

Chủ đề 03. Khái niệm luồng – Tính liên thông – Cặp ghép

Bài toán 1. Giả sử cho trước một tập các chàng trai và các cô gái. Với điều kiện nào thì tất cả các cô gái có thể chọn được người chồng mà họ biết ?

Bài toán 2. Giả sử cho trước một nhóm con H của một nhóm hữu hạn G . Với điều kiện nào thì sẽ tồn tại các phần tử $g_1, \dots, g_n \in G$ sao cho $\{g_1H, \dots, g_nH\}$ là một họ các lớp ghép trái và $\{Hg_1, \dots, Hg_n\}$ là một họ các lớp ghép phải của H ?

Bài toán 3. Giả sử cho trước một họ các tập $A_1, \dots, A_n$. Với điều kiện nào thì sẽ tồn tại các phần tử phân biệt $a_1, \dots, a_n$ sao cho $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$?

Trên thực tế, những câu hỏi tuy có vẻ khác nhau này lại liên quan rất mật thiết với nhau: tất cả chúng đều liên quan đến vấn đề xác định điều kiện để tồn tại một tập các cạnh độc lập trong một đồ thị lưỡng phân (còn gọi là một **cặp ghép**) và chúng sẽ được giải quyết bởi cùng một định lý cơ bản nhưng được phát biểu bởi nhiều dạng khác nhau bởi ba nhà toán học Hall, König, Egerváry. Định lý này (chúng ta sẽ thường gọi là định lý Hall) (một ví dụ điển hình của một số kết quả mà chúng ta sẽ trình bày trong bài viết này) đưa ra các điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của một số đối tượng nhất định. Trong mỗi trường hợp cụ thể, cái hay của các định lý này nằm ở chỗ chúng đều là các điều kiện mà chiều thuận là hiển nhiên và chúng ta chỉ cần chứng minh chiều đảo là đủ. Trong dạng kí hiệu của các kết quả của chúng ta, chúng ta sẽ có hai hàm, chẳng hạn là f và g , thỏa mãn $f \leq g$ và chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\max f = \min g$. Do các kết quả của mục này có mối quan hệ rất chặt chẽ với nhau nên thứ tự chúng được chứng minh là một vấn đề khá quan trọng. Để nhấn mạnh điều này, một số kết quả sẽ được chứng minh bằng nhiều cách khác nhau.

Trong mục 3.1) của mục này, chúng ta sẽ khảo sát các khía cạnh khác nhau của khái niệm luồng trong các đồ thị có hướng. Mục đích chính của chúng ta là trình bày định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại tuy đơn giản nhưng rất hiệu quả và đã được chứng minh bởi Ford và Fulkerson vào năm 1962. Kết quả này không chỉ là kết quả trọng tâm của hai mục tiếp theo mà nó còn có một số hệ quả quan trọng khác liên quan đến các đồ thị vô hướng.

Tính liên thông của các đồ thị sẽ là chủ đề được khảo sát tiếp theo của chúng ta trong mục 3.2): kết quả chính là định lý Menger được chứng minh lần đầu tiên vào năm 1927. Định lý Hall và các biến thể của nó sẽ được trình bày chi tiết trong mục 3.3).

Trong trường hợp đầu tiên, chúng ta sẽ suy ra cả hai định lý Menger và Hall từ định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại. Tuy nhiên, do các kết quả này có liên quan chặt chẽ với nhau và tầm quan trọng vốn dĩ của chúng nên chúng ta cũng sẽ đưa ra một số phép chứng minh độc lập khác nhau cho từng kết quả này.

Đặc biệt, định lý Hall chỉ ra cho chúng ta biết khi nào thì một đồ thị lưỡng phân cho trước sẽ có một 1 – nhân tử (một đồ thị con có tập đỉnh là tập đỉnh của đồ thị ban đầu và mọi đỉnh của nó đều có bậc bằng 1). Câu hỏi tương tự về sự tồn tại của một 1 – nhân tử trong một đồ thị tùy ý sẽ khó hơn đáng kể. Vấn đề này đã được giải quyết bởi định lý Tutte mà chúng ta sẽ trình bày trong mục 3.4).

Mục 3.5) sẽ được dùng để trình bày về các cặp ghép ổn định trong các đồ thị lưỡng phân. Những cặp ghép này sẽ tương thích với “sở thích” ở tất cả các đỉnh, nghĩa là một cặp ghép như vậy là cực đại cục bộ cho mọi cặp đỉnh với mỗi đỉnh nằm trong một lớp khác nhau. Kết quả cơ bản và quan trọng về các cặp ghép ổn định là một định lý của Gale và Shapley và đã được chứng minh vào năm 1962: kết quả này không chỉ

được quan tâm nhiều vì ý tưởng độc đáo mà nó còn có rất nhiều ứng dụng thực tế quan trọng. Một số ứng dụng sẽ được chúng ta giới thiệu ra ở đây; những ứng dụng quan trọng khác gần đây có liên quan đến các phép tô màu dạng list sẽ giới thiệu thêm trong “**Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị**”.

3.1. Khái niệm luồng trong đồ thị có hướng

Giả sử cho trước một đồ thị có hướng hữu hạn $\vec{G}$ với tập đỉnh V và tập cạnh $\vec{E}$. Chúng ta sẽ khảo sát khái niệm luồng trong đồ thị có hướng $\vec{G}$ từ một đỉnh s đến một đỉnh t . Một **luồng f trong $\vec{G}$ từ đỉnh (nguồn) s đến đỉnh (đích) t** được định nghĩa là một hàm không âm xác định trên tập các cạnh; giá trị $f(\overrightarrow{xy})$ được gọi là **giá trị của luồng f trên cạnh $\overrightarrow{xy}$** . Để đơn giản hóa cách kí hiệu, chúng ta sẽ viết $f(x, y)$ thay vì $f(\overrightarrow{xy})$ và một quy ước tương tự sẽ được sử dụng cho các hàm khác. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ luôn quy ước $f(x, y)$ bằng 0 bất cứ khi nào $\overrightarrow{xy} \notin \vec{E}$. Điều kiện duy nhất mà chúng ta yêu cầu một luồng từ s đến t phải thỏa mãn là định luật Kirchhoff: tổng giá trị của luồng chạy vào mỗi đỉnh trung gian (một đỉnh nào đó khác với s và t) sẽ bằng tổng giá trị của luồng chạy ra khỏi đỉnh đó.

Như vậy, nếu, với mỗi đỉnh $x \in V$, chúng ta kí hiệu:

$$N^+(x) = \{y \in V : \overrightarrow{xy} \in \vec{E}\},$$

$$N^-(x) = \{y \in V : \overrightarrow{yx} \in \vec{E}\},$$

thì một luồng bất kì từ s đến t sẽ phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) = \sum_{z \in N^-(x)} f(z, x), \text{ với mọi đỉnh } x \in V - \{s, t\}.$$

Do $\sum_{x \in V - \{s, t\}} \{\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) - \sum_{z \in N^-(x)} f(z, x)\} = \sum_{u \in \{s, t\}} \{\sum_{z \in N^-(u)} f(z, u) - \sum_{y \in N^+(u)} f(u, y)\} = 0$ nên chúng ta dễ dàng suy ra được rằng

$$\sum_{y \in N^+(s)} f(s, y) - \sum_{y \in N^-(s)} f(y, s) = \sum_{y \in N^-(t)} f(y, t) - \sum_{y \in N^+(t)} f(t, y).$$

Nói cách khác, tổng giá trị của luồng chạy ra khỏi s sẽ bằng tổng giá trị của luồng chạy vào t . Giá trị chung này được gọi là **giá trị của luồng f từ s đến t** , kí hiệu bởi $v(f)$.

Chúng ta thường mong muốn xác định giá trị luồng lớn nhất từ s đến t với điều kiện luồng phải thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Đầu tiên, chúng ta sẽ giải quyết vấn đề xác định giá trị luồng lớn nhất với điều kiện hạn chế là giới hạn tối đa có thể có của một luồng khi đi qua các cạnh cụ thể. Nó sẽ giúp chúng ta rút ra kết quả cho một số điều kiện hạn chế khác dường như phức tạp hơn nhưng có thể được xem như một trường hợp riêng của nó.

Giả sử cho trước một đồ thị có hướng $\vec{G} = (V, \vec{E})$ và hai đỉnh s, t . Với mỗi cạnh xy của đồ thị G , chúng ta sẽ liên kết nó với một số không âm $c(x, y)$ được gọi là **dung lượng của cạnh $\overrightarrow{xy}$** . Chúng ta sẽ luôn giả định luồng chạy qua cạnh $\overrightarrow{xy}$ không thể nhiều hơn dung lượng $c(x, y)$.

Giả sử cho trước hai tập con X, Y của V , chúng ta sẽ dùng $\vec{E}(X, Y)$ để kí hiệu tập các $X - Y$ cạnh có hướng:

$$\vec{E}(X, Y) = \{\overrightarrow{xy} \in \vec{E} : x \in X, y \in Y\}.$$

Với mọi hàm $g: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta kí hiệu $g(X, Y) = \sum g(x, y)$ trong đó tổng được lấy trên $\vec{E}(X, Y)$.

Nếu S là một tập con của V có chứa s nhưng không có chứa t thì $\vec{E}(S, \bar{S})$ được gọi là một **lát cắt tách s khỏi t** trong đó $\bar{S} = V - S$ là phần bù của S . Nếu chúng ta xóa các cạnh ra khỏi một lát cắt thì sẽ không thể có bất kỳ một luồng có giá trị dương nào từ s đến t được xác định trên phần còn lại. Ngược lại, chúng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng nếu kí hiệu F là tập các cạnh mà sau khi bị xóa sẽ không có bất kỳ một luồng nào từ s đến t có giá trị dương (nghĩa là: $v(f) = 0$, với mọi luồng f từ s đến t) thì F sẽ có chứa một lát cắt nào đó. Giá trị $c(S, \bar{S})$ được gọi là **dung lượng của lát cắt $\vec{E}(S, \bar{S})$** . Nhận thấy rằng dung lượng của bất kì một lát cắt nào cũng đều lớn hơn hoặc bằng giá trị của bất kì một luồng nào. Do đó, giá trị dung lượng nhỏ nhất có thể có của bất kì một lát cắt nào cũng sẽ đều lớn hơn hoặc bằng giá trị lớn nhất có thể có của bất kì một luồng nào. Định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại (một kết quả nổi tiếng của Ford và Fulkerson) chỉ ra rằng bất đẳng thức nêu trên thực sự là một đẳng thức. Trước khi phát biểu và chứng minh định lí này, chúng ta sẽ cố gắng giải thích lí do cho cách gọi “cực tiểu” và “cực đại” như ở trên. Nhận thấy rằng do chỉ có hữu hạn lát cắt nên sẽ phải có một lát cắt nào đó với dung lượng nhỏ nhất. Sự tồn tại của một luồng f nào đó với giá trị lớn nhất sẽ phức tạp hơn một chút. Thật vậy, dễ dàng nhận thấy rằng $v(f) \leq \sum_{\vec{xy} \in \vec{E}} c(x, y)$, với mọi luồng f . Do đó, $v = \sup v(f) < \infty$. Giả sử $f_1, f_2, \dots$ là một dãy các luồng sao cho $\lim_n v(f_n) = v$. Khi đó, bằng cách chuyển sang một dãy con của nó, chúng ta có thể giả định rằng dãy $(f_n(x, y))$ sẽ hội tụ về một hàm $f(x, y)$ nào đó, với mọi cạnh $\vec{xy} \in \vec{E}$. Hàm f là một luồng có giá trị bằng v , nghĩa là một luồng với giá trị cực đại. Bằng cách lập luận tương tự, chúng ta có thể chỉ ra rằng nếu có một số cạnh có dung lượng vô hạn thì cũng sẽ có một luồng nào đó với giá trị lớn nhất là hữu hạn (hoặc vô hạn).

Kết quả 3.1.1. (Định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại)

Giá trị lớn nhất có thể có của bất kì một luồng từ s đến t sẽ luôn bằng với giá trị dung lượng nhỏ nhất có thể có của bất kì một lát cắt nào tách s ra khỏi t .

Chứng minh kết quả 3.1.1.

Nhận thấy rằng chúng ta đã chứng minh được sự tồn tại của một luồng f với giá trị cực đại v và dung lượng của bất kì một lát cắt nào cũng đều lớn hơn hoặc bằng v . Do đó, để chứng minh tính đúng đắn của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng có một lát cắt với dung lượng bằng v . Trên thực tế, chúng ta đã làm nhiều hơn thế: chúng ta sẽ đưa ra một thuật toán đơn giản để giúp xây dựng một lát cắt như vậy từ một luồng f với giá trị lớn nhất.

Chúng ta sẽ xây dựng tập con $S \subset V$ bằng phương pháp đệ quy như sau: “Đặt $s \in S$. Nếu $x \in S$ và $c(x, y) > f(x, y)$ hoặc $f(y, x) > 0$ thì chúng ta sẽ đặt $y \in S$.”

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\vec{E}(S, \bar{S})$ là một lát cắt tách s ra khỏi t với dung lượng bằng $v = v(f)$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra lí do vì sao t không thể là một đỉnh nằm trong S .

Thật vậy, nếu t là một đỉnh nằm trong S thì chúng ta sẽ tìm được một dãy các đỉnh $x_0 = s, x_1, \dots, x_l = t$ sao cho

$$\varepsilon_i = \max\{c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}), f(x_{i+1}, x_i)\} > 0, \text{ với mọi chỉ số } i, 0 \leq i \leq l - 1.$$

Kí hiệu $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$. Khi đó, f có thể được tăng cường lên thành một luồng f' mới như sau: “Nếu $\varepsilon_i > f(x_{i+1}, x_i)$ thì chúng ta sẽ tăng giá trị của luồng trên cạnh $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ lên ε đơn vị; trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ giảm giá trị của luồng trên cạnh $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ đi ε đơn vị.” Hiển nhiên, f' sẽ là một luồng và giá trị của nó là $v(f') = v(f) + \varepsilon$, mâu thuẫn với giả thiết về tính tối đại của f . Điều này ngụ ý rằng $t \notin S$, nên $\vec{E}(S, \bar{S})$ sẽ là một lát cắt tách s ra khỏi t .

