

Chủ đề 02. Bài toán thiết kế mạng điện

Mục này của bài viết là một cái gì đó rất khác với dòng chính của bài viết này. Các khái niệm được giới thiệu trong nửa đầu của mục 2.2) sẽ được sử dụng lại trong mục 8.2) của “**Chủ đề 08. Đồ thị - Cấu trúc nhóm – Ma trận**” và, trong “**Chủ đề 09. Đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị**”, chúng ta cũng sẽ quay trở lại với khái niệm về các mạng điện này khi chúng ta kết nối chúng với các đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị.

Không mất quá nhiều thời gian để chúng ta phát hiện ra rằng một mạng điện có thể được xem như một đồ thị. Như vậy, những vấn đề cơ bản nhất về các dòng điện trong các mạng điện chính là những câu hỏi về các đồ thị. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu những hiểu biết cơ bản của chúng ta về các đồ thị có giúp chúng ta giải quyết các vấn đề này hay không?”. Câu trả lời cho vấn đề này sẽ là có. Sau khi xem xét ngắn các ý tưởng cơ bản về các dòng điện, chúng ta nhận thấy rằng có thể sử dụng các cây khung để thu được lời giải của các vấn đề này. **Mục 2.2. Không gian vector và ma trận liên kết với một đồ thị** sẽ được dùng để giới thiệu về lý thuyết đồ thị đại số sơ cấp trong đó chúng ta sẽ chỉ ra cách mà chúng có thể được áp dụng để tìm lời giải cho các bài toán về mạng điện.

Cần phải nhấn mạnh rằng trong các vấn đề mà chúng ta xem xét trong phần này của bài viết, chúng ta hầu như sẽ không sử dụng nhiều các thuật ngữ của lý thuyết đồ thị hiện đại và hầu như khái niệm duy nhất được sử dụng ở đây chính là khái niệm về cây khung.

2.1. Đồ thị và Mạng điện

Một mạng điện đơn giản có thể được coi như một đồ thị trong đó mỗi cạnh e_i đều được gán tương ứng với một số thực dương r_i gọi là **trở kháng** của cạnh e_i . Nếu có một **hiệu điện thế** p_i giữa các đầu mút của cạnh e_i , tạm giả sử là a_i và b_i , thì **dòng điện** w_i chạy trong cạnh e_i từ a_i đến b_i sẽ tuân theo định luật Ohm:

$$w_i = \frac{p_i}{r_i}$$

Để thuận tiện cho các khảo sát ban đầu, chúng ta có thể hạn chế phạm vi chú ý vào các mạng điện tương ứng với các đồ thị. Tuy nhiên, trong các khảo sát sau này, chúng ta thường chú ý vào các mạng điện cho phép tồn tại các cạnh bội, nghĩa là chúng ta sẽ xem xét các đa đồ thị thay vì các đồ thị. Hơn nữa, chúng ta sẽ định hướng cho mỗi cạnh tùy ý từ đỉnh này sang đỉnh khác nên chúng ta có thể sử dụng p_i để biểu thị **hiệu điện thế trên cạnh e_i** , nghĩa là hiệu giữa các điện thế của **đỉnh đầu** và **đỉnh cuối** của cạnh e_i . Tương tự, w_i có thể được dùng để biểu thị **dòng điện chạy trong cạnh e_i** , nghĩa là dòng điện chạy trong cạnh e_i được tính theo hướng của cạnh e_i . (Lưu ý rằng chúng ta sẽ coi dòng điện âm $-w_i$ là một dòng điện dương w_i theo hướng ngược lại.) Trong suốt phần này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ xem xét các đa đồ thị có hướng, nghĩa là các đồ thị có hướng được xem xét có thể chứa một số cạnh bội được định hướng từ a_i đến b_i .

Như vậy, $w_{ab} = -w_{ba}$ và $p_{ab} = -p_{ba}$.

Trong nhiều bài toán thực tế, dòng điện được tạo ra để đi vào mạng điện tại một số điểm và đi ra ở những điểm khác. Chúng ta thường quan tâm đến các cường độ dòng điện và hiệu điện thế trong các cạnh này. Những điều này sẽ được đề cập đến trong các định luật nổi tiếng của Kirchhoff – một công dân nổi tiếng khác của thành phố Königsberg.

Định luật Kirchhoff về các điện thế phát biểu rằng tổng hiệu điện thế trên tất cả các cạnh chạy dọc theo một chu trình $x_1 x_2 \dots x_k$ bất kỳ luôn bằng 0:

$$p_{x_1 x_2} + p_{x_2 x_3} + \dots + p_{x_{k-1} x_k} + p_{x_k x_1} = 0.$$

Định luật Kirchhoff về các cường độ dòng điện phát biểu rằng tổng cường độ dòng điện tại bất kỳ một điểm nào luôn bằng 0:

$$w_{ab} + w_{ac} + \dots + w_{au} + w_{a\infty} = 0,$$

trong đó $ab, ac, \dots, au$ là các cạnh liên thuộc với đỉnh a và $w_{a\infty}$ biểu thị tổng cường độ dòng điện đi ra khỏi mạng điện tại đỉnh a . (Theo quy ước của chúng ta, $w_{\infty a} = -w_{a\infty}$ sẽ biểu thị tổng cường độ dòng điện đi vào mạng điện tại đỉnh a .)

Đối với các đỉnh không được kết nối với các đỉnh bên ngoài, chúng ta sẽ có

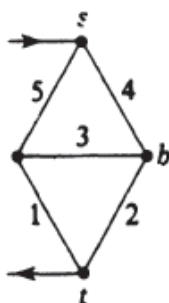
$$w_{ab} + w_{ac} + \dots + w_{au} = 0.$$

Lưu ý rằng nếu chúng ta biết các điện trở thì định luật Kirchhoff về các hiệu điện thế có thể được biểu diễn lại dưới dạng các dòng điện trong các cạnh. Như vậy, chúng ta có thể xem như các dòng điện chỉ cần tuân theo các định luật Kirchhoff còn các đặc trưng vật lý của mạng điện (các điện trở) chỉ ảnh hưởng đến các tham số trong các định luật này.

Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng định luật Kirchhoff về các hiệu điện thế tương đương với việc chúng ta hoàn toàn có thể gán cho các đỉnh $a, b, \dots$ các giá trị điện thế $V_a, V_b, \dots$ sao cho hiệu điện thế giữa các đỉnh a và b sẽ được xác định theo công thức $p_{ab} = V_a - V_b$. Nếu mạng điện là liên thông và các hiệu điện thế p_{ab} được cho trước thì chúng ta có thể tự do lựa chọn giá trị điện thế của một đỉnh nào đó trong số các đỉnh, tạm giả sử là V_a , nhưng khi đó tất cả các giá trị điện thế khác đều sẽ được xác định.

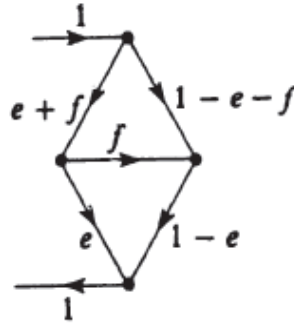
Trong bài viết này, chúng ta sẽ làm việc với các giá trị điện thế tuyệt đối (nghĩa là chúng ta sẽ chọn giá trị điện thế của một đỉnh nào đó trong số các đỉnh bằng 0) nhưng chúng ta nên nhớ rằng điều này tương tự như cách chúng ta thường áp dụng định luật điện thế trong điện động lực học.

