

## Chủ đề 04. Các bài toán cực trị đồ thị

Các bài toán cực trị là một trong những chủ đề trọng tâm của lý thuyết đồ thị hiện đại. Theo nghĩa rộng, lý thuyết cực trị đồ thị bao gồm phần lớn các chủ đề khác nhau của lý thuyết đồ thị hiện đại; theo nghĩa hẹp, nó có chứa nhiều kết quả sâu sắc và đẹp nhất của lý thuyết đồ thị.

Tất nhiên, do trong bài viết này chúng ta sẽ chưa thể có được một cái nhìn quá tổng quát về các bài toán cực trị đồ thị nên chúng ta sẽ chỉ tập trung vào các biến thể của bài toán cực trị đồ thị thuần túy – bài toán đồ thị con bị cấm: “Giả sử cho trước một đồ thị  $F$ , xác định số các cạnh lớn nhất có thể có  $ex(n, F)$  của một đồ thị bậc  $n$  không có chứa  $F$ ?. Một cách tương đương, cần tối thiểu bao nhiêu cạnh để đảm bảo cho đồ thị của chúng ta chắc chắn có chứa  $F$ ?. Chẳng hạn, cần tối thiểu bao nhiêu cạnh trong một đồ thị bậc  $n$  đảm bảo nó sẽ có chứa một đường đi có chiều dài  $l$ ? Một chu trình có chiều dài  $\geq l$ ? Một chu trình có chiều dài  $\leq l$ ? Một đồ thị con đầy đủ  $K_r$ ?”.

Tổng quát hơn, một bài toán cực trị đồ thị sẽ yêu cầu chúng ta phải xác định các giá trị cực đại của các tham số đồ thị nhất định cho trước trong các loại đồ thị khác nhau. Chẳng hạn, giá trị lớn nhất của  $r$  là bao nhiêu để có một đồ thị 2 – liên thông  $r$  – regular bậc  $n$  không phải là Hamiltonian?. Một cách tương đương, giá trị  $r$  nhỏ nhất đến mức nào để đảm bảo rằng mọi đồ thị 2 – liên thông  $r$  – regular đều là Hamiltonian?. Chúng ta sẽ không thảo luận nhiều về những bài toán cực trị tổng quát này, mặc dù đôi khi chúng ta vẫn sẽ yêu cầu các đồ thị của chúng ta phải  $k$  – liên thông với một chỉ số  $k$  nào đó hoặc bậc nhỏ nhất của chúng không được quá nhỏ.

Trước khi đi vào thảo luận chi tiết, chúng ta sẽ cần phải nói về một vài thuật ngữ cơ bản. Nếu, với một loại đồ thị nhất định cho trước, một tham số đồ thị nhất định cho trước nào đó có giá trị tối đa không vượt quá  $f$  thì các đồ thị mà tham số đồ thị của chúng có giá trị đúng bằng  $f$  sẽ được gọi là **các đồ thị cực trị của tham số đó**. Chẳng hạn, một đồ thị acyclic bậc  $n$  sẽ chứa nhiều nhất  $n - 1$  cạnh và các đồ thị cực trị là các cây bậc  $n$ .

Khi chúng ta nói về các đồ thị cực trị, tính duy nhất luôn được hiểu theo nghĩa **đẳng cấu**. Như vậy, một đồ thị không liên thông với bậc  $n \geq 2d + 2$  và bậc nhỏ nhất  $d \geq 0$  sẽ chứa nhiều nhất  $\binom{d+1}{2} + \binom{n-d-1}{2}$  cạnh và  $K_{d+1} \cup K_{n-d-1}$  là đồ thị cực trị duy nhất. Hơn nữa, một đồ thị bậc  $n$  không chứa bất kì một chu trình lẻ nào sẽ chứa nhiều nhất  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  cạnh và  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  cũng là đồ thị cực trị duy nhất.

Trong bài toán đồ thị con bị cấm, một đồ thị là **cực trị** nếu nó không chứa  $F$  và có  $ex(n, F)$ ; kí hiệu  $EX(n, F)$  là tập các đồ thị cực trị của bài toán đồ thị con bị cấm. Như vậy, chúng ta biết định lí Mantel (Kết quả 1.1.2) chỉ ra rằng  $ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  và  $EX(n, K_3) = \left\{ K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\}$ . Hơn nữa, trong chủ đề trước của bài viết, định lí Tutte về các  $k$  – nhân tử cho phép chúng ta giải quyết một bài toán cực trị đồ thị khá hay ho: “Cần bao nhiêu cạnh để đảm bảo một đồ thị không có chứa  $k + 1$  cạnh độc lập?”. Trong trường hợp này,  $F$  gồm  $k + 1$  cạnh độc lập, nghĩa là  $F = (k + 1)K_2$  và, với  $n \geq 2k + 1$ , các đồ thị cực trị tương ứng với  $ex(n, F)$  là  $K_{2k+1} \cup \overline{K_{n-2k-1}}$  và  $K_k + \overline{K_{n-k}}$ .

Các vấn đề được thảo luận trong chủ đề này của bài viết được chia thành hai phần: các phần lẻ liên quan đến các đường đi và các chu trình trong khi các phần chẵn nói về các đồ thị con đầy đủ. Chúng ta chọn cách xen kẽ các chủ đề để có được các kết quả đơn giản hơn như trong hầu hết các chủ đề khác.

Phần đầu tiên là về các đường đi và các chu trình (ngắn và dài) trong các đồ thị có kích thước lớn. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ đưa ra một đánh giá trên tốt cho  $ex(n, P_l)$  – số cạnh lớn nhất có thể có để đảm bảo trong một đồ thị bậc  $n$  sẽ không có chứa bất kỳ một đường đi nào có chiều dài  $l$ . Chúng ta cũng sẽ trình bày một số kết quả cơ bản về các chu trình Hamilton.

Lý thuyết cực trị đồ thị thực sự chỉ được bắt đầu vào năm 1941, khi Turán thực hiện mở rộng một cách đáng kể định lý Mantel để xác định cả hàm  $ex(n, K_r)$  và tập  $EX(n, K_r)$ . Phần thứ hai của bài viết này sẽ được dành để trình bày định lý cơ bản này cùng với một số kết quả liên quan.