Kế tiếp, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng giá trị $v(f)$ của luồng f sẽ bằng với giá trị của luồng f'' từ S đến $\bar{S}$, nghĩa là $v(f) = \sum_{x \in S, y \in \bar{S}} f(x, y) - \sum_{x \in \bar{S}, y \in S} f(x, y)$.

Từ cách định nghĩa đệ quy của tập con S , chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng tổng thứ nhất sẽ bằng $\sum_{x \in S, y \in \bar{S}} f(x, y) = c(S, \bar{S})$ còn mỗi số hạng nằm trong tổng thứ hai đều sẽ bằng 0. Do đó, $v(f) = c(S, \bar{S})$. $\square$

Định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại chính là nền tảng cốt lõi của toàn bộ phần lý thuyết sẽ được trình bày trong mục này của bài viết. Lưu ý rằng nếu có một số cạnh có dung lượng vô hạn nhưng giá trị của luồng cực đại là hữu hạn thì chúng ta vẫn có thể chứng minh được tính đúng đắn của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại bằng cùng một phương pháp chứng minh nêu ở trên.

Phép chứng minh của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại nêu ở trên cũng chỉ ra cho chúng ta một thuật toán hiệu quả một cách đáng ngạc nhiên để xác định một luồng với giá trị lớn nhất nếu hàm dung lượng là **nguyên**; nghĩa là, với mọi cạnh $\overrightarrow{xy}$, dung lượng $c(x, y)$ đều là một số nguyên. Đầu tiên, chúng ta sẽ bắt đầu thuật toán với luồng không, nghĩa là $f_0(x, y) = 0$, với mọi cạnh $\overrightarrow{xy} \in \vec{E}$. Kế tiếp, chúng ta sẽ xây dựng một dãy tăng hữu hạn các luồng $f_0, f_1, f_2, \dots$ hội tụ về một luồng cực đại f nào đó. Giả sử chúng ta đã xây dựng được luồng f_i . Như đã trình bày trong phép chứng minh ở trên, chúng ta sẽ có thể tìm được một tập S từ luồng f_i . Nhận thấy rằng nếu $t \notin S$ thì f_i sẽ là một luồng cực đại (điều này tương đương với việc $E(S, \bar{S})$ là một lát cắt cực tiểu), nên dãy tăng hữu hạn các luồng $f_0, f_1, f_2, \dots$ của chúng ta sẽ phải dừng lại. Mặt khác, nếu $t \in S$ thì f_i có thể được tăng cường lên thành một luồng f_{i+1} bằng cách tăng giá trị của luồng dọc theo một đường đi nào đó từ s đến t tương tự như trong phép chứng minh của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại. Do mỗi giá trị $v(f_i)$ đều là một số nguyên nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $v(f_{i+1}) \geq v(f_i) + 1$. Điều này chỉ ra rằng dãy tăng hữu hạn các luồng $f_0, f_1, f_2, \dots$ sẽ phải dừng lại sau tối đa $\sum_{x, y} c(x, y)$ bước.

Hơn nữa, nếu c là nguyên thì thuật toán sẽ xây dựng cho chúng ta một luồng cực đại cũng là một hàm nguyên, nghĩa là một luồng có giá trị trên mọi cạnh đều là một số nguyên. Thật vậy, nhận thấy rằng do f_0 và f_i là các hàm nguyên nên f_{i+1} cũng sẽ là một hàm nguyên (điều này suy ra từ việc f_{i+1} nhận được từ f_i bằng cách tăng giá trị của luồng f_i trên một đường đi nào đó lên một giá trị là giá trị nhỏ nhất của một tập các số nguyên dương). Kết quả này đôi khi thường được gọi là **dạng nguyên của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại**.

Kết quả 3.1.2. (Dạng nguyên của định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại)

Nếu hàm dung lượng là nguyên thì sẽ có một luồng cực đại mà luồng cực đại này cũng là nguyên.

Chúng ta sẽ thường vận dụng kết quả đơn giản này mỗi khi chúng ta sử dụng định lí lát cắt cực tiểu – luồng cực đại để tìm các đường đi tăng cường khác nhau trong đồ thị. Điều quan trọng cần lưu ý ở đây đó là kết quả này không ngụ ý tính duy nhất của luồng cực đại: thuật toán sẽ tìm ra một trong số các luồng cực đại

(thường sẽ có nhiều luồng cực đại như vậy) và Kết quả 3.1.2) tuyên bố rằng một trong các luồng cực đại như vậy là nguyên.

Sự tồn tại của một thuật toán như vậy cũng chứng minh cho chúng ta một cách trực quan một số kết quả khác. Chẳng hạn, luôn tồn tại một **phản luồng cực đại** (một luồng mà không có chứa bất kì một luồng nào xung quanh một chu trình). Nói cách khác, không thể có bất kì một chu trình $x_1 x_2 \dots x_k$ sao cho

$$f(x_1, x_2) > 0, f(x_2, x_3) > 0, \dots, f(x_{k-1}, x_k) > 0, f(x_k, x_1) > 0.$$

Nếu chúng ta xét một đồ thị có hướng hữu hạn $\vec{G} = (V, \vec{E})$ với nhiều nguồn và nhiều đích thay vì chỉ xét một nguồn và một đích thì vấn đề sẽ chỉ trở nên phức tạp hơn một chút. Trên thực tế, sự khác biệt duy nhất mà chúng ta cần phải quan tâm chính là định nghĩa khái niệm tổng quát về một lát cắt: Nếu $s_1, \dots, s_k$ là các nguồn và $t_1, \dots, t_l$ là các đích thì $\vec{E}(S, \bar{S})$ là một **lát cắt** nếu $s_i \in S$ và $t_j \in \bar{S}$ với mọi chỉ số i, j , $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$.

Để có thể áp dụng định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại cho trường hợp nhiều nguồn và nhiều đích, chúng ta chỉ cần bổ sung thêm một nguồn s mới, một đích t mới, các cạnh $\overrightarrow{ss_i}$ và $\overrightarrow{t_j t}$ sao cho mỗi cạnh này đều có dung lượng vô hạn. Kí hiệu $\vec{H}$ là đồ thị nhận được theo cách nêu trên. Xét tất cả các luồng từ $s_1, \dots, s_k$ đến $t_1, \dots, t_l$ trong $\vec{G}$ sao cho tổng giá trị của các luồng vào (ra) một nguồn (đích) sẽ không bao giờ lớn hơn tổng giá trị của các luồng ra (vào) chính đỉnh đó. Các luồng này có thể dễ dàng được mở rộng thành một luồng duy nhất từ s đến t trong $\vec{H}$ và phép mở rộng này thiết lập một phép tương ứng 1 – 1 giữa hai nhóm luồng này. Hơn nữa, do mọi lát cắt tách s ra khỏi t trong $\vec{H}$ có dung lượng hữu hạn không thể chứa bất kì một cạnh nào có dạng $\overrightarrow{ss_i}$ hoặc $\overrightarrow{t_j t}$ nên nó sẽ tương ứng với một lát cắt có cùng dung lượng trong $\vec{G}$ tách $s_1, \dots, s_k$ ra khỏi $t_1, \dots, t_l$. Như vậy, Kết quả 3.1.1) có thể được mở rộng như sau:

Kết quả 3.1.3.

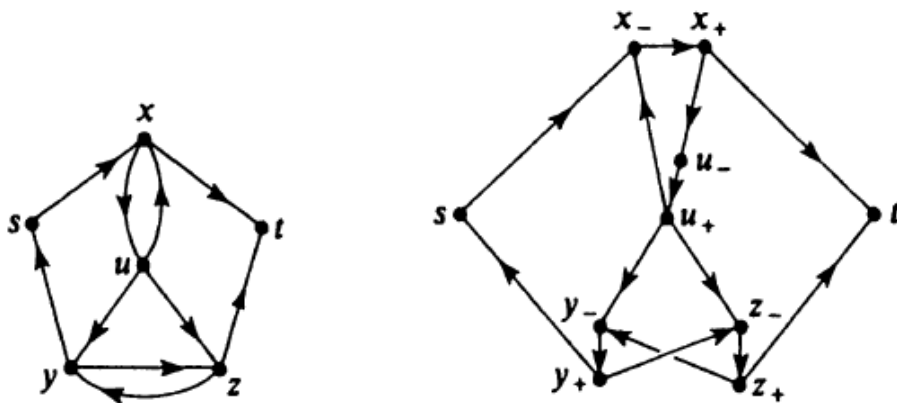
Giá trị lớn nhất có thể có của bất kì một luồng nào từ một tập các nguồn đến một tập các đích sẽ luôn bằng với giá trị dung lượng nhỏ nhất có thể có của bất kì một lát cắt nào tách tập các nguồn ra khỏi tập các đích đó.

Kế tiếp, giả sử rằng chúng ta có các hạn chế về dung lượng trên tất cả các đỉnh ngoại trừ nguồn và đích, nghĩa là giả sử rằng chúng ta được cho trước một hàm $c: V - \{s, t\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho mọi luồng f từ s đến t đều sẽ thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\sum_{y \in N^+(x)} f(x, y) = \sum_{z \in N^-(x)} f(z, x) \leq c(x), \text{ với mọi đỉnh } x \in V - \{s, t\}.$$

Một vấn đề nảy sinh ra thêm ở đây đó là: “Chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm về một lát cắt trong tình huống này như thế nào?”. Một **lát cắt** được định nghĩa là một tập con S của $V - \{s, t\}$ sao cho không có bất kì một luồng nào có giá trị dương từ s đến t có thể được xác định trên $G - S$. Để phân biệt hai loại lát cắt nêu ở trên, đôi khi chúng ta thường gọi khái niệm vừa trình bày là một **lát cắt đỉnh** còn khái niệm đã trình bày ở mục trước là một **lát cắt cạnh**. Một vấn đề xuất hiện ra ở đây đó là: “Liệu chúng ta có thể chuyển định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại cho trường hợp này được không?”. Câu trả lời cho vấn đề này sẽ là Có. Thật vậy, nhận thấy rằng một luồng chảy qua cạnh cũng có thể được xem như một luồng chảy qua đỉnh; cụ thể là từ phần mà tất cả các luồng đi vào nó đến phần mà tất cả các luồng rời khỏi nó. Chính xác hơn, chúng

ta sẽ biến mỗi đỉnh của $\vec{G}$ thành một cạnh nào đó (mà không làm thay đổi bản chất của đồ thị có hướng) sao cho bất kỳ luồng nào đi vào (đi ra) đỉnh đó cũng sẽ bị ép đi qua cạnh tương ứng. Để thực hiện điều này, chúng ta chỉ cần thay thế mỗi đỉnh $x \in V - \{s, t\}$ bởi hai đỉnh nào đó, tạm giả sử là x_- và x_+ ; gửi từng cạnh đến cho x_- cũng như gửi từng cạnh đi ra khỏi x_+ . Cuối cùng, với mỗi đỉnh $x \in V - \{s, t\}$, chúng ta sẽ bổ sung thêm một cạnh từ x_- đến x_+ với dung lượng $c(x_-x_+) = c(x)$.



Hình ảnh minh họa quá trình thay thế một đồ thị $\vec{G}$ với các hạn chế về dung lượng trên các đỉnh bởi một đồ thị $\vec{H}$ với các hạn chế về dung lượng trên các cạnh.

Như vậy, chúng ta đã có được một phép tương ứng 1 – 1 đơn giản giữa các luồng từ s đến t trong $\vec{G}$ và các luồng trong đồ thị $\vec{H}$ mới với các hạn chế về dung lượng trên các cạnh. Do, trong đồ thị $\vec{H}$, chỉ có duy nhất các cạnh $\overrightarrow{x_-x_+}$ là có dung lượng hữu hạn nên một lát cắt cạnh với dung lượng hữu hạn bất kì trong $\vec{H}$ sẽ chỉ bao gồm các cạnh có dạng $\overrightarrow{x_-x_+}$. Do đó, nó sẽ tương ứng với một lát cắt đỉnh nào đó trong $\vec{G}$ với cùng dung lượng. Như vậy, chúng ta sẽ có dạng mở rộng sau của Kết quả 3.1.1):

Kết quả 3.1.4.

Giả sử cho trước một đồ thị có hướng $\vec{G}$ với các hạn chế về dung lượng trên tất cả các đỉnh ngoại trừ nguồn s và đích t .

Khi đó, giá trị lớn nhất có thể có của bất kì một luồng nào từ s đến t sẽ luôn bằng với giá trị nhỏ nhất có thể có của bất kì một lát cắt đỉnh nào tách s ra khỏi t .

3.2. Tính liên thông và định lí Menger

Nhắc lại rằng một đồ thị được gọi là **liên thông** nếu hai đỉnh bất kì của nó đều có thể được nối với nhau bởi một đường đi nào đó; trường hợp ngược lại, nó sẽ được gọi là **không liên thông**. Một đồ thị con liên thông tối đại của đồ thị G sẽ được gọi là một **thành phần liên thông của G** .

Nếu G là một đồ thị liên thông và, với một tập W gồm các đỉnh hoặc các cạnh nào đó, $G - W$ là một đồ thị không liên thông thì chúng ta sẽ nói rằng **W tách G** . Nếu, trong $G - W$, hai đỉnh s và t nằm trong các thành phần liên thông khác nhau thì chúng ta sẽ nói rằng **W tách s ra khỏi t** . Với mỗi $k \geq 2$, chúng ta sẽ nói rằng một đồ thị G được gọi là **k – liên thông** nếu G là một đồ thị K_{k+1} đầy đủ hoặc nó có ít nhất $k + 2$ đỉnh và không có bất kì một tập gồm $k - 1$ đỉnh nào tách nó. Tương tự, với mỗi $k \geq 2$, một đồ thị G được gọi là

một **đồ thị k – liên thông cạnh** nếu nó có ít nhất hai đỉnh và không có bất kì một tập nào với tối đa $k - 1$ cạnh tách nó. Một đồ thị liên thông cũng sẽ được gọi là một đồ thị 1 – liên thông (hoặc 1 – liên thông cạnh). Giá trị k lớn nhất để một đồ thị liên thông G là k – liên thông sẽ được gọi là **chỉ số liên thông của G** , kí hiệu bởi $\kappa(G)$. Nếu G là một đồ thị không liên thông thì chúng ta sẽ quy ước đặt $\kappa(G) = 0$. **Chỉ số liên thông cạnh $\lambda(G)$** cũng sẽ được định nghĩa tương tự.