Trong các vấn đề cơ bản nhất, chúng ta thường chỉ cho phép dòng điện đi vào mạng điện tại một đỉnh s nào đó, đỉnh nguồn, và chỉ để nó đi ra ở một đỉnh t khác, đỉnh đích. (Chúng ta cũng sẽ chỉ ra sau này cách làm thế nào để có thể chuyển các vấn đề tổng quát về thành những vấn đề cơ bản này.) Nếu chúng ta quan niệm w là cường độ dòng điện từ s đến t và p là hiệu điện thế giữa s và t thì, từ định luật Ohm, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $r = \frac{p}{w}$ sẽ là tổng điện trở của mạng điện giữa hai đỉnh s và t .



Hình ảnh minh họa một mạng điện cơ bản có 5 điện trở với các giá trị 1,2,3,4,5.

Nếu chúng ta giả sử có một dòng điện có cường độ bằng 1 chạy vào hệ thống tại s và rời khỏi nó tại t thì chúng ta có thể biểu diễn lại các dòng điện chạy trong các cạnh theo các dòng điện e và f như trong hình vẽ bên dưới:



Hình vẽ minh họa.

Kế tiếp, chúng ta sẽ gán cho các đỉnh t, a, b, s các giá trị điện thế $V_t = 0, V_a, V_b, V_s$. Từ định luật Ohm, chúng ta dễ dàng tính được $V_a = 1 \cdot e = e$, $V_b = 2(1 - e)$, $V_s = V_a + 5(e + f) = 6e + 5f$. Do định luật Ohm được thỏa mãn trên hai cạnh ab và bs nên chúng ta dễ dàng suy ra được

$$V_a = e = V_b + 3f = 2(1 - e) + 3f,$$

$$V_b = 6e + 5f = V_b + 4(1 - e - f) = 2(1 - e) + 4(1 - e - f).$$

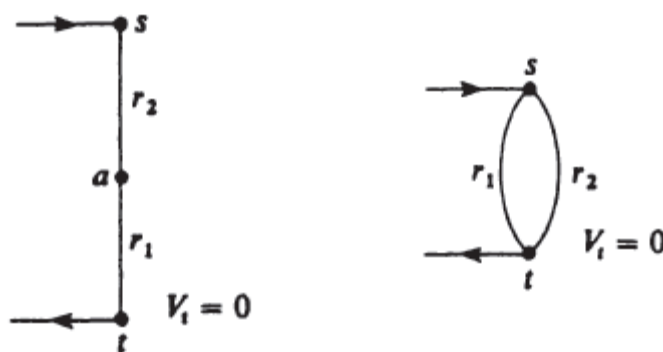
Do đó, $e = 2 - 2e + 3f$ và $6e + 5f = 6 - 6e - 4f$, nên $e = \frac{4}{7}$, $f = -\frac{2}{21}$.

Như vậy, $V_s = 6e + 5f = \frac{62}{21}$, nên tổng điện trở của mạng điện giữa hai đỉnh s và t sẽ bằng $\frac{V_s - V_t}{1} = \frac{62}{21}$.

Thông thường các tính toán của chúng ta có thể được đơn giản hóa đi rất nhiều nếu chúng ta nhận thấy rằng các phương trình Kirchhoff là tuyến tính và thuần nhất đối với tất cả các dòng hiệu và các hiệu điện thế. Điều này ngụ ý cho cái gọi là “**Nguyên lý chồng chất nghiệm**”: bất kỳ một tổ hợp tuyến tính nào của các nghiệm cũng lại là một nghiệm. Như một ứng dụng của nguyên lý chồng chất nghiệm, chúng ta có thể chỉ ra rằng bất kỳ một dòng điện nào được tạo ra từ nhiều nguồn và nhiều đích đều có thể thu được bằng cách chồng các dòng điện được tạo ra từ một nguồn và một đích, nghĩa là lời giải của những vấn đề cơ bản được đề cập ở trên có thể được sử dụng để giải quyết vấn đề tổng quát.

Hơn nữa, nguyên lý chồng chất nghiệm cũng ngụ ý rằng chỉ có thể có nhiều nhất một lời giải cho vấn đề tổng quát, bất kể các nguồn và các đích được phân bố như thế nào. Thật vậy, hiệu của hai lời giải phân biệt cũng sẽ là một dòng điện trong đó không có bất kỳ một dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi mạng điện tại bất kỳ một điểm nào. Nếu trong dòng điện này có một dòng điện dương trên một cạnh nào đó từ a đến b thì, từ định luật Kirchhoff về các dòng điện, sẽ có một dòng điện dương nào đó từ b đến c , một dòng điện dương nào đó từ c đến d , v.v..., chúng sẽ tạo ra một trail $abcd \dots$. Do mạng điện là hữu hạn nên trail này sẽ phải quay trở lại một đỉnh đã được đi qua trước đó. Như vậy, chúng ta sẽ thu được một circuit trong đó các cạnh của nó đều có dòng điện dương chạy qua theo một hướng nào đó. Điều này là không thể bởi vì nó ngụ ý rằng điện thế của mỗi đỉnh sẽ luôn lớn hơn điện thế của đỉnh tiếp theo quanh circuit.

Trước khi chứng minh sự tồn tại của một lời giải như vậy (điều này sẽ là hiển nhiên nếu chúng ta tin vào cách lý giải vật lý của vấn đề), chúng ta sẽ trình bày cách tính toán tổng trở chung của hai mạng bất kỳ. Trừ khi các mạng điện được xét là rất nhỏ, thông thường các tính toán có thể rất “nặng” và các kỹ sư điện sẽ có một số thủ thuật tiêu chuẩn để làm cho chúng trở nên dễ dàng hơn.



Hình ảnh minh họa các điện trở mắc nối tiếp và song song.

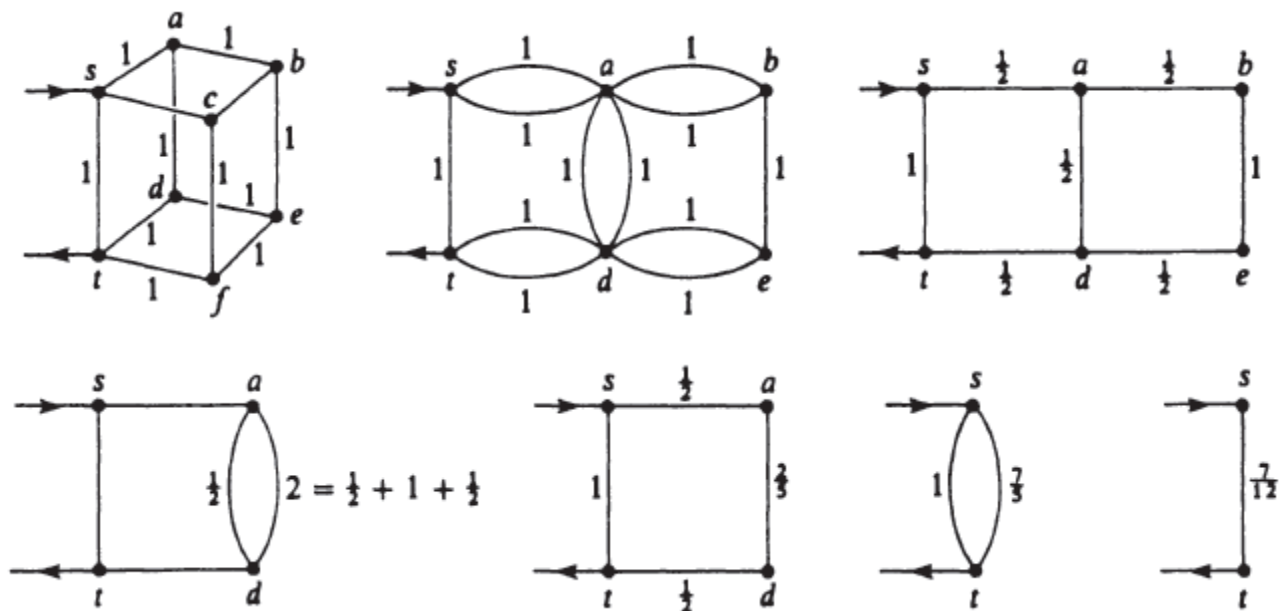
Giả sử rằng chúng ta có một dòng điện có cường độ bằng 1 chạy qua các mạng điện cơ bản nêu trên từ s đến t . Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Tổng điện trở của các mạng điện cơ bản này từ s đến t sẽ được tính như thế nào?”. Trong trường hợp đầu tiên, $V_a = r_1$ và $V_s = V_a + r_2 = r_1 + r_2$, nên tổng điện trở của mạng điện sẽ là $r = r_1 + r_2$. Trong trường hợp thứ hai, nếu chúng ta giả sử dòng điện chạy qua điện trở thứ nhất có cường độ e thì dòng điện chạy qua điện trở thứ hai sẽ có cường độ $1 - e$. Do đó, $V_s = r_1 e = r_2 (1 - e)$, nên $e = \frac{r_2}{r_1 + r_2}$. Như vậy, tổng điện trở của mạng điện sẽ là $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, nghĩa là $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.