Khi thảo luận về  $ex(n, P_l)$  và  $ex(n, K_r)$ , chúng ta chủ yếu chỉ quan tâm đến trường hợp  $n$  lớn hơn khá nhiều so với  $l$  và  $r$ . Chúng ta sẽ gặp phải một số vấn đề khá phức tạp nếu  $F$  và  $G$  có kích thước gần bằng nhau. Một ví dụ điển hình của những vấn đề này sẽ được thảo luận trong phần thứ ba của bài viết này – bài toán về các chu trình Hamilton. Trong nhiều năm, chúng ta đã có những nỗ lực đáng kể để đi tìm lời giải cho vấn đề này và, theo một nghĩa hẹp nào đó, câu trả lời hiện tại của vấn đề này là khá thỏa đáng.

Phần thứ tư sẽ được dành để trình bày một định lý sâu sắc và đáng ngạc nhiên của Erdős và Stone được chứng minh vào năm 1946. Định lý này, đôi khi còn được gọi là định lý cơ bản của lý thuyết cực trị đồ thị, liên quan đến  $ex(n, F)$  trong đó  $F$  là một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ với  $t$  đỉnh trong mỗi lớp. Nhưng như một hệ quả tất yếu của kết quả này, chúng ta có thể dùng kết quả này để xác định giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, F)}{n^2}$ , với mọi đồ thị  $F$ .

Hai phần cuối sẽ nói về những phát triển mới đáng nói nhất: bổ đề Szemerédi và các ứng dụng của nó. Năm 1975, trong khi đang chứng minh một định lý nổi tiếng của mình về các cấp số cộng, Szemerédi đã phát hiện ra một kết quả tuyệt vời liên quan đến cấu trúc thô của mọi đồ thị. Định lý này, đôi khi còn được gọi là bổ đề Szemerédi, là một công cụ quan trọng trong việc giải quyết nhiều bài toán cực trị đồ thị. Một lần nữa, chúng ta cũng hầu như không chỉ ra bất kỳ một hướng đi cụ thể nào.

#### 4.1. Đường đi và chu trình

Khi tìm kiếm các chu trình trong một đồ thị, các câu hỏi của chúng ta tự nhiên sẽ liên quan đến các chu trình ngắn và các chu trình dài: “Giá trị lớn nhất có thể có của **chỉ số girth** – chiều dài nhỏ nhất có thể có của một chu trình? Giá trị nhỏ nhất có thể có của **chỉ số circumference** – chiều dài lớn nhất có thể có của một chu trình?”.

Đầu tiên, chúng ta sẽ xem xét xem chúng ta có thể nói gì về các đồ thị có số cạnh lớn hơn số đỉnh đúng một đơn vị. Mọi đồ thị  $G = G(n, n + 1)$  với  $n$  đỉnh,  $n + 1$  cạnh đều sẽ có chỉ số girth  $\leq \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor$ .

Thật vậy,  $G$  sẽ có ít nhất hai chu trình, bởi vì chỉ số chu trình  $\Lambda(G) \geq 2$ . Kế tiếp, nếu chúng ta có hai chu trình phân biệt cạnh thì  $g(G) \leq \frac{n+1}{2}$ ; ngược lại, chúng ta sẽ có hai đỉnh nào đó được nối với nhau bởi ba đường đi phân biệt. Bằng cách dùng  $n_1, n_2, n_3$  để kí hiệu chiều dài của các đường đi này, chúng ta sẽ có  $n_1 + n_2 + n_3 = n + 1$  và ba chu trình được tạo thành bởi ba đường đi này sẽ có chiều dài lần lượt là  $n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_1 + n_3$ . Do tổng của ba chiều dài này là  $2(n_1 + n_2 + n_3) \leq 2(n + 1)$  nên  $G$  sẽ có ít nhất một chu trình có chiều dài  $\leq \frac{2(n+1)}{3}$ . Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng  $G$  không nhất thiết phải có chứa một chu trình có chiều dài nhỏ hơn  $\left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor$ .

Tương tự, mọi đồ thị  $G(n, n + 2)$  đều có chỉ số girth  $\leq \frac{n+2}{2}$  và mọi đồ thị  $G(n, n + 3)$  đều có chỉ số girth  $\leq \frac{4(n+3)}{9}$ . Mặc dù dãy đánh giá này có thể được tiếp tục thêm cho một vài giá trị nữa nhưng những kết quả này sẽ ngày càng trở nên phức tạp hơn.

Khi tìm kiếm các chu trình ngắn, sẽ thuận tiện hơn khi chúng ta giả định rằng bậc nhỏ nhất là lớn, chứ không phải là đồ thị có nhiều cạnh. Trong dạng công thức của nó, kết quả của chúng ta đưa ra một chặn dưới cho bậc của một đồ thị theo bậc nhỏ nhất và **chỉ số girth** – chiều dài của chu trình nhỏ nhất. Một cách tương đương, kết quả này cũng đưa ra một chặn trên cho chỉ số girth của một đồ thị theo bậc và bậc nhỏ nhất.

#### Kết quả 4.1.1.

$$\text{Với } g \geq 3 \text{ và } \delta \geq 3, \text{ kí hiệu } n_0(g, \delta) = \begin{cases} 1 + \frac{\delta}{\delta-2} \{(\delta-1)^{(g-1)/2} - 1\}, \text{ nếu } g \text{ là lẻ,} \\ \frac{2}{\delta-2} \{(\delta-1)^{g/2} - 1\}, \text{ nếu } g \text{ là chẵn.} \end{cases}$$

Khi đó, mọi đồ thị  $G$  với bậc nhỏ nhất  $\delta$  và chỉ số  $g$  đều có ít nhất  $n_0(g, \delta)$  đỉnh.

#### Chứng minh kết quả 4.1.1.

Đầu tiên, giả sử  $g$  là một số lẻ, nghĩa là  $g = 2d + 1, d \geq 1$ . Chọn ra một đỉnh  $x$  bất kì. Khi đó, chúng ta sẽ không thể có bất kì một đỉnh  $z$  nào mà  $g$  có chứa hai  $z - x$  đường đi phân biệt với chiều dài  $\leq d$ : trường hợp ngược lại,  $G$  sẽ có chứa một chu trình với chiều dài  $\leq 2d$ . Do đó, chúng ta sẽ có ít nhất  $\delta$  đỉnh có khoảng cách đến  $x$  bằng 1, ít nhất  $\delta(\delta - 1)$  đỉnh có khoảng cách đến  $x$  bằng 2, v.v..., ít nhất  $\delta(\delta - 1)^{d-1}$  đỉnh có khoảng cách đến  $x$  bằng  $d$ .