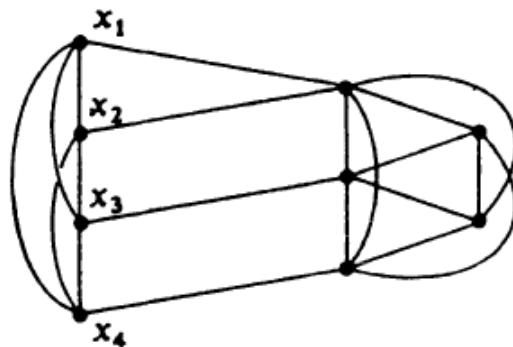
Hiển nhiên, một đồ thị là 2 – liên thông nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị liên thông, có ít nhất 3 đỉnh và không có chứa bất kì một đỉnh khớp nào. Tương tự, một đồ thị là 2 – liên thông cạnh nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị liên thông, có ít nhất 2 đỉnh và không có chứa bất kì một cạnh cầu nào. Thông thường thì việc xác định chỉ số liên thông của một đồ thị cho trước là khá đơn giản. Thật vậy, nếu $1 \leq l \leq n$ thì $\kappa(P_l) = \lambda(P_l) = 1$, $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = 2$, $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n - 1$, $\kappa(K_{l,n}) = \lambda(K_{l,n}) = l$. Để khắc phục ấn tượng sai lầm rằng chỉ số liên thông đỉnh luôn bằng với chỉ số liên thông cạnh, nhận thấy rằng nếu G nhận được từ hợp phân biệt của hai đồ thị đầy đủ K_l bằng cách bổ sung thêm một đỉnh x mới và nối đỉnh x này với mọi đỉnh có bậc lẻ thì $\kappa(G) = 1$ (điều này suy ra từ việc x là một đỉnh khớp trong đồ thị G) nhưng $\lambda(G) = l$. Ví dụ này cũng chỉ ra rằng $\lambda(G - x)$ có thể bằng 0 ngay cả khi $\lambda(G)$ có giá trị rất lớn. Từ cách định nghĩa của chỉ số liên thông đỉnh κ và chỉ số liên thông cạnh λ , với mọi đỉnh x và mọi cạnh xy , chúng ta cũng dễ dàng suy ra rằng:

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - x) \text{ và } \lambda(G) - 1 \leq \lambda(G - xy) \leq \lambda(G).$$

Nếu G là một đồ thị không tầm thường (nghĩa là nó có ít nhất hai đỉnh nào đó) thì các tham số $\delta(G)$, $\lambda(G)$, $\kappa(G)$ sẽ thỏa mãn bất đẳng thức kép sau:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Thật vậy, nhận thấy rằng nếu chúng ta xóa tất cả các cạnh liên thuộc với một đỉnh nào đó thì đồ thị thu được sẽ là một đồ thị không liên thông, nên bất đẳng thức thứ hai là hiển nhiên. Để chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức thứ nhất, đầu tiên, nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị đầy đủ thì $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$ và nếu $\lambda(G) \leq 1$ thì $\lambda(G) = \kappa(G)$. Giả sử G không phải là một đồ thị đầy đủ, $\lambda(G) = k \geq 2$ và $\{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ky_k\}$ là một tập các cạnh không liên hợp nhau trong G . Nếu $G - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ là một đồ thị không liên thông thì $\kappa(G) \leq k$. Trường hợp ngược lại, mỗi đỉnh x_i đều sẽ có bậc $\leq k$ (nên nó cũng sẽ chính là bằng k). Mặt khác, chúng ta sẽ mất đi tính liên thông của đồ thị G nếu xóa tất cả các đỉnh láng giềng của x_1 . Như vậy, $\kappa(G) = k$.



Hình ảnh minh họa một đồ thị 4 – liên thông cạnh G sao cho

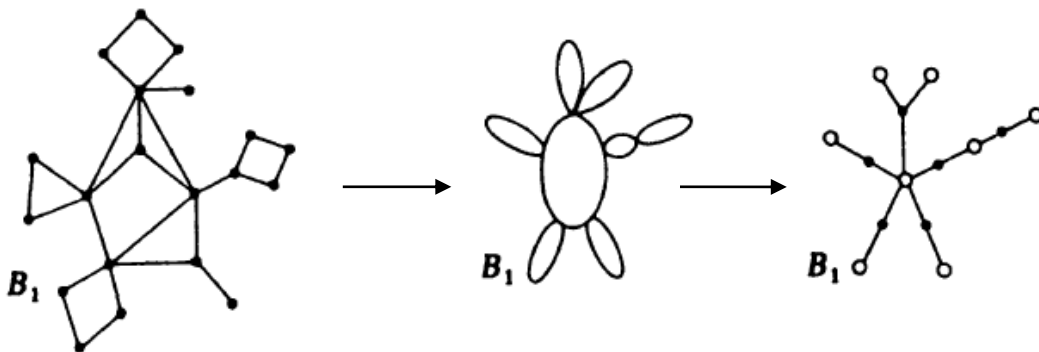
$$G - \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ cũng là một đồ thị liên thông.}$$

Một tính chất quan trọng khác có thể được suy ra ngay từ định nghĩa của chỉ số liên thông đỉnh đó là: với mọi $k \geq 1$, nếu G_1 và G_2 là các đồ thị con k – liên thông của một đồ thị G và có ít nhất k đỉnh chung với nhau thì $G_1 \cup G_2$ cũng sẽ là một đồ thị k – liên thông. Thật vậy, nếu tập $W \subset V(G_1) \cup V(G_2)$ có tối đa $k - 1$ đỉnh thì sẽ có một đỉnh x nào đó nằm trong $(V(G_1) \cap V(G_2)) \setminus W$. Do đó, các đồ thị con liên thông $G_1 - W$ và $G_2 - W$ của G sẽ phải có ít nhất một đỉnh chung với nhau; cụ thể đỉnh chung này chính là đỉnh x . Như vậy, $G_1 \cup G_2 - W = (G_1 - W) \cup (G_2 - W)$ sẽ phải là một đồ thị liên thông.

Như đã thấy trong “**Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản**” hữu ích như thế nào khi chúng ta phân hoạch một đồ thị cho trước thành các thành phần liên thông của nó (nghĩa là thành các đồ thị con liên thông tối đại của nó), chúng ta hãy thử một phân tích tương tự bằng cách sử dụng các đồ thị con 2 – liên thông tối đại. Một đồ thị con B của một đồ thị G được gọi là một **khối của đồ thị G** nếu nó là một cạnh cầu (cùng với các đỉnh liên thuộc với cạnh cầu đó) hoặc nó là một đồ thị con 2 – liên thông tối đại của G . Nhận xét ở trên cho thấy rằng hai khối bất kì đều có tối đa một đỉnh chung với nhau và nếu x, y là các đỉnh phân biệt của một khối B thì $G - E(B)$ sẽ không thể chứa bất kì một $x - y$ đường đi nào. Do đó, mọi đỉnh nằm trong ít nhất hai khối đều là một đỉnh khớp của G ; ngược lại, mọi đỉnh khớp đều nằm trong ít nhất hai khối nào đó. Nhắc lại rằng một chu trình bất kì đều là một đồ thị 2 – liên thông và một cạnh sẽ là một cạnh cầu nếu và chỉ nếu không có bất kì một chu trình nào chứa nó, chúng ta nhận thấy rằng đồ thị G bất kì có thể phân hoạch thành các khối $B_1, B_2, \dots, B_p$ của nó sao cho:

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^p E(B_i) \text{ và } E(B_i) \cap E(B_j) = \emptyset \text{ nếu } i \neq j.$$

Giả sử G là một đồ thị liên thông không tầm thường. Kí hiệu $bc(G)$ là đồ thị có các đỉnh là các khối và các đỉnh khớp của G và các cạnh sẽ nối các đỉnh khớp với các khối: mỗi đỉnh khớp đều được nối với các khối chứa nó. Khi đó, $bc(G)$ được gọi là **đồ thị khối – đỉnh khớp của G** . Hiển nhiên, $bc(G)$ là một cấu trúc cây. Mỗi đỉnh cuối của $bc(G)$ (một khối nào đó của G) sẽ được gọi là một **khối cuối** của G . Nếu G là một đồ thị 2 – liên thông hoặc một đồ thị K_2 (một “cạnh” nào đó) thì nó chỉ có thể chứa duy nhất một khối nào đó; cụ thể là chính nó: nếu không thì chúng ta sẽ có ít nhất hai khối cuối và nhắc lại rằng một khối sẽ là một khối cuối nếu và chỉ nếu nó chỉ chứa chính xác một đỉnh khớp.



Hình ảnh minh họa quá trình xây dựng cây khối – lát cắt $bc(G)$ và đồ thị con B_1 là một khối cuối của đồ thị G .

Kết quả quan trọng nhất về tính liên thông đã được Menger chứng minh vào năm 1927. Nó là dạng tương tự của định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại cho các đồ thị (vô hướng). Nhắc lại rằng hai $x - y$ đường đi là độc lập với nhau nếu chúng chỉ có chung với nhau các đỉnh s và t .

Kết quả 3.2.1. (Menger)

(i) Giả sử s và t là các đỉnh phân biệt không liên hợp nhau của đồ thị G .

Khi đó, số nhỏ nhất các đỉnh cần thiết để tách s ra khỏi t sẽ bằng với số lớn nhất có thể có của các $s - t$ đường đi độc lập.

(ii) Giả sử s và t là các đỉnh phân biệt của đồ thị G .

Khi đó, số nhỏ nhất các đỉnh cần thiết để tách s ra khỏi t sẽ bằng với số lớn nhất có thể có của các $s - t$ đường đi độc lập cạnh.

Chứng minh kết quả 3.2.1.

(i) Bằng cách thay thế mỗi cạnh xy của đồ thị G bởi hai cạnh có hướng $\overrightarrow{xy}$ và $\overleftarrow{xy}$ và gán cho mỗi đỉnh khác với nguồn s và đích t một dung lượng bằng 1, chúng ta dễ dàng suy ra rằng giá trị lớn nhất có thể có của bất kỳ một luồng nào từ s đến t sẽ luôn bằng với giá trị nhỏ nhất có thể có của bất kỳ một lát cắt đỉnh nào tách s ra khỏi t (Kết quả 3.1.4). Từ dạng nguyên của định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại (Kết quả 3.1.2), chúng ta cũng suy ra được rằng sẽ có một luồng cực đại nào đó với giá trị trên mỗi cạnh sẽ bằng 0 hoặc 1. Như vậy, giá trị lớn nhất có thể có của bất kỳ một luồng nào từ s đến t sẽ bằng với số lớn nhất có thể có của các $s - t$ đường đi độc lập. Hiển nhiên, giá trị nhỏ nhất có thể có của bất kỳ một lát cắt đỉnh nào tách s ra khỏi t sẽ bằng với số nhỏ nhất các đỉnh cần thiết để tách s ra khỏi t .

(ii) Bằng cách lập luận tương tự như trong khẳng định (i) và gán cho mỗi cạnh một dung lượng bằng 1 thay vì gán dung lượng bằng 1 cho mỗi đỉnh, chúng ta cũng dễ dàng suy ra được tính đúng đắn của khẳng định (ii). □

Hai phần (i) và (ii) của khẳng định trên lần lượt được gọi là dạng đỉnh và dạng cạnh của định lý Menger. Nhận thấy rằng chúng ta có thể dễ dàng suy ra dạng cạnh từ dạng đỉnh nhưng chiều ngược lại thì không dễ dàng như vậy. Như chúng ta đã đề cập từ trước, do định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại có thể được suy ra từ định lý Menger nên chúng ta sẽ đưa ra một chứng minh khác của dạng đỉnh của định lý Menger chỉ dựa trên phép chứng minh đầu tiên.

Chứng minh thứ hai của dạng đỉnh của định lý Menger.

Kí hiệu k là số nhỏ nhất các đỉnh cần thiết để tách s ra khỏi t . Khi đó, rõ ràng sẽ có tối đa k $s - t$ đường đi độc lập. Hơn nữa, với mỗi chỉ số $k \leq 1$, chúng ta sẽ có k $s - t$ đường đi độc lập.

Giả sử khẳng định là không đúng. Chọn chỉ số $k \geq 2$ nhỏ nhất sao cho khẳng định của chúng ta bị vi phạm và G là một đồ thị vi phạm khẳng định trên (ứng với chỉ số k nhỏ nhất này) với số cạnh nhỏ nhất có thể có. Khi đó, có tối đa $k - 1$ $s - t$ đường đi độc lập và không có bất kỳ một đỉnh x nào được nối với cả hai đỉnh s và t : trường hợp ngược lại, $G - x$ sẽ là một đồ thị vi phạm khẳng định trên ứng với chỉ số $k - 1$, mâu thuẫn với giả thiết về tính tối thiểu của chỉ số k .

Kí hiệu W là một tập gồm k đỉnh nào đó tách s ra khỏi t . Giả sử cả hai đỉnh s và t đều không liên hợp với mọi đỉnh nằm trong W . Kí hiệu G_s là đồ thị nhận được từ G bằng cách thay thế thành phần liên thông của $G - W$ có chứa s bởi một đỉnh đơn s' và nối s' với mọi đỉnh nằm trong W . Do, trong G_s , chúng ta vẫn cần k đỉnh để tách s' ra khỏi t và thành phần liên thông mà chúng ta thu gọn có ít nhất hai đỉnh nên G_s sẽ phải có ít cạnh hơn so với G . Kế tiếp, do G là một đồ thị vi phạm khẳng định với kích thước nhỏ nhất có thể có nên chúng ta sẽ có k $s' - t$ đường đi độc lập trong G_s . Nhận thấy rằng hai đoạn bất kì trong số các đoạn của k đường đi từ t đến W sẽ không thể có bất kì một đỉnh chung nào khác ngoài t . Như vậy, với mỗi $w \in W$, một trong những đường đi này sẽ là một $t - w$ đường đi. Nếu chúng ta thực hiện một thủ tục tương tự cho s thay vì t thì chúng ta sẽ nhận được k đường đi từ s đến W . Hai tập các đường đi này có thể được kết hợp lại với nhau để tạo ra k $s - t$ đường đi độc lập, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của chúng ta. Như vậy, với bất kỳ một tập W gồm k đỉnh nào đó tách s ra khỏi t , sẽ phải có một trong hai đỉnh s hoặc t sẽ liên hợp với tất cả các đỉnh của W .