Điều này cho thấy rằng **điện trở tương hồ** (hoặc **độ dẫn điện**) của một mạch điện cũng tương tự như chính điện trở đó và điều này thực sự tạo ra sự thuận tiện trong phần trình bày của chúng ta. Như vậy, tất cả những gì chúng ta đã chỉ ra cho đến bây giờ chỉ là, đối với các điện trở được mắc nối tiếp, tổng điện trở sẽ bằng tổng của các điện trở thành phần và, đối với các điện trở được mắc song song, tổng độ dẫn điện sẽ bằng tổng của các độ dẫn điện thành phần.

Việc sử dụng một số quy ước tỏ ra đặc biệt thuận tiện khi chúng ta xem xét các trường hợp giới hạn nhất định của định luật Ohm: Nếu điện trở của một cạnh ab bằng 0 thì chúng ta sẽ phải có $V_a = V_b$ và các đỉnh a và b có thể được coi là đồng nhất với nhau. Trong ngôn ngữ thông thường, chúng ta thường nói rằng a đã được “đoạn mạch” thành b . Tất nhiên, chúng ta cũng có thể rút gọn a thành b nếu có một lý do nào đó khiến cho $V_a = V_b$. Mặt khác, chúng ta cũng có thể đưa ra các cạnh có độ dẫn điện bằng 0 mà không làm ảnh hưởng đến các dòng điện và các điện thế. Thật vậy, chúng ta có thể tạo ra một cạnh có độ dẫn điện bằng 0 bằng cách “cắt” nó. Tất nhiên, một cạnh có điện trở 0 sẽ được cho là có độ dẫn điện ∞ và một cạnh có độ dẫn điện 0 sẽ được cho là có điện trở ∞ .

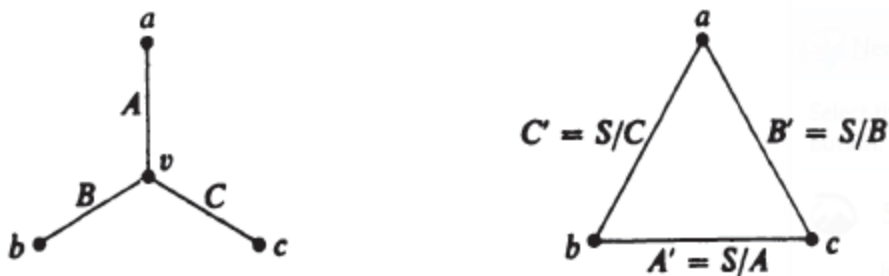
Kế tiếp, chúng ta sẽ xem xét cách để áp dụng các kết quả vừa đạt được với các điện trở mắc nối tiếp, các điện trở mắc song song và khả năng làm “đoạn mạch” các đỉnh trong việc xác định tổng điện trở của chúng ta. Chẳng hạn, chúng ta hãy xét vấn đề xác định tổng điện trở của một mạng điện được tạo thành bởi các cạnh của một hình lập phương trong đó điện trở của mỗi cạnh đều bằng 1: “Tổng điện trở của mạng điện trên cạnh st là bao nhiêu?”. Từ tính chất đối xứng của bài toán, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $V_a = V_c$ và $V_d = V_f$. Do đó, c có thể được rút gọn thành a và f cũng có thể được rút gọn thành d . Kế tiếp, chúng ta có

thể đơn giản hóa các điện trở mắc nối tiếp và song song cho đến khi chúng ta tính được tổng điện trở của mạng là $\frac{7}{12}$.



Hình vẽ minh họa quá trình tính toán tổng điện trở trên cạnh st .

Một kết quả quan trọng khác thường gặp trong các tính toán thực tế được gọi là **phép biến đổi sao – tam giác**. Nếu một đỉnh v được nối với chỉ ba đỉnh nào đó, tạm giả sử là a, b, c , bởi các điện trở A, B, C thì chúng ta sẽ gọi v là tâm của một ngôi sao (xem hình vẽ đầu tiên trong hình vẽ minh họa phép biến đổi sao – tam giác). Nếu không có bất kỳ một dòng điện nào đi vào hoặc đi ra tại v thì chúng ta có thể thay thế ngôi sao này bởi một tam giác (xem hình vẽ thứ hai trong hình vẽ minh họa phép biến đổi sao – tam giác) (như chúng ta có thể kiểm tra được rằng nếu chúng ta đặt các điện thế V_a, V_b, V_c tại các đỉnh a, b, c thì, trong cả hai mạng trên, chúng ta sẽ nhận được chính xác cùng các dòng điện $w_{a\infty}, w_{b\infty}, w_{c\infty}$ rời đi khỏi mạng). Ngược lại, chúng ta cũng có thể áp dụng phép biến đổi ngược lại để thay thế tam giác bởi một ngôi sao, nghĩa là chúng ta sẽ thay thế các điện trở A', B', C' bởi các điện trở $A = \frac{B'C'}{T}, B = \frac{C'A'}{T}, C = \frac{A'B'}{T}$ trong đó $T = A' + B' + C'$. Ngẫu nhiên, các công thức trên sẽ trở nên đối xứng nếu chúng ta sử dụng điện trở trong phép biến đổi thứ nhất và độ dẫn điện trong phép biến đổi thứ hai: $A' = B + C + \frac{BC}{A}$ và $\alpha = \beta' + \gamma' + \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'}$, trong đó $\alpha, \beta, \dots$ là các độ dẫn điện.



Hình vẽ minh họa phép biến đổi sao – tam giác, trong đó $S = AB + BC + CA$.

Chúng ta sẽ kết thúc mục này của bài viết với một kết quả mang nặng tính lý thuyết hơn: chúng ta sẽ chứng minh sự tồn tại của một lời giải như vậy. Chính xác hơn, chúng ta sẽ trình bày một kết quả nổi tiếng khác của Kirchhoff: nếu một dòng điện có cường độ bằng 1 được đưa vào một mạng thì cường độ dòng điện chạy trong một cạnh có thể được biểu thị bởi số các cây khung của mạng. Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ giả sử rằng đồ thị G của mạng là liên thông, mỗi cạnh đều có điện trở bằng 1 và một dòng điện có cường độ bằng 1 đi vào tại s và rời khỏi tại t .

Kết quả 2.1.1.