Hình vẽ minh họa cho các trường hợp  $\delta = g = 5$  và  $\delta = 4, g = 6$ .

Như vậy,  $n \geq 1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \dots + \delta(\delta - 1)^{d-1}$ .

Kế tiếp, giả sử  $g$  là một số chẵn, nghĩa là  $g = 2d$ . Chọn ra hai đỉnh liên hợp  $x, y$  bất kì. Khi đó, chúng ta sẽ có ít nhất  $2(\delta - 1)$  đỉnh có khoảng cách đến  $\{x, y\}$  bằng 1, ít nhất  $2(\delta - 1)^2$  đỉnh có khoảng cách đến  $\{x, y\}$  bằng 2, v.v..., ít nhất  $2(\delta - 1)^{d-1}$  đỉnh có khoảng cách đến  $\{x, y\}$  bằng  $d - 1$ .  $\square$

Kí hiệu  $G_0$  là một **đồ thị cực trị** của Kết quả 4.1.1), nghĩa là một đồ thị với các tham số  $\delta$  và  $g$  làm xảy ra đẳng thức trong đánh giá trên. Phép chứng minh trên cũng ngụ ý rằng  $G_0$  là một đồ thị  $\delta$ -regular; hơn nữa, nếu  $g = 2d + 1$  thì  $G_0$  sẽ có đường kính bằng  $d$  và nếu  $g = 2d$  thì mọi đỉnh đều nằm trong khoảng cách  $d - 1$  của mỗi cặp đỉnh liên hợp. Chúng ta có thể nhận thấy dễ dàng rằng  $n_0(g, \delta)$  cũng là giá trị lớn nhất để tồn tại một đồ thị với bậc lớn nhất  $\delta$  thỏa mãn tính chất nêu trên. Nếu  $g = 2d$  thì chúng ta sẽ gọi  $G_0$

là một **đồ thị Moore** với **bậc  $\delta$**  và **chỉ số girth  $g$** ; nếu  $g = 2d + 1$  thì chúng ta sẽ gọi  $G_0$  là một **đồ thị Moore** với **bậc  $\delta$**  và **đường kính  $d$** . Trong **Chủ đề 08. Đồ thị - Cấu trúc nhóm – Ma trận**, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đại số để khảo sát các đồ thị Moore. Ở đây, chúng ta sẽ chỉ lưu ý đến đồ thị Heawood (đồ thị liên thuộc của mặt phẳng Fano). Do đồ thị Heawood là một khối lưỡng phân với bậc 14 và chỉ số girth 6 nên nó sẽ là một đồ thị Moore với bậc 3 và chỉ số girth 6. Tương tự, đồ thị Petersen là một đồ thị Moore với bậc 3 và đường kính 2.

Kế tiếp, chúng ta sẽ xét xem chúng ta có thể nói được những gì về các chu trình dài và các đường đi trong một đồ thị. Kết quả đầu tiên của chúng ta đi theo hướng này là một định lý của Pósa – một dạng mở rộng của một định lý cơ bản được đề xuất bởi Dirac vào năm 1952. Nếu một đồ thị bậc  $n$  là Hamiltonian thì chu vi của nó là  $n$ , trong khi chiều dài của đường đi dài nhất là  $n - 1$ . Tuy nhiên, mọi đồ thị liên thông không Hamiltonian đều có chứa ít nhất một đường đi có chiều dài bằng với chu vi của đồ thị đó. Thật vậy, nếu giả sử  $C = x_1x_2 \dots x_l$  là chu trình dài nhất và  $l < n$  thì chúng ta sẽ tìm được một đỉnh  $y$  không nằm trên  $C$  nhưng vẫn liên hợp với một đỉnh nào đó nằm trên  $C$ , tạm giả sử là  $x_1$ . Tuy nhiên, khi đó  $yx_1x_2 \dots x_l$  sẽ là một đường đi với chiều dài  $l$ .

#### Kết quả 4.1.2. (Pósa)

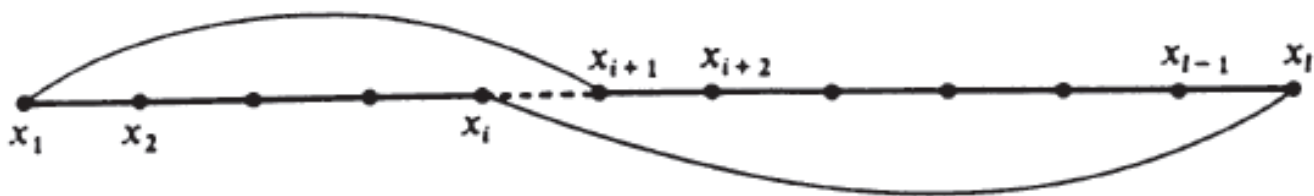
Giả sử  $G$  là một đồ thị liên thông với bậc  $n \geq 3$  sao cho, với mọi cặp đỉnh  $x, y$  không liên hợp, chúng ta đều có

$$d(x) + d(y) \geq k.$$

Khi đó, nếu  $k = n$  thì  $G$  sẽ là một đồ thị Hamiltonian; nếu  $k < n$  thì  $G$  sẽ có chứa một đường đi với chiều dài  $k$  và một chu trình với chiều dài  $\geq \frac{k+2}{2}$ .

#### Chứng minh kết quả 4.1.2.

Giả sử  $G$  không phải là một đồ thị Hamiltonian và  $P = x_1x_2 \dots x_l$  là một đường đi có chiều dài lớn nhất trong  $G$ . Tính tối đại của  $P$  chỉ ra rằng các đỉnh láng giềng của  $x_1$  và  $x_l$  đều là các đỉnh của  $P$ . Do  $G$  không có chứa bất kỳ một chu trình nào có chiều dài  $l$  nên  $x_1$  không thể liên hợp với  $x_l$ . Hơn nữa, đường đi  $P$  này không thể chứa các đỉnh  $x_i$  và  $x_{i+1}$  sao cho  $x_1$  liên thuộc với  $x_{i+1}$  và  $x_l$  liên thuộc với  $x_i$ : trường hợp ngược lại,  $x_1x_2 \dots x_ix_lx_{l-1} \dots x_{i+1}$  sẽ là một chu trình với chiều dài  $l$ .