Giả sử $sx_1x_2 \dots x_l t$ là một $s - t$ đường đi nhỏ nhất nào đó. Khi đó, $l \geq 2$ và chúng ta có thể tìm được một tập W_0 nào đó gồm $k - 1$ đỉnh tách s ra khỏi t trong đồ thị $G - x_1x_2$ (điều này suy ra từ tính tối tiểu của đồ thị G). Hơn nữa, cả $W_1 = \{x_1\} \cup W_0$ và $W_2 = \{x_2\} \cup W_0$ đều là các $k - 1$ tập tách s ra khỏi t . Do t không được nối với x_1 nên s sẽ được nối với tất cả các đỉnh nằm trong W_1 . Tương tự, do s không được nối với x_2 nên t sẽ được nối với tất cả các đỉnh nằm trong W_2 . Điều này mâu thuẫn với giả thiết cho rằng hai đỉnh s và t có ít nhất một đỉnh láng giềng chung: mọi đỉnh nằm trong W_0 đều là một đỉnh láng giềng chung của s và t và $|W_0| = k - 1 \geq 1$. □

Kết quả 3.2.2.

Với mỗi chỉ số $k \geq 2$, một đồ thị là k - liên thông nếu và chỉ nếu nó có ít nhất hai đỉnh và hai đỉnh bất kỳ của nó đều có thể được nối với nhau bởi k đường đi độc lập. Hơn nữa, với mỗi chỉ số $k \geq 2$, một đồ thị là k - liên thông cạnh nếu và chỉ nếu nó có ít nhất hai đỉnh và hai đỉnh bất kỳ của nó đều có thể được nối với nhau bởi k đường đi độc lập cạnh.

Tương ứng với định lí lát cắt cực tiểu - luồng cực đại cho trường hợp nhiều nguồn và nhiều đích, chúng ta sẽ có phiên bản tương tự sau đây của định lí Menger:

“Nếu S và T là hai tập con tùy ý nào đó của G thì số lớn nhất các $S - T$ đường đi phân biệt đỉnh (bao gồm cả các đầu mút) sẽ bằng với $\min\{|W| : W \subset V(G), G - W \text{ không chứa bất kỳ một } S - T \text{ đường đi nào}\}$ ”.

(Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ bổ sung thêm hai đỉnh mới vào G , tạm giả sử là s và t , nối s với tất cả các đỉnh nằm trong S , nối t với tất cả các đỉnh nằm trong T và áp dụng định lí Menger cho các đỉnh s và t trong đồ thị mới này)

3.3. Cặp ghép

Giả sử cho trước một nhóm hữu hạn G và một nhóm con H với chỉ số nhóm m . Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu chúng ta có thể tìm được m phần tử $g_1, g_2, \dots, g_m$ của G sao cho $\{g_1H, g_2H, \dots, g_mH\}$ là một họ các lớp ghép trái và $\{Hg_1, Hg_2, \dots, Hg_m\}$ là một họ các lớp ghép phải?”. Một sự thật thú vị phải kể ra ở đây đó là vấn đề này hóa ra lại là một trường hợp đặc biệt của vấn đề sau đây (vấn đề này thường xuất hiện trong các nhánh khác nhau của toán học hiện đại):

Giả sử cho trước một họ các tập con $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ của một tập X . Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu chúng ta có thể tìm được m phần tử phân biệt của X sao cho mỗi x_i đều là một phần tử của mỗi tập A_i hay không?”. Một tập $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ thỏa mãn các tính chất nêu trên (nghĩa là $x_i \in A_i$ và $x_i \neq x_j$ nếu $i \neq j$) được gọi là một **tập các đại diện phân biệt của họ $\mathcal{A}$** . Họ tập hợp $\mathcal{A}$ có thể được xác định một cách tự nhiên bởi một đồ thị lưỡng phân với các lớp đỉnh $V_1 = \mathcal{A}$ và $V_2 = X$ trong đó đỉnh $A_i \in \mathcal{A}$ sẽ được nối với mọi đỉnh $x \in X$ được chứa trong A_i . Khi đó, một tập các đại diện phân biệt sẽ là một tập gồm m cạnh độc lập (nghĩa là mỗi đỉnh trong V_1 đều liên thuộc với một trong các cạnh này). Chúng ta cũng sẽ nói rằng có một **cặp ghép đầy đủ từ V_1 đến V_2** .

Thông thường, vấn đề này thường được hình thành dưới góc độ một bài toán về dàn xếp hôn nhân:

“Giả sử cho trước m cô gái và n chàng trai. Với những điều kiện nào thì chúng ta có thể gả đi tất cả các cô gái với yêu cầu là chúng ta sẽ không bao giờ mai mối một cô gái cho một chàng trai mà cô ta còn không quen biết?”

Rõ ràng là cả định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại và định lý Menger đều ngầm ngụ ý cho chúng ta điều kiện cần và đủ để tồn tại một cặp ghép đầy đủ. Trên thực tế, do các tính chất đặc biệt của một đồ thị lưỡng phân nên chúng ta sẽ có được một điều kiện cần và đủ đơn giản và dễ chịu hơn sau đây:

Nhận thấy rằng nếu có k cô gái nhưng chỉ quen biết với tối đa $k - 1$ chàng trai thì chúng ta sẽ không thể tìm ra được những cuộc hôn nhân phù hợp cho những cô gái này. Điều này tương đương với việc nếu có một cặp ghép đầy đủ từ V_1 đến V_2 thì, với mọi $S \subset V_1$, chúng ta sẽ có ít nhất $|S|$ đỉnh của V_2 liên hợp với một đỉnh trong S , nghĩa là $|N(S)| \geq |S|$.

Kết quả này vừa là một điều kiện cần mà cũng vừa là một điều đủ và thường được gọi là **định lý Hall**. Kết quả cơ bản này đã được Hall chứng minh vào năm 1935. Nhưng một số dạng tương đương của nó đã được König và Egerváry chứng minh vào năm 1931. Cả hai phiên bản này đều có thể được suy ra từ định lý Menger đã được chứng minh vào năm 1927. Chúng ta sẽ đưa ra ba phép chứng minh khác nhau cho kết quả này. Phép chứng minh đầu tiên được thực hiện dựa trên định lý Menger hoặc định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại. Hai phép chứng minh còn lại sẽ được suy ra từ phép chứng minh đầu tiên.

Kết quả 3.3.1. (Hall – König – Egerváry)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị lưỡng phân G với các tập đỉnh V_1 và V_2 có chứa một cặp ghép đầy đủ từ V_1 đến V_2 là $|N(S)| \geq |S|$ với mọi $S \subset V_1$.

Như chúng ta đã thấy rằng do điều kiện cần của khẳng định trên là hiển nhiên nên chúng ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ của nó là đủ.

Chứng minh thứ nhất của kết quả 3.3.1.

Nhận thấy rằng cả định lý Menger (áp dụng cho các tập V_1 và V_2 như trong phần cuối của **Mục 3.2. Tính liên thông và định lý Menger**) và định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại (áp dụng cho đồ thị có hướng thu được từ G bằng cách định hướng cho mỗi cạnh theo hướng từ V_1 đến V_2 và gán cho mỗi đỉnh một dung lượng bằng 1) đều ngầm ngụ ý nhận định sau:

Nếu G không chứa bất kì một cặp ghép đầy đủ nào từ V_1 đến V_2 thì sẽ có một tập $T_1 \subset V_1$ và một tập $T_2 \subset V_2$ sao cho $|T_1| + |T_2| < |V_1|$ và không có cạnh nào từ $V_1 - T_1$ đến $V_2 - T_2$.

Như vậy, $N(V_1 - T_1) \subset T_2$, nên $|N(V_1 - T_1)| \leq |T_2| < |V_1| - |T_1| = |V_1 - T_1|$.

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của điều kiện đủ. □

Chứng minh thứ hai của kết quả 3.3.1. (Halmos - Vaughn)

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định, chúng ta sẽ áp dụng phương pháp quy nạp toán học theo $m = |V_1|$ - số các cô gái tham gia buổi gặp mặt. Với $m = 1$, tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $m \geq 2$ và khẳng định đã được chứng minh với các giá trị nhỏ hơn của m .

Đầu tiên, giả sử rằng k cô gái bất kì ($1 \leq k < m$) đều biết ít nhất $k + 1$ chàng trai. Khi đó, chúng ta sẽ sắp xếp một cuộc mai mối một cách tùy ý. Các cô gái và chàng trai còn lại cũng thỏa mãn điều kiện nêu trên. Như vậy, $m - 1$ cô gái còn lại cũng có thể được mai mối (điều này suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán).

Kế tiếp, với mỗi chỉ số $1 \leq k \leq m$, giả sử rằng chúng ta có k cô gái nào đó chỉ biết chính xác k chàng trai nào đó. Những cô gái này rõ ràng có thể được mai mối từ giả thiết quy nạp của bài toán. Vấn đề được đặt ra đó là: “Còn những cô gái còn lại thì sao?”. Câu trả lời là chúng ta vẫn có thể mai mối cho họ (một lần nữa từ giả thiết quy nạp của bài toán) nếu như họ vẫn đáp ứng được điều kiện với điều kiện là chúng ta sẽ không tính đến các chàng trai đã được mai mối trước đó. Tuy nhiên, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng điều kiện của bài toán cũng được thỏa mãn: nếu l cô gái sắp được mai mối này biết ít hơn l chàng trai còn lại thì những cô gái này cùng với k cô gái trước đó sẽ biết ít hơn $k + l$ chàng trai. □

Chứng minh thứ ba của kết quả 3.3.1. (Rado)

Kí hiệu G là một đồ thị tối thiểu thỏa mãn điều kiện của bài toán. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chứng minh G có chứa $|V_1|$ cạnh độc lập.

Nhận thấy rằng nếu nhận định trên là không đúng thì G sẽ có chứa hai cạnh nào đó có dạng a_1x, a_2x trong đó $a_1, a_2 \in V_1, a_1 \neq a_2, x \in V_2$. Do việc xóa đi một trong hai cạnh này sẽ làm mất đi hiệu lực của điều kiện nên chúng ta sẽ có các tập $A_1, A_2 \subset V$ sao cho, với mỗi chỉ số $i = 1, 2$, $|N(A_i)| = |A_i|$ và a_i là đỉnh duy nhất của A_i liên hợp với x .

Như vậy, $|N(A_1) \cap N(A_2)| \geq |N(A_1 - \{a_1\}) \cap N(A_2 - \{a_2\})| + 1 \geq |N(A_1 \cap A_2)| + 1 \geq |A_1 \cap A_2| + 1$.

Điều này dẫn chúng ta đến mâu thuẫn sau đây:

$$\begin{aligned} |N(A_1 \cup A_2)| &= |N(A_1) \cup N(A_2)| \\ &= |N(A_1)| + |N(A_2)| - |N(A_1) \cap N(A_2)| \\ &\leq |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| - 1 \\ &= |A_1 \cup A_2| - 1. \end{aligned}$$

□

Nhận thấy rằng do một đồ thị lưỡng phân regular bất kì sẽ thỏa mãn các điều kiện của định lí Hall nên nó sẽ có một cặp ghép đầy đủ nào đó. Điều này ngụ ý với chúng ta rằng thực sự có thể tìm được những phần tử $g_1, g_2, \dots, g_m$ của nhóm G theo yêu cầu như ở phần đầu bài viết.

Chúng ta sẽ phát biểu lại định lí Hall dưới dạng ngôn ngữ của tập các đại diện phân biệt:

Kết quả 3.3.2.

Một họ các tập hợp $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ sẽ có một tập các đại diện phân biệt nếu và chỉ nếu

$$|\bigcup_{i \in F} A_i| \geq |F|, \text{ với mọi } F \subset \{1, 2, \dots, m\}.$$

Trong bốn kết quả tiếp theo, chúng ta sẽ trình bày hai dạng mở rộng tự nhiên của định lí Hall. Hai kết quả đầu tiên trong số những kết quả này chính là các dạng khuyết của định lí Hall.

Giả sử rằng điều kiện Hall không được thỏa mãn. Một số vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể mai mối “tốt nhất” cho tất cả các cô gái trong trường hợp này? Khi nào thì chúng ta có thể mai mối cho tất cả các cô gái này ngoại trừ d cô gái nào đó?”. Hiển nhiên, nếu bất kỳ k cô gái nào trong số họ đều biết nhiều hơn hoặc bằng $k - d$ chàng trai thì chúng ta sẽ có thể mai mối cho tất cả các cô gái này ngoại trừ d cô gái nào đó. Điều kiện cần này một lần nữa rõ ràng cũng là một điều kiện đủ của bài toán:

Kết quả 3.3.3.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = G(m, n)$ với các tập đỉnh V_1, V_2 thỏa mãn điều kiện sau:

$$|N(S)| \geq |S| - d, \text{ với mọi } S \subset V_1.$$

Khi đó, G sẽ có chứa $m - d$ cạnh độc lập.

Chứng minh kết quả 3.3.3.

Kí hiệu G' là đồ thị nhận được từ G bằng cách bổ sung thêm d đỉnh mới vào V_2 và nối mỗi một đỉnh trong số chúng với mỗi đỉnh trong V_1 . Khi đó, đồ thị G' mới này sẽ thỏa mãn các điều kiện cần thiết để có một cặp ghép đầy đủ. Hơn nữa, chúng ta sẽ có ít nhất $m - d$ cạnh trong số các cạnh của một cặp ghép đầy đủ của G' cũng sẽ thuộc G . □

Kế tiếp, chúng ta sẽ giới thiệu một dạng khuyết khác của định lí Hall. Nếu một cạnh e liên thuộc với một đỉnh x thì chúng ta sẽ nói rằng **e phủ x** và **x phủ e** . Hơn nữa, một đỉnh luôn được cho là phủ chính nó và nó cũng sẽ không phủ thêm bất kì một đỉnh nào khác nữa.

Kết quả 3.3.4.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = G(m, n)$. Kí hiệu h là số tối đại các cạnh độc lập, i là số tối đại các đỉnh độc lập, j là số tối tiểu các đỉnh và các cạnh cần thiết để phủ hết tất cả các đỉnh.