Giả sử cho trước một cạnh ab , kí hiệu:

$N(s, a, b, t)$ là số các cây khung của G sao cho chỉ có duy nhất một đường đi từ s đến t có chứa a và b theo đúng thứ tự này;

$N(s, b, a, t)$ là số các cây khung của G sao cho chỉ có duy nhất một đường đi từ s đến t có chứa b và a theo đúng thứ tự này;

N là tổng số các cây khung của G ;

$$w_{ab} = \frac{N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)}{N}.$$

Kế tiếp, chúng ta phân bố các dòng điện trong các cạnh của G bằng cách, với mọi cạnh ab của G , chúng ta sẽ cho một dòng điện có cường độ w_{ab} từ a đến b .

Khi đó, chúng ta sẽ có một dòng điện có cường độ bằng 1 từ s đến t thỏa mãn tất cả các định luật của Kirchhoff.

Chứng minh kết quả 2.1.1.

Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta sẽ nhân tất cả các dòng điện với N . Hơn nữa, với mọi cây khung T và với mọi cạnh $ab \in E(G)$, kí hiệu $w_{ab}^{(T)}$ là dòng điện có cường độ bằng 1 chạy dọc theo $s - t$ đường đi duy nhất trong T :

$$w_{ab}^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } T \text{ có một đường đi có dạng } s \dots ab \dots t, \\ -1 & \text{nếu } T \text{ có một đường đi có dạng } s \dots ba \dots t, \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, $N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t) = \sum_T w_{ab}^{(T)}$, trong đó tổng được tính trên tất cả các cây khung T . Như vậy, nhiệm vụ của chúng ta là sẽ chỉ ra rằng, với mọi cạnh ab của G , nếu chúng ta cho một dòng điện có cường độ bằng $\sum_T w_{ab}^{(T)}$ từ a đến b thì chúng ta sẽ thu được một dòng điện có cường độ bằng N từ s đến t thỏa mãn các định luật Kirchhoff.

Kế tiếp, do mỗi $w^{(T)}$ đều là một dòng điện có cường độ bằng 1 từ s đến t đều thỏa mãn các định luật Kirchhoff nên tổng của chúng sẽ là một dòng điện có cường độ bằng N từ s đến t thỏa mãn các định luật Kirchhoff.

Tất cả những gì chúng ta cần chứng minh đó là định luật Kirchhoff về các hiệu điện thế cũng được thỏa mãn. Do tất cả các cạnh đều có điện trở như nhau nên định luật Kirchhoff về các hiệu điện thế chỉ ra rằng tổng các dòng điện này trong một chu trình định hướng bất kỳ luôn bằng không. Để chứng minh điều này, chúng ta cũng sẽ tiến hành như trước đó nhưng trước tiên chúng ta sẽ phải định dạng lại một chút cách định nghĩa của $N(s, a, b, t)$. Chúng ta sẽ gọi một rừng khung F của G là **thicket** nếu nó chỉ có chính xác hai thành phần liên thông, tạm giả sử là F_s và F_t , sao cho s nằm trong F_s và t nằm trong F_t . Khi đó, $N(s, a, b, t)$ chính là số các thicket $F = F_s \cup F_t$ sao cho $a \in F_s, b \in F_t$ và $N(s, b, a, t)$ cũng được định nghĩa tương tự. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu một thicket $F = F_s \cup F_t$ có thể đóng góp bao nhiêu vào tổng các dòng điện trong một chu trình?”. Câu trả lời cho vấn đề này là nó sẽ bằng số các chu trình phân biệt cạnh từ F_s đến F_t trừ đi số các chu trình phân biệt cạnh từ F_t đến F_s , nghĩa là nó sẽ bằng không. $\square$

Kế tiếp, chúng ta sẽ biểu diễn lại phần thứ hai của phép chứng minh nêu trên một cách hình thức hơn. Để làm được điều này, chúng ta sẽ sử dụng nguyên lý tổ hợp cơ bản và mạnh mẽ: **nguyên lý đếm bằng hai đếm** (hoặc **nguyên lý đảo thứ tự lấy tổng**).

Với mọi thicket $F = F_s \cup F_t$ và mọi cạnh $ab \in E(G)$, kí hiệu:

$$w_{ab}^{(F)} = \begin{cases} w_{ab}^{(F+ab)} & \text{nếu } F + ab \text{ là một cây khung,} \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, $\sum_T w_{ab}^{(T)} = \sum_F w_{ab}^{(F)}$, trong đó tổng thứ hai được tính trên tất cả các thicket F . Như vậy, tổng các dòng điện xung quanh một chu trình $x_1 x_2 \dots x_k$ (với $x_{k+1} = x_1$) nào đó của G sẽ là

$$\sum_{i=1}^k \sum_F w_{x_i x_{i+1}}^{(F)} = \sum_F \sum_{i=1}^k w_{x_i x_{i+1}}^{(F)} = 0 \text{ (điều này suy ra từ việc } \sum_{i=1}^k w_{x_i x_{i+1}}^{(F)} = 0, \text{ với mọi thicket } F).$$

Quan trọng hơn, phép chứng minh của Kết quả 2.1.1) có thể được viết lại để đưa ra lời giải trong trường hợp các cạnh có độ dẫn điện tùy ý. Với một cây khung T bất kỳ, **trọng lượng $w(T)$** của một cây khung T được định nghĩa là tích của các độ dẫn điện của các cạnh của nó. Kí hiệu N^* là tổng trọng lượng của tất cả các cây khung, $N^*(s, a, b, t)$ là tổng trọng lượng của tất cả các cây khung trong đó b đi sau a trên $s - t$ đường đi (duy nhất) trong cây, $N^*(s, b, a, t) = N^*(t, a, b, s)$.

Kết quả 2.1.2.

Với các cạnh có độ dẫn điện tùy ý, chúng ta luôn có một cách để phân bố các dòng điện thỏa mãn định luật Ohm và các định luật Kirchhoff trong đó một dòng điện có cường độ bằng 1 sẽ đi vào tại s và đi ra tại t . Hơn nữa, cường độ của dòng điện trong một cạnh ab được xác định bởi công thức $\frac{N^*(s, a, b, t) - N^*(s, b, a, t)}{N^*}$.

Chúng ta hãy lưu ý một hệ quả của kết quả này:

Kết quả 2.1.3.

Nếu độ dẫn điện của các cạnh là các số hữu tỷ và có một dòng điện có cường độ bằng 1 đi qua mạng thì dòng điện chạy trong mỗi cạnh sẽ có cường độ là một số hữu tỷ nào đó.

Phép biến đổi sao – tam giác cho chúng ta thấy rằng bất kể phần còn lại của mạng là gì thì mọi “ngôi sao” đều có thể được thay thế bởi một “tam giác” phù hợp và ngược lại. Cụ thể hơn, nếu hai mạng, tam giả sử là N và M , chỉ có chung hai đỉnh, tam giả sử là a và b , và tổng điện trở của M từ a đến b là r thì, trong NUM , chúng ta có thể thay thế M bởi một cạnh ab với điện trở r . Trên thực tế, các phép biến đổi tương tự có thể được thực hiện đối với các mạng điện với phần đính kèm có số đỉnh bất kỳ chứ không chỉ hai hay ba đỉnh như trên. Nói một cách chính xác hơn, nếu một phần M của một mạng chỉ được gắn với phần còn lại của mạng chỉ tại một tập đỉnh U nào đó thì chúng ta có thể thay thế M bởi các cạnh có điện trở xác định nối với các đỉnh của U (và không cần phải kể thêm bất kỳ một đỉnh nào khác nữa) mà không làm thay đổi sự phân bố của các dòng điện bên ngoài M .

