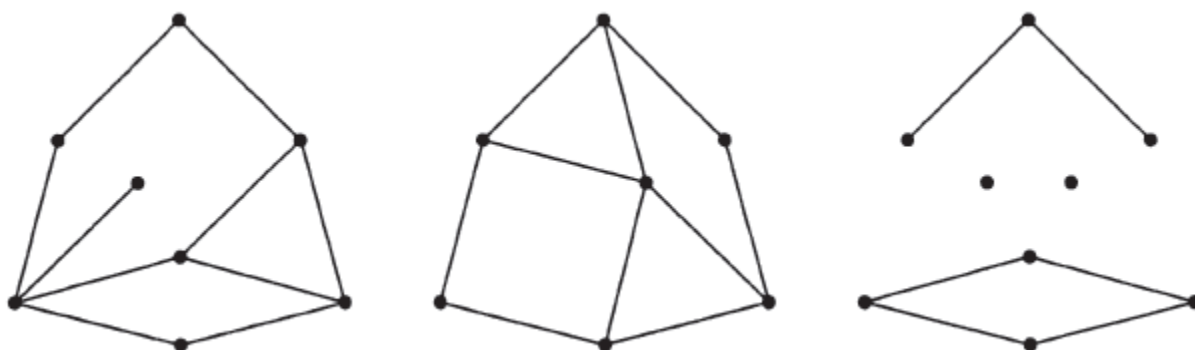
Như thuật ngữ gợi ý, chúng ta thường không xem một đồ thị như một cặp sắp thứ tự mà thường xem nó như một tập các đỉnh mà một số đỉnh trong đó được nối với nhau bởi một số cạnh nào đó. Đây cũng là một cách rất tự nhiên để giúp chúng ta có thể biểu diễn trực quan một đồ thị. Trên thực tế, đây cũng chính là cách dễ nhất để chúng ta có thể mô tả trực quan một đồ thị. Chẳng hạn, đồ thị G với các đỉnh $1, 2, \dots, 9$ và các cạnh $12, 23, 34, 45, 56, 61, 17, 72, 29, 95, 57, 74, 48, 83, 39, 96, 68, 81$ có thể được quan sát trực quan ngay lập tức bằng cách nhìn vào hình vẽ minh họa bên dưới đây.



Hình ảnh minh họa đồ thị G với tập đỉnh $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và tập cạnh

$$E = \{12,23,34,45,56,61,17,72,29,95,57,74,48,83,39,96,68,81\}.$$

Chúng ta nói rằng $G' = (V', E')$ là một **đồ thị con** của $G = (V, E)$ nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ kí hiệu $G' \subset G$. Nếu G' có chứa tất cả các cạnh của G nối giữa hai đỉnh bất kì nằm trong V' thì G' được gọi là một **đồ thị con cảm sinh bởi V'** (hoặc **đồ thị con khung được tạo ra bởi V'**) và được kí hiệu bởi $G[V']$. Do đó, một đồ thị con G' của G được gọi là một **đồ thị con cảm sinh** nếu $G' = G[V(G')]$. Nếu $V' = V$ thì G' được gọi là một **đồ thị con khung** của G .



Hình ảnh minh họa đồ thị con, đồ thị con cảm sinh, đồ thị con khung của đồ thị G .

Chúng ta cũng thường xây dựng các đồ thị mới từ các đồ thị cũ bằng cách xóa hoặc bổ sung thêm một số đỉnh và cạnh mới. Nếu $W \subset V(G)$ thì $G - W = G[V \setminus W]$ là một đồ thị con của G thu được bằng cách xóa các đỉnh trong W và tất cả các cạnh liên thuộc với chúng. Tương tự, nếu $E' \subset E(G)$ thì $G - E' = (V(G), E(G) \setminus E')$. Nếu $W = \{w\}$ và $E' = \{xy\}$ thì cách kí hiệu này được đơn giản hóa thành $G - w$ và $G - xy$. Tương tự, nếu x và y là các đỉnh không liên hợp nhau của G thì $G + xy$ là một đồ thị nhận được từ G bằng cách nối x với y .

Nếu x là một đỉnh của đồ thị G thì thông thường chúng ta sẽ viết $x \in G$ thay cho cách viết $x \in V(G)$. **Bậc của một đồ thị G** được định nghĩa là số đỉnh được chứa trong G và được kí hiệu lại bởi $|G|$. Kí hiệu tương tự cũng được sử dụng để chỉ số lượng phần tử của một tập hợp X : $|X|$ được dùng để biểu thị số phần tử của tập X . Do đó, $|G| = |V(G)|$. **Kích thước của một đồ thị G** được định nghĩa là số cạnh được chứa trong G và

được kí hiệu lại bởi $\|G\|$. Chúng ta thường dùng G_n để chỉ một đồ thị tùy ý với bậc n . Tương tự, $G(n, m)$ được dùng để chỉ một đồ thị tùy ý với bậc n và kích thước m .

Với các tập con rời nhau U và W của tập các đỉnh của một đồ thị, chúng ta thường dùng kí hiệu $E(U, W)$ để chỉ tập các $U - W$ cạnh, nghĩa là tập các cạnh nối giữa một đỉnh nằm trong U với một đỉnh nằm trong W . Ngoài ra, $\|U, W\| = |E(U, W)|$ cũng được dùng để kí hiệu số các $U - W$ cạnh. Nếu chúng ta muốn nhấn mạnh rằng đồ thị đang khảo sát là G thì chúng ta sẽ thường kí hiệu $E_G(U, W)$ và $\|U, W\|_G$.

Hai đồ thị được gọi là **đẳng cấu** nếu có một phép tương ứng 1 – 1 giữa các tập đỉnh của chúng và vẫn bảo toàn tính liên hợp. Như vậy, $G = (V, E)$ sẽ đẳng cấu với $G' = (V', E')$ nếu có một song ánh $\phi: V \rightarrow V'$ sao cho $xy \in E$ khi và chỉ khi $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Rõ ràng, các đồ thị đẳng cấu với nhau đều có cùng bậc và kích thước. Thông thường chúng ta không đặt vấn đề phân biệt giữa các đồ thị đẳng cấu ngoại trừ khi chúng ta cần xem xét các đồ thị xác định trên các tập đỉnh phân biệt hoặc các tập đỉnh được gán nhãn (chẳng hạn, các đồ thị con của một đồ thị cho trước). Theo cách quy ước này, nếu G và H là các đồ thị đẳng cấu thì chúng ta sẽ kí hiệu $G \cong H$ (hoặc đơn giản chỉ là $G = H$).



Hình vẽ minh họa tất cả các đồ thị có bậc ≤ 4 và kích thước 3 (sai khác nhau một phép đẳng cấu).

Kích thước của một đồ thị có bậc n bất kỳ nhỏ nhất là 0 và lớn nhất là $\binom{n}{2}$. Rõ ràng, với mỗi $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, luôn tồn tại một đồ thị $G(n, m)$. Một đồ thị có bậc n và kích thước $\binom{n}{2}$ được gọi là một n – đồ thị đầy đủ và được kí hiệu lại bởi K_n ; một đồ thị có bậc n và không có chứa cạnh nào được gọi là một n – đồ thị rỗng và được kí hiệu lại bởi E_n . Trong K_n , mọi đỉnh đều liên hợp với nhau; trong E_n , không có hai đỉnh nào liên hợp với nhau. Đồ thị $K_1 = E_1$ được cho là tầm thường.

Do E_n có cách kí hiệu khá gần với tập các cạnh của một đồ thị nên chúng ta sẽ thường sử dụng $\overline{K_n}$ để kí hiệu cho một đồ thị rỗng bậc n (phần bù của đồ thị đầy đủ K_n). Tổng quát hơn, với một đồ thị $G = (V, E)$ bất kỳ, phần bù của G được định nghĩa là đồ thị $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} - E)$. Do đó, hai đỉnh sẽ liên hợp với nhau trong G khi và chỉ khi chúng không liên hợp với nhau trong $\bar{G}$.

Tập các đỉnh láng giềng của x được định nghĩa là tập các đỉnh liên hợp với đỉnh $x \in G$ và được kí hiệu lại bởi $N(x)$. Đôi khi, chúng ta cũng gọi $N(x)$ là **tập láng giềng mở của x** còn $N(x) \cup \{x\}$ được gọi là tập láng giềng đóng của x . Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ kí hiệu $x \sim y$ để ngụ ý rằng đỉnh x liên hợp với đỉnh y . Do đó, những cách $y \in N(x), x \in N(y), x \sim y, y \sim x$ là hoàn toàn tương đương với nhau: mỗi kí hiệu trong chúng đều ngụ ý rằng xy là một cạnh của G . **Bậc của đỉnh x** được định nghĩa là $d(x) = |N(x)|$. Nếu chúng ta muốn nhấn mạnh rằng đồ thị đang xem xét là G thì chúng ta sẽ thường kí hiệu là $N_G(x)$ và $d_G(x)$. Một quy ước tương tự cũng sẽ được chấp nhận cho các hàm khác khi chúng ta cần nhấn mạnh về đồ thị đang được xem xét. Do đó, nếu $x \in H = G[W]$ thì $N_H(x) = \{y \in H: xy \in E(H)\} = N_G(x) \cap W$.

Bậc nhỏ nhất của các đỉnh của đồ thị G được kí hiệu bởi $\delta(G)$ và **bậc lớn nhất của các đỉnh của đồ thị G** được kí hiệu bởi $\Delta(G)$. Một đỉnh có bậc 0 sẽ được gọi là một **đỉnh cô lập**. Nếu $\delta(G) = \Delta(G) = k$, nghĩa là mọi đỉnh của G đều có bậc bằng k , thì G sẽ được gọi là một **đồ thị regular bậc k** (hoặc **đồ thị k – regular**). Một **đồ thị là regular** nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị k – regular với một chỉ số k nào đó. Một đồ thị 3 – regular thường được gọi là một **khối lập phương**.

Nếu $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ thì $(d(x_i))_1^n$ được gọi là một **dãy bậc của G** . Thông thường chúng ta sẽ thường sắp thứ tự các đỉnh này sao cho kết quả thu được sẽ là một dãy đơn điệu tăng hoặc một dãy đơn điệu giảm. Chẳng hạn, $\delta(G) = d(x_1) \leq \dots \leq d(x_n) = \Delta(G)$. Do mỗi cạnh đều có hai đầu mút nên tổng các bậc của G gấp đôi tổng số cạnh: $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2\|G\|$.

Như vậy, tổng các bậc của G sẽ là một số chẵn: $\sum_{i=1}^n d(x_i) \equiv 0(mod 2)$.

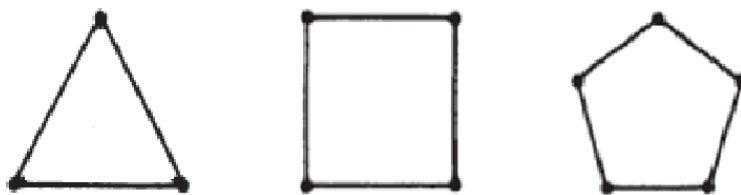
Nhận thấy rằng nhận định trên cũng chỉ ra rằng số các đỉnh có bậc lẻ cũng sẽ là một số chẵn. Chúng ta cũng nhận thấy rằng $\delta(G) \leq \lfloor 2\|G\|/n \rfloor$ và $\Delta(G) \geq \lceil 2\|G\|/n \rceil$, trong đó $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn x .

Một **đường đi P** được định nghĩa là một đồ thị P có dạng $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ và $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l\}$.

Đồ thị P này thường được kí hiệu lại bởi $x_0x_1 \dots x_l$. Các đỉnh x_0 và x_l được gọi là **các đầu mút của P** và $l = |P|$ được định nghĩa là **chiều dài của đường đi P** . Chúng ta sẽ nói rằng P là một **đường đi từ x_0 đến x_l** (hoặc **$x_0 - x_l$ đường đi**). Hiển nhiên, P cũng là một đường đi từ x_l đến x_0 (hoặc **$x_l - x_0$ đường đi**). Đôi khi, chúng ta sẽ cần nhấn mạnh rằng P là một đường đi xuất phát từ x_0 đến x_l . Khi đó, chúng ta sẽ gọi x_0 là **đỉnh đầu** còn x_l là **đỉnh cuối** của P . Một đường đi có đỉnh đầu là x thường được kí hiệu bởi $x -$ đường đi.