Khi đó, $i = j = m + n - h$.

Chứng minh kết quả 3.3.4.

Kí hiệu $E'UV'$ là một tập gồm j cạnh và đỉnh phủ hết tất cả các đỉnh với $E' \subset E$ và $V' \subset V$. Nhận thấy rằng nếu $e, f \in E'$ có chung một đỉnh nào đó thì, trong phủ $E'UV'$, chúng ta có thể thay thế f bởi các đầu mút khác của nó. Như vậy, chúng ta có thể giả định rằng E' chỉ bao gồm các cạnh độc lập. Điều này chỉ ra rằng $j = m + n - h$.

Ngoài ra, $m + n - i \geq h$ (điều này suy ra từ việc nếu I là một tập gồm i đỉnh độc lập trong bất kỳ một đồ thị nào thì mọi cạnh của nó đều sẽ liên thuộc với ít nhất một đỉnh nào đó không thuộc I).

Cuối cùng, kí hiệu $S \subset V_1$ là một tập các đỉnh sao cho $|N(S)| = |S| - (m - h)$ (điều này được đảm bảo bởi Kết quả 3.3.3). Khi đó, SUT (với $T = V_2 - N(S)$) sẽ là một tập gồm $|S| + n - |N(S)| = m + n - h$ đỉnh độc lập. Điều này chỉ ra rằng $i \geq m + n - h$. $\square$

Kết quả mở rộng tiếp theo sẽ liên quan đến việc mai mối cho các chàng trai ở một đất nước theo chủ nghĩa đa thê, nghĩa là chàng trai thứ i dự định sẽ kết hôn với d_i cô gái khác.

Kết quả 3.3.5.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân G với các lớp đỉnh $V_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ và $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Khi đó, G sẽ có chứa một đồ thị con H sao cho $d_H(x_i) = d_i$ và $0 \leq d_H(y_j) \leq 1$ nếu và chỉ nếu

$$|N(S)| \geq \sum_{x_i \in S} d_i, \text{ với mọi } S \subset V_1.$$

Chứng minh kết quả 3.3.5.

Bằng cách thay mỗi đỉnh x_i bởi d_i đỉnh được nối với mọi đỉnh trong $N(x_i)$, chúng ta sẽ thu được một đồ thị lưỡng phân G' mới. Khi đó, G sẽ có chứa một đồ thị con H như vậy nếu và chỉ nếu đồ thị G' có một cặp ghép đầy đủ từ lớp đỉnh V'_1 mới đến V_2 . Tính đúng đắn của Kết quả 3.3.5) được suy ra trực tiếp từ Kết quả 3.3.6). $\square$

Chúng ta có lẽ cũng nhận thức được một thực tế rằng những kết quả này vẫn chỉ là những trường hợp đặc biệt của định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại. Trên thực tế, phiên bản ở dạng đồ thị lưỡng phân của định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại còn tổng quát hơn rất nhiều so với các kết quả kể ở trên:

Kết quả 3.3.6.

Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = G(m, n)$ với các lớp đỉnh $V_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ và $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$. Với mọi $S \subset V_1$ và $1 \leq j \leq n$, kí hiệu S_j là số các cạnh từ y_j đến S .

Khi đó, với mọi số tự nhiên $d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_n \geq 0$ và $d \geq 0$, G sẽ có chứa một đồ thị con H thỏa mãn:

$$\|H\| \geq \sum_{i=1}^m d_i - d,$$

$$d_H(x_i) \leq d_i, 1 \leq i \leq m,$$

$$d_H(y_j) \leq e_j, 1 \leq j \leq n,$$

nếu và chỉ nếu, với mọi $S \subset V_1$, chúng ta đều có $\sum_{x_i \in S} d_i \leq \sum_{j=1}^n \min\{S_j, e_j\} + d$.

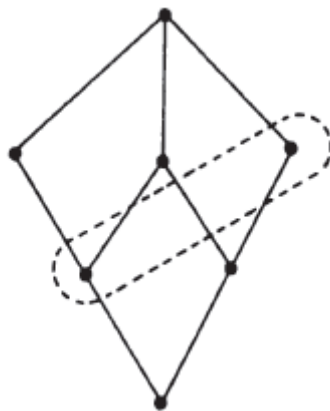
Chứng minh kết quả 3.3.6.

Bằng cách định hướng mỗi cạnh theo chiều từ V_1 đến V_2 , chúng ta sẽ biến G thành một đồ thị có hướng $\vec{G}$. Kế tiếp, chúng ta sẽ gán cho mỗi cạnh một dung lượng bằng 1, gán cho mỗi đỉnh x_i một dung lượng bằng d_i , gán cho mỗi đỉnh y_j một dung lượng bằng e_j . Khi đó, G sẽ có chứa một đồ thị con H thỏa mãn các yêu cầu nêu ở trên nếu và chỉ nếu $\vec{G}$ sẽ có chứa một luồng từ V_1 đến V_2 với giá trị lớn hơn hoặc bằng $\sum_{i=1}^m d_i - d$. Từ định lý lát cắt cực tiểu – luồng cực đại, điều này sẽ xảy ra nếu và chỉ nếu mọi lát cắt của nó đều có dung lượng lớn hơn hoặc bằng $\sum_{i=1}^m d_i - d$. Nhận thấy rằng mọi lát cắt cực tiểu của $\vec{G}$ đều có dạng

$TUUUE(V_1 - T, V_2 - U)$ trong đó $T \subset V_1$ và $U \subset V_2$. Giả sử cho trước một tập T , dung lượng của bất kì một lát cắt nào như vậy là tối tiểu với điều kiện đi kèm là đỉnh y_j sẽ thuộc U nếu và chỉ nếu dung lượng của nó là nhỏ hơn số các cạnh từ $S = V_1 - T$ đến y_j . Với cách lựa chọn U như vậy, dung lượng của lát cắt này sẽ bằng $\sum_{x_i \in T} d_i + \sum_{j=1}^n \min\{S_j, e_j\}$. Điều kiện này chỉ ra rằng mọi lát cắt của nó đều có dung lượng lớn hơn hoặc bằng $\sum_{i=1}^m d_i - d$ rõ ràng chính là điều kiện cần tìm. $\square$

Chúng ta cũng có thể kiểm tra được rằng phép chứng minh thứ hai của Kết quả 3.3.1) có thể được viết lại để đưa ra một chứng minh cho dạng chuẩn của kết quả này (trường hợp ứng với $d = 0$) và dạng khuyết (trường hợp ứng với $d \geq 0$) có thể được suy ra từ nó tương tự như cái cách Kết quả 3.3.4) có thể được suy ra Kết quả 3.3.1).

Để kết thúc lại phần này của bài viết, chúng ta sẽ giới thiệu dạng mở rộng khác của định lý Hall. Kết quả này liên quan trực tiếp đến các tập sắp thứ tự bộ phận và thường được biết đến với tên gọi là định lý Dilworth. Một **quan hệ thứ tự bộ phận** < được định nghĩa là một quan hệ bắc cầu và phản đối xứng xác định trên một tập các cặp được sắp thứ tự nào đó. Như vậy, nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$ nhưng cả $x < y$ và $y < x$ không thể đồng thời xảy ra. Một tập được trang bị một quan hệ thứ tự bộ phận sẽ được gọi là một **tập sắp thứ tự bộ phận**. Quan hệ $x \leq y$ chỉ ra một thực tế là $x = y$ hoặc $x < y$. Một tập con C của một tập sắp thứ tự bộ phận P được gọi là một **xích** nếu, với mọi $x, y \in C$, $x \leq y$ hoặc $y < x$. Một tập con $A \subset P$ được gọi là một **đối xích** nếu $x < y$ kéo theo $\{x, y\} \not\subset A$.



Hình ảnh minh họa một tập sắp thứ tự bộ phận và một đối xích tối đại của nó.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Cần tối thiểu bao nhiêu xích để chúng ta có thể phân tích một tập sắp thứ tự bộ phận cho trước?”. Do không thể có bất kỳ hai phần tử nào của cùng một đối xích có thể nằm trong cùng một xích nên, để phân tích một tập sắp thứ tự bộ phận cho trước thành các xích, chúng ta sẽ cần sử dụng số các xích tối thiểu phải lớn hơn hoặc bằng kích thước tối đại có thể có của một đối xích. Một lần nữa, điều kiện cần hiển nhiên này trên thực tế cũng là một điều kiện đủ của bài toán.

Kết quả 3.3.7. (Dilworth)

Nếu mọi đối xích nằm trong một tập sắp thứ tự bộ phận (hữu hạn) P đều chứa tối đa không quá m phần tử thì P sẽ là hợp của m xích.

Chứng minh kết quả 3.3.7.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|P|$. Nếu $P = \emptyset$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta giả sử rằng $|P| > 0$ và tính đúng đắn của khẳng định đã được kiểm chứng với mọi tập hợp có ít phần tử hơn.

Giả sử C là một xích tối đại nằm trong P , nghĩa là nếu $x \notin C$ thì $C \cup \{x\}$ sẽ không còn là một xích nữa. Nếu không có bất kỳ một đối xích nào của $P - C$ có m phần tử thì tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên (điều này suy ra trực tiếp từ giả thiết quy nạp của bài toán). Như vậy, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $P - C$ có chứa một đối xích $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Kí hiệu $S^- = \{x \in P: x \leq a_i \text{ với mọi chỉ số } i\}$ là **lower shadow của A** ,

$S^+ = \{x \in P: x \geq a_i \text{ với mọi chỉ số } i\}$ là **upper shadow của A** .

Khi đó, P sẽ là hợp của hai shadow này: trường hợp ngược lại, A có thể được mở rộng thành một đối xích mới với $m + 1$ phần tử. Hơn nữa, P cũng không thể trùng với bất kỳ một shadow nào trong số hai shadow này (điều này suy ra từ việc phần tử tối đại của C không nằm trong S^- và phần tử tối tiểu của C cũng không nằm trong S^+).

Từ giả thiết quy nạp toán học của bài toán, chúng ta dễ dàng nhận thấy cả hai shadow này đều có thể được phân tích thành m xích, nghĩa là:

$$S^- = \bigcup_{i=1}^m C_i^- \text{ và } S^+ = \bigcup_{i=1}^m C_i^+.$$

Nhận thấy rằng do các a_i khác nhau sẽ nằm trong các xích khác nhau nên chúng ta có thể giả sử rằng $a_i \in C_i^-$ và $a_i \in C_i^+$.

Phép chứng minh của chúng ta sẽ hoàn tất nếu chúng ta chỉ ra được rằng a_i là phần tử tối đại của C_i^- và cũng là phần tử tối tiểu của C_i^+ (điều này suy ra từ việc nếu a_i là phần tử tối đại của C_i^- và cũng là phần tử tối tiểu của C_i^+ thì chúng có thể được xâu chuỗi lại với nhau để tạo ra một xích C_i duy nhất, nghĩa là $P = \bigcup_{i=1}^m C_i$).

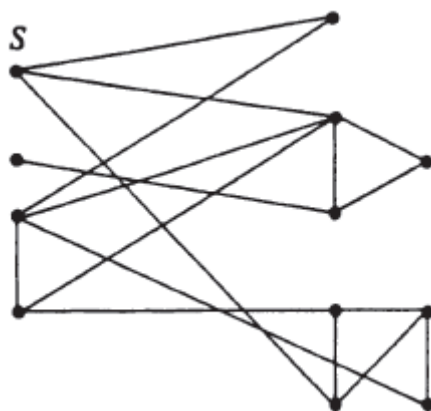
Giả sử a_i không phải là phần tử tối đại của C_i^- , nghĩa là $a_i < x$ với một phần tử $x \in C_i^-$ nào đó. Do x là một phần tử nằm trong lower shadow của A nên sẽ tồn tại một phần tử $a_j \in A$ với $x \leq a_j$. Điều này dẫn chúng ta đi đến mâu thuẫn $a_i < a_j$. □

Trên thực tế, định lý Dilworth đúng với tất cả các tập sắp thứ tự bộ phận: điều này khá đơn giản để có thể chứng minh và chúng ta có thể tham khảo thử cách chứng minh nêu trong bài viết “**Định lý Dilworth và ứng dụng**”.

3.4. Định lý Tutte cho các 1 – nhân tử

Một **nhân tử** của một đồ thị cho trước được định nghĩa là một đồ thị con khung bất kỳ của nó: một đồ thị con bất kỳ có tập đỉnh trùng với tập đỉnh của đồ thị cho trước. Nếu mọi đỉnh của một nhân tử đều có bậc r thì chúng ta sẽ gọi nó là một r – **nhân tử**. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể mô tả các đặc trưng của các đồ thị có chứa một 1 – nhân tử?”. Nhận thấy rằng nếu G có chứa một

1 – nhân tử H và chúng ta xóa đi một tập S gồm các đỉnh nào đó của G thì, trong một thành phần liên thông C bất kỳ của $G - S$, chúng ta sẽ tìm được một số chẵn các đỉnh nằm trên các cạnh của H được chứa trong C và các đỉnh khác của C nằm trên các cạnh của H sẽ nối một đỉnh của C với một đỉnh nào đó của S . Đặc biệt, với mọi thành phần lẻ C của $G - S$ (nghĩa là một thành phần liên thông với số các đỉnh là một số lẻ), chúng ta sẽ tìm được một cạnh của H nối một đỉnh của C với một đỉnh của S . Do các cạnh của H là độc lập nên điều này với chúng ta rằng đồ thị $G - S$ sẽ có nhiều nhất $|S|$ thành phần liên thông lẻ: mỗi thành phần liên thông sẽ ứng với một đỉnh trong S .



Hình ảnh minh họa một đồ thị G có chứa một 1 – nhân tử S :

$|S| = 4$ và $G - S$ có hai thành phần liên thông lẻ.

Điều kiện cần mà chúng ta vừa tìm thấy là khá tầm thường nhưng nó cũng là một điều kiện đủ. Kết quả sâu sắc và đáng ngạc nhiên này đã được nhà toán học Tutte chứng minh lần đầu tiên vào năm 1947. Kí hiệu $q(H)$ là số các thành phần liên thông lẻ của đồ thị H , nghĩa là số các thành phần liên thông có số đỉnh lẻ của H .