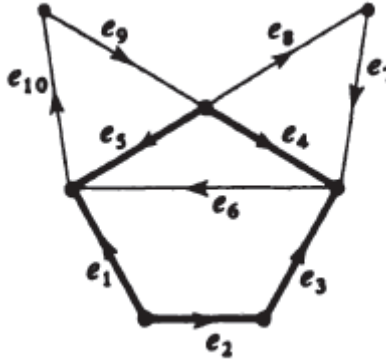
Khi ước tính giá trị điện trở của một mạng, chúng ta thường sử dụng một thực tế là nếu tăng điện trở của một dây dẫn lên thì tổng điện trở của mạng sẽ không thể giảm xuống. Như vậy, nếu một số dây dẫn bị cắt thì tổng điện trở của mạng sẽ không giảm. Tương tự, nếu một số đỉnh bị làm đoạn mạch thì tổng điện trở của mạng sẽ không tăng. Điều này là hiển nhiên nếu chúng ta sử dụng các trực giác vật lý. Tuy nhiên, vấn đề đặt ra ở đây đó là các định luật Kirchhoff cùng với định luật Ohm xác định tất cả các dòng điện, các hiệu điện thế, v.v... đều đã chấp nhận ba định luật này nên chúng ta không có quyền sử dụng bất kỳ một trực giác vật lý nào như vậy. Trong chủ đề này của bài viết, chúng ta sẽ xem khẳng định này như một sự thật hiển nhiên và không quan tâm đến việc chứng minh nó. Nhưng chúng ta sẽ chứng minh nó bằng nhiều cách khác nhau trong “**Chủ đề 09. Đường đi ngẫu nhiên trong một đồ thị**”, khi chúng ta đưa ra một cách xử lý tinh tế hơn đối với các mạng điện.

2.2. Không gian vector và ma trận liên kết với một đồ thị

Không gian đỉnh $C_0(G)$ của một đồ thị G được định nghĩa là không gian vector phức gồm mọi hàm số tuyến tính từ $V(G)$ vào $\mathbb{C}$. Tương tự, **không gian cạnh $C_1(G)$ của một đồ thị G** được định nghĩa là không gian vector phức gồm mọi hàm số tuyến tính từ $E(G)$ vào $\mathbb{C}$. Trong các định nghĩa nêu ở trên, đôi khi để tạo sự thuận tiện, chúng ta thường sẽ thay thế trường số phức $\mathbb{C}$ bởi trường bậc hai $\mathbb{F}_2$ hoặc bởi bất kỳ một trường nào khác. Chúng ta sẽ đặt $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ sao cho $\dim C_0(G) = n$ và $\dim C_1(G) = m$. Các phần tử của $C_0(G)$ thường được viết lại ở dạng $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ (hoặc $x = (x_i)_{i=1}^n$). Tổng $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ là một **tổng hình thức của các đỉnh v_i** , nghĩa là nếu chúng ta coi v_i là một hàm $V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ bằng 0 tại hầu hết mọi nơi, ngoại trừ tại v_i nó sẽ bằng 1, thì $v_1, \dots, v_n$ sẽ là một hệ cơ sở của $C_0(G)$ và tổng trên chỉ đơn giản là biểu thị một phần tử theo các phần tử cơ sở. Tương tự, các phần tử của $C_1(G)$ cũng có thể được viết lại ở dạng $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$ (hoặc $y = (y_i)_{i=1}^m$). Chúng ta sẽ gọi $(v_1, \dots, v_n)$ là một **hệ cơ sở chuẩn tắc của không gian đỉnh $C_0(G)$** và $(e_1, \dots, e_m)$ là một **hệ cơ sở chuẩn tắc của không gian cạnh $C_1(G)$** . Chúng ta cũng sẽ trang bị cho các không gian này một tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ trong đó các hệ cơ sở chuẩn tắc là trực chuẩn: $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$.

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ quan tâm chủ yếu đến không gian cạnh $C_1(G)$. Để bắt đầu các khảo sát, chúng ta sẽ xác định hai không gian con đặc biệt sẽ trở thành các phần bù trực giao của nhau. Kí hiệu $L = u_1 u_2 \dots u_l$ là một chu trình định hướng cho trước trong G . Nếu $e_i = u_j u_{j+1}$ và e_i được định hướng từ u_j đến u_{j+1} thì chúng ta sẽ nói rằng **e_i được định hướng như L** . Chu trình định hướng L này có thể được xác định bởi một phần tử z_L của $C_1(G)$:

$$z_L(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_i \in E(L) \text{ và } e_i \text{ được định hướng như } L, \\ -1 & \text{nếu } e_i \in E(L) \text{ và } e_i \text{ được định hướng không như } L, \\ 0 & \text{nếu } e_i \notin E(L). \end{cases}$$



Hình ảnh minh họa: nếu chúng ta xem chu trình L được định hướng ngược chiều kim đồng hồ thì

vector z_L tương ứng của nó trong $C_1(G)$ sẽ là $z_L = (-1, 1, 1, -1, 0, \dots, 0)$.

Kí hiệu $Z(G)$ là không gian con của $C_1(G)$ cảm sinh bởi các vector z_L trong đó L chạy trên tập tất cả các chu trình của G ; $Z(G)$ được gọi là không gian chu trình của G .

Kế tiếp, giả sử P là một phân hoạch $V = V_1 \cup V_2$ của tập các đỉnh V của G . Xét tập $E(V_1, V_2)$ gồm các cạnh từ V_1 đến V_2 ; một tập hợp các cạnh $E(V_1, V_2)$ như vậy sẽ được gọi là một lát cắt. Khi đó, chúng ta sẽ có một vector u_P trong $C_1(G)$ được gọi là **vector lát cắt** (hoặc **vector đối chu trình**) liên kết tự nhiên với phân hoạch P này:

$$u_P(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_i \text{ đi từ } V_1 \text{ đến } V_2, \\ -1 & \text{nếu } e_i \text{ đi từ } V_2 \text{ đến } V_1, \\ 0 & \text{nếu } e_i \notin E(V_1, V_2). \end{cases}$$

Chúng ta kí hiệu $U(G)$ là không gian con của không gian cạnh $C_1(G)$ cảm sinh bởi các vector lát cắt u_P và chúng ta cũng sẽ gọi nó là **không gian lát cắt** (hoặc **không gian đối chu trình**) của G .

Kết quả 2.2.1.

Không gian cạnh $C_1(G)$ là tổng trực giao của không gian chu trình $Z(G)$ và không gian lát cắt $U(G)$. Hơn nữa, nếu G có n đỉnh, m cạnh và k thành phần liên thông thì $\dim Z(G) = m - n + k$ và $\dim U(G) = n - k$.

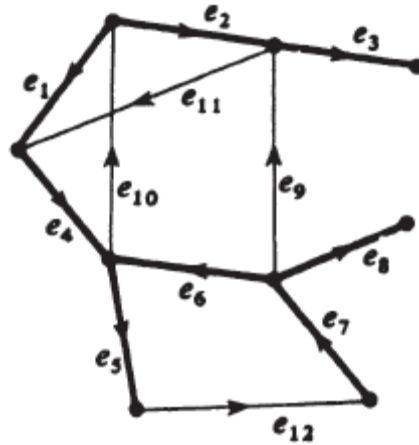
Chứng minh kết quả 2.2.1.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $Z(G)$ và $U(G)$ là các không gian trực giao với nhau. Giả sử L là một chu trình và P là một phân hoạch $V = V_1 \cup V_2$. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Tích vô hướng $\langle z_L, u_P \rangle$ sẽ bằng bao nhiêu?”. Câu trả lời cho vấn đề này đơn giản là nó sẽ bằng số các cạnh của L đi từ V_1 đến V_2 theo hướng của L trừ đi số các cạnh của L từ V_2 đến V_1 . Do đó, $\langle z_L, u_P \rangle = 0$, với mọi chu trình L và mọi phân hoạch P . Như vậy, $Z(G)$ và $U(G)$ thực sự là các không gian trực giao với nhau.