Một tập các đỉnh (hoặc các cạnh) được gọi là **độc lập** nếu không có hai phần tử nào trong số chúng liên hợp với nhau. Như vậy, một tập các đỉnh $W \subset V(G)$ sẽ được gọi là độc lập nếu và chỉ nếu $G[W]$ là một đồ thị rỗng. Một tập các đường đi được gọi là **độc lập** nếu, với hai đường đi bất kỳ, các đỉnh nằm trong cả hai đường đi này chỉ có thể là các đầu mút của chúng. Do đó, các $x - y$ đường đi $P_1, P_2, \dots, P_k$ là độc lập nếu và chỉ nếu $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}$ với mọi cặp chỉ số $i \neq j$. Thuật ngữ độc lập này sẽ được sử dụng thường xuyên cho các bài toán có liên quan đến các đỉnh, các cạnh và các đường đi của một đồ thị. Có một khái niệm khác cũng liên quan rất chặt chẽ đến khái niệm đường đi nằm trong một đồ thị. Một **dây truyền W** được định nghĩa là một dãy các đỉnh và các cạnh thay phiên nhau $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l$ với $e_i = x_{i-1}x_i$, $0 < i \leq l$. Theo cách định nghĩa thuật ngữ như ở trên, chúng ta sẽ kí hiệu W lại là một **$x_0 - x_l$ dây truyền** và l được xem như là **chiều dài của W** . Dây truyền W được gọi là **trail** nếu tất cả các cạnh của nó đôi một phân biệt nhau. Lưu ý rằng bản thân một đường đi P chính là một dây truyền có tất cả các đỉnh đôi một phân biệt nhau. Một trail có các đầu mút trùng nhau (một **trail đóng**) thường được gọi là một **circuit**. Nói một cách chính xác hơn, một circuit được định nghĩa là một trail đóng không có sự phân biệt đỉnh đầu cuối và hướng. Nếu một dây truyền $W = x_0x_1 \dots x_l$ thỏa mãn $l \geq 3, x_0 = x_l$, các đỉnh x_i ($0 < i < l$) đều đôi một phân biệt nhau và khác với x_0 thì W được gọi là một **chu trình**. Để đơn giản, chúng ta sẽ thường sẽ kí hiệu một chu trình như vậy lại dưới dạng $x_1x_2 \dots x_l$. Lưu ý rằng cách ký hiệu này khác với cách ký hiệu của một đường đi do x_1x_l cũng là một cạnh của chu trình này. Do một chu trình sẽ không có đỉnh bắt đầu cũng như không có hướng nên tất cả các cách kí hiệu $x_1x_2 \dots x_l, x_2x_3 \dots x_lx_1, x_lx_1 \dots x_{l-1}$ đều biểu thị cho cùng một chu trình.

Chúng ta thường sử dụng kí hiệu P_l để biểu thị một đường đi tùy ý có chiều dài l và C_l để biểu thị một chu trình có chiều dài l . Chúng ta còn gọi C_3 là một **tam giác**, C_4 là một **tứ giác**, C_5 là một **ngũ giác**, v.v.... Ngoài ra, C_l cũng được gọi là một **l – chu trình**. Một chu trình sẽ được gọi là **chẵn** (hoặc **lẻ**) tùy thuộc vào việc chiều dài của nó là một số chẵn (hoặc lẻ).



Hình vẽ minh họa các đồ thị C_3, C_4, C_5 .

Trước khi tiếp tục trình bày các định nghĩa, chúng ta sẽ giới thiệu hai kết quả quan trọng liên quan đến các chu trình. Kết quả đầu tiên được ghi nhận bởi Veblen vào năm 1912.

Kết quả 1.1.1. (Veblen)

Tập các cạnh của một đồ thị bất kỳ có thể được phân hoạch thành một tập các chu trình khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Chứng minh kết quả 1.1.1.

Nhận thấy rằng nếu một đồ thị có thể được phân hoạch thành một tập các chu trình độc lập cạnh thì mỗi đỉnh được chứa trong k chu trình đều có bậc bằng $2k$.

Giả sử mọi đỉnh của đồ thị G đều có bậc chẵn và $\|G\| > 0$. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể tìm thấy một chu trình đơn trong đồ thị G ?”. Giả sử $x_0 x_1 \dots x_l$ là một đường đi với chiều dài lớn nhất l trong G . Do $x_0 x_1 \in E(G)$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $d(x_0) \geq 2$. Khi đó, đỉnh x_0 phải có một đỉnh láng giềng y khác với x_1 . Hơn nữa, chúng ta sẽ phải có $y = x_i$ với một chỉ số $i, 2 \leq i \leq l$: trường hợp ngược lại, $y x_0 x_1 \dots x_l$ sẽ là một đường đi có chiều dài bằng $l + 1$. Do đó, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $x_0 x_1 \dots x_i$ chính là chu trình cần tìm.

Sau khi đã tìm được một chu trình như đã trình bày ở trên, tạm giả sử là C_1 , tất cả những gì chúng ta cần phải làm tiếp theo là lặp đi lặp lại quy trình nêu ở trên. Để hình thức hóa cụ thể khẳng định trên, kí hiệu $G_1 = G$. Khi đó, C_1 là một chu trình trong G_1 . Kí hiệu $G_2 = G_1 - E(C_1)$. Nhận thấy rằng do mọi đỉnh của G_2 đều có bậc chẵn nên $E(G_2) = \emptyset$ hoặc G_2 có chứa một chu trình C_2 nào đó. Bằng cách tiếp tục lặp lại cách làm trên, chúng ta dễ dàng tìm được các chu trình phân biệt $C_1, C_2, \dots, C_s$ sao cho $E(G) = \bigcup_{i=1}^s E(C_i)$. $\square$

Để chứng minh tính đúng đắn của kết quả thứ hai – một kết quả tuyệt đẹp được giới thiệu bởi Mantel vào năm 1907, chúng ta sẽ cần sử dụng hệ thức $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2|G|$ và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Kết quả 1.1.2. (Man)

Mọi đồ thị có bậc n và kích thước lớn hơn $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ đều có chứa ít nhất một tam giác.

Chứng minh kết quả 1.1.2.

Giả sử G là một đồ thị triangle – free có bậc n .

Khi đó, với mọi cạnh $xy \in E(G)$, $N(x) \cap N(y) = \emptyset$, nên $d(x) + d(y) \leq n$.

Bằng cách lấy tổng tất cả các bất đẳng thức trên với mọi cạnh $xy \in E(G)$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\sum_{x \in G} d(x)^2 \leq n \|G\|.$$

Bằng cách sử dụng hệ thức $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2\|G\|$ và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, chúng ta nhận thấy rằng

$$(2\|G\|)^2 \leq (\sum_{x \in G} d(x))^2 \leq n(\sum_{x \in G} d(x)^2).$$

Như vậy, $(2\|G\|)^2 \leq n^2 \|G\|$ (điều này suy ra từ hệ thức $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2\|G\|$), nên $\|G\| \leq n^2/4$. $\square$

Nhận thấy rằng đánh giá nêu trong kết quả trên là tốt nhất có thể được. Định lí Mantel đã được mở rộng rất nhiều bởi nhà toán học Túran vào những năm 1941: như chúng ta sẽ thấy trong **Chủ đề 04. Các bài toán cực trị đồ thị**, Định lí Túran này đóng vai trò như là điểm xuất phát của lý thuyết cực trị đồ thị.

Giả sử cho trước các đỉnh x và y , **khoảng cách** $d(x, y)$ giữa chúng được định nghĩa là chiều dài nhỏ nhất có thể có của một $x - y$ đường đi. Nếu không tồn tại bất kỳ một $x - y$ đường đi nào thì $d(x, y) = \infty$.

Một đồ thị được gọi là **liên thông** nếu tồn tại một $x - y$ đường đi, với mọi cặp các đỉnh phân biệt $\{x, y\}$. Lưu ý rằng mọi đồ thị liên thông có bậc ≥ 2 đều không có chứa bất kỳ một đỉnh cô lập nào. Một đồ thị con liên thông tối đại sẽ được gọi là một **thành phần liên thông** của đồ thị. Một **đỉnh khớp** được định nghĩa là một đỉnh mà khi chúng ta xóa đỉnh này đi sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Tương tự, một cạnh được gọi là một **cạnh cầu** nếu khi chúng ta xóa cạnh này đi cũng sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Như vậy, một cạnh cầu được định nghĩa là một cạnh mà khi chúng ta xóa cạnh này đi sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Một đồ thị không có chứa bất kỳ một chu trình nào được gọi là một **rừng** (hoặc một **đồ thị acyclic**); một rừng liên thông sẽ được gọi là một **cây**. Mối quan hệ giữa một cây và một rừng sẽ trở nên ít vô lý hơn nếu chúng ta lưu ý rằng rừng là một tổ hợp các cây rời rạc nhau; nói cách khác, rừng là một đồ thị có mọi thành phần đều là một cây.



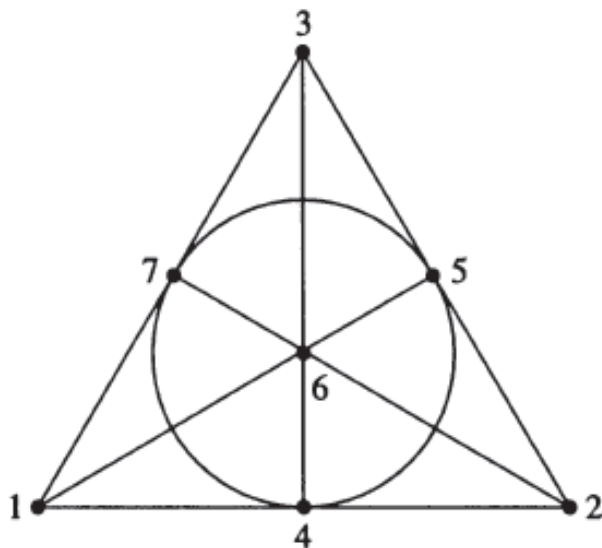
Hình vẽ minh họa các rừng.

Một đồ thị G được gọi là một **đồ thị lưỡng phân với các lớp đỉnh V_1 và V_2** nếu $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ và mọi cạnh của nó đều nối một đỉnh nằm trong V_1 với một đỉnh khác nằm trong V_2 . Chúng ta cũng sẽ nói rằng G có **phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2)** . Tương tự, một đồ thị G được gọi là một **r – phân với các lớp đỉnh $V_1, V_2, \dots, V_r$** (hoặc **r – phân hoạch $(V_1, V_2, \dots, V_r)$**) nếu $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r, V_i \cap V_j = \emptyset$ với mọi cặp chỉ số $1 \leq i < j \leq r$ và không có cạnh nào nối giữa hai đỉnh nằm trong cùng một lớp đỉnh.

Kí hiệu $K(n_1, n_2, \dots, n_r)$ là một đồ thị r – phân đầy đủ: một đồ thị có n_i đỉnh trong lớp đỉnh thứ i và chứa tất cả các cạnh nối giữa các lớp đỉnh khác nhau. Để đơn giản, chúng ta thường kí hiệu $K_{p,q}$ thay cho $K(p, q)$ và $K_r(t)$ thay cho $K(t, \dots, t)$.

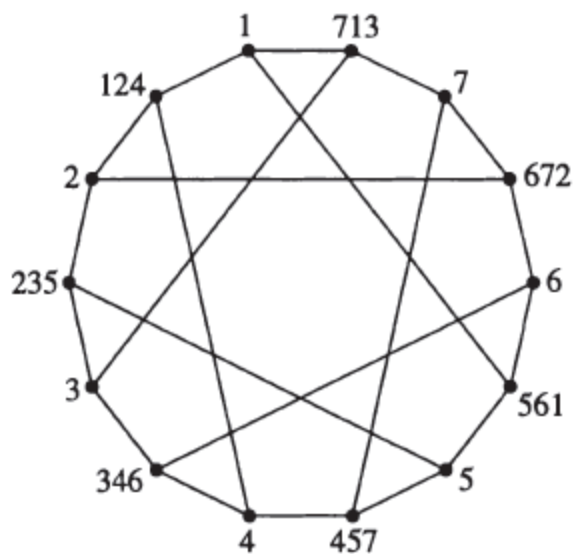
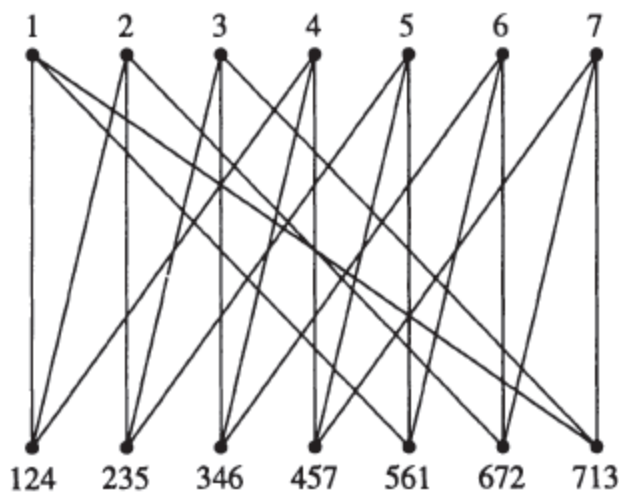
Chúng ta thường kí hiệu $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ và kG để chỉ hợp của k bản sao rời rạc của G . Chúng ta sẽ nhận được đồ thị $G + H$ từ $G \cup H$ bằng cách bổ sung thêm tất cả các cạnh nằm giữa G và H . Chẳng hạn, $K_{2,3} = E_2 + E_3 = \overline{K_2} + \overline{K_3}$ và $K_r(t) = E_t + \dots + E_t = \overline{K_t} + \dots + \overline{K_t}$.