Kết quả 3.4.1. (Tutte)

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị G có chứa một 1 – nhân tử là $q(G - S) \leq |S|$ với mọi $S \subset V(G)$.

Chứng minh kết quả 3.4.1.

Dễ dàng nhận thấy rằng điều kiện cần của khẳng định trên là hiển nhiên. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của điều kiện đủ bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số $|G|$. Với $|G| = 0$, tính đúng đắn của điều kiện đủ là hiển nhiên. Giả sử G là một đồ thị với số đỉnh nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $q(G - S) \leq$

$|S|$ với mọi $S \subset V(G)$ và giả sử rằng khẳng định của chúng ta đã được chứng minh cho mọi đồ thị có bậc nhỏ hơn $|G|$.

Giả sử $S_0 \subset V(G)$ là một tập không rỗng nào đó thỏa mãn điều kiện Tutte của đồ thị G . Kí hiệu $C_1, C_2, \dots, C_m$ ($m = |S_0| \geq 1$) là các thành phần liên thông lẻ của $G - S_0$ và $D_1, D_2, \dots, D_k$ là các thành phần liên thông chẵn của $G - S_0$. Nhận thấy rằng nếu khẳng định là đúng và G có chứa một 1 – nhân tử F thì, với mỗi C_i , sẽ có ít nhất một cạnh của F nối một đỉnh của C_i với một đỉnh trong S_0 . Do $m = |S_0|$ nên, với mỗi C_i , sẽ có chính xác một cạnh như vậy, chúng ta tạm giả sử là $c_i s_i, c_i \in C_i, s_i \in S_0$. Mỗi $C_i - c_i$ đều có chứa một 1 – nhân tử (một đồ thị con của F) và mỗi D_j cũng có chứa một 1 – nhân tử (một đồ thị con của F). Cuối cùng, các cạnh $s_1 c_1, s_2 c_2, \dots, s_m c_m$ này tạo thành một cặp ghép đầy đủ từ S_0 đến $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$.

Phép chứng minh này dựa trên một thực tế là chúng ta có thể tìm được một tập S_0 thỏa mãn tất cả các thuộc tính được mô tả ở trên. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể tìm được một tập hợp S_0 như vậy?”. Giả sử S_0 là một tập không rỗng cực đại của $V(G)$ thỏa mãn điều kiện Tutte. Với $S = \emptyset$, điều kiện Tutte ngụ ý rằng G sẽ có số đỉnh chẵn. Nếu s là một đỉnh bất kì của G thì $G - \{s\}$ sẽ có số đỉnh lẻ, nghĩa là nó sẽ phải có ít nhất một thành phần liên thông lẻ nào đó. Do điều kiện Tutte được thỏa mãn nên $G - \{s\}$ sẽ chỉ có đúng một thành phần liên thông lẻ. Như vậy, với mọi tập $S = \{s\}$, chúng ta sẽ luôn có đẳng thức $q(G - S) = |S|$. Điều này hoàn chỉnh phép chứng minh về tồn tại của tập S_0 .

Như trong quá trình phân tích trước đây, kí hiệu $C_1, C_2, \dots, C_m$ ($m = |S_0|$) là các thành phần liên thông lẻ và $D_1, D_2, \dots, D_k$ là các thành phần liên thông chẵn của $G - S_0$.

(i) Mọi D_j đều sẽ có chứa một 1 – nhân tử nào đó.

Thật vậy, nếu $S \subset V(D_j)$ thì $q(G - S_0) + q(D_j - S) = q(G - S_0 \cup S) \leq |S_0 \cup S| = |S_0| + |S|$, nghĩa là

$$q(D_j - S) \leq |S|.$$

Như vậy, từ giả thiết quy nạp của bài toán, D_j sẽ có chứa ít nhất một 1 – nhân tử nào đó.

(ii) Nếu $c \in C_i$ thì $C_i - c$ sẽ có chứa một 1 – nhân tử nào đó.

Giả sử khẳng định nêu trên là sai. Khi đó, từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta sẽ tìm được một tập con S của $V(C_i) - \{c\}$ sao cho $q(C_i - \{c\} \cup S) > |S|$.

Do $q(C_i - \{c\} \cup S) + |S \cup \{c\}| \equiv |C_i| \equiv 1 \pmod{2}$ nên điều này ngụ ý rằng $q(C_i - \{c\} \cup S) \geq |S| + 2$.

Như vậy,

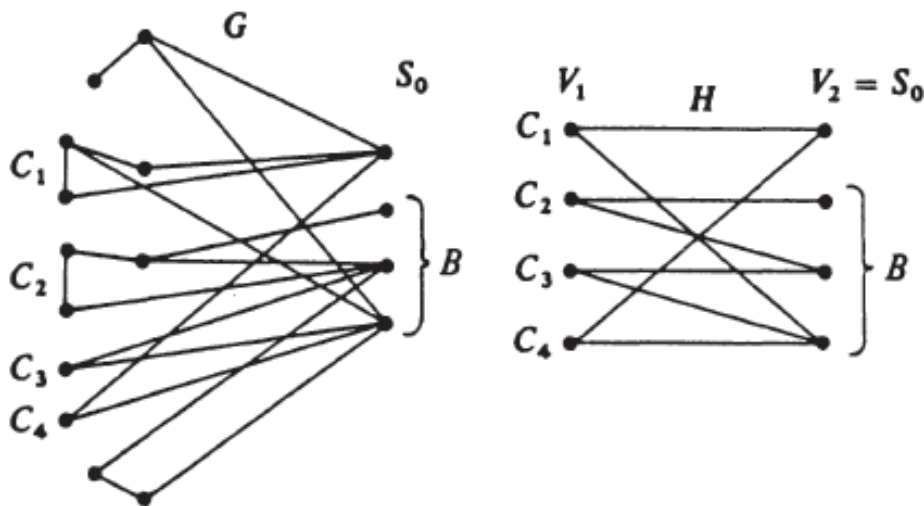
$$\begin{aligned} |S_0 \cup \{c\} \cup S| &= |S_0| + 1 + |S| \geq q(G - S_0 \cup \{c\} \cup S) \\ &= q(G - S_0) - 1 + q(C_i - \{c\} \cup S) \\ &\geq |S_0| + 1 + |S|, \end{aligned}$$

nghĩa là, trong điều kiện Tutte, chúng ta cũng sẽ có đẳng thức xảy ra đối với tập $S_0 \cup \{c\} \cup S$. Điều này mâu thuẫn với tính tối đại của tập S_0 .

(iii) G có chứa m cạnh độc lập có dạng $s_i c_i, s_i \in S_0$ và $c_i \in C_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Để chứng minh tính đúng đắn của nhận định trên, chúng ta hãy xem xét đồ thị lưỡng phân $H = G(m, n)$ với các lớp đỉnh $V_1 = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ và $V_2 = S_0$ trong đó C_i được nối với một đỉnh $s \in S_0$ nếu và chỉ nếu G có chứa một cạnh từ s đến C_i . Nhận thấy rằng khẳng định nêu ở trên cho G là đúng nếu và chỉ nếu H có chứa một 1 – nhân tử nào đó, nghĩa là H sẽ có chứa một cặp ghép từ V_1 đến V_2 . May mắn thay, chúng ta có công cụ để kiểm tra tính đúng đắn của điều này: định lí Hall.

Giả sử cho trước một tập $A \subset V_1$, kí hiệu $B = N_H(A) \subset V_2$. Khi đó, điều kiện Tutte ngụ ý với chúng ta rằng $|A| \leq q(G - B) \leq |B|$. Như vậy, đồ thị H sẽ thỏa mãn điều kiện Hall nên nó cũng sẽ có chứa một 1 – nhân tử nào đó.



Hình ảnh minh họa phép xây dựng đồ thị H từ G . Tập $A = \{C_2, C_3\}$ xác định tập $B \subset S_0$ theo quy tắc $B = N_H(A)$.

Để hoàn chỉnh phép chứng minh, chúng ta chỉ cần tổng hợp các khẳng định (i), (ii), (iii): Đầu tiên, chúng ta bắt đầu với m cạnh độc lập $s_i c_i, s_i \in S_0, c_i \in C_i$. Kế tiếp, chúng ta bổ sung thêm vào tập các cạnh này một 1 – nhân tử của mỗi $C_i - c_i (1 \leq i \leq m)$ và một 1 – nhân tử của mỗi $D_j (1 \leq j \leq k)$. Sau cùng, chúng ta sẽ thu được một 1 – nhân tử của G . □

Một lần nữa rất dễ dàng, chúng ta có được dạng khuyết sau đây của khẳng định nêu trên:

Kết quả 3.4.2.

Một đồ thị G có chứa một tập các cạnh độc lập phủ hầu hết tất cả các đỉnh ngoại trừ tối đa d đỉnh nào đó nếu và chỉ nếu $q(G - S) \leq |S| + d$, với mọi $S \subset V(G)$.

Chứng minh kết quả 3.4.2.

Do số các đỉnh không được phủ bởi một tập các cạnh độc lập luôn đồng dư với $|G| \pmod 2$ nên chúng ta có thể giả định rằng $d \equiv |G| \pmod 2$.

Kí hiệu $H = G + K_d$, nghĩa là đồ thị H thu được từ G bằng cách bổ sung thêm vào nó một tập W gồm d đỉnh nào đó và nối mọi đỉnh mới bổ sung thêm này với mọi đỉnh khác (cũ và mới). Khi đó, G có chứa một tập các cạnh độc lập phủ hầu hết tất cả các đỉnh ngoại trừ tối đa d đỉnh nào đó nếu và chỉ nếu H có chứa một 1 – nhân tử. Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu đồ thị H này có thỏa mãn điều kiện Tutte hay

không?”. Nhận thấy rằng nếu $\emptyset \neq S' \subset V(H)$ và $W - S' \neq \emptyset$ thì $H - S'$ là một đồ thị liên thông. Như vậy, $q(H - S') \leq 1$. Khi đó, điều kiện Tutte được thỏa mãn: nếu $W \subset S'$ thì, bằng cách đặt $S = S' - W$, chúng ta sẽ có $q(H - S') = q(G - \{S' \setminus W\}) = q(G - S)$, nghĩa là điều kiện Tutte tương đương với việc

$$q(G - S) \leq |S'| = |S| + d. \quad \square$$

Định lý Tutte có vô số các hệ quả tuyệt vời: chẳng hạn, nó ngụ ý rằng mọi khối lập phương 2 – liên thông cạnh đều có chứa một 1 – nhân tử (Petersen).

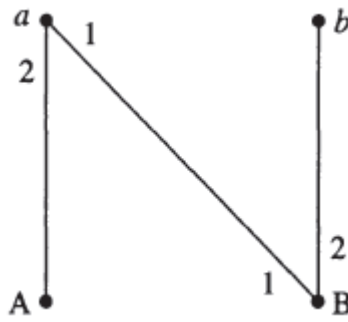
3.5. Cặp ghép ổn định

Chúng ta hãy quay trở lại vấn đề tìm kiếm các cặp ghép trong các đồ thị lưỡng phân. Lần này chúng ta sẽ nghiên cứu các cặp ghép ổn định, nghĩa là các cặp ghép thỏa mãn các điều kiện nhất định nào đó. Những cặp ghép này được Gale và Shapley nghiên cứu lần đầu tiên vào năm 1961 và mục đích chính của chúng ta là chứng minh các kết quả cơ bản về chúng. Trước khi chuyển sang các đồ thị đầy đủ đã được nghiên cứu bởi Gale và Shapley, chúng ta hãy xem xét các đồ thị lưỡng phân tổng quát.

Như trong trường hợp của định lý Hall, thông thường chúng ta thường xây dựng các điều kiện và kết quả của bài toán sắp xếp hôn nhân giữa n chàng trai và m cô gái. Giả sử cho trước một đồ thị lưỡng phân $G = G(n, m)$ với phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2) tương ứng trong đó $V_1 = \{a, b, \dots\}$ là tập các chàng trai còn $V_2 = \{A, B, \dots\}$ là tập các cô gái. Hiện tại, chúng ta sẽ giả định rằng $n = m$, nghĩa là chúng ta sẽ có cùng số các chàng trai và số các cô gái. Như trước đây, một cạnh aA có nghĩa là chàng trai a có quen biết với cô gái A . Giả sử rằng mỗi chàng trai đều có một dãy sắp thứ tự ưu tiên trên tập các cô gái mà anh ta quen biết và mỗi cô gái cũng đều có một dãy sắp thứ tự ưu tiên trên tập các chàng trai mà cô ấy quen biết. Chúng ta cũng giả định rằng những dãy sắp thứ tự ưu tiên này là tuyến tính và không có thêm bất kì hạn chế nào khác đối với chúng. Với mọi dãy sắp thứ tự ưu tiên tùy ý, một **cặp ghép ổn định** trong G được định nghĩa là một tập M gồm các cạnh độc lập của G sao cho $aB \in E(G) - M$ thì $aA \in M$ đối với một cô gái A nào đó ưu tiên hơn B bởi a hoặc $bB \in M$ đối với một chàng trai b nào đó ưu tiên hơn a bởi B . Như vậy, nếu a không kết hôn với B thì a sẽ kết hôn với một cô gái mà anh ta thích hơn B hoặc B sẽ kết hôn với một chàng trai nào đó mà cô ấy thích hơn a . Ngược lại, a và B sẽ kết hôn với nhau (có lẽ ly hôn với người đang phối ngẫu nhiên hiện tại của họ) vì lợi ích của cả hai. Điều này làm cho giả định có vẻ hơi phi thực tế cho rằng việc kết hôn với một người quen biết sẽ luôn tốt hơn là sống độc thân nghe có vẻ hợp lý hơn.

Nhận thấy rằng một cặp ghép ổn định không nhất thiết phải đầy đủ. Tuy nhiên, rõ ràng là mọi cặp ghép ổn định đều là tối đại trong G , nghĩa là chúng không thể được phóng to thành một cặp ghép lớn hơn. Thật vậy, giả sử $M \cup \{aB\}$ là một cặp ghép nào đó trong G với một cạnh $aB \in E(G) - M$ nào đó. Khi đó, dưới sự sắp đặt hôn nhân của cặp ghép M , chàng trai a là độc thân nên anh ta chắc chắn không kết hôn với cô gái nào mà anh ta thích hơn B và cô gái B cũng độc thân nên cô ấy không kết hôn với chàng trai mà cô ấy thích hơn a . Điều này mâu thuẫn với thực tế M là một cặp ghép ổn định.