Hình vẽ minh họa phép xây dựng một chu trình với chiều dài  $l$ .

Do đó, các tập  $N(x_1) = \{x_j: x_1x_j \in E(G)\}$  và  $N^+(x_l) = \{x_{i+1}: x_ix_{i+1} \in E(G)\}$  là các tập con phân biệt của của  $\{x_2, x_3, \dots, x_l\}$ , nên

$$k \leq d(x_1) + d(x_l) = |N(x_1)| + |N^+(x_l)| \leq l - 1 \leq n - 1.$$

Kế tiếp, nếu  $k = n$  thì đây là một điều mâu thuẫn. Do đó,  $G$  là một đồ thị Hamiltonian. Hơn nữa, nếu  $k < n$  thì đánh giá này ngụ ý rằng  $G$  có chứa một đường đi với chiều dài  $l - 1 \geq k$ . Điều này chứng minh tính đúng đắn của hai khẳng định đầu tiên.

Cuối cùng, khẳng định về các chu trình thậm chí còn đơn giản hơn. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử  $d(x_1) \geq d(x_l)$ . Khi đó,  $d(x_1) \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ . Kí hiệu  $t = \max\{i: x_1 x_i \in E(G)\}$ .

Như vậy,  $t \geq d(x_1) + 1 \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$  và  $G$  sẽ có chứa một chu trình  $x_1 x_2 \dots x_t$  với chiều dài  $t$ . □

Nhận thấy rằng Kết quả 4.1.2) chứa cả định lí Dirac: mọi đồ thị với bậc  $n \geq 3$  và bậc nhỏ nhất  $\geq \frac{n}{2}$  đều là một đồ thị Hamiltonian.

Trong **mục 4.3. Đường đi và chu trình Hamiltonian**, chúng ta sẽ sử dụng phép chứng minh của Kết quả 4.1.2) để thu được các thông tin chi tiết về các đồ thị không có chứa các chu trình dài và các đường đi. Trong lúc này, chúng ta sẽ tự giới hạn bản thân để chỉ lưu ý đến hai hệ quả của nó:

### Kết quả 4.1.3.

Giả sử  $G$  là một đồ thị với bậc  $n$  không có chứa bất kì một đường đi với chiều dài  $k (k \geq 1)$  nào.

Khi đó,  $\|G\| \leq \frac{k-1}{2}n$ . Hơn nữa, một đồ thị là một đồ thị cực trị (nghĩa là một đồ thị làm xảy ra đẳng thức nêu trong đánh giá trên) nếu và chỉ nếu tất cả các thành phần liên thông của nó đều là các đồ thị đầy đủ bậc  $k$ .

### Chứng minh kết quả 4.1.3.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định này, chúng ta sẽ cố định chỉ số  $k$  và thực hiện phép quy nạp trên chỉ số  $n$ . Tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên nếu  $n \leq k$ . Giả sử  $n > k$  và khẳng định đã được chứng minh với các giá trị nhỏ hơn của  $n$ .

Nhận thấy rằng nếu  $G$  là một đồ thị không liên thông thì tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán. Giả sử  $G$  là một đồ thị liên thông. Khi đó,  $G$  sẽ không thể chứa bất kì một đồ thị con nào có dạng  $K_k$  và nó sẽ có chứa một đỉnh  $x$  nào đó với bậc  $\leq \frac{k-1}{2}$  (Kết quả 4.1.2). Do  $G - x$  không phải là một đồ thị cực trị nên

$$\|G\| \leq d(x) + \|G - x\| < \frac{k-1}{2} + \frac{k-1}{2}(n-1) = \frac{k-1}{2}n. \quad \square$$

### Kết quả 4.1.4.

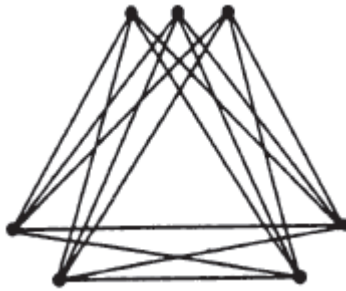
Giả sử  $G$  là một đồ thị với bậc  $n$  sao cho mọi chu trình đều có chiều dài  $\leq k$ .

Khi đó,  $\|G\| \leq \frac{k(n-1)}{2}$ . Hơn nữa, một đồ thị là một đồ thị cực trị nếu và chỉ nếu nó là một đồ thị liên thông và tất cả các khối của nó đều là các đồ thị đầy đủ bậc  $k$ .

Phép chứng minh của kết quả này có phần liên quan đến Kết quả 4.1.2) nhiều hơn so với Kết quả 4.1.3).