Có một khái niệm khác cũng liên quan rất chặt chẽ đến khái niệm đồ thị. Một **siêu đồ thị** được định nghĩa là một cặp sắp thứ tự (V, E) sao cho $V \cap E = \emptyset$ và E là một tập con của tập $\mathcal{P}(V)$ – tập lũy thừa của tập V : tập tất cả các tập con của V .



Hình vẽ minh họa siêu đồ thị tương ứng với mặt phẳng Fano: mặt phẳng xạ ảnh $PG(2,2)$ được tạo thành bởi 7 đỉnh 1,2,3,4,5,6,7 và 7 đường thẳng 124,235,346,457,561,672,713.

Trên thực tế, có một phép tương ứng 1 – 1 đơn giản giữa các siêu đồ thị và một lớp nhất định các đồ thị lưỡng phân. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $H = (V, E)$. Khi đó, **biểu diễn lưỡng phân của H** được định nghĩa là một đồ thị lưỡng phân với các lớp đỉnh với các lớp đỉnh V và E trong đó một đỉnh $x \in V$ được nối với một cạnh $S \in E$ khi và chỉ khi $x \in S$.



Hình vẽ minh họa đồ thị Heawood: biểu diễn lưỡng phân của mặt phẳng Fano.

Từ cách định nghĩa này của chúng ta, một đồ thị không thể chứa bất kỳ một **cạnh khuyên** nào (một cạnh nối một đỉnh với chính nó) và nó cũng không thể chứa các **cạnh bội** (các cạnh cùng nối một cặp đỉnh nào đó). Trong một **đa đồ thị**, các cạnh khuyên và cạnh bội đều được cho phép; một cạnh khuyên có thể được xem như một cạnh đặc biệt. Để tránh việc gây ra nhầm lẫn, các đồ thị sẽ được gọi là các **đồ thị đơn**. Trong bài viết này, chúng ta thường sẽ khảo sát các đồ thị đơn nhiều hơn là các đa đồ thị. Tuy nhiên, đôi khi các đa đồ thị là lời giải tự nhiên cho các kết quả của chúng ta và thật giả tạo khi chúng ta lại đi giới hạn các khảo sát trên các đồ thị đơn. Chẳng hạn, Kết quả 1.1.1) vẫn còn đúng đối với các đa đồ thị với điều kiện là một cạnh khuyên được tính là đóng góp 2 đơn vị vào bậc của một đỉnh và chúng ta cũng sẽ chấp nhận các chu trình có chiều dài bằng 1 (các cạnh khuyên) và các chu trình có chiều dài bằng 2 (chu trình được tạo thành bởi hai cạnh nối giữa các đỉnh giống nhau).

Nếu các cạnh là các cặp đỉnh được sắp thứ tự thì chúng ta sẽ nhận được khái niệm về một **đồ thị có hướng** và một **đa đồ thị có hướng**. Một cặp sắp thứ tự (a, b) được gọi là một **cạnh có hướng từ a đến b** (hoặc một **cạnh bắt đầu tại a và kết thúc tại b**) và kí hiệu lại bởi $\overrightarrow{ab}$. Các khái niệm được định nghĩa cho các đồ thị dễ dàng được chuyển sang cho các đa đồ thị, các đồ thị có hướng, các đa đồ thị có hướng với các sửa đổi bổ sung nhất định. Như vậy, một **dây truyền có hướng** trong một đa đồ thị có hướng được định nghĩa là một dãy các đỉnh và các cạnh thay phiên nhau: $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l$ sao cho cạnh e_i bắt đầu tại x_{i-1} và kết thúc tại x_i . Ngoài ra, mọi đỉnh x của một đồ thị có hướng bất kỳ đều có một bậc ngoài và một bậc trong: **bậc ngoài $d^+(x)$** được định nghĩa là số các cạnh bắt đầu tại x và **bậc trong $d^-(x)$** được định nghĩa là số các cạnh kết thúc tại x .

Một **đồ thị định hướng** là một đồ thị có hướng thu được bằng cách định hướng lại các cạnh của một đồ thị vô hướng, nghĩa là mỗi cạnh ab đều được xác định một định hướng $\overrightarrow{ab}$ hoặc $\overrightarrow{ba}$. Như vậy, một đồ thị định hướng là một đồ thị có hướng trong đó chỉ có thể xảy ra nhiều nhất một trong hai hướng $\overrightarrow{ab}$ và $\overrightarrow{ba}$.

Nhận thấy rằng Kết quả 1.1.1) cũng có một biến thể tự nhiên đối với các đồ thị có hướng: tập các cạnh của một đồ thị có hướng có thể được phân hoạch thành các chu trình có hướng khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có cùng bậc trong và bậc ngoài, nghĩa là $d^+(x) = d^-(x)$ với mọi đỉnh x .

1.2. Đường đi – Chu trình – Cây

Với các khái niệm đã được định nghĩa cho đến nay, chúng ta có thể bắt đầu chứng minh một số kết quả cơ bản về các đồ thị. Mặc dù phần lớn các kết quả mà chúng ta trình bày ở đây hầu như không gì hơn chỉ là những quan sát đơn giản nhưng chúng lại phù hợp với phong cách trình bày của các chủ đề khác nên chúng ta vẫn sẽ giới thiệu chúng ở đây.

Kết quả 1.2.1.

Giả sử x là một đỉnh của một đồ thị G nào đó và kí hiệu W là tập các đỉnh của một thành phần liên thông nào đó có chứa x . Khi đó, chúng ta sẽ có các khẳng định sau:

i) $W = \{y \in G: G \text{ có chứa một } x - y \text{ đường đi}\};$

ii) $W = \{y \in G: G \text{ có chứa một } x - y \text{ trail}\};$

iii) $W = \{y \in G: d(x, y) < \infty\};$

iv) Với mọi $u, v \in V = V(G)$, chúng ta sẽ kí hiệu uRv khi và chỉ khi $uv \in E(G)$ và kí hiệu $\tilde{R}$ là quan hệ tương đương nhỏ nhất xác định trên V có chứa R . Khi đó, W là lớp tương đương của x .

Kết quả nhỏ này ngụ ý rằng mọi đồ thị đều là hợp phân biệt đỉnh của các thành phần liên thông của nó. Điều này tương đương với việc mọi đỉnh đều được chứa trong một thành phần liên thông duy nhất. Hơn nữa, một cạnh là một cạnh cầu nếu và chỉ nếu nó không nằm trong bất kỳ một chu trình nào.

Kết quả 1.2.2.

Một đồ thị là lưỡng phân khi và chỉ khi nó không có chứa bất kỳ một chu trình lẻ nào.

Chứng minh kết quả 1.2.2.

Giả sử G là một đồ thị lưỡng phân với các lớp đỉnh V_1 và V_2 tương ứng. Giả sử $x_1 x_2 \dots x_l$ là một chu trình bất kỳ chứa trong G . Không giảm tính tổng quát, giả sử $x_1 \in V_1$. Khi đó, $x_2 \in V_2, x_3 \in V_1, \dots, x_l \in V_1$ khi và chỉ khi l là một số lẻ. Do $x_l \in V_2$ nên l phải là một số chẵn.

Giả sử G là một đồ thị không có chứa bất kỳ một chu trình lẻ nào. Do một đồ thị là lưỡng phân khi và chỉ khi nó có hai thành phần liên thông và mọi cạnh của nó đều nối một đỉnh nằm trong thành phần liên thông này với một đỉnh khác nằm trong thành phần liên thông khác. Chọn ra một đỉnh $x \in V(G)$ bất kỳ, kí hiệu $V_1 = \{y: d(x, y) \text{ là một số lẻ}\}, V_2 = V \setminus V_1$. Nhận thấy rằng không có bất kỳ một cạnh nào nối hai đỉnh nằm trong cùng một lớp đỉnh V_i : trường hợp ngược lại, G sẽ có chứa một chu trình lẻ. Do đó, G là một đồ thị lưỡng phân. □

Nhận thấy rằng mọi đồ thị lưỡng phân bất kỳ với phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2) đều chỉ có tối đa $|V_1||V_2|$ cạnh. Do đó, một đồ thị lưỡng phân với bậc n sẽ có tối đa $\max_k k(n-k) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ cạnh và cực đại sẽ đạt được với đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$. Từ Kết quả 1.2.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy $\lfloor n^2/4 \rfloor$ cũng là kích thước cực đại có thể có của một đồ thị với bậc n không có chứa bất kỳ chu trình lẻ nào. Trên thực tế, như chúng ta đã thấy trong Kết quả 1.1.2), $\lfloor n^2/4 \rfloor$ là kích thước vừa đủ để đảm bảo một đồ thị với bậc n sẽ có chứa ít nhất một tam giác.

Kết quả 1.2.3.

Một đồ thị là rừng khi và chỉ khi, với mọi cặp đỉnh phân biệt $\{x, y\}$, nó luôn có chứa nhiều nhất một $x - y$ đường đi.

Chứng minh kết quả 1.2.3.

Nhận thấy rằng nếu $x_1x_2 \dots x_l$ là một chu trình nằm trong một đồ thị G thì $x_1x_2 \dots x_l$ và x_1x_l sẽ là hai $x_1 - x_l$ đường đi chứa trong G .

Ngược lại, giả sử $P_1 = x_0x_1x_2 \dots x_{l-1}x_l$ và $P_2 = x_0y_1y_2 \dots y_kx_l$ là hai $x_0 - x_l$ đường đi phân biệt nằm trong một đồ thị G . Kí hiệu $i + 1$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ và kí hiệu j là chỉ số nhỏ nhất sao cho $j \geq i$ và y_{j+1} là một đỉnh của P_1 , tạm giả sử $y_{j+1} = x_h$. Khi đó, $x_ix_{i+1} \dots x_hy_jy_{j-1} \dots y_{i+1}$ sẽ là một chu trình nằm trong G . □

Kết quả 1.2.4.

Giả sử cho trước một đồ thị G bất kỳ. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương với nhau:

i) G là một cây;

ii) G là một **đồ thị liên thông tối thiểu**, nghĩa là G là một đồ thị liên thông và nếu $xy \in E(G)$ thì $G - xy$ là một đồ thị không liên thông. Nói cách khác, G là một đồ thị liên thông và mọi cạnh của nó đều là một cạnh cầu.

iii) G là một **đồ thị acyclic tối đại**, nghĩa là G là một đồ thị acyclic và nếu x và y là các đỉnh không liên hợp nhau của G thì $G + xy$ sẽ phải chứa một chu trình nào đó.

Chứng minh kết quả 1.2.4.

(i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) Giả sử G là một cây. Nhận thấy rằng, với một cạnh $xy \in E(G)$, đồ thị $G - xy$ không thể chứa bất kỳ một $x - y$ đường đi $xx_1z_2 \dots z_ky$ nào: trường hợp ngược lại, G sẽ chứa chu trình $xx_1z_2 \dots z_ky$. Do đó, $G - xy$ là một đồ thị không liên thông. Như vậy, G sẽ là một đồ thị liên thông tối thiểu. Tương tự, nếu x và y là các đỉnh không liên hợp nhau của cây G thì G có chứa một đường đi $xx_1z_2 \dots z_ky$. Do đó, $G + xy$ sẽ có chứa chu trình $xx_1z_2 \dots z_ky$. Như vậy, G sẽ là một đồ thị acyclic tối đại.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Giả sử G là một đồ thị liên thông tối thiểu. Nếu G có chứa một chu trình $xx_1z_2 \dots z_ky$ thì $G - xy$ cũng là một đồ thị liên thông (điều này suy ra từ việc, trong bất kỳ một $u - w$ dây truyền nào của G , cạnh xy có thể được thay thế bởi đường đi $xx_1z_2 \dots z_ky$). Do điều này mâu thuẫn với tính tối thiểu của G nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng G là một đồ thị acyclic, nên G cũng sẽ là một cây.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Giả sử G là một đồ thị acyclic tối đại. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu G có thật sự là một đồ thị liên thông hay không?”. Câu trả lời cho vấn đề này hiển nhiên là có, bởi vì nếu có các đỉnh x và y nằm trong các thành phần liên thông khác nhau thì, bằng việc bổ sung thêm cạnh xy vào G , chúng ta sẽ nhận được thêm một chu trình $xx_1z_2 \dots z_ky$ nào đó (điều này suy ra từ việc G là một đồ thị acyclic tối đại). Tuy nhiên, chúng ta lại nhận thấy rằng việc bổ sung thêm cạnh xy vào G sẽ không thể tạo ra thêm bất kỳ một chu trình $xx_1z_2 \dots z_ky$ nào: trường hợp ngược lại, $xx_1z_2 \dots z_ky$ sẽ đóng vai trò là một đường đi trong G . Như vậy, G sẽ là một cây. □

Kết quả 1.2.5.

Mọi đồ thị liên thông đều có chứa một cây khung, nghĩa là một cây có chứa mọi đỉnh của đồ thị.