Do số chiều của $C_1(G)$ sẽ bằng với số cạnh m nên cả hai khẳng định trên sẽ được chứng minh nếu chúng ta có thể chỉ ra rằng $\dim Z(G) \geq m - n + k$ và $\dim U(G) \geq n - k$. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định này với giả định G là một đồ thị liên thông; tính đúng đắn của khẳng định trong trường hợp chung sẽ được suy ra theo sau đó một cách dễ dàng.

Như vậy, chúng ta sẽ giả sử rằng G là một đồ thị liên thông, nghĩa là $k = 1$. Kí hiệu T là một cây khung của đồ thị G . Chúng ta sẽ sử dụng T để tạo ra $m - n + 1$ vector độc lập tuyến tính trong $Z(G)$ và $n - 1$ vector độc lập tuyến tính trong $U(G)$. Chúng ta có thể đặt lại các chỉ số của các cạnh sao cho $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ là các cạnh của cây T và $e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ là các cạnh còn lại, nghĩa là các dây cung của T .

Chúng ta biết rằng, với mọi dây cung e_i , có duy nhất một chu trình định hướng C_i sao cho $z_{C_i}(e_i) = 1$ và $z_{C_i}(e_j) = 0$ đối với mọi dây cung e_j khác, nghĩa là bất cứ khi nào $j \geq n$ và $j \neq i$. Nói một cách ngắn gọn, $z_{C_i}(e_j) = \delta_{ij}$ với $j \geq n$, trong đó δ_{ij} là kí hiệu Kronecker delta. Chúng ta sẽ gọi C_i là một **chu trình cơ sở thuộc e_j (đối với T)**. Hơn nữa, z_{C_i} cũng được gọi là một **vector chu trình cơ sở**. Tương tự, bằng cách xóa đi một cạnh e_i của T , phần còn lại của cây khung T sẽ được chia thành hai thành phần liên thông khác nhau. Kí hiệu V_1^i là tập đỉnh của thành phần liên thông có chứa đỉnh đầu của e_i và kí hiệu V_2^i là tập đỉnh của thành phần liên thông có chứa đỉnh cuối của e_i . Nếu P_i là phân hoạch $V = V_1^i \cup V_2^i$ thì hiển nhiên $u_{P_i}(e_j) = \delta_{ij}$ với $1 \leq j \leq n - 1$. Khi đó, lát cắt $E(V_1^i, V_2^i)$ được gọi là một **lát cắt cơ sở** (hoặc một **đối chu trình cơ sở**) **thuộc e_j (đối với T)** và u_{P_i} được gọi là một **vector lát cắt cơ sở** (hoặc một **vector đối chu trình cơ sở**).



Hình vẽ minh họa vector chu trình cơ sở thuộc e_9 là $z_{C_9} = e_1 - e_2 + e_4 - e_6 + e_9$;

vector lát cắt cơ sở thuộc e_4 là $u_{P_4} = e_4 - e_9 - e_{10}$.

Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $\{z_{C_i} : n \leq i \leq m\}$ là một tập các vector chu trình độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu $z = \sum_{i=n}^m \lambda_i z_{C_i} = 0$ thì, với mọi $j \geq n$, chúng ta sẽ có $0 = z(e_j) = \sum_{i=n}^m \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$. Như vậy, mọi hệ số λ_j của z đều bằng 0. Tương tự, các vector lát cắt cơ sở $u_{P_i}, 1 \leq i \leq n - 1$ cũng là một tập các vector lát cắt độc lập tuyến tính. Do đó, $\dim Z(G) \geq m - n + 1$ và $\dim U(G) \geq n - 1$.

Sau cùng, trường hợp tổng quát $k \geq 1$ có thể được suy ra từ trường hợp $k = 1$ như sau:

Nếu G có k thành phần liên thông $G_1, G_2, \dots, G_k$ thì $C_1(G)$ sẽ là tổng trực giao của các không gian con $C_1(G_i), i = 1, 2, \dots, k$. Hơn nữa, $Z(G_i) = Z(G) \cap C_1(G_i)$ và $U(G_i) = U(G) \cap C_1(G_i)$. □

Phép chứng minh trên chỉ ra rằng các số $n(G) := \dim Z(G)$ (gọi là **chỉ số hạt nhân của G**) và $r(G) := \dim U(G)$ (gọi là **hạng của G**) độc lập với cấu trúc mà không gian cạnh được xác định. Chỉ số hạt nhân $n(G)$ cũng được gọi là **chỉ số chu trình của G** hoặc (**đối hạng của G**). Việc chúng ta sử dụng cây khung trong phép chứng minh trên là không bắt buộc. Trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn trong trường hợp một đồ thị phẳng, chúng ta sẽ có các chu trình và lát cắt cơ sở tự nhiên khác.

Có một số cách khác nhau để chúng ta có thể liên kết tự nhiên một số ma trận với một đồ thị và không gian vector của nó và chúng sẽ được thảo luận ngay sau đây: ma trận liên hợp và ma trận liên thuộc.

Ma trận liên hợp $A = A(G) = (a_{ij})$ của một đồ thị G là một ma trận cấp $n \times n$ xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Để xác định ma trận liên thuộc của một đồ thị cho trước, chúng ta sẽ xem xét lại phép định hướng của các cạnh như trong định nghĩa của các không gian chu trình và lát cắt:

Ma trận liên thuộc $B = B(G) = (b_{ij})$ của một đồ thị G là một ma trận cấp $n \times m$ xác định bởi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } v_i \text{ là đỉnh đầu của cạnh } e_j, \\ -1 & \text{nếu } v_i \text{ là đỉnh cuối của cạnh } e_j, \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Có một cách đơn giản để chúng ta có thể kết nối hai ma trận A và B nêu trên. Như thường lệ, chúng ta sẽ dùng M^T để kí hiệu cho ma trận chuyển vị của ma trận M .

Kết quả 2.2.2.

Giả sử $D = (D_{ij})$ là ma trận đường chéo với $D_{ii} = d(v_i)$ trong đó $d(v_i)$ là bậc của đỉnh v_i trong G .

Khi đó, $BB^T = D - A$.

Chứng minh kết quả 2.2.2.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Giá trị $(BB^T)_{ij}$ sẽ bằng bao nhiêu?”. Câu trả lời cho vấn đề này sẽ là $\sum_{l=1}^m b_{il}b_{jl}$. Do đó, nó sẽ bằng $d(v_i)$, nếu $i = j$; -1 , nếu $v_i v_j$ là một cạnh của G (nếu $e_l = v_i v_j$ được định hướng từ v_i đến v_j thì $b_{il}b_{jl} = 1(-1) = -1$ và tất cả các tính còn lại đều bằng 0); 0 nếu $v_i v_j$ không phải là một cạnh của G . Như vậy, $BB^T = D - A$. $\square$

Ma trận $L = D - A$ được gọi là một **Laplacian rời rạc** (hoặc **ma trận Kirchhoff**) của đồ thị G và nó có một tầm quan trọng nhất định trong lý thuyết phổ đồ thị: chúng ta sẽ quay trở lại vấn đề này ở cuối mục 2.2. **Không gian vector và ma trận liên kết với một đồ thị và trong Chủ đề 09. Đường đi ngẫu nhiên trong đồ thị.**

Chúng ta có thể đồng nhất các ma trận A và B với các ánh xạ tuyến tính $A: C_0(G) \rightarrow C_0(G)$ và $B: C_1(G) \rightarrow C_0(G)$ xác định trong các cơ sở chuẩn tắc: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ và $(By)_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}y_j$. Nếu C là

một chu trình thì hiển nhiên $Bz_c = 0 \in C_0(G)$. Trên thực tế, chúng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng không gian chu trình chính là hạt nhân của toán tử B . Như vậy, hạng của toán tử B sẽ bằng $\text{rank}(B) =$

$m - (m - n + k) = n - k$ là hạng của đồ thị G và chỉ số hạt nhân của toán tử B sẽ chính là đối hạng (hoặc chỉ số chu trình) của G . Hơn nữa, toán tử chuyển vị B^T của toán tử B biến $C_0(G)$ thành $C_0(G)$ và ảnh của toán tử B^T chính là không gian lát cắt.