## 4.2. Đồ thị con đầy đủ

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Giá trị  $ex(n, K_{r+1})$  – số các cạnh lớn nhất có thể có trong một đồ thị bậc  $n$  không có chứa một đồ thị con  $K_{r+1}$  (một đồ thị đầy đủ bậc  $r + 1$ ) – là bao nhiêu?”. Nếu  $G$  là một đồ thị  $r$  – phần thì nó sẽ không thể chứa bất kì một đồ thị con nào có dạng  $K_{r+1}$ , bởi vì mọi lớp đỉnh của  $G$  đều chứa nhiều nhất một đỉnh của một đồ thị con đầy đủ này. Do đó,  $ex(n, K_{r+1}) \geq$  kích thước lớn nhất có thể có của một đồ thị  $r$  – phần với bậc  $n$ . Trên thực tế, chúng ta sẽ chỉ có duy nhất một đồ thị  $r$  – phần với bậc  $n$  có kích thước lớn nhất. Đồ thị này sẽ được gọi là **đồ thị Turán  $T_r(n)$**  – một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ với  $n$  đỉnh có các lớp có số đỉnh gần nhau nhất có thể được. Như vậy, nếu chúng ta sắp xếp các lớp theo độ lớn kích thước của các lớp đỉnh và kí hiệu  $n_k$  là số các đỉnh nằm trong lớp thứ  $k$  thì  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{r-1} + 1$ . Thật vậy, kí hiệu  $G$  là một đồ thị  $r$  – phần với bậc  $n$  có kích thước lớn nhất có thể có. Hiển nhiên,  $G$  là một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ. Giả sử các lớp này không hề gần nhau nhất có thể được, nghĩa là chúng ta sẽ phải có  $m_1$  đỉnh trong một lớp và  $m_2 \geq m_1 + 1$  đỉnh trong một lớp khác. Khi đó, bằng cách chuyển một đỉnh từ lớp thứ hai sang lớp thứ nhất, chúng ta sẽ làm số các cạnh tăng lên tối thiểu  $(m_1 + 1)(m_2 - 1) - m_1 m_2 = m_2 - m_1 - 1 \geq 1$  đơn vị. Lưu ý rằng các hệ thức  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$  và  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  xác định duy nhất các  $n_i$ . Do đó,  $T_r(n)$  được xác định duy nhất. Hơn nữa,  $n_i = \left\lfloor \frac{n+i-1}{r} \right\rfloor$  với  $i = 1, \dots, r$ .



Hình vẽ minh họa đồ thị Turán  $T_3(7)$ .

Kí hiệu  $t_r(n)$  là số các cạnh của đồ thị Turán  $T_r(n)$ . Chẳng hạn,  $t_2(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

Bằng một số tính toán đơn giản, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$t_r(n) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{n}{2}.$$

Trên thực tế, nếu chúng ta cô định  $r \geq 1$  và cho  $n \rightarrow \infty$  thì  $t_r(n) = \left(1 - \frac{1}{r} + o(1)\right) \binom{n}{2}$ .

Ở đây, chúng ta sử dụng kí hiệu Landau:  $g = O(f)$  nếu  $\frac{g}{f}$  là một hàm bị chặn khi  $n \rightarrow \infty$  và  $g = o(f)$  nếu  $\frac{g}{f} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Như vậy,  $o(1)$  sẽ biểu thị một hàm có xu hướng tiến về 0 khi  $n \rightarrow \infty$ .

Định lí cơ bản của Turán chỉ ra rằng, với mọi số tự nhiên  $n$  và  $r$ ,  $ex(n, K_{r+1}) \geq t_r(n)$ . Trong trường hợp này, tương tự như trong trường hợp của định lí Hall, chúng ta cũng sẽ có nhiều cách chứng minh khác nhau: chúng ta có rất nhiều cách chứng minh đẹp khác nhau cho định lí này bởi vì đồ thị Turán  $T_r(n)$  là ý tưởng cho tất cả các kiểu lập luận quy nạp. Trước khi trình bày một số phép chứng minh như vậy, chúng ta sẽ giới thiệu một số tính chất cơ bản của đồ thị  $T_r(n)$  và, nói chung, của các đồ thị với bậc  $n$  và kích thước  $t_r(n)$ .

Thật vậy, bằng cách sử dụng những tính chất cơ bản này, một số phép chứng minh của định lý Turán sẽ gần như được suy ra ngay lập tức.

Hiển nhiên,  $\delta(T_r(n)) = n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  và  $\Delta(T_r(n)) = n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ , nên bậc lớn nhất của một đồ thị Turán sẽ lớn hơn bậc nhỏ nhất của nó tối đa không quá 1 đơn vị. Nói cách khác, với mọi đồ thị Turán  $T_r(n)$  với  $n$  đỉnh và  $t_r(n)$  cạnh cho trước, các bậc của nó sẽ gần nhau nhất có thể được, nghĩa là nếu  $G = G(n, t_r(n))$  thì  $\delta(G) \leq \delta(T_r(n))$  và  $\Delta(G) \geq \Delta(T_r(n))$ . Hơn nữa, nếu  $x \in T_r(n)$  là một đỉnh có bậc nhỏ nhất thì  $T_r(n) - x$  chính là  $T_r(n-1)$ . Nếu  $H$  là một đồ thị  $(r-1)$ -phần với bậc  $n-k$  và  $H + \overline{K_k} \cong T_r(n)$  thì  $k$  sẽ bằng  $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  hoặc  $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$  và  $H \cong T_{r-1}(n-k)$ . Như một biến thể nhỏ của khẳng định trên, chúng ta nhận thấy rằng nếu  $H = G(n-k, t_{r-1}(n-k))$  và  $\|H + \overline{K_k}\| = t_r(n)$  thì  $k$  sẽ bằng  $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  hoặc  $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ . Một cách tương đương,  $t_r(n) - k(n-k) \geq t_{r-1}(n-k)$  và dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi  $k$  bằng  $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  hoặc  $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ .

Chúng ta có thể tổng hợp lại quan sát cuối cùng nêu trên trong một định lý duy nhất:

#### Kết quả 4.2.1. (Turán)

Giả sử  $G$  là một đồ thị với  $n$  đỉnh và  $\geq t_r(n)$  cạnh, và kí hiệu  $x$  là một đỉnh có bậc lớn nhất, nghĩa là  $d(x) = n - k = \Delta(G)$ . Kí hiệu  $W = N(x)$ ,  $U = V(G) \setminus W$ ,  $H = G[W]$ .

Khi đó,  $\|H\| \geq t_{r-1}(n-k)$  và dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi  $k = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  và  $U$  là một tập các đỉnh độc lập sao cho mỗi đỉnh đều có bậc  $n-k$ .

#### Chứng minh kết quả 4.2.1.

Như chúng ta đã nhận xét ở trên,  $k \leq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ .

Giả sử  $\|H\| \leq t_{r-1}(n-k)$ .