Chứng minh kết quả 1.2.5.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra bằng cách chọn ra một đồ thị con khung liên thông tối tiểu bất kỳ làm cây khung tương ứng nêu trong khẳng định. $\square$

Có một số cách đơn giản để giúp chúng ta có thể xây dựng được một cây khung của một đồ thị G cho trước; chúng ta sẽ trình bày hai trong số chúng:

Cách thứ nhất. Chọn ra một đỉnh $x \in G$ bất kỳ và kí hiệu $V_i = \{y \in G: d(x, y) = i\}, i = 0, 1, \dots$. Lưu ý rằng nếu $y_i \in V_i, i > 0$, và $xz_1z_2 \dots z_{i-1}y_i$ là một $x - y_i$ đường (sự tồn tại của một đường đi như vậy sẽ được đảm bảo bởi cách chúng ta định nghĩa các tập V_i) thì $d(x, z_j) = j$ với mọi chỉ số $j, 0 < j < i$. Hơn nữa, $V_j \neq \emptyset$ và, với mọi đỉnh $y \in V_i, i > 0$, tồn tại một đỉnh $y' \in V_{i-1}$ được nối với đỉnh y . (Hiển nhiên, đỉnh y' này thường sẽ không phải là duy nhất nhưng, với mỗi đỉnh $y \neq x$, chúng ta chỉ cần chọn ra một đỉnh y' là đủ) Kí hiệu T là đồ thị con của G với tập đỉnh V và tập cạnh $E(T) = \{yy': y \neq x\}$. Khi đó, T sẽ là một đồ thị liên thông (điều này suy ra từ việc mọi đỉnh $y \in V - \{x\}$ đều được nối với đỉnh x bởi một đường đi $yy'y'' \dots x$). Hơn nữa, T còn là một đồ thị acyclic (điều này suy ra từ việc nếu W là một tập con bất kỳ của V và w là đỉnh trong W cách xa nhất so với x thì w sẽ được nối với tối đa một đỉnh khác trong W). Như vậy, T sẽ là cây khung cần tìm.

Lập luận ở trên cho thấy rằng, với $k = \max_y d(x, y)$, chúng ta sẽ có $V_i \neq \emptyset$ với mỗi chỉ số $0 \leq i \leq k$ và $V = V(G) = \bigcup_{i=0}^k V_i$. Chính vì nhận định này mà rất khó để chúng ta có thể chống lại quan điểm cho rằng $\text{diam}G = \max_{x,y} d(x, y)$ là **đường kính của G** và $\text{rad}G = \min_x \max_y d(x, y)$ là **bán kính của G** .

Nếu chúng ta chọn đỉnh x với $k = \max_y d(x, y) = \text{rad}G$ thì cây khung T cũng sẽ có bán kính bằng k .

Cách thứ hai. Chọn ra một đỉnh $x \in G$ bất kỳ và kí hiệu T_1 là đồ thị con của G với chỉ duy nhất một đỉnh x . Khi đó, T_1 sẽ là một cây. Giả sử chúng ta đã xây dựng các cây $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_k \subset G$ với T_i có bán kính bằng i . Nếu $k < n = |G|$ thì, từ tính liên thông của G , sẽ tồn tại một đỉnh $y \in V(G) \setminus V(T_k)$ liên hợp (trong G) với một đỉnh $z \in T_k$. Kí hiệu T_{k+1} là cây mới nhận được từ T_k bằng cách bổ sung thêm đỉnh y và cạnh yz vào T_k . Khi đó, T_{k+1} sẽ là một đồ thị liên thông và nó cũng là một đồ thị acyclic (điều này suy ra từ việc yz không thể là một cạnh của bất kỳ một chu trình nào trong T_{k+1}). Như vậy, T_{k+1} cũng là một cây, nên dãy $T_0 \subset T_1 \subset \dots$ sẽ có thể được tiếp tục cho đến T_n . Khi đó, T_n sẽ là một cây khung của G .

Các cây khung được xây dựng bằng một trong hai cách nêu ở trên sẽ có bậc n và kích thước $n - 1$. Trong cách xây dựng thứ nhất, phép tương ứng xác định bởi công thức $y \mapsto yy'$ sẽ là một phép tương ứng $1 - 1$ giữa $V - \{x\}$ và $E(T)$. Trong cách xây dựng thứ hai, chúng ta nhận thấy rằng $\|T_k\| = k - 1$, với mọi chỉ số k (điều này suy ra từ việc $\|T_1\| = 0$ và T_{k+1} có nhiều cạnh hơn so với T_k). Từ Kết quả 1.2.4), chúng ta nhận thấy rằng mọi cây đều chỉ có duy nhất một cây khung; cụ thể, cây khung đó là chính nó. Do đó, chúng ta dễ dàng suy ra kết quả sau đây:

Kết quả 1.2.6.

Mọi cây có bậc n sẽ luôn có kích thước bằng $n - 1$; Mọi rừng có bậc n và k thành phần liên thông sẽ luôn có kích thước bằng $n - k$.

Phần đầu tiên của khẳng định trên có thể được kết hợp vào một số tính chất đặc trưng khác của các cấu trúc cây. Đặc biệt, một đồ thị có bậc n sẽ là một cây nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị liên thông và có kích thước $n - 1$.

Kết quả 1.2.7.

Mọi cây có bậc ≥ 2 đều có chứa ít nhất 2 đỉnh có bậc 1.

Chứng minh kết quả 1.2.7.

Giả sử $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ là dãy bậc của một cây T với bậc $n \geq 2$. Do T là một đồ thị liên thông nên $\delta(T) = d_1 \geq 1$. Do đó, nếu T chỉ có nhiều nhất một đỉnh bậc 1 thì chúng ta nhận thấy rằng

$$2n - 2 = 2\|T\| = \sum_{i=1}^n d_i \geq 1 + 2(n - 1).$$

□

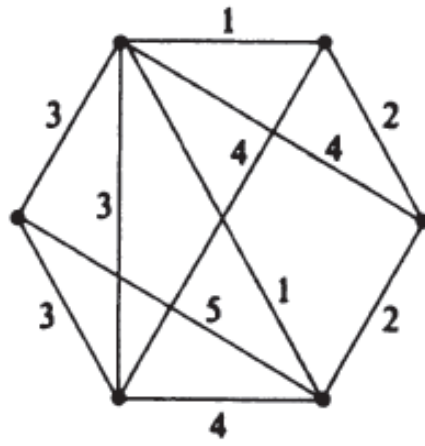
Một trong những vấn đề nổi tiếng nhất trong lý thuyết tối ưu hóa yêu cầu chúng ta phải xác định một cách tương đối một đồ thị con khung với một số tính chất đặc biệt cho trước:

“Giả sử cho trước một đồ thị $G = (V, E)$ và một hàm chi phí có giá trị dương $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định trên tập các cạnh. Xác định một đồ thị con khung liên thông $T = (V, E')$ của G sao cho biểu thức $f(T) = \sum_{xy \in E'} f(xy)$ đạt giá trị nhỏ nhất có thể được?”

Chúng ta sẽ gọi một đồ thị con khung T như vậy là một **đồ thị con khung tối ưu**. Chúng ta không cần quá nhiều trí tưởng tượng để có thể dịch bài toán trên thành một vấn đề “ngoài đời thực”:

“Giả sử cho trước một số ngôi làng nào đó được kết nối với một nguồn cung cấp nước tương ứng với ngôi làng đó. Hệ thống đường ống bao gồm các đường ống nối giữa nguồn cung cấp nước giữa hai làng. Với hai ngôi làng bất kỳ, chúng ta luôn biết rõ ràng rằng liệu có thể xây dựng được một đường ống nối giữa chúng hay không và chi phí để xây dựng một đường ống như thế (nếu được). Vấn đề được đặt ra ở đây đó là làm thế nào để có thể xác định được một hệ thống đường ống tối ưu kết nối giữa các ngôi làng này?”

Để chuyển đổi bài toán trên thành một bài toán về đồ thị, giả sử G là đồ thị có tập đỉnh là tập các ngôi làng và xy là một cạnh của nó nếu và chỉ nếu chúng ta có thể xây dựng được một đường ống nối giữa x và y ; kí hiệu $f(xy)$ là chi phí để chúng ta xây dựng được một đường ống như vậy. Khi đó, một hệ thống các đường ống như vậy sẽ tương ứng với một đồ thị con khung liên thông T của G . Do hệ thống này phải tối ưu nên T phải là một đồ thị con khung liên thông tối thiểu của G , nghĩa là một cây khung của G .



Hình ảnh minh họa một đồ thị G và một hàm chi phí $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

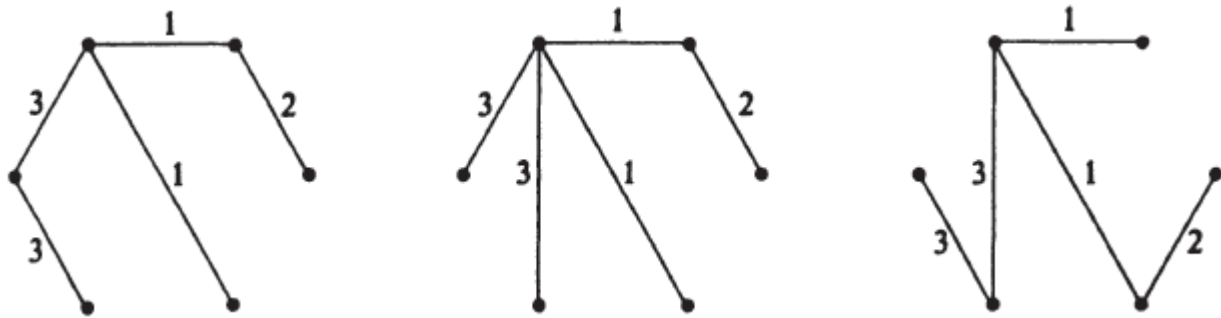
Thật vậy, đồ thị con khung liên thông T mà chúng ta cần tìm kiếm phải là một đồ thị con liên thông tối tiểu: trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ tìm được một cạnh α mà khi xóa nó đi khỏi đồ thị liên thông T vẫn sẽ nhận được một đồ thị con khung liên thông tối ưu $T - \alpha$. Như vậy, T sẽ là một cây khung của G . Tùy thuộc vào đặc điểm và cấu trúc của một cây khung, chúng ta sẽ có một số cách đơn giản để xác định một cây khung tối ưu; chúng ta sẽ trình bày bốn trong số các phương pháp này.

(1) Giả sử cho trước một đồ thị G và một hàm chi phí $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, chúng ta chỉ cần chọn ra những cạnh có chi phí thấp nhất của G , nghĩa là những cạnh α sao cho $f(\alpha)$ đạt giá trị nhỏ nhất có thể được. Mỗi cạnh tiếp theo sẽ được chọn từ các cạnh có chi phí thấp nhất còn lại của G với hạn chế duy nhất là tất cả các cạnh đã được chọn không thể nằm trong bất kỳ một chu trình nào, nghĩa là đồ thị con của G được tạo ra bởi các cạnh được chọn sẽ là một đồ thị acyclic.

Quá trình này sẽ kết thúc khi không có cạnh nào có thể được bổ sung thêm vào tập các cạnh E' đã được chọn từ trước cho đến nay mà không tạo ra bất kỳ một chu trình nào. Khi đó, $T_1 = (V(G), E')$ sẽ là một đồ thị con acyclic tối đại của G . Do đó, nó cũng sẽ là một cây khung của G (điều này suy ra từ khẳng định (iii) của Kết quả 1.2.4).

(2) Phương pháp này dựa trên một thực tế là thật ngu ngốc khi chúng ta lại đi sử dụng một cạnh có chi phí cao trừ khi điều đó là cần thiết để đảm bảo cho tính liên thông của đồ thị con nhận được. Như vậy, chúng ta sẽ xóa từng cạnh có chi phí cao nhất mà việc xóa này không làm mất đi tính liên thông của đồ thị con nhận được. Từ Kết quả 1.2.4), quá trình này sẽ kết thúc khi chúng ta nhận được một cây khung T_2 .

(3) Chọn ra một đỉnh x_1 bất kỳ của G và chọn ra một trong những cạnh có chi phí thấp nhất có liên thuộc với x_1 , tạm giả sử là x_1x_2 . Kế tiếp, chọn ra một trong những cạnh có chi phí thấp nhất có dạng x_ix với $1 \leq i \leq 2$ và $x \notin \{x_1, x_2\}$. Giả sử chúng ta đã tìm được các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ và một cạnh $x_ix_j, i < j$, với mỗi đỉnh $x_j, j \leq k$. Chọn ra một trong những cạnh có chi phí thấp nhất có dạng x_ix với $1 \leq i \leq k$ và $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, tạm giả sử là x_ix_{k+1} . Quá trình này sẽ kết thúc sau khi chúng ta chọn ra $n - 1$ cạnh. Kí hiệu T_3 là cây khung nhận được từ các cạnh này.



Hình vẽ minh họa 3 trong số 6 cây khung tối ưu của đồ thị G .