Trong **Chủ đề 08. Đồ thị - Cấu trúc nhóm – Ma trận**, chúng ta sẽ thảo luận một số chi tiết cơ bản về các giá trị riêng và các vector riêng của ma trận kề. Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ sử dụng các ma trận để giải quyết bài toán về mạng điện mà chúng ta đã thảo luận trong phần đầu tiên. Trên thực tế, Kirchhoff được biết đến như là nhà toán học đầu tiên nhận ra khả năng ứng dụng của đại số ma trận vào lý thuyết đồ thị. Cụ thể hơn, chính là ứng dụng đại số ma trận để giải quyết bài toán về các mạng điện.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể xây dựng các định luật Kirchhoff cho các ma trận và vector trong không gian cạnh?”. Giả sử G' là đồ thị tương ứng của mạng điện của chúng ta, $V(G') = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, $E(G') = \{e_1, e_2, \dots, e_{m'}\}$, mạng điện là liên thông và chúng ta có một máy phát điện đảm bảo hiệu điện thế giữa các đỉnh v_i và v_j là $g_i - g_j$ V, với mọi $1 \leq i \leq j \leq k$.

Để có thể biểu diễn các định luật Kirchhoff ở dạng gọn gàng hơn, chúng ta chỉ cần bổ sung thêm một đỉnh v_n vào G' và nối nó với các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_k$ để tạo ra một đồ thị G mới. Kí hiệu $m = m' + k$ và $e_{m'+i} = v_n v_i, i = 1, 2, \dots, k$, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Giả sử các cạnh của G' được định hướng một cách tùy ý và kí hiệu w_i là cường độ dòng điện chạy trong cạnh e_i . Do đó, $w_i = -1$ có nghĩa là chúng ta sẽ có một dòng điện có cường độ 1 A theo qua cạnh e_i theo chiều ngược lại. Bằng cách định hướng từng cạnh mới $e_{m'+i}$ từ v_n đến v_i và kí hiệu $w_{m'+i}$ là tổng cường độ dòng điện đi vào mạng tại v_i . Một lần nữa, $w_{m'+i} = -1$ có nghĩa là chúng ta cũng sẽ có một dòng điện có cường độ 1 A rời khỏi mạng tại v_i . Vector $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in C_1(G)$ được gọi là **vector cường độ dòng điện**. Với cách kí hiệu này, định luật Kirchhoff về các cường độ dòng điện sẽ có dạng

$$Bw = 0 \quad (1)$$

Việc xây dựng định luật Kirchhoff về các điện thế ở dạng ma trận cũng dễ dàng như vậy. Kí hiệu p_i là hiệu điện thế giữa hai đầu của cạnh e_i và vector $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in C_1(G)$ cũng được gọi là **vector điện thế**. Định luật Kirchhoff về các điện thế phát biểu rằng $\langle z, p \rangle = 0$, với mọi chu trình $z \in C_1(G)$. Thay vì công nhận khẳng định này cho mọi chu trình, chúng ta sẽ thu thập tất cả các thông tin cần thiết vào một ma trận duy nhất. Tương tự như trước đây, chúng ta chọn ra một cây khung T trong G và gán nhãn các cạnh của G sao cho $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ là các cạnh của cây T và $e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ là các dây cung.

Kí hiệu C là ma trận cấp $m \times (m - n + 1)$ trong đó cột thứ i là vector chu trình cơ sở $z_{C_{n-1+i}}$ thuộc cạnh $e_{n-1+i}, i = 1, 2, \dots, m - n + 1$.

Do các vector chu trình cơ sở tạo thành một cơ sở của không gian chu trình nên định luật Kirchhoff về các điện thế sẽ có dạng

$$C^T p = 0, \quad (2)$$

trong đó C^T là ma trận chuyển vị của ma trận C .

Kế tiếp, để xác định các dòng điện đi qua các cạnh của G' , chúng ta cần thêm một phương trình nữa liên hệ giữa điện thế, dòng điện, điện trở và máy phát điện. Với $i \leq m'$, kí hiệu r_i là điện trở của cạnh e_i và giả định rằng mỗi cạnh mới $e_j, j \geq m'$ đều có $r_j = 0$. Chúng ta có thể giả định rằng $r_i > 0$ với mọi $i \leq m'$: trường hợp ngược lại, cạnh e_i có thể đã bị loại bỏ. Kí hiệu $R = (R_{ij})$ là ma trận đường chéo cấp $m \times m$ với $R_{ii} = r_i$. Cuối cùng, kí hiệu $g = (0, \dots, 0, g_1, g_2, \dots, g_k) \in C_1(G)$ là vector của máy phát điện.

Khi đó,

$$p = Rw + g. \quad (3)$$

Phương trình này chứa tất cả những thông tin mà chúng ta có về các dòng điện ngoại trừ các định luật Kirchhoff.

Để giải các phương trình (1), (2), (3) theo w và p , chúng ta sẽ tách không gian $C_1(G)$ thành tổng $E_T + E_N$ trong đó E_T là không gian con cảm sinh bởi các cạnh của cây T và E_N là không gian con cảm sinh bởi các dây cung của cây T , nghĩa là các cạnh không thuộc cây T . Kí hiệu $w = (w_T, w_N)$ và $p = (p_T, p_N)$ là các vector biểu diễn tương ứng. Hơn nữa, kí hiệu $\tilde{B}$ là ma trận nhận được từ B bằng cách loại bỏ đi hàng cuối cùng, chúng ta sẽ có

$$C = \begin{pmatrix} C_T \\ C_N \end{pmatrix} \text{ và } \tilde{B} = (B_T B_N).$$

Do các cột của C là các chu trình cơ bản nên C_N sẽ là ma trận đơn vị cấp $(m - n + 1) \times (m - n + 1)$ I_{m-n+1} . Do hạt nhân của B có chứa tất cả các vector chu trình nên $BC = 0$. Do đó, $\tilde{B}C = 0$, nghĩa là $B_T C_T = -B_N$. Kế tiếp, do B_T là một ma trận khả nghịch nên $C_T = -B_T^{-1} B_N$.

Sau một số phép biến đổi đơn giản, chúng ta có thể dễ dàng giải được các phương trình (1), (2), (3):

Kết quả 2.2.3.

Vector dòng điện w thỏa mãn phương trình $p = Rw + g$ được xác định bởi công thức

$$w = -C(C^T R C)^{-1} C^T g.$$

Chứng minh kết quả 2.2.3.

Phương trình (1) chỉ ra rằng $B_T w_T + B_N w_N = 0$. Do đó, $w_T = -B_T^{-1} B_N w_N = C_T w_N$, nên $w = C w_N$. Bằng cách kết hợp với các phương trình (2), (3), chúng ta dễ dàng nhận ra rằng $C^T R w + C^T g = 0$, nên $(C^T R C) w_N = -C^T g$. Do $C^T R C$ cũng là một ma trận khả nghịch nên $w = -C(C^T R C)^{-1} C^T g$. $\square$

Rõ ràng, Kết quả 2.2.3) sẽ vẫn có giá trị trong những trường hợp tổng quát hơn chứ không chỉ với G và g được định nghĩa như trên. Trên thực tế, điều kiện sau đây là đủ và ít nhiều cần thiết cho việc chứng minh sự tồn tại duy nhất của dòng điện trong mạch: $g_i r_i = 0$ với mọi chỉ số i và các cạnh e_j với $r_j = 0$ tạo thành một đồ thị con liên thông.