Mặc dù mọi cặp ghép ổn định đều tối đại nhưng nó không nhất thiết phải là một cặp ghép tối đại, nghĩa là nó không nhất thiết phải có kích thước tối đại. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy sau đây, tất cả các cặp ghép ổn định đều có cùng một kích thước.



Hình ảnh minh họa một cặp ghép ổn định nhưng không có kích thước tối đại:

a thích B hơn A , B thích a hơn b , $M = \{aB\}$ là cặp ghép ổn định duy nhất.

Do điều kiện ổn định của một cặp ghép là khá phức tạp nên a tiên nghiệm không rõ ràng rằng luôn luôn có một cặp ghép ổn định. Trên thực tế, chúng ta sẽ chứng minh rằng không chỉ có duy nhất một cặp ghép ổn định nhưng chỉ có duy nhất một cặp ghép ổn định là tối ưu đối với mỗi chàng trai. Do sự tồn tại của một cặp ghép ổn định tối ưu theo thuật toán nêu dưới đây sẽ được sử dụng để xây dựng một cặp ghép ổn định nên, để bắt đầu, chúng ta sẽ không bận tâm đến tính tối ưu của cặp ghép ổn định. Một điều thật kỳ lạ ở đây đó là thuật toán này đơn giản là các quy tắc của các phép xã giao cổ điển: mọi chàng trai đều chọn cô gái yêu thích nhất của mình và mọi cô gái đều từ chối tất cả các lời cầu hôn ngoại trừ lời cầu hôn đến từ chàng trai mà cô ấy yêu thích nhất. Điều này sẽ được tiếp diễn cho đến khi không có thay đổi nào khác xảy ra. Khi đó, mọi chàng trai đều kết hôn với cô gái mà anh ta cầu hôn lần cuối và mọi cô gái đều kết hôn với chàng trai duy nhất mà cô ấy chưa từ chối lời cầu hôn.

Như vậy, thuật toán sẽ vận hành như sau: các cô gái sẽ nhận được các lời cầu hôn từ các chàng trai; vào cuối quá trình, cô ấy sẽ kết hôn với một chàng trai nào đó; hơn nữa, cô ấy sẽ chỉ từ chối lời cầu hôn của một chàng trai chỉ khi cô ấy đã tìm thấy một chàng trai nào đó khác mà cô ấy cảm thấy tốt hơn. Ngoài ra, mọi chàng trai đều sẽ kết hôn trừ khi trong thuật toán anh ấy bị từ chối bởi mọi cô gái. Cuối cùng, khi thuật toán ngày càng phát triển, mọi cô gái ngày càng có được những lời cầu hôn từ những chàng trai tốt hơn và mọi chàng trai sẽ ngày càng phải cam chịu kết hôn với những cô gái ngày càng ít hấp dẫn hơn. Với nhận định này, chúng ta sẽ tiến gần hơn đến việc chứng minh tính đúng đắn của định lý cặp ghép ổn định của Gale và Shapley.

Kết quả 3.5.1. (Gale - Shapley)

Với mọi dãy sắp thứ tự ưu tiên xác định trên một đồ thị lưỡng phân cho trước, chúng ta luôn tìm được một cặp ghép ổn định.

Chứng minh kết quả 3.5.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ mô tả một dạng biến thể của thuật toán mà chúng ta vừa đề cập ở trên, trong đó tất cả các chàng trai và tất cả các cô gái sẽ đồng thời hành động trong từng vòng. Trong mỗi vòng lẻ $(1, 3, \dots)$, mỗi chàng trai đều sẽ đề nghị kết hôn với cô gái hấp dẫn nhất trong số những cô gái mà anh ta quen biết và chưa từ chối anh ta; trong mỗi vòng chẵn $(2, 4, \dots)$, mỗi một cô gái trong số m cô gái này đều sẽ từ chối tất cả các lời cầu hôn ngoại trừ lời cầu hôn đến từ chàng trai hấp dẫn nhất của cô ấy. Quá trình này sẽ kết thúc khi không có bất kì cô gái nào từ chối lời cầu hôn đến từ các chàng trai: mọi cô gái sẽ kết hôn với chàng trai ngỏ lời cầu hôn (duy nhất) với cô ấy, nếu cô ấy có.

Thuật toán này sẽ kết thúc sau tối đa $2nm$ vòng, bởi vì có tối đa $m(n - 1)$ lời cầu hôn bị từ chối.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng thuật toán này thật sự sẽ tạo ra một cặp ghép ổn định. Nó rõ ràng sẽ tạo ra một cặp ghép (bộ phận) M (điều này suy ra từ việc, ở mọi giai đoạn, mỗi chàng trai đều sẽ cầu hôn với nhiều nhất một cô gái và mỗi cô gái đều sẽ từ chối tất cả mọi lời cầu hôn ngoại trừ nhiều nhất một chàng trai nào đó). Để chứng minh M là một cặp ghép ổn định, giả sử $aB \in E(G) - M$. Khi đó, a sẽ chưa bao giờ cầu hôn B hoặc a đã bị B từ chối tại một giai đoạn nào đó trong thuật toán. Trong trường hợp thứ nhất, a sẽ kết hôn với một cô gái nào đó mà anh ta thích hơn B . Trong trường hợp thứ hai, B đã từ chối a để nhận lời cầu hôn từ một chàng trai mà cô ấy thích hơn a ; nghĩa là, sau khi kết thúc thuật toán, B sẽ kết hôn với một người chồng nào đó mà cô ấy thích hơn chàng trai a này. $\square$

Thuật toán mà chúng ta vừa mô tả ở trên có thể chạy ở nhiều tốc độ khác nhau: chúng ta không nhất thiết phải có hành động thống nhất trong từng vòng. Mọi chàng trai và mọi cô gái đều có thể hành động độc lập với nhau: mỗi chàng trai sẽ tiếp tục cầu hôn với cô gái tốt nhất (theo ước tính của anh ta) trong số những cô gái vẫn chưa từ chối anh ta và mỗi cô gái sẽ tối đa hóa sự hài lòng của cô ấy bằng cách chỉ sẵn sàng chấp nhận lời cầu hôn từ chàng trai tốt nhất (theo ước tính của cô ấy) trong số những chàng trai đã từng cầu hôn cô ấy. Khi mọi thứ lắng xuống, chúng ta sẽ có một cặp ghép ổn định không phụ thuộc vào tốc độ mà chúng ta chạy thuật toán.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Chúng ta có thể nói gì về tập các cặp ghép ổn định này?”. Thật ngạc nhiên là tất cả các cặp ghép ổn định đều liên thuộc với cùng một tập các đỉnh, nghĩa là mọi đỉnh đều được nối trong mọi cặp ghép ổn định hoặc vẫn chưa được nối trong mọi cặp ghép ổn định. Điều khẳng định này sẽ được quan sát dễ dàng hơn trong kết quả dưới đây.

Một chu trình được gọi là **định hướng ưu tiên** nếu nó có thể được biểu diễn lại dưới dạng $aAbB \dots zZ$ sao cho A thích b hơn a , b thích B hơn $A, \dots, Z$ thích a hơn z .

Kết quả 3.5.2.

Giả sử M và M' là các cặp ghép ổn định xác định trên một đồ thị lưỡng phân với các dãy sắp thứ tự ưu tiên cho trước nào đó. Kí hiệu C là một thành phần liên thông nào đó của đồ thị con H được tạo ra bởi các cạnh của $M \cup M'$.

Khi đó, nếu C có chứa ít nhất ba đỉnh nào đó thì nó sẽ là một chu trình định hướng ưu tiên. Hơn nữa, nếu $aA, bB \in M$ và $aB \in M'$ thì a thích A hơn B nếu và chỉ nếu B thích a hơn b .

Chứng minh kết quả 3.5.2.

Để thuận tiện cho việc trình bày phép chứng minh, tốt nhất là chúng ta không nên phân biệt giữa các chàng trai và các cô gái: chúng ta sẽ dùng $x_1, x_2, \dots$ để kí hiệu cho cả các chàng trai và các cô gái. Nhắc lại rằng C hoặc là một đường đi có chiều dài ≥ 2 hoặc là một chu trình có chiều dài ≥ 4 .

Giả sử C có chứa một đường đi $x_1x_2x_3x_4$ với x_2 thích x_3 hơn x_1 . Nhận thấy rằng do M là một cặp ghép ổn định nên nếu $x_2x_3 \notin M$ thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng x_3 thích x_4 hơn x_2 .

Nhận xét đơn giản nêu ở trên ngụ ý rằng nếu C là một chu trình thì nó sẽ là một chu trình định hướng ưu tiên. Thật vậy, nếu $x_1x_2x_3 \dots x_k$ là một chu trình và x_2 thích x_3 hơn x_1 thì, khi nhìn vào đường đi $x_1x_2x_3x_4$, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng x_3 thích x_4 hơn x_2 . Kế tiếp, khi nhìn vào đường đi $x_2x_3x_4x_5$, chúng ta sẽ

nhận thấy rằng x_4 thích x_5 hơn x_3 . Bằng cách thực hiện tiếp tục quá trình này, chúng ta cũng sẽ nhận thấy rằng x_k thích x_1 hơn x_{k-1} và x_1 thích x_2 hơn x_k .

Ngoài ra, nếu C là một đường đi có dạng $x_1x_2 \dots x_l$ với $l \geq 3$ và $x_1x_2 \notin M$ thì x_2 sẽ thích x_3 hơn x_1 (điều này suy ra từ việc M là một cặp ghép ổn định và $x_1x_2 \notin M$). Lập luận tương tự, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng x_{l-1} thích x_{l-2} hơn x_l . Tuy nhiên, điều này là không thể (điều này suy ra từ việc nếu chúng ta lập luận tương tự thì sẽ nhận thấy rằng x_2 thích x_3 hơn x_1 , x_3 thích x_4 hơn x_2 , v.v..., x_{l-1} thích x_l hơn x_{l-2}).

Khẳng định thứ hai suy ra từ thực tế là thành phần liên thông của H có chứa đường đi $AaBb$ sẽ là một chu trình định hướng ưu tiên. □

Kết quả 3.5.3.

Với mọi dãy sắp thứ tự ưu tiên xác định trên một đồ thị lưỡng phân với phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2) , chúng ta luôn tìm được các tập con $U_1 \subset V_1$ và $U_2 \subset V_2$ sao cho mọi cặp ghép ổn định đều là một cặp ghép đầy đủ từ U_1 vào U_2 . Hơn nữa, tất cả các cặp ghép ổn định đều có cùng một kích thước.

Chứng minh kết quả 3.5.3.

Giả sử khẳng định nêu trên là sai. Khi đó, chúng ta có thể giả định rằng có một cạnh aA thuộc M sao cho a không liên thuộc với bất kỳ một cạnh nào của M' . Do M' là một cặp ghép tối đại nên $bA \in M'$ với $b \in V_1, b \neq a$. Tuy nhiên, khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng thành phần liên thông có chứa a trong đồ thị con được tạo thành bởi các cạnh của MUM' có chứa a, A, b sẽ không phải là một chu trình. Điều này mâu thuẫn với Kết quả 3.5.2). □

Thật tự nhiên khi chúng ta mong đợi rằng mọi cặp ghép ổn định của đồ thị con được cảm sinh bởi $U_1 \cup U_2$ đều là một cặp ghép ổn định trong đồ thị ban đầu nhưng thật đáng tiếc là không phải trường hợp nêu ở đây.

Kế tiếp, chúng ta sẽ phát biểu một hệ quả trực tiếp của Kết quả 3.5.2) và Kết quả 3.5.3):

Kết quả 3.5.4.

Giả sử M và M' là các cặp ghép ổn định xác định trên một đồ thị lưỡng phân với các dãy sắp thứ tự ưu tiên cho trước nào đó. Giả sử thêm $aB \in M$ và $aB \notin M'$.

Khi đó, trong M' , cả a và B đều có nhân tình. Hơn nữa, một trong a và B ở M' sẽ tốt hơn ở M và người còn lại sẽ tệ hơn.

Cặp ghép được xây dựng bởi thuật toán nêu trong phép chứng minh của Kết quả 3.5.1) không chỉ là một cặp ghép ổn định mà còn là cặp ghép ổn định “tốt nhất” cho các chàng trai: mọi chàng trai đều kết thúc với cô gái hấp dẫn nhất của anh ấy trong số tất cả các cặp ghép ổn định.

Để làm cho định nghĩa nêu trên trở nên hình thức hơn, kí hiệu G là một đồ thị lưỡng phân với phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2) với các dãy sắp thứ tự ưu tiên cho trước nào đó. Một cặp ghép ổn định M được gọi là **tối ưu đối với các chàng trai** (hoặc V_1 – **tối ưu**) nếu, với mọi cặp ghép ổn định M' và mọi đỉnh $a \in V_1, aB \in M'$ thì $aA \in M$ với một cô gái A nào đó và $A = B$ hoặc a sẽ thích A hơn B . Nói cách khác, M là một cặp ghép ổn định V_1 – tối ưu nếu, trong M , mọi chàng trai ít nhất cũng khá giả như trong bất kỳ một cặp ghép ổn

định nào khác. Một lần nữa, chúng ta giả định rằng thà kết hôn còn hơn độc thân. Không nhất thiết phải luôn có một cặp ghép ổn định V_1 – tối ưu nhưng rõ ràng là nếu có thì nó sẽ là duy nhất.

Kết quả 3.5.5.

Với mọi dãy sắp thứ tự ưu tiên xác định trên một đồ thị lưỡng phân đầy đủ $n \times n$ với phân hoạch lưỡng phân (V_1, V_2) , chúng ta luôn tìm được một cặp ghép ổn định V_1 – tối ưu.

Chứng minh kết quả 3.5.5.

Kí hiệu $S(a)$ là tập các cô gái mà chàng trai a có thể kết hôn trong một số cặp ghép ổn định: tập các cô gái có thể có cho a . Chúng ta sẽ chứng minh rằng, trong thuật toán nêu ở trên, không có cô gái nào trong $S(a)$ từ chối a . Như vậy, mỗi chàng trai đều sẽ kết hôn với cô gái hấp dẫn có thể của anh ấy. Do đó, cặp ghép ổn định này sẽ tối ưu cho các chàng trai.