(4) Phương pháp này chỉ có thể được áp dụng nếu không có hai đường ống nào có cùng một chi phí xây dựng. Ưu điểm của phương pháp này nằm ở chỗ mỗi làng đều có thể tự đưa ra quyết định và bắt đầu xây dựng một đường ống mà không cần phải bận tâm đến việc tìm hiểu xem các làng khác sẽ làm gì. Tất nhiên, mỗi làng đều sẽ bắt đầu xây dựng đường ống có chi phí thấp nhất xuất phát từ chính làng đó. Có thể xảy ra trường hợp cả hai làng x và y đều đang xây dựng đường ống xy . Trong trường hợp này, họ sẽ gặp nhau ở giữa và chúng ta sẽ nhận được một đường ống duy nhất nối giữa x và y . Do đó, vào cuối giai đoạn này, một số làng sẽ được nối với nhau bằng cách đường ống dẫn nhưng toàn bộ hệ thống ống của chúng ta không nhất thiết phải liên thông. Ở giai đoạn tiếp theo, với mỗi nhóm làng được liên kết với nhau bằng cách đường ống dẫn, xác định đường ống dẫn với chi phí thấp nhất đi đến một ngôi làng khác không nằm trong nhóm liên kết này và bắt đầu xây dựng đường ống dẫn duy nhất đó. Lặp lại quy trình này cho đến khi chúng ta nhận được một hệ thống ống liên thông. Hiển nhiên, các làng sẽ không bao giờ xây dựng các đường ống nằm trong một chu trình nào đó, nên hệ thống các đường ống thu được sau cùng sẽ là một cây khung.

Kết quả 1.2.8.

Mỗi một trong bốn phương pháp được mô tả ở trên đều sẽ tạo ra một cây khung tối ưu. Nếu không có hai cạnh nào có cùng chi phí thì chúng ta sẽ chỉ có được một cây khung duy nhất.

Chứng minh kết quả 1.2.8.

Chọn ra một cây khung tối ưu T của G có càng nhiều cạnh chung với cây khung T_1 càng tốt, trong đó T_1 là cây khung được tạo ra bởi phương pháp đầu tiên.

Giả sử $E(T_1) \neq E(T)$. Các cạnh của T_1 được chọn lần lượt: giả sử xy là cạnh đầu tiên của T_1 không phải là một cạnh của T . Khi đó, T sẽ có chứa một $x - y$ đường đi P nào đó. Đường đi P này sẽ có chứa ít nhất một cạnh uv nào đó không nằm trong T_1 : trường hợp ngược lại, T_1 sẽ có chứa một chu trình nào đó. Do cạnh xy đã được chọn chứ không phải là cạnh uv nên cạnh xy không thể có chi phí cao hơn uv , nghĩa là $f(xy) \leq f(uv)$. Khi đó, $T' = T - uv + xy$ sẽ là một cây khung. Hơn nữa, do $f(T') = f(T) - f(uv) + f(xy) \leq f(T)$ nên cây T' mới sẽ là một cây khung tối ưu của G . Hiển nhiên, bất đẳng thức ở trên ngụ ý rằng $f(T') = f(T)$ và $f(xy) = f(uv)$. Điều này chỉ ra rằng cây T' này có nhiều điểm chung với T_1 hơn T , mâu thuẫn với cách lựa chọn cây T của chúng ta. Do đó, $T = T_1$. Như vậy, T_1 thực sự là một cây khung tối ưu của G .

Các biến thể nhẹ của chứng minh ở trên cũng chỉ ra rằng các cây khung T_2 và T_3 được tạo ra bởi các phương pháp thứ hai và thứ ba cũng là tối ưu.

Giả sử không có hai cạnh nào có cùng chi phí, nghĩa là $f(xy) \neq f(uv)$ với mọi $xy \neq uv$. Kí hiệu T_4 là cây khung được tạo ra bởi phương pháp thứ tư và T là một cây khung tối ưu của G . Giả sử $T \neq T_4$ và xy là cạnh đầu tiên của T_4 không phải là một cạnh của T . Do cạnh xy đã được chọn nên nó sẽ là cạnh có chi phí thấp nhất của G nối một đỉnh của một cây con F của T_4 với một đỉnh nằm bên ngoài F . Do đó, chúng ta sẽ có được một $x - y$ đường đi trong T có chứa một cạnh uv nối một đỉnh của cây con F với một đỉnh nằm bên ngoài F . Như vậy, $f(xy) < f(uv)$. Tuy nhiên, đây là một điều không thể (điều này suy ra từ việc $T' = T - uv + xy$ là một cây khung của G và $f(T') < f(T)$). Do đó, $T = T_4$. Điều này cho thấy rằng T_4 thực sự là một cây khung tối ưu của G . Hơn nữa, do cây khung được tạo ra bởi phương pháp thứ tư là duy nhất nên cây khung tối ưu sẽ là duy nhất nếu không có hai cạnh nào có cùng chi phí. $\square$

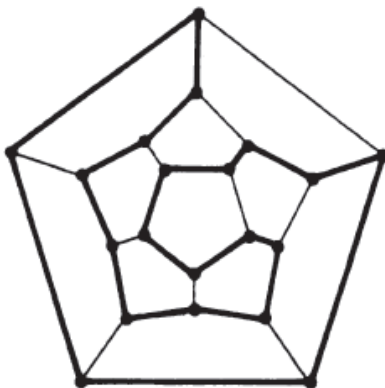
1.3. Chu trình Hamilton và Circuit Euler

Bài toán nhân viên bán hàng.

Giả sử một nhân viên bán hàng phải thực hiện một chuyến viếng thăm n thành phố và khi kết thúc chuyến viếng thăm này anh ta sẽ phải quay trở lại trụ sở chính ở thành phố mà anh ta đã khởi hành. Chi phí của chuyến đi giữa bất kỳ hai thành phố nào cũng đã được xác định từ trước. Vấn đề được đặt ra ở đây đó là xác định một thuật toán “hiệu quả” để tìm ra một chuyến viếng thăm ít tốn kém chi phí nhất? (một thuật toán sẽ được xem là “hiệu quả” nếu thời gian thực hiện của nó bị giới hạn bởi một đa thức được tính theo số các đỉnh)

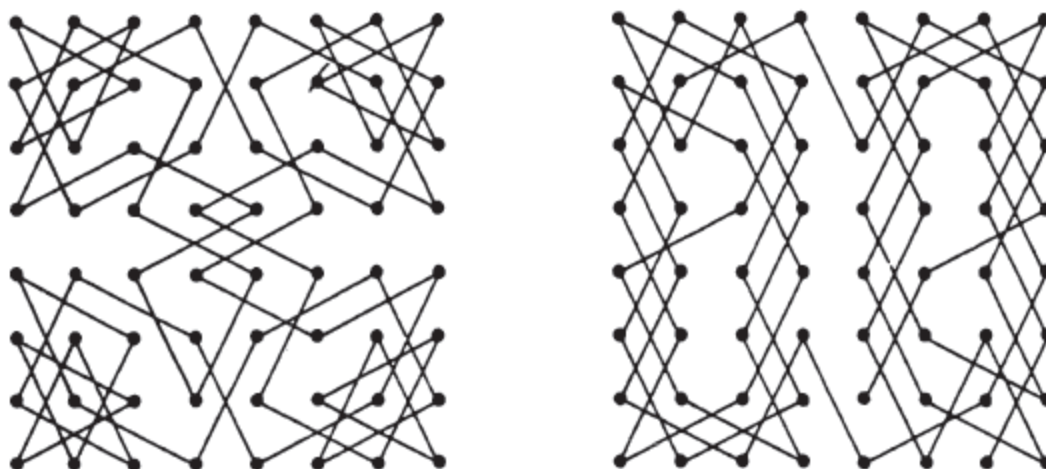
Bài toán nhân viên bán hàng này rất giống với bài toán xác định cây khung tối ưu đã được thảo luận đến trong mục trước đó nhưng về bản chất thì chúng hoàn toàn khác nhau. Mặc dù đã có rất nhiều các khảo sát đã được thực hiện liên quan đến vấn đề này bởi vì lời giải của nó có những ứng dụng rất quan trọng trong thực tế nhưng cho đến nay chúng ta vẫn chưa thể biết liệu có tồn tại một thuật toán hiệu quả để tìm ra một chuyến viếng thăm ít tốn kém chi phí như trên hay không.

Trong một phiên bản khác của bài toán nhân viên bán hàng, chúng ta thường sẽ yêu cầu chuyến viếng thăm bắt buộc phải là một chu trình, nghĩa là nhân viên bán hàng không được phép viếng thăm cùng một thành phố hai lần ngoại trừ thành phố của trụ sở chính nơi anh ta bắt đầu và kết thúc chuyến viếng thăm của mình. Một chu trình có chứa tất cả các đỉnh của một đồ thị cho trước sẽ được gọi là một **chu trình Hamilton** của đồ thị đó. Nguồn gốc của thuật ngữ này xuất phát từ một trò chơi đã được phát minh vào năm 1857 bởi nhà toán học Sir William Rowan Hamilton dựa trên việc xây dựng các chu trình có chứa tất cả các đỉnh của khối thập nhị diện đều. Một đường đi có chứa tất cả các đỉnh của một đồ thị cho trước sẽ được gọi một đường đi Hamilton. Một đồ thị có chứa một chu trình Hamilton được gọi là một **đồ thị Hamiltonian**.



Hình vẽ minh họa một chu trình Hamilton của khối thập nhị diện đều.

Trên thực tế, các chu trình và đường đi Hamilton trong các đồ thị đặc biệt đã được nghiên cứu khá nhiều từ trước cả khi Hamilton đề xuất trò chơi của mình. Cụ thể, bài toán mã đi tuần trên bàn cờ vua (bài toán yêu cầu chúng ta phải xác định một chu trình Hamilton trong đồ thị với các đỉnh là 64 ô vuông của bàn cờ vua và hai đỉnh sẽ liên hợp với nhau nếu và chỉ nếu quân mã có thể nhảy từ hình vuông này sang hình vuông còn lại) đã được phân tích kỹ lưỡng bởi Euler vào những năm 1759.



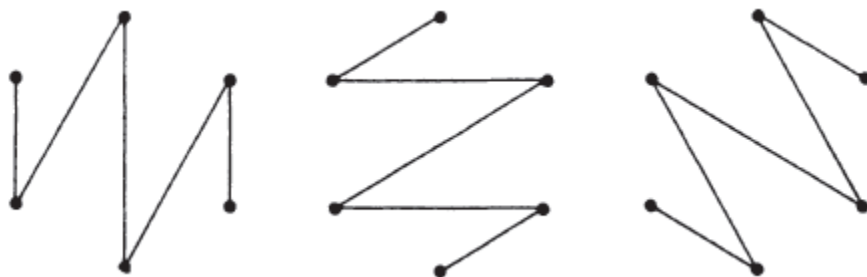
Hình vẽ minh họa hai đường đi Hamilton của quân mã trên bàn cờ vua.

Nếu, trong phiên bản thứ hai của bài toán nhân viên bán hàng, chỉ có hai loại chi phí là 1 và ∞ thì câu hỏi được đặt ra ở đây của chúng ta sẽ là: “Liệu đồ thị được tạo ra bởi các cạnh có chi phí đi lại bằng 1 có chứa một chu trình Hamilton hay không?”. Ngay cả trong trường hợp đặc biệt này của bài toán nhân viên bán hàng vẫn chưa được giải quyết: chúng ta vẫn chưa biết được rằng liệu có tồn tại hay không một thuật toán hiệu quả như vậy.

Nếu chi phí đi lại giữa hai thành phố bất kỳ là như nhau thì nhân viên bán hàng của chúng ta sẽ không quá khó khăn trong việc tìm kiếm một chuyến viếng thăm ít tốn kém nhất: mọi hoán vị của $n - 1$ thành phố (thành phố thứ n chính là nơi được đặt trụ sở chính) đều sẽ là một chuyến viếng thăm cần tìm. Với sự tự do mới được tìm thấy, chúng ta mong muốn nhân viên bán hàng sẽ không thực hiện lại cùng một đường đi xy trong khi vẫn có một đường đi uv mà anh ấy vẫn viếng thăm. Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu anh ấy có thể thực hiện được mong muốn của chúng ta hay không?”. Để lập kế hoạch viếng thăm cho nhân viên bán hàng, chúng ta chỉ cần phân tích K_n thành hợp của một số chu trình Hamilton phân biệt cạnh. Vấn đề của chúng ta sẽ trở thành: “Với những giá trị nào của n thì điều này có thể xảy ra?”. Do K_n là một đồ thị $(n - 1)$ - regular và một chu trình Hamilton chính là một đồ thị 2 - regular nên chúng ta dễ dàng nhận thấy điều kiện cần ở đây sẽ là $n - 1$ phải là một số chẵn, nghĩa là n phải là một số lẻ. Điều kiện cần này cũng có thể được suy ra từ thực tế là $\|K_n\| = \frac{1}{2}n(n - 1)$ và một chu trình Hamilton bất kỳ luôn có chứa n cạnh. Do đó, K_n phải là hợp của $\frac{1}{2}(n - 1)$ chu trình Hamilton.