Hơn nữa, các kết quả trên vẫn đúng cho các đa đồ thị: tất cả các khái niệm (ma trận liên thuộc, không gian chu trình và không gian lát cắt, các chu trình cơ sở và các lát cắt cơ sở) đều có thể được định nghĩa tương tự như trên và phép chứng minh của các kết quả trên vẫn được giữ nguyên.

Bằng cách xem xét các đa đồ thị, chúng ta có thể thiết lập lại Kết quả 2.2.3) ở dạng đơn giản hơn mà không cần chúng ta phải bổ sung thêm một đỉnh mới vào đồ thị G' tương ứng của mạng điện. Thật vậy, nếu các dòng điện đi vào G' tại một đỉnh a và rời khỏi nó tại một đỉnh b thì chúng ta có thể nối a với b bởi một cạnh e mới có điện trở bằng 0 (ngay cả khi a và b đã được nối với nhau từ trước đó) và chúng ta cũng có thể giả định rằng hiệu điện thế giữa hai đầu của cạnh e là 1 (bằng cách chọn $g = (0, 0, \dots, 0, 1)$ với e là cạnh cuối cùng). Bằng cách sử dụng thiết lập này, chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra được rằng tỉ số giữa cường độ dòng điện e_i trên tổng cường độ dòng điện e thực sự được đưa ra bởi Kết quả 2.1.1), mặc dù việc kiểm tra này khá là tẻ nhạt. Mặc khác, như chúng ta sẽ trình bày ngay sau đây, rất dễ dàng để chúng ta có thể biểu diễn số các cây khung trong một đồ thị dưới dạng định thức của một Laplacian rời rạc.

Trên thực tế, chúng ta thường xem xét trường hợp các mạng điện có điện trở khác nhau và các cây khung có trọng số như trong Kết quả 2.1.2). Kí hiệu G là một đồ thị với $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ và ma trận dẫn $C = (c_{ij})$: nếu $i = j$ hoặc $v_i v_j$ không phải là một cạnh của G thì c_{ij} sẽ bằng ∞ , trường hợp ngược lại c_{ij} sẽ bằng độ dẫn điện của cạnh $v_i v_j$.

Như trong Kết quả 2.1.2), với mọi cây khung T , kí hiệu $w(T)$ là tích của các độ dẫn điện của các cạnh của cây T và kí hiệu $N^*(T) = \sum_T w(T)$ trong đó tổng được lấy trên tất cả các cây khung T .

Laplacian rời rạc (hoặc **ma trận Kirchhoff**) của mạng điện của chúng ta được xác định bởi $L = D - C$ trong đó D là ma trận đường chéo có phần tử thứ i trên đường chéo là $\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ji}$. Do, trong L , tất cả các hàng và các cột đều có tổng bằng 0 nên tất cả các phần bù đại số của L đều bằng nhau, kí hiệu $K^*(G)$ là giá trị chung này.

Kết quả 2.2.4.

$$N^*(G) = K^*(G).$$

Chứng minh kết quả 2.2.4.

Chúng ta có thể giả định rằng G là một đồ thị liên thông: trường hợp ngược lại, $N^*(G) = K^*(G) = 0$. Hơn nữa, kết quả này cũng đúng với $n = 1$ bởi vì khi đó $N^*(G) = K^*(G) = 1$.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ áp dụng phương pháp quy nạp toán học trên số cạnh của đồ thị G . Do kết quả là hiển nhiên cho trường hợp đồ thị G không có bất kỳ một cạnh nào nên chúng ta có thể chuyển sang bước quy nạp của phép chứng minh. Giả sử $n > 1$, G là một đồ thị liên thông và khẳng định nêu trên là đúng đối với các mạng điện có số cạnh ít hơn. Giả sử v_1 và v_2 là hai đỉnh liên hợp với nhau. Kí hiệu $G - v_1 v_2$ là đồ thị thu được từ G bằng cách cắt (xóa) cạnh $v_1 v_2$ và kí hiệu $G/v_1 v_2$ là đồ thị thu được từ G bằng cách đồng nhất (co) cạnh $v_1 v_2$. Như vậy, trong $G/v_1 v_2$, các đỉnh v_1 và v_2 sẽ được thay thế bởi một đỉnh v_{12} mới và nó được nối với các đỉnh v_i ($i > 2$) bởi một cạnh có độ dẫn điện $c_{1i} + c_{2i}$, với điều kiện $c_{1i} + c_{2i} > 0$.

Điểm mấu chốt quan trọng của phép chứng minh này nằm ở chỗ N^* và K^* đều cùng thỏa mãn một hệ thức tương quan giữa tính cắt và đồng nhất:

$$N^*(G) = N^*(G - v_1 v_2) + c_{12} N^*(G/v_1 v_2), \quad (1)$$

$$K^*(G) = K^*(G - v_1 v_2) + c_{12} K^*(G/v_1 v_2). \quad (2)$$

Thật vậy, $N^*(G - v_1 v_2)$ “đếm” số các cây khung không có chứa $v_1 v_2$ và $c_{12} N^*(G/v_1 v_2)$ “đếm” số các cây khung còn lại. Để chứng minh (2), chúng ta chỉ cần xem xét các phần bù đại số thuộc v_1 và v_{12} .

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng các vế phải của các hệ thức (1) và (2) là bằng nhau, đpcm. □

Một trường hợp đặc biệt của Kết quả 2.2.4) liên quan đến các đa đồ thị (thậm chí là các đồ thị): tất cả những gì chúng ta phải làm chỉ là dùng c_{ij} để kí hiệu cho số các cạnh nối v_i với v_j .

Kết quả 2.2.5.

Số các cây khung trong một đa đồ thị chính là giá trị chung của tất cả các phần bù đại số của Laplacian rời rạc.

Một kết quả tương tự cũng đúng đối với các đa đồ thị có hướng. Tuy nhiên, lần này chúng ta sẽ phải đếm số các cây khung được định hướng tới một đỉnh cho trước:

Kết quả 2.2.6.

Giả sử G là một đa đồ thị có hướng với tập đỉnh $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Với mỗi $1 \leq i \leq n$, kí hiệu $t_i(G)$ là số các cây khung được định hướng tới đỉnh v_i . Hơn nữa, kí hiệu $L = (l_{ij})$ là Laplacian rời rạc của G : với $i \neq j$, kí hiệu $-l_{ij}$ là số các cạnh từ v_i đến v_j ; $l_{ii} = -\sum_{j \neq i} l_{ij}$.

Khi đó, $t_{ij}(G)$ chính là phần bù đại số của L thuộc l_{ii} .

Phép chứng minh của kết quả trên hoàn toàn tương tự như phép chứng minh của Kết quả 2.2.4): khi xem xét $t_1(G)$, tất cả những gì chúng ta phải quan tâm đó là đồng nhất tất cả các cạnh từ v_i đến v_1 với mọi chỉ số $i > 1$. Lưu ý rằng kết quả này hàm chứa cả Kết quả 2.2.5): với mọi đa đồ thị cho trước, chúng ta chỉ cần thay thế mỗi cạnh bởi một cặp cạnh trong đó mỗi cạnh được định hướng theo một trong hai hướng và áp dụng Kết quả 2.2.6).