Khi đó,

$$\begin{aligned} t_r(n) \leq \|G\| &= \|H\| + \frac{1}{2} \sum_{u \in U} d(u) + \frac{1}{2} \|U, W\| \\ &\leq \|H\| + k(n-k) \leq t_{r-1}(n-k) + k(n-k). \end{aligned}$$

Như vậy,  $k = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$  và  $\|U, W\| = k(n-k)$ , nên  $G = H + \overline{K_k}$ . □

Từ đây, chúng ta chỉ cần thực hiện thêm một bước ngắn nữa để có thể kết nối  $T_r(n)$  với các đồ thị con đầy đủ và từ đó chúng ta có thể suy ra được dạng mở rộng sau đây của định lý Turán:

#### Kết quả 4.2.2. (Turán)

Giả sử  $G$  là một đồ thị với  $n$  đỉnh và  $\geq t_r(n)$  cạnh. Xét thuật toán đơn giản sau để xác định một đồ thị con đầy đủ với bậc  $r+1$ : chọn ra một đỉnh  $x_1$  có bậc lớn nhất trong  $G_1 = G$ ; chọn ra một đỉnh  $x_2$  có bậc lớn nhất trong đồ thị con  $G_2$  của  $G_1$  cảm sinh bởi các đỉnh láng giềng của  $x_1$ ; chọn ra một đỉnh  $x_3$  có bậc lớn

nhất trong đồ thị con  $G_3$  của  $G_2$  cảm sinh bởi các đỉnh láng giềng của  $x_2$  (trong  $G_2$ ), v.v..., chúng ta sẽ chỉ dừng lại quy trình trên tại một đỉnh  $x_l$  nếu nó không có bất kì đỉnh láng giềng nào trong  $G_l$ .

Khi đó,  $G$  sẽ là một đồ thị Turán  $T_r(n)$  hoặc nếu không thì quy trình trên sẽ tạo ra ít nhất  $r + 1$  đỉnh  $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$  sao cho đồ thị con cảm sinh bởi chúng sẽ là một đồ thị con đầy đủ. Hơn nữa,  $ex(n, K_{r+1}) = t_r(n)$  và  $T_r(n)$  là đồ thị cực trị duy nhất.

### Chứng minh Kết quả 4.2.2.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $r$ . Với  $r = 1$ , tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Kí hiệu  $n - k = d(x_1) = \Delta(G)$ . Nếu  $\|G_2\| > t_{r-1}(n - k)$  thì tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán, bởi vì  $G_2$  không thể đẳng cấu với  $T_{r-1}(n - k)$  và  $x_1$ , theo sau là các đỉnh  $x_2, x_3, \dots, x_{r+1}$  mà chúng ta tìm thấy trong  $G_2$ , xác định một dãy các đỉnh như đã tuyên bố. Ngược lại,  $k = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ ,  $\|G_2\| = t_{r-1}(n - k)$ ,  $G = G_2 + \overline{K_k}$ . Do đó, bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp của bài toán cho  $G_2$ , chúng ta nhận thấy rằng quy trình của chúng ta sẽ xây dựng một dãy các đỉnh  $x_2, x_3, \dots, x_{r+1}$  hoặc nếu không thì  $G_2 \cong T_{r-2}(n - k)$  và  $G_1 \cong T_{r-1}(n)$  như đã tuyên bố.  $\square$

Năm 1970, Erdős đã chứng minh một kết quả tuyệt vời về các đồ thị không có chứa  $K_{r+1}$  bất kể số cạnh của chúng là bao nhiêu. Cụ thể, dãy bậc của một đồ thị không có chứa  $K_{r+1}$  bị chi phối bởi dãy bậc của một đồ thị  $r$  – phần nào đó. Kết quả này một lần nữa chỉ ra tính đúng đắn của định lý Turán.

### Kết quả 4.2.3. (Erdős)

Giả sử  $G$  là một đồ thị với tập đỉnh  $V$  không có chứa  $K_{r+1}$  – một đồ thị đầy đủ bậc  $r$ .

Khi đó, chúng ta có thể tìm được một đồ thị  $r$  – phần  $H$  với tập đỉnh  $V$  sao cho, với mọi đỉnh  $z \in V$ ,

$$d_G(z) \leq d_H(z).$$

Hơn nữa, nếu  $G$  không phải là một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ thì chúng ta sẽ tìm được ít nhất một đỉnh  $z$  làm cho bất đẳng thức trên trở nên nghiêm ngặt.

### Chứng minh kết quả 4.2.3.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $r$ . Với  $r = 1$ , tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên, bởi vì khi đó  $G$  sẽ là đồ thị rỗng  $\overline{K_n}$  nên hiển nhiên nó sẽ là một đồ thị 1 – phần. Giả sử  $r \geq 2$  và tính đúng đắn của khẳng định trên đã được chứng minh với tất cả các giá trị nhỏ hơn của  $r$ .

Chọn ra một đỉnh  $x \in V$  sao cho  $d_G(x)$  đạt giá trị lớn nhất và kí hiệu  $W$  là tập các đỉnh của  $G$  được nối với  $x$ . Khi đó,  $G_0 = G[W]$  sẽ không có chứa  $K_r$ : trường hợp ngược lại, nó cùng với đỉnh  $x$  sẽ tạo thành một đồ thị  $K_{r+1}$ . Từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta có thể thay thế  $G_0$  bởi một đồ thị  $(r - 1)$  – phần  $H_0$  với tập đỉnh  $W$  sao cho  $d_{G_0}(y) \leq d_{H_0}(y)$  với mọi  $y \in W$  và bất đẳng thức là nghiêm ngặt với ít nhất một đỉnh  $y$  nào đó trừ khi  $G_0$  là một đồ thị  $(r - 1)$  – phần đầy đủ. Bổ sung thêm vào  $H_0$  các đỉnh trong  $V - W$  và nối mỗi đỉnh trong  $V - W$  với mỗi đỉnh trong  $W$ . Để hoàn tất phép chứng minh, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng đồ thị  $r$  – phần  $H$  thu được theo cách nêu ở trên sẽ có tất cả các tính chất cần thiết.

Nếu  $z \in U = V - W$  thì  $d_H(z) = d_H(x) = d_G(x) \geq d_G(z)$  và nếu  $z \in W$  thì  $d_H(z) = d_{H_0}(z) + n - |W| \geq d_{G_0}(z) + n - |W| \geq d_G(z)$ . Như vậy,  $d_G(z) \leq d_H(z)$ , với mọi  $z \in V$ .