Kế tiếp, chúng ta giả sử n là một số lẻ và $n \geq 3$. Bằng cách xóa đi một đỉnh bất kỳ của K_n , chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu K_n là hợp của $\frac{1}{2}(n - 1)$ chu trình Hamilton thì K_{n-1} sẽ là hợp của $\frac{1}{2}(n - 1)$ đường

đi. (Trên thực tế, nếu K_{n-1} là hợp của một số đường đi Hamilton thì $n - 1$ phải là một số chẵn (điều này suy ra từ việc $\|K_{n-1}\| = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ và một đường đi Hamilton bất kỳ trong K_{n-1} đều có $n - 2$ cạnh))



Hình vẽ minh họa ba đường đi Hamilton phân biệt cạnh trong K_6 .

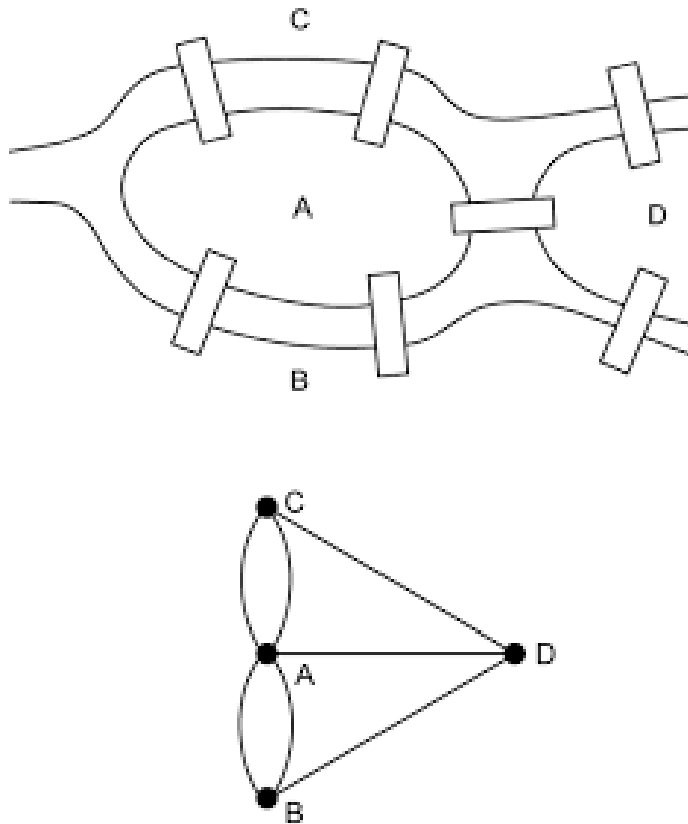
Chúng ta cũng có thể dễ dàng chỉ ra rằng, với mọi số nguyên lẻ n , K_{n-1} thực sự là hợp của $\frac{1}{2}(n - 1)$ đường đi Hamilton. Trong một phép phân tích của K_{n-1} thành $\frac{1}{2}(n - 1)$ đường đi Hamilton như trên, mỗi đỉnh đều là đầu mút của đúng một đường đi Hamilton (Trên thực tế, khẳng định này đúng với mọi phép phân tích của K_{n-1} thành $\frac{1}{2}(n - 1)$ đường đi Hamilton phân biệt cạnh (điều này suy ra từ việc mỗi đỉnh x của K_{n-1} đều có bậc lẻ nên sẽ có ít nhất một đường đi Hamilton phải kết thúc tại x)). Do đó, nếu chúng ta bổ sung thêm một đỉnh mới vào K_{n-1} và mở rộng mỗi đường đi Hamilton trong K_{n-1} thành một chu trình Hamilton trong K_n thì chúng ta sẽ thu được một phép phân tích của K_n thành $\frac{1}{2}(n - 1)$ chu trình Hamilton phân biệt cạnh. Như vậy, chúng ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau đây:

Kết quả 1.3.1.

Với mỗi chỉ số $n \geq 3$, một đồ thị đầy đủ K_n có thể phân tích được thành các chu trình Hamilton phân biệt cạnh nếu và chỉ nếu n là một số lẻ. Với mỗi chỉ số $n \geq 2$, một đồ thị đầy đủ K_n có thể phân tích được thành các đường đi Hamilton phân biệt cạnh nếu và chỉ nếu n là một số chẵn.

Kết quả trên cho thấy rằng nếu $n \geq 3$ là một số lẻ thì chúng ta có thể xâu chuỗi tất cả $\frac{1}{2}(n - 1)$ chu trình phân biệt cạnh trong K_n này lại với nhau để tạo thành một circuit chứa tất cả các cạnh của K_n . Nói chung, một circuit chứa tất cả các cạnh trong đồ thị G sẽ được gọi là một **circuit Euler của G** . Tương tự, một trail chứa tất cả các cạnh trong đồ thị G sẽ được gọi là một **trail Euler**.

Một đồ thị được gọi là **Eulerian** nếu nó có chứa một circuit Euler nào đó. Các circuit và trail này được đặt theo tên của nhà toán học Leonhard Euler vào những năm 1736 – người đầu tiên đã tìm ra những tính chất đặc trưng của các đồ thị có chứa chúng. Vào thời điểm này, Euler đang là giáo sư toán học ở Saint Petersburg và đang nghiên cứu lời giải của câu đố về bảy cây cầu ở thành phố Königsberg: “Những du khách ở thành phố Königsberg đã tự hỏi rằng liệu họ có thể lập ra một kế hoạch đi bộ sao cho mỗi cây cầu đều được đi qua và chỉ đúng một lần hay không?”



Hình vẽ minh họa bài toán bảy cây cầu ở thành phố Königsberg.

Kết quả 1.3.2.

Một đồ thị liên thông không tầm thường sẽ có một Euler circuit nếu và chỉ nếu mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

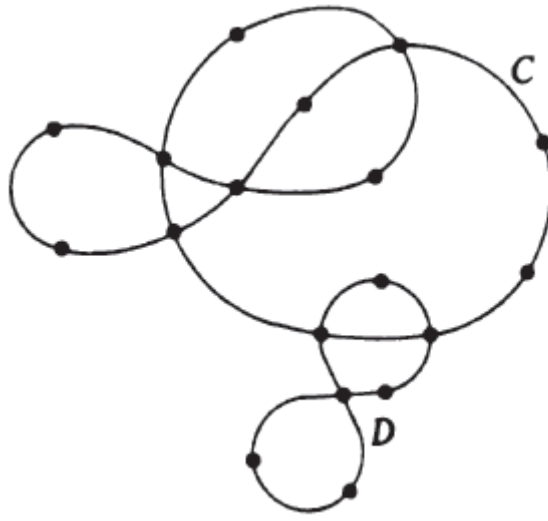
Một đồ thị liên thông có một Euler trail từ đỉnh x đến đỉnh $y \neq x$ nếu và chỉ nếu x và y là các đỉnh duy nhất có bậc lẻ.

Chứng minh kết quả 1.3.2.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng các điều kiện cần rõ ràng là hiển nhiên. Chẳng hạn, nếu G có một circuit Euler $x_1 x_2 \dots x_m$ và đỉnh x xuất hiện đúng k lần trong dãy $x_1, x_2, \dots, x_m$ thì $d(x) = 2k$.

Chúng ta sẽ chứng minh điều kiện đủ của khẳng định thứ nhất bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp toán học dựa trên số các cạnh của đồ thị. Nếu không có cạnh nào thì sẽ không có gì để chứng minh cả nên chúng ta sẽ chuyển sang bước quy nạp của bài toán.

Kí hiệu G là một đồ thị liên thông không tầm thường sao cho mỗi đỉnh đều có bậc chẵn. Do $\|G\| \geq 1$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $\delta(G) \geq 2$. Từ Kết quả 1.2.7), G sẽ phải có chứa một chu trình nào đó. Kí hiệu C là circuit trong G với số cạnh lớn nhất có thể có. Giả sử C không phải là một đồ thị Eulerian. Do G là một đồ thị liên thông nên C sẽ có chứa một đỉnh x nằm trong một thành phần liên thông không tầm thường H nào đó của $G - E(C)$. Mọi đỉnh của H đều có bậc chẵn trong H . Do đó, bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp của bài toán, H sẽ có chứa một circuit Euler D nào đó. Do C và D là các circuit phân biệt cạnh và có một đỉnh chung nên chúng có thể được nối với nhau để tạo ra một circuit mới có nhiều cạnh hơn C . Điều này mâu thuẫn với tính tối đại của $\|C\|$. Như vậy, circuit C sẽ là một Eulerian.



Hình vẽ minh họa các circuit C và D .

Giả sử G là một đồ thị liên thông và x và y là các đỉnh duy nhất có bậc lẻ. Kí hiệu G^* là đồ thị nhận được từ G bằng cách bổ sung thêm vào nó một đỉnh u cùng với các cạnh ux và uy . Khi đó, từ khẳng định thứ nhất của bài toán, G^* sẽ có một circuit Euler C^* . Hiển nhiên, $C^* - u$ sẽ là một trail Euler từ x đến y . $\square$

Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng Kết quả 1.3.2) thực tế là rất giống với Kết quả 1.1.1): mọi circuit Euler đều là hợp của các chu trình phân biệt cạnh và nếu một đồ thị liên thông là hợp của các chu trình phân biệt cạnh thì chúng ta có thể nối các chu trình này lại với nhau để tạo ra một circuit Euler. Tương tự như Kết quả 1.1.1), Kết quả 1.3.2) cũng đúng cho các đa đồ thị: trên thực tế, các mô hình phát sinh trong thực tế thường là các đa đồ thị nhiều hơn chỉ là các đồ thị thuần túy.

Chúng ta cũng rất dễ dàng đoán được dạng biến thể của Kết quả 1.3.2) đối với các đa đồ thị có hướng: “Một đa đồ thị có hướng sẽ có một Euler circuit có hướng nếu và chỉ nếu đa đồ thị là liên thông và mọi đỉnh đều có bậc trong và bậc ngoài giống nhau”. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần tiến hành các phép chứng minh tương tự như trước nhưng cần chú ý để nối các circuit theo đúng hướng.

Điều thú vị ở đây đó là có một phép tương ứng tuyệt vời giữa tập các circuit Euler có hướng và tập các cây khung định hướng. Để có thể phát biểu chính xác phép tương ứng tuyệt vời này, giả sử G là một đa đồ thị có hướng với tập đỉnh $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ sao cho $d^+(v_i) = d^-(v_i)$ với mọi chỉ số i . Chúng ta cũng biết rằng nếu G có một circuit Euler có hướng thì các điều kiện nêu ở trên sẽ được thỏa mãn. Kí hiệu $\mathcal{E}$ là tập các circuit Euler có hướng và $\mathcal{E}_i$ là tập các trail Euler có hướng bắt đầu và kết thúc tại đỉnh v_i . Do mỗi circuit Euler đều đi qua đỉnh v_i đúng $d^+(v_i) = d^-(v_i)$ lần nên $|\mathcal{E}_i| = d^+(v_i)|\mathcal{E}| = d^-(v_i)|\mathcal{E}|$.

Chúng ta sẽ nói rằng một cây khung được **định hướng tới đỉnh v_i** , gốc của nó, nếu, với mọi chỉ số $j \neq i$, tồn tại duy nhất một đường đi từ v_j đến v_i được định hướng tới v_i . Kí hiệu $\mathcal{T}_i$ là tập các cây khung được định hướng tới đỉnh v_i .

Mục đích của chúng ta là sẽ xác định một ánh xạ $\phi_i: \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{T}_i$. Để đơn giản hóa cách ký hiệu, chúng ta sẽ sử dụng $i = 1$. Giả sử cho trước một trail Euler $S \in \mathcal{E}_i$, với mỗi chỉ số $j = 2, \dots, n$, kí hiệu e_j là một cạnh nào đó nằm trong S thoát ra khỏi đỉnh v_j lần cuối cùng và không bao giờ quay trở lại đỉnh v_j nữa. Như vậy, e_j sẽ không thể là một cạnh khuyên mà là một cạnh từ v_j đến một đỉnh khác. Ngoài ra, nếu e_j đi từ v_i đến v_j thì cạnh e_i sẽ đứng trước e_j trên S .

Kí hiệu T là một đồ thị có hướng với các đỉnh $v_1, \dots, v_n$ và các cạnh $e_2, \dots, e_n$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $T \in \mathcal{T}_1$. Để chứng minh tính đúng đắn của nhận định trên, chúng ta sẽ chứng minh: (1) T là một cây và (2) T được định hướng tới đỉnh v_1 .

Đầu tiên, giả sử rằng T có chứa một chu trình C nào đó. Do $d_T^+(v_1) = 0$ và $d_T^+(v_j) = 1$ với mọi chỉ số $j > 1$ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng C là một chu trình có hướng nhưng không có chứa v_1 . Tuy nhiên, nếu e_l là cạnh cuối cùng của S trên C , tạm giả sử e_l đi từ v_l đến v_m , thì S sẽ quay trở lại v_m sau khi đã rời khỏi nó lần cuối cùng (thông qua e_m). Điều mâu thuẫn này cho thấy rằng T thực sự là một cấu trúc cây.