Giả sử khẳng định nêu trên là sai. Chúng ta sẽ dùng thuật toán lại khi lần đầu tiên có một chàng trai, tạm giả sử là a , bị một trong những cô gái khả dĩ của mình từ chối, tạm giả sử là A . Từ định nghĩa, điều này xảy ra bởi vì A đã thích một người cầu hôn nào đó khác vào thời điểm đó, tạm giả sử là b . Tại thời điểm này, b thích A hơn tất cả những cô gái khác chưa từ chối anh ta. Như vậy, a fortiori, b thích A hơn tất cả những cô gái có thể khác của anh ta. Do A là có thể đối với a nên chúng ta sẽ tìm được một cặp ghép ổn định M trong đó a kết hôn với A và b kết hôn với một cô gái B nào đó. Tuy nhiên, điều này là hoàn toàn không thể, bởi vì b thích A hơn B và A thích b hơn a . Điều mâu thuẫn này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta. $\square$

Từ định nghĩa, cặp ghép ổn định V_1 – tối ưu sẽ là “tốt nhất” đối với mọi chàng trai (các phần tử của V_1). Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Liệu nó có “tốt” cho các cô gái?”. Nhắc lại Kết quả 3.5.4), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng, tuy hơi ngạc nhiên, nó lại là điều tồi tệ nhất đối với mọi cô gái và không phụ thuộc vào việc gán các dãy sắp thứ tự ưu tiên. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ gọi một cặp ghép ổn định M là V_2 – pessimal nếu, trong M , không có cô gái nào tốt hơn trong bất kỳ một cặp ghép ổn định nào khác. Một lần nữa, a tiên nghiệm không rõ ràng rằng có một cặp ghép ổn định V_2 – pessimal. Tuy nhiên, định nghĩa ngụ ý rằng nếu có một cặp ghép ổn định V_2 – pessimal thì nó là duy nhất. Kết quả 3.5.4) ngụ ý rằng mọi cặp ghép ổn định V_1 – tối ưu đều là một cặp ghép ổn định V_2 – pessimal.

Có khá nhiều dạng mở rộng và biến thể khác nhau của các kết quả nêu ở trên; ở đây, chúng ta sẽ chỉ xem xét các cặp ghép ổn định đầy đủ trong các đồ thị lưỡng phân (không nhất thiết đầy đủ) với các lớp màu bằng nhau và các cặp ghép ổn định trong một xã hội đa sắc tộc.

Một lần nữa, chúng ta sẽ thiết lập lại khái niệm về một cặp ghép ổn định theo một cách hơi khác. Cách định nghĩa khá nặng nề này về một cặp ghép ổn định sẽ thường rất hữu ích trong các ứng dụng. Giả sử cho trước một tập V_1 gồm n chàng trai và một tập V_2 gồm n cô gái. Mọi chàng trai và mọi cô gái đều có một dãy sắp thứ tự ưu tiên không nhất thiết đầy đủ. Như vậy, mọi cô gái A đều có một danh sách $L(A) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ biểu thị rằng A chỉ muốn kết hôn với các chàng trai $a_1, a_2, \dots, a_k$ và đây cũng chính là dãy sắp thứ tự ưu tiên của cô ấy. Tương tự, mọi chàng trai a đều có một danh sách không nhất thiết đầy đủ $L(a)$. Chúng ta sẽ gọi (V_1, V_2, L) là một **hệ thống ưu tiên không đầy đủ**. Thiết lập này rõ ràng sẽ tương ứng với một đồ thị lưỡng phân $(V_1 \cup V_2, E)$ trong đó $E = \{aA: a \in L(A) \text{ và } A \in L(a)\}$ với các dãy sắp thứ tự ưu tiên được đưa ra bởi các danh sách. Theo cách định nghĩa này, một cặp ghép M từ V_1 vào V_2 được gọi là **ổn định** nếu với bất kỳ hai đỉnh nào được nối với nhau xuất hiện trên danh sách của nhau, và nếu $a \in L(B), B \in$

$L(a)$ nhưng $aB \notin M$ thì $aA \in M$ với một cô gái $A \in L(a)$ nào đó mà a thích B hoặc $bB \in M$ với một chàng trai $b \in L(B)$ nào đó mà B thích a .

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể biết được rằng liệu một hệ thống ưu tiên không đầy đủ có một cặp ghép ổn định đầy đủ?”. Tương tự như thủ thuật mà chúng ta đã trình bày trong phép chứng minh của Kết quả 3.3.3), chúng ta hoàn toàn có thể phóng to một hệ thống ưu tiên không đầy đủ thành một hệ thống ưu tiên đầy đủ theo cách mà các cặp ghép ổn định trong hệ thống ưu tiên không đầy đủ ban đầu sẽ tương ứng với các cặp ghép ổn định dễ nhận biết nào đó trong hệ thống ưu tiên đầy đủ được mở rộng. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ bổ sung thêm một chàng trai hư cấu w và một cô gái hư cấu W vào hệ thống này: w là một người đàn ông góa vợ và W là một người đàn bà góa chồng. Kí hiệu $V'_1 = V_1 \cup \{w\}$ và $V'_2 = V_2 \cup \{W\}$. Chúng ta sẽ xây dựng một hệ thống ưu tiên đầy đủ cho (V'_1, V'_2) như sau: mỗi người đều chọn người đàn ông góa vợ (người đàn bà góa chồng) theo sở thích thực sự của cô ấy (anh ấy) và theo sau đó là một danh sách tùy ý các chàng trai (các cô ấy) mà cô ấy (anh ấy) không muốn kết hôn một chút nào. Sau cùng, người đàn ông góa vợ sẽ đặt người đàn bà góa chồng ở cuối danh sách ưu tiên của anh ấy và người đàn bà góa chồng sẽ xếp người đàn ông góa vợ ở cuối danh sách ưu tiên của cô ta. Chúng ta sẽ nói rằng hệ thống ưu tiên đầy đủ (V'_1, V'_2, L') này là **được liên kết** với hệ thống ưu tiên không đầy đủ (V_1, V_2, L) ban đầu.

Kết quả 3.5.6.

Một hệ thống ưu tiên không đầy đủ (V_1, V_2, L) với $|V_1| = |V_2|$ sẽ có một cặp ghép ổn định đầy đủ nếu và chỉ nếu hệ thống ưu tiên đầy đủ (V'_1, V'_2, L') liên kết với nó có một cặp ghép ổn định trong đó người đàn ông góa vợ sẽ kết hôn với người đàn bà góa chồng.

Chứng minh kết quả 3.5.6.

Giả sử M là một cặp ghép đầy đủ từ V_1 vào V_2 , M' là cặp ghép đầy đủ từ V'_1 vào V'_2 thu được từ M bằng cách bổ sung thêm vào nó cạnh wW . Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng M sẽ là một cặp ghép ổn định trong hệ thống ưu tiên không đầy đủ (V_1, V_2, L) nếu và chỉ nếu M' là một cặp ghép ổn định trong hệ thống ưu tiên đầy đủ (V'_1, V'_2, L') .

Giả sử M là một cặp ghép ổn định trong (V_1, V_2, L) . Khi đó, M' sẽ là một cặp ghép ổn định, bởi vì nếu $aA \in M$ thì A sẽ thích a hơn w và a sẽ thích A hơn W .

Ngoài ra, nếu M' là một cặp ghép ổn định trong (V'_1, V'_2, L') thì M sẽ là một cặp ghép ổn định trong (V_1, V_2, L) . Thật vậy, nếu $aA \in M$ thì $A \in L(a)$: trường hợp ngược lại, a thích W hơn A và W thích a hơn w . Tương tự, $a \in L(A)$: trường hợp ngược lại, A thích w hơn a và w thích A hơn W . Do đó, mọi cạnh aA của M đều thỏa mãn $A \in L(a)$ và $a \in L(A)$, nên M sẽ là một cặp ghép ổn định trong (V_1, V_2, L) . $\square$

Do mọi cặp ghép ổn định V'_1 – tối ưu trong (V'_1, V'_2, L') đều là một cặp ghép ổn định V'_2 – pessimal nên nếu có một cặp ghép ổn định nào đó trong (V'_1, V'_2, L') có chứa wW thì mọi cặp ghép ổn định đều sẽ có chứa wW . Điều này dẫn chúng ta đi đến dạng mạnh hơn sau đây của Kết quả 3.5.6):

Kết quả 3.5.6'.

Giả sử cho trước một hệ thống ưu tiên không đầy đủ (V_1, V_2, L) được liên kết với một hệ thống ưu tiên đầy đủ (V'_1, V'_2, L') và M' là một cặp ghép ổn định của (V'_1, V'_2, L') .

Khi đó, chúng ta sẽ có một cặp ghép ổn định đầy đủ trong (V_1, V_2, L) nếu và chỉ nếu M' có chứa wW .

Đối với dạng biến thể cuối cùng của định lý cặp ghép ổn định, sẽ thuận tiện hơn khi chúng ta sử dụng các thuật ngữ liên quan đến vấn đề tuyển sinh đại học: Trong bài toán tuyển sinh đại học, giả sử chúng ta có n ứng viên $a_1, \dots, a_n$ có nguyện vọng ứng tuyển vào m trường đại học $A_1, \dots, A_m$ trong đó trường đại học A_i mong muốn nhận n_i học viên chưa tốt nghiệp sao cho $\sum_{i=1}^m n_i = n$. Mỗi ứng viên sẽ đánh giá các trường đại học theo sở thích của mình còn mỗi trường đại học cũng sẽ đánh giá các ứng viên theo sở thích của họ. Một lần nữa, việc phân bổ các ứng viên vào các trường đại học sao cho có n_i sinh viên sẽ được chỉ định vào học tại trường đại học A_i sẽ được gọi là một **kế hoạch tuyển sinh ổn định** nếu bất cứ khi nào một ứng viên a_i được nhận bởi một trường đại học $A_{i'}$ và một ứng viên a_j được nhận bởi một trường đại học $A_{j'}$ thì a_i sẽ thích $A_{i'}$ hơn $A_{j'}$ hoặc $A_{j'}$ sẽ thích a_j hơn a_i . Một kế hoạch tuyển sinh ổn định được gọi là **tối ưu (đối với các ứng viên)** nếu mọi ứng viên đều được nhận bởi một trường đại học tốt nhất có thể trong số bất kỳ một kế hoạch tuyển sinh ổn định nào.

Kết quả 3.5.7.

Với mọi dãy sắp thứ tự ưu tiên, chúng ta luôn tìm được một kế hoạch tuyển sinh ổn định.

Chứng minh kết quả 3.5.7.

Để thuận tiện cho việc trình bày phép chứng minh, chúng ta sẽ thay thế các ứng viên bởi các *chàng trai* và thay thế mỗi trường đại học A_i bởi n_i *cô gái* $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \dots, A_i^{(n_i)}$ sao cho mỗi $A_i^{(j)}$ đều có cùng dãy sắp thứ tự ưu tiên giữa chàng trai $a_1, \dots, a_n$ như A_i . Hơn nữa, mỗi chàng trai sẽ sắp xếp các cô gái bằng cách đặt các cô gái tương ứng với trường đại học được xếp hạng cao nhất đầu tiên (theo bất kỳ thứ tự nào), tiếp theo là các cô gái tương ứng với trường đại học được xếp hạng cao thứ hai (theo bất kỳ thứ tự nào), v.v... Trong đồ thị lưỡng phân mà chúng ta vừa xác định, hãy lấy ra một cặp ghép ổn định tối ưu đối với $\{a_1, \dots, a_n\}$: kế hoạch tuyển sinh mà cặp ghép này gây ra rõ ràng là tối ưu (đối với các ứng viên). $\square$

Có nhiều cách khác nhau để chúng ta có thể nói lỏng các điều kiện trong bài toán tuyển sinh đại học. Điều kiện $\sum_{i=1}^n n_i = n$ không nhất thiết phải giữ lại: một ứng viên có thể không muốn vào học tại một trường đại học nào đó và một trường đại học có thể không sẵn sàng nhận một sinh viên trong bất kỳ trường hợp nào. Để thuận tiện, chúng ta có thể loại bỏ khả năng thứ hai bằng cách giả thiết thêm rằng một ứng viên sẽ không nộp đơn vào một trường đại học nếu trường đó không muốn nhận anh ta trong bất kỳ trường hợp nào. Trong cách thiết lập tổng quát hơn này, chúng ta có thể phát biểu lại dạng tương tự của thuật toán Gale – Shapley như sau: Tất cả các ứng viên sẽ nộp đơn vào các trường đại học được xếp hạng cao nhất của họ. Một trường đại học với hạn ngạch n_i sẽ đưa vào danh sách chờ n_i ứng viên mà trường đánh giá cao nhất hoặc trường sẽ nhận tất cả họ nếu trường không nhận được nhiều hơn n_i ứng viên và từ chối tất cả những ứng viên khác. Những ứng viên bị từ chối sẽ nộp đơn vào lựa chọn thứ hai của họ và một lần nữa một trường đại học với hạn ngạch n_i sẽ từ chối tất cả chỉ trừ những ứng viên nộp đơn được đánh giá cao nhất, v.v... Quá trình này sẽ dừng lại khi, trong một vòng nào đó, không có bất kỳ một ứng viên nào bị trường đại học từ chối và mọi trường đại học đều sẽ nhận tất cả những ứng viên có trong danh sách chờ của mình. Để

dàng chứng minh được rằng kế hoạch tuyển sinh thu được sẽ thỏa mãn các điều kiện: (i) mọi trường đại học đều chỉ nhận tối đa n_i ứng viên trong số tất cả các ứng viên đã nộp đơn dự tuyển vào trường đó, (ii) nếu một trường đại học không tuyển đủ chỉ tiêu của mình thì sẽ không có bất kỳ ứng viên nào còn lại nộp đơn vào trường đại học đó, và (iii) kế hoạch tuyển sinh ổn định theo nghĩa nếu một ứng viên a được một trường đại học A nhận vào và một ứng viên b được một trường đại học B nhận vào thì a sẽ không muốn đến học tại B hoặc a thích A hơn B hoặc B đánh giá b cao hơn a . Hơn nữa, mọi ứng viên đều sẽ vào một trường đại học đủ tốt như trong bất kỳ một kế hoạch tuyển sinh nào khác thỏa mãn các điều kiện này.