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Chúng ta có thể nói gì về đồ thị  $G$  nếu  $\|G\| = \|H\|$ ?”. Khi đó,  $\|G_0\| = \|H_0\|$ , nên  $G_0$  là một đồ thị  $(r - 1)$  – phần đầy đủ. Hơn nữa, bằng cách đếm các cạnh nằm bên ngoài  $G_0 = H_0$ , chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 &= \|G\| - \|G_0\| = \sum_{u \in U} d_G(u) - e(G[U]) - |U||W| \\ &\leq |U||W| - e(G[U]) - |U||W| = -e(G[U]). \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng  $G$  là một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ. □

Để nhấn mạnh tầm quan trọng của định lý Turán, chúng ta sẽ phát biểu lại nó một lần nữa. Lần này, chúng ta sẽ phát biểu lại nó ở dạng ban đầu của nó như đã được phát biểu vào năm 1940.

#### Kết quả 4.2.4. (Turán)

Với mọi số tự nhiên  $r, n \geq 2$ , chúng ta sẽ có  $ex(n, K_{r+1}) = t_r(n)$  và  $EX(n, K_{r+1}) = \{T_r(n)\}$ . Nói cách khác, mọi đồ thị bậc  $n$  với  $\geq t_r(n)$  cạnh đều có chứa một đồ thị  $K_{r+1}$ . Hơn nữa,  $T_r(n)$  là đồ thị duy nhất với bậc  $n$  và kích thước  $t_r(n)$  không có chứa  $K_{r+1}$ .

#### Chứng minh kết quả 4.2.4.

Khẳng định này nằm trong Kết quả 4.2.2) và nó cũng là hệ quả tức thì của Kết quả 4.2.3), bởi vì  $T_r(n)$  là đồ thị  $r$  – phần duy nhất có bậc  $n$  và kích thước lớn nhất.

Tuy nhiên, một lần nữa, chúng ta sẽ đưa ra hai cách chứng minh khác nhau cho khẳng định trên dựa trên các tính chất cơ bản của  $T_r(n)$ :

#### Chứng minh thứ ba của kết quả 4.2.1.

Với  $r = 1$ , tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên. Giả sử  $r \geq 2$  và chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $n$ . Với  $n \leq r + 1$ , tính đúng đắn của khẳng định cũng là hiển nhiên. Giả sử  $n > r + 1$  và tính đúng đắn của khẳng định trên đã được chứng minh với tất cả các giá trị nhỏ hơn của  $n$ .

Giả sử đồ thị  $G$  có  $n$  đỉnh,  $t_r(n)$  cạnh và nó không chứa bất kì một đồ thị con  $K_{r+1}$  nào. Do  $T_r(n)$  là một đồ thị tối đại không có chứa  $K_{r+1}$  (nghĩa là chúng ta không thể bổ sung thêm bất kì một cạnh nào vào nó mà không tạo ra một  $K_{r+1}$ ) nên bước quy nạp của bài toán sẽ kết thúc nếu chúng ta có thể chỉ ra rằng  $G$  chính là một đồ thị  $T_r(n)$ . Do bậc của các đỉnh trong  $T_r(n)$  sai khác nhau tối đa không quá 1 đơn vị nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\delta(G) \leq \delta(T_r(n)) \leq \Delta(T_r(n)) \leq \Delta(G).$$

Kí hiệu  $x$  là một đỉnh của  $G$  với  $d(x) = \delta(G) \leq \delta(T_r(n))$ .

Khi đó,  $\|G - x\| = \|G\| - d(x) \geq \|T_r(n - 1)\|$ , nên  $G_x = G - x$  chính là đồ thị  $T_r(n - 1)$  (điều này suy ra từ giả thiết quy nạp của bài toán).

Nhận thấy rằng một lớp đỉnh nhỏ nhất bất kì của  $G_x$  sẽ có chứa  $\left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor$  đỉnh và đỉnh  $x$  được nối với tất cả các đỉnh trừ  $n - 1 - \left(n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor$  đỉnh của  $G_x$ . Do  $x$  không được nối với bất kì một đỉnh nào trong mỗi lớp của  $G_x$  nên nó sẽ được nối với tất cả các đỉnh của  $G_x$  tương ứng với các đỉnh nằm trong một lớp đỉnh nhỏ nhất. Điều này chỉ ra rằng  $G = T_r(n)$  như đã tuyên bố.  $\square$

#### Chứng minh thứ tư của kết quả 4.2.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $n + r$ . Giả sử  $2 \leq r < n$  và khẳng định đã được chứng minh cho mọi giá trị nhỏ hơn của  $n + r$ . Cố định một đồ thị  $G = G(n, t_r(n))$  không có chứa  $K_{r+1}$ : tương tự như trước, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng  $G \cong T_r(n)$ . Do  $t_r(n) > t_{r-1}(n)$  nên, từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta dễ dàng suy ra rằng  $G$  có chứa một đồ thị  $K_r$  với tập đỉnh  $W = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ . Kí hiệu  $U = V(G) \setminus W$  và  $H = G[U]$ . Hiển nhiên, không thể có bất kì một đỉnh  $x \in U$  nào có  $r$  cạnh tới  $W$ , nên

$$\begin{aligned} \|H\| &= \|G\| - \binom{r}{2} - \|U, W\| \\ &\geq t_{r-1}(n) - \binom{r}{2} - (n - r)(r - 1) = t_r(n - r). \end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai ở trên xuất phát từ thực tế là nếu chúng ta loại bỏ tập các đỉnh của một đồ thị  $K_r$  khỏi  $T_r(n)$  thì chúng ta đã loại bỏ đi chính xác  $\binom{r}{2} + (n - r)(r - 1)$  cạnh và chúng ta còn lại một đồ thị

$T_r(n - r)$ . Kế tiếp, do  $H$  không có chứa  $K_{r+1}$  nên, từ giả thiết quy nạp của bài toán, bất đẳng thức ở trên ngụ ý rằng  $H \cong T_r(n - r)$  và mọi đỉnh của  $H$  đều được nối với chính xác  $r - 1$  đỉnh của  $W$ . Chúng ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng  $G \cong T_r(n)$  như đã tuyên bố trong phép chứng minh trước đó.  $\square$

Các phép chứng minh nêu ở trên có thể dễ dàng được điều chỉnh lại để đưa ra một số kết quả liên quan khác. Tuy nhiên, một phép chứng minh khác của định lý Turán sẽ được đưa ra trong **Chủ đề 08. Đồ thị - Cấu trúc nhóm – Ma trận**.