Vấn đề được đặt ra đó là: “Liệu T có thực sự được định hướng tới đỉnh v_1 hay không?”. Giả sử T có chứa một đường đi có dạng $v_k v_{k-1} \dots v_1$. Khi đó, $v_2 v_1$ chính là cạnh e_2 , bởi vì không có cạnh e_1 . Vấn đề được đặt ra tiếp theo đó là: “Còn cạnh $v_3 v_2$ thì sao?”. Nó có thể là e_2 hoặc e_3 . Tuy nhiên, nó không thể là cạnh e_2 . Như vậy, nó phải là cạnh e_3 . Bằng cách thực hiện tiếp tục theo cách nêu ở trên, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng đường đi $v_k v_{k-1} \dots v_1$ của chúng ta thực sự được định hướng tới đỉnh v_1 . Do đó, $T \in \mathcal{T}_1$ như đã tuyên bố.

Để thu được ánh xạ $\phi_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ như mục đích ban đầu, chúng ta kí hiệu $\phi_1(S) = T$. Nhận thấy rằng, với mỗi $T \in \mathcal{T}_1$, tập $\phi_1^{-1}(T)$ có thể được mô tả khá dễ dàng. Thật vậy, để xây dựng một trail Euler $S \in \mathcal{E}_1$ sao cho $\phi_1(S) = T$, chúng ta chỉ cần tiến hành như sau: Bắt đầu từ đỉnh v_1 , chúng ta có thể đi theo bất kỳ một cạnh nào; ngoài ra, khi quay trở lại đỉnh v_1 , chúng ta sẽ đến lại nó ở một cạnh chưa được sử dụng trước đó (nếu được); trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ chấm dứt trail này. Quan trọng hơn, khi đi đến đỉnh v_j ($j > 1$), chúng ta sẽ đến lại v_j bởi một cạnh chưa được sử dụng khác với e_j (nếu có bất kỳ một cạnh nào như vậy); trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ đến lại v_j bởi chính cạnh e_j . Do $d^+(v_j) = d^-(v_j)$ với mọi chỉ số j nên quá trình này sẽ cung cấp cho chúng ta một trail Euler $S \in \mathcal{E}_1$ sao cho $\phi_1(S) = T$.

Do đó, $|\phi_1^{-1}(T)| = d^+(v_1)! \prod_{j=2}^n (d^+(v_j) - 1)!$, nên $|\mathcal{E}| = |\mathcal{T}_1| \prod_{j=1}^n (d^+(v_j) - 1)!$.

Như vậy, chúng ta đã chứng minh một kết quả quan trọng của các nhà toán học de Bruijn, van Aardenne - Ehrenfest, Smith, Tutte; kết quả này đôi khi còn được gọi là định lí BEST.

Kết quả 1.3.3. (BEST)

Giả sử cho trước một đa đồ thị có hướng G với tập đỉnh $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ sao cho $d^+(v_i) = d^-(v_i)$ với mọi chỉ số i . Kí hiệu $s(G)$ là số các circuit Euler của G và $t_i(G)$ là số các cây khung được định hướng tới đỉnh v_i .

Khi đó, $s(G) = t_i(G) \prod_{j=1}^n (d^+(v_j) - 1)!$ với mọi chỉ số i , $1 \leq i \leq n$. Hơn nữa, $t_1(G) = \dots = t_n(G)$.

Nhận thấy rằng các điều kiện của Kết quả 1.3.3) sẽ được thỏa mãn nếu G là một đồ thị Eulerian, nghĩa là nó có chứa một circuit Euler nào đó.

Nhắc lại về câu đố bảy cây cầu ở thành phố Königsberg, Kết quả 1.3.2) chỉ ra rằng sẽ không thể có bất kỳ một chuyến tham quan nào như vậy, bởi vì bốn đỉnh của đồ thị tương ứng đều có bậc lẻ (không cần phải nói đến, đa đồ thị tương ứng cũng giống như vậy: tất cả các đỉnh của nó đều có bậc lẻ).

Nhận thấy rằng một sơ đồ các hành lang của một cuộc triển lãm cũng có thể dễ dàng được chuyển thành một đồ thị: một cạnh sẽ tương ứng với một hành lang và một đỉnh sẽ là sự kết hợp của một số hành lang nào đó. Nếu lối vào và lối ra giống nhau thì khách tham quan có thể đi dọc theo mọi hành lang đúng một lần nếu và chỉ nếu đồ thị tương ứng có chứa một circuit Euler nào đó. Nói chung, một khách tham quan sẽ cần phải có một kế hoạch cụ thể để có thể đạt được điều này: anh ta không thể chỉ đi bộ qua bất kỳ hành lang mới nào mà anh ta tình cờ đi đến được. Tuy nhiên, trong một cuộc triển lãm được lên kế hoạch đủ tốt, chúng ta có thể kì vọng rằng một khách tham quan bất kỳ sẽ có thể tham quan tất cả các gian phòng trong cuộc triển lãm với điều kiện là anh ta sẽ không đi dọc cùng một hàng lang hai lần và tiếp tục đi bộ cho đến khi không có gian phòng mới nào trước mắt. Đồ thị của một cuộc triển lãm như vậy sẽ được gọi là một **đồ thị Eulerian ngẫu nhiên tương ứng với lối vào u và lối ra v** . Như vậy, một đồ thị G sẽ được gọi là một **đồ thị Eulerian ngẫu nhiên tương ứng với đỉnh x** nếu bất kỳ trail tối đại nào bắt đầu tại x cũng là một circuit Euler của G (một trail $T = xx_1 \dots x_l$ được gọi là một **trail tối đại bắt đầu tại x** nếu x_l là một đỉnh cô lập của đồ thị $G - E(T)$). Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng: “Một đồ thị không rỗng G là một đồ thị Eulerian ngẫu nhiên tương ứng với đỉnh x nếu và chỉ nếu G có một circuit Euler và x được chứa trong mọi chu trình của G ”.

Để kết thúc mục này của bài viết, chúng ta sẽ giới thiệu một kết quả cơ bản có từ nửa đầu của thế kỉ XIX liên quan đến các trail Euler vô hạn theo cả hai chiều trong các đồ thị vô hạn. Đây là dạng tương tự tự nhiên của các circuit Euler trong các đồ thị hữu hạn: giả sử cho trước một đồ thị vô hạn $G = (V, E)$, một **trail Euler vô hạn theo cả hai chiều của G** được định nghĩa là một dãy các đỉnh vô hạn theo cả hai chiều $\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots$ của G sao cho $x_i \sim x_{i+1}$ với mọi chỉ số $i \in \mathbb{Z}$ và mỗi cạnh của G chỉ xuất hiện đúng một lần trong dãy $\dots, x_{-2}x_{-1}, x_{-1}x_0, x_0x_1, x_1x_2, \dots$. Năm 1936, ba nhà toán học Erdős, Grünwald, Weiszfeld đã chứng minh được dạng tương tự sau đây của Kết quả 1.3.2):

Kết quả 1.3.4.

Giả sử cho trước một đa đồ thị liên thông $G = (V, E)$ với E là một tập vô hạn.

Khi đó, G sẽ có một trail Euler vô hạn theo cả hai chiều nếu và chỉ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) E là một tập đếm được;

(ii) Bậc của mỗi đỉnh sẽ là một số chẵn hoặc vô hạn;

(iii) Với mọi đồ thị con $G' \subset G$ sao cho $G' = (V, E')$ với E' là một tập hữu hạn, đồ thị $G - E'$ sẽ chỉ có nhiều nhất là hai thành phần liên thông vô hạn. Hơn nữa, nếu $d_{G'}(x)$ là một số chẵn với mọi đỉnh $x \in V$ thì $G - E'$ sẽ chỉ có đúng một thành phần liên thông vô hạn.

1.4. Đồ thị khả phẳng

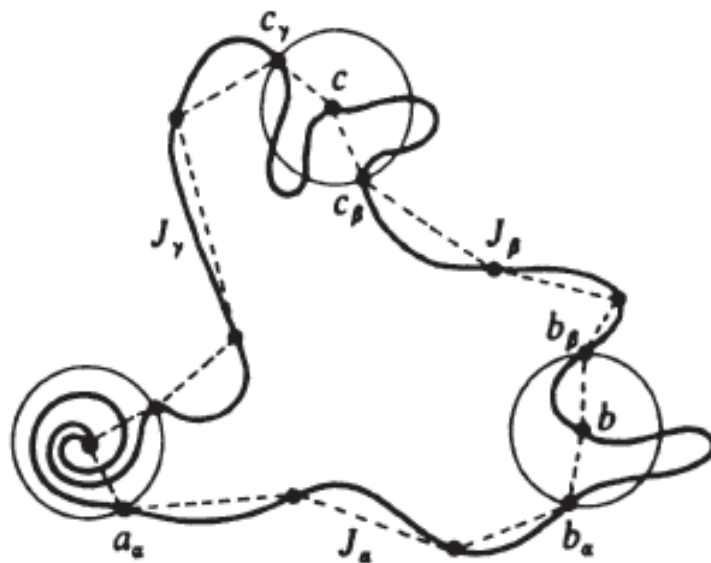
Nhận thấy rằng đồ thị của một cuộc triển lãm như vậy sẽ phải là một **đồ thị khả phẳng**: một đồ thị có thể được vẽ lại trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau. Nói một cách chặt chẽ hơn, chúng ta có thể biểu diễn nó bằng một hình vẽ trong mặt phẳng sao cho các đỉnh sẽ tương ứng với các điểm phân biệt còn các cạnh sẽ tương ứng với các đường cong Jordan đơn nối giữa điểm tương ứng với các đầu mút của nó. Trong hình vẽ này, bất cứ hai đường cong Jordan nào cũng sẽ rời nhau hoặc chỉ giao nhau tại một đầu mút chung nào đó. Biểu diễn nói trên của một đồ thị khả phẳng cho trước sẽ được gọi là một **đồ thị phẳng**.

Có một cách khá đơn giản để chúng ta có thể kết hợp một không gian tôpô với một cấu trúc đồ thị. Điều này sẽ dẫn chúng ta đến một cách định nghĩa tương đương khác về tính khả phẳng của một đồ thị cho trước:

Giả sử cho trước các điểm phân biệt $p_1, p_2, \dots$ trong không gian Euclidean 3 – chiều $\mathbb{R}^3$ sao cho mọi mặt phẳng nằm trong $\mathbb{R}^3$ đều chỉ chứa tối đa 3 điểm trong số các điểm này. Kí hiệu (p_i, p_j) là một đường cong Jordan đơn nào đó với các đầu mút là các điểm p_i và p_j (mở hoặc đóng tùy thích). Giả sử cho trước một đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, không gian tôpô $R(G) = \bigcup \{(p_i, p_j) : x_i x_j \in E\} \cup \bigcup_1^n \{p_i\} \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là **biểu diễn thực của đồ thị G** . Một đồ thị G sẽ được gọi là **khả phẳng** nếu $R(G)$ đồng phôi với một tập con nào đó của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

Chúng ta có một số nhận xét đơn giản liên quan đến biểu diễn thực $R(G)$: Một đồ thị H được gọi là một **ước con của đồ thị G** (hoặc **phần bù tôpô của đồ thị G**) nếu H có thể nhận được từ G bằng cách chia nhỏ một số cạnh của nó, nghĩa là chúng ta sẽ thay thế các cạnh bởi các đường đi chỉ có chung các đầu mút với các cạnh đó. Chúng ta sẽ dùng kí hiệu TG để chỉ một phần bù tôpô của đồ thị G . Như vậy, TG có thể được dùng để kí hiệu cho bất kỳ một thành viên nào của họ các đồ thị lớn hơn. Chẳng hạn, TK_3 được dùng để kí hiệu cho bất kỳ một chu trình tùy ý còn TK_8 có thể được dùng để kí hiệu cho bất kỳ một chu trình nào có chiều dài ≥ 8 . Rõ ràng, đối với bất kỳ một đồ thị G nào, các không gian $R(G)$ và $R(TG)$ sẽ đồng phôi với nhau. Chúng ta cũng sẽ nói rằng một đồ thị G là **đồng phôi** với một đồ thị H nếu $R(G)$ đồng phôi với $R(H)$, hoặc tương đương nếu G và H có các ước con nào đó đẳng cấu với nhau.

Ngay từ cái nhìn đầu tiên, chúng ta nhận thấy rằng nếu nghiên cứu các đồ thị phẳng thì chúng ta sẽ có thể gặp một số khó khăn nhất định về mặt tôpô. Chúng ta cũng có thể nhận thấy thêm rằng các đường cong Jordan tương ứng với các cạnh có thể được giả định là các đường gấp khúc. Chính xác hơn, mọi đồ thị khả phẳng đều sẽ đồng phôi với một đồ thị phẳng trong đó các đường cong Jordan là các đường gấp khúc. Thật vậy, với mọi đồ thị phẳng cho trước, giả sử $\delta > 0$ là một số thực dương nào đó có giá trị nhỏ hơn một nửa khoảng cách nhỏ nhất giữa các đỉnh này. Với mỗi đỉnh a , đặt một đĩa đóng D_a với bán kính bằng δ xung quanh đỉnh a . Kí hiệu J_a là một đường cong Jordan tương ứng với cạnh $\alpha = ab$ và kí hiệu a_α là điểm cuối cùng của đường cong J_a trên đĩa D_a khi đi từ a đến b . Kí hiệu J'_a là phần đường cong J_a từ a_α đến b_α . Xét một số thực dương $\varepsilon > 0$ sao cho nếu $\alpha \neq \beta$ thì J_α và J_β sẽ cách nhau một khoảng lớn hơn 3ε . Từ tính liên tục đều của một đường cong Jordan, mỗi đường cong J'_a đều có thể xấp xỉ gần đúng trong khoảng ε bởi một đường gấp khúc J''_a từ a_α đến b_α . Để thu được biểu diễn tuyến tính từng phần cần thiết từ đồ thị G ban đầu, chúng ta chỉ cần thay thế mỗi đường cong J_a bởi đường gấp khúc thu được từ J''_a bằng cách mở rộng nó theo cả hai hướng bởi các đoạn aa_α và $b_\alpha b$.



Hình ảnh phép xây dựng một biểu diễn tuyến tính từng phần của một đồ thị khả phẳng G .

Một lập luận phức tạp hơn cũng cho thấy rằng mọi đồ thị khả phẳng đều có một **biểu diễn tuyến tính**: nó có thể được vẽ lại trong mặt phẳng sao cho các cạnh của nó thực sự là các đoạn thẳng.

Nếu chúng ta bỏ qua tất cả các đỉnh và các cạnh của một đồ thị phẳng G khỏi mặt phẳng thì phần còn lại sẽ rơi vào các thành phần liên thông được gọi là các **mặt**. Rõ ràng, mỗi đồ thị phẳng đều có đúng một mặt không bị chặn. **Biên** của một mặt được định nghĩa là tập các cạnh nằm trong phần đóng của nó. Do một chu trình (một đa giác đóng đơn giản) sẽ chia các điểm của mặt phẳng thành hai thành phần liên thông nên mỗi cạnh của chu trình đều nằm trong biên của hai mặt này. Một đồ thị phẳng cùng với tập các mặt mà nó xác định sẽ được gọi là một **bản đồ phẳng**. Các mặt của một bản đồ phẳng thường được gọi là các **miền**. Hai miền được gọi là **láng giềng** nếu biên của chúng có điểm chung với nhau.

Nếu chúng ta vẽ đồ thị của một khối đa diện lồi trong mặt phẳng thì các mặt của khối đa diện này rõ ràng sẽ tương ứng với các mặt của đồ thị phẳng tương ứng. Điều này sẽ dẫn chúng ta đến một kết quả quan trọng khác của nhà toán học Leonhard Euler trong lý thuyết đồ thị - **định lý đa diện lồi của Euler** hoặc **công thức Euler**.

Kết quả 1.4.1. (Euler)

Nếu một đồ thị phẳng liên thông G có n đỉnh, m cạnh, f mặt thì $n - m + f = 2$.

Chứng minh kết quả 1.4.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học dựa trên số mặt của đồ thị G . Nếu $f = 1$ thì G sẽ không thể chứa bất kỳ một chu trình nào, nên nó phải là một cây. Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra trực tiếp từ Kết quả 1.2.6).

Giả sử $f > 1$ và tính đúng đắn của khẳng định trên đã được kiểm chứng với mọi giá trị nhỏ hơn của f . Kí hiệu ab là một cạnh nằm trong một chu trình nào đó của G . Do một chu trình bất kỳ sẽ tách mặt phẳng ra làm hai phần nên cạnh ab sẽ nằm trong biên chung của hai mặt nào đó, chúng ta tạm giả sử là S và T . Bằng cách loại bỏ cạnh ab , trong đồ thị phẳng G' mới nhận được, các mặt S và T sẽ được nối với nhau để tạo thành một mặt mới trong khi tất cả các mặt khác của G lại không thay đổi gì. Do đó, nếu kí hiệu n', m', f'

lần lượt là số đỉnh, số cạnh, số mặt của đồ thị G' thì $n' = n$, $m' = m - 1$, $f' = f - 1$. Như vậy, $n - m + f = n' - m' + f' = 2$. □

Giả sử cho trước một đồ thị phẳng liên thông G với n đỉnh, m cạnh, f mặt. Kí hiệu f_i là số các mặt có chính xác i cạnh trong biên của chúng. Rõ ràng, $\sum_i f_i = f$. Nếu đồ thị G không có chứa cạnh cầu thì $\sum_i i f_i = 2m$ (điều này suy ra từ việc mọi cạnh đều nằm trong biên của hai mặt nào đó). Bằng cách kết hợp các công thức $\sum_i f_i = f$, $\sum_i i f_i = 2m$ và $n - m + f = 2$, chúng ta dễ dàng chỉ ra được một chặn trên cho số các cạnh của một đồ thị phẳng với bậc n . Chặn trên này có thể được cải thiện lại nếu **chỉ số girth của đồ thị G** – số cạnh có thể có trong một chu trình nhỏ nhất của G – đủ lớn. (Chỉ số girth của một đồ thị acyclic sẽ được định nghĩa là ∞)

Kết quả 1.4.2.

Một đồ thị khả phẳng với bậc $n \geq 3$ sẽ chứa tối đa không quá $3n - 6$ cạnh. Hơn nữa, một đồ thị khả phẳng với bậc n và chỉ số girth g , $3 \leq g < \infty$ sẽ chứa tối đa không quá $\max \left\{ \frac{g}{g-2} (n-2), n-1 \right\}$.

Chứng minh kết quả 1.4.2.

Nhận thấy rằng khẳng định thứ nhất chính là trường hợp riêng khi $g = 3$ của khẳng định thứ hai nên chúng ta chỉ cần chứng minh tính đúng đắn của khẳng định thứ hai.

Giả sử cho trước một đồ thị phẳng G với bậc n , kích thước m và chỉ số girth g .

Nếu $n \leq g - 1$ thì G sẽ là một đồ thị acyclic, nên $m \leq n - 1$.

Giả sử rằng $n \geq g$ và tính đúng đắn của khẳng định đã được kiểm chứng với mọi giá trị nhỏ hơn của n .

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử thêm rằng G là một đồ thị liên thông.

Nếu ab là một cạnh cầu thì đồ thị $G - ab$ sẽ là hợp của hai đồ thị con phân biệt đỉnh G_1 và G_2 nào đó.

Kí hiệu $n_i = |G_i|$, $m_i = \|G_i\|$, $i = 1, 2$.

Từ giả thiết quy nạp toán học của bài toán, chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + 1 \leq \max \left\{ \frac{g}{g-2} (n_1 - 2), n_1 - 1 \right\} + \max \left\{ \frac{g}{g-2} (n_2 - 2), n_2 - 1 \right\} + 1 \\ &\leq \max \left\{ \frac{g}{g-2} (n - 2), n - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Mặt khác, nếu G không có chứa cạnh cầu thì các công thức $\sum_i f_i = f$, $\sum_i i f_i = 2m$ sẽ chỉ ra rằng

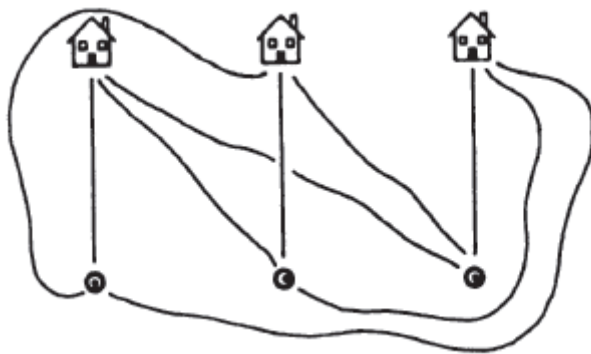
$$2m = \sum_i i f_i = \sum_{i \geq g} i f_i \geq g \sum_i f_i = g f.$$

Như vậy, từ công thức Euler, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $m + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{g} m$, nên

$$m \leq \frac{g}{g-2} (n - 2).$$

□

Kết quả 1.4.2) thường được sử dụng để chỉ ra một số đồ thị nhất định là không khả phẳng. Thật vậy, đồ thị đầy đủ K_5 là không khả phẳng bởi vì $\|K_5\| = 10 > 3(5 - 2)$. Một đồ thị không khả phẳng khác phải kể đến ở đây đó là đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{3,3}$ còn được gọi là **đồ thị Thomsen** (tính không khả phẳng của đồ thị $K_{3,3}$ được suy ra từ việc chỉ số girth của nó bằng 4 và $\|K_{3,3}\| = 9 > \frac{4}{4-2}(6 - 2)$). Tính không khả phẳng của đồ thị $K_{3,3}$ ngầm ngụ ý rằng chúng ta không thể nối từng ngôi nhà trong số ba ngôi nhà đến mỗi giếng nước trong số ba giếng nước bằng các con đường không tự cắt nhau như yêu cầu của câu đố ba nhà, ba giếng: “Liệu có thể nối từng ngôi nhà với từng giếng nước sao cho không có hai con đường nào cắt nhau?”



Hình vẽ minh họa của câu đố ba nhà, ba giếng.

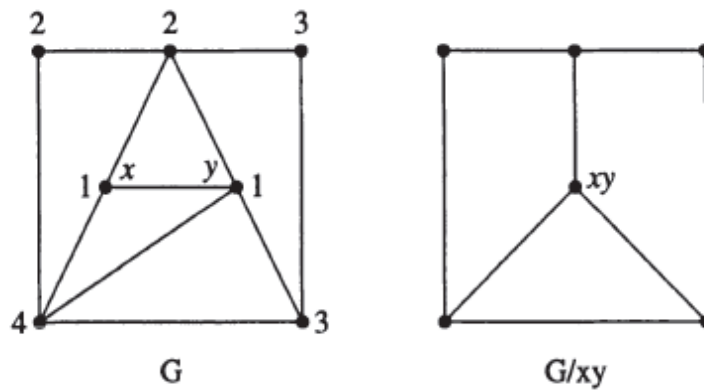
Nếu một đồ thị G là không khả phẳng thì mọi phần bù tôpô của G và mọi đồ thị có chứa một phần bù tôpô của G cũng vậy.

Điều đáng ngạc nhiên ở đây là chiều ngược lại của nhận xét tầm thường ở trên vẫn đúng: kết quả tuyệt vời này đã được nhà toán học Kuratowski chứng minh vào năm 1930.

Kết quả 1.4.3. (Kuratowski)

Một đồ thị G là khả phẳng nếu và chỉ nếu nó không có chứa bất kỳ một ước con nào của K_5 hoặc $K_{3,3}$.

Giả sử cho trước một cạnh xy của một đồ thị G , đồ thị G/xy nhận được từ G bằng cách thực hiện **phép co theo cạnh xy** , nghĩa là, để có được đồ thị G/xy , chúng ta sẽ đồng nhất các đỉnh x và y và loại bỏ tất cả các cạnh khuyên và các cạnh kép. Một đồ thị H thu được từ G bằng cách thực hiện một dãy các phép co cạnh sẽ được gọi là một **phép co lại của G** . Một đồ thị H được gọi là một **phần bù của G** nếu nó là một đồ thị con của một đồ thị nhận được từ G bằng cách thực hiện một dãy các phép co cạnh, kí hiệu bởi $G > H$ hoặc $H < G$. Dễ dàng kiểm tra được rằng nếu $V(H) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ thì $H < G$ nếu và chỉ nếu G có các đồ thị con liên thông phân biệt đỉnh $G_1, G_2, \dots, G_k$ sao cho nếu $y_i y_j \in E(H)$ thì G sẽ có chứa một cạnh đi từ G_i đến G_j .



Hình vẽ minh họa đồ thị G và phép co theo cạnh xy G/xy của nó.

Năm 1937, nhà toán học Wagner đã chứng minh được dạng tương tự sau đây của định lý Kuratowski:

Kết quả 1.4.4. (Wagner)

Một đồ thị G là khả phẳng nếu và chỉ nếu nó không có chứa K_5 và $K_{3,3}$ như một phần bù.

Dễ dàng nhận thấy rằng các Kết quả 1.4.3) và Kết quả 1.4.4) là tương đương với nhau. Thật vậy, nếu $G \supset TH$ thì rõ ràng rằng $G \succ H$. Trên thực tế, nếu H có bậc lớn nhất không vượt quá 3 thì $G \supset TH$ nếu và chỉ nếu $G \succ H$. Cụ thể hơn, $G \supset TK_{3,3}$ nếu và chỉ nếu $G \succ H$. Hơn nữa, nếu $G \succ K_5$ thì $G \supset TK_5$ hoặc $G \supset TK_{3,3}$.

Kết quả 1.4.4) là một dạng biến thể của Kết quả 1.4.3) đặc trưng tính khả phẳng của các đồ thị dựa trên các phần bù bị cấm thay vì dựa trên các phần bù tôpô bị cấm. Thoạt nhìn, khái niệm phần bù này có vẻ như không liên quan vì đến việc vẽ các đồ thị trên các bề mặt. Nhưng trên thực tế, đây lại chính là khái niệm quan trọng và liên quan trực tiếp đến bài toán vẽ các đồ thị trên các bề mặt khác nhau.