Trong một dạng phát biểu hơi khác, định lý Turán đưa ra một chặn dưới cho chỉ số clique của một đồ thị cho trước theo bậc và kích thước của nó. Một đồ thị con đầy đủ tối đại của của một đồ thị cho trước được gọi là một **clique** và **chỉ số clique**  $\omega(G)$  của một đồ thị  $G$  sẽ là bậc lớn nhất có thể có của một clique trong  $G$ . Đơn giản hơn,  $\omega(G)$  là bậc tối đại có thể có của một đồ thị con đầy đủ trong  $G$ . Hơn nữa, định lý Turán chỉ ra rằng nếu một đồ thị  $G$  có  $n$  đỉnh và  $m \geq t_{r-1}(n)$  cạnh thì  $\omega(G) \geq r$ , trừ khi  $m = t_{r-1}(n)$  và  $G \cong T_{r-1}(n)$ .

Kế tiếp, chúng ta sẽ giải quyết tiếp **bài toán Zarankiewicz** – một dạng tương tự của **bài toán Turán** trong các đồ thị lưỡng phân. Kí hiệu  $G_2(m, n)$  là một đồ thị lưỡng phân với  $m$  đỉnh trong lớp đầu tiên và  $n$  đỉnh trong lớp thứ hai. Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Kích thước lớn nhất có thể có của một đồ thị  $G_2(m, n)$  là bao nhiêu nếu nó không có chứa bất kì một đồ thị lưỡng phân đầy đủ nào với  $s$  đỉnh trong lớp thứ nhất và  $t$  đỉnh trong lớp thứ hai?”. Kí hiệu  $z(m, n; s, t)$  là kích thước tối đa có thể có nêu ở trên. Kết quả cơ bản sau dường như ngụ ý cho chúng ta một chặn trên đủ tốt cho hàm  $z(m, n; s, t)$ .

**Kết quả 4.2.5.**

Giả sử cho trước các số nguyên không âm  $m, n, s, t, k, r, 2 \leq s \leq m, 2 \leq t \leq n, 0 \leq r < m$ . Kí hiệu  $G = G_2(m, n)$  là một  $m \times n$  đồ thị lưỡng phân với kích thước  $z = my = km + r$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $K_{s,t}$  nào với  $s$  đỉnh trong lớp đầu tiên và  $t$  đỉnh trong lớp thứ hai.

Khi đó,  $m\binom{y}{t} \leq (m - r)\binom{k}{t} + r\binom{k+1}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}$ .

**Chứng minh kết quả 4.2.5.**

Kí hiệu  $V_1$  và  $V_2$  là các lớp đỉnh của đồ thị  $G$ . Chúng ta sẽ nói một  $t$ -tập (một tập hợp có  $t$  phần tử)  $T$  của  $V_2$  là **được phủ bởi một đỉnh**  $x \in V_1$  nếu  $x$  được nối với mọi đỉnh trong  $T$ . Số các  $t$ -tập được phủ bởi một đỉnh  $x \in V_1$  là  $\binom{d(x)}{t}$ . Từ giả thiết của bài toán trên đồ thị  $G$ , chúng ta dễ dàng suy ra rằng mỗi  $t$ -tập trong  $V_2$  đều được phủ bởi tối đa  $s - 1$  đỉnh của  $V_1$ , nên

$$\sum_{x \in V_1} \binom{d(x)}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}.$$

Do  $\sum_{x \in V_1} d(x) = z = my = km + r, 0 \leq r < m$  và  $f(u) = \binom{u}{t}, u \geq t$  là một hàm lồi theo biến  $u$  nên bất đẳng thức  $\sum_{x \in V_1} \binom{d(x)}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}$  sẽ kéo theo  $m\binom{y}{t} \leq (m - r)\binom{k}{t} + r\binom{k+1}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}$ .  $\square$

Phép chứng minh của Kết quả 4.2.5) là một ứng dụng của nguyên lí đếm bằng hai cách đơn giản nhưng mạnh mẽ: chúng ta hãy đánh số nó một lần nữa, lần này là theo các cạnh của một đồ thị lưỡng phân  $H$  nào đó sao cho một trong các lớp đỉnh của  $H$  sẽ là  $V_1$  và lớp đỉnh còn lại sẽ là  $V_2^{(t)}$  - tập tất cả các  $t$ -tập con của  $V_2$ . Trong đồ thị  $H$  mới, chúng ta sẽ nối  $x \in V_1$  với  $A \in V_2^{(t)}$  nếu, trong  $G$ , đỉnh  $x$  được nối với tất cả  $t$  đỉnh của  $A$ .

Kế tiếp, bằng cách đếm theo  $V_1$ , chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng  $\|H\| = \sum_{x \in V_1} \binom{d(x)}{t}$ . Mặt khác, do  $G$  không có chứa  $K_{s,t}$  nên, trong  $H$ , mọi đỉnh  $A \in V_2^{(t)}$  đều chỉ có tối đa  $s - 1$  đỉnh láng giềng.

Như vậy,  $\|H\| \leq (s - 1)\binom{n}{t}$ .

**Kết quả 4.2.6.**

Với mọi số tự nhiên  $m, n, s, t, z(m, n; s, t) \leq (s - 1)^{\frac{1}{t}}(n - t + 1)m^{1 - \frac{1}{t}} + (t - 1)m$ .

**Chứng minh kết quả 4.2.6.**

Kí hiệu  $G = G_2(m, n)$  là một đồ thị cực trị của hàm  $z(m, n; s, t) = my$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $K(s, t)$  nào. Do  $y \geq n$  nên bất đẳng thức  $m\binom{y}{t} \leq (m - r)\binom{k}{t} + r\binom{k+1}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}$  sẽ kéo theo

$$(y - (t - 1))^t \leq (s - 1)(n - (t - 1))^t m^{-1}.$$

Ưu điểm duy nhất của Kết quả 4.2.6) là nó khá minh bạch: với bất kì lựa chọn cụ thể nào của các tham số, chúng ta tốt hơn hết là nên xử lý bất đẳng thức  $m\binom{y}{t} \leq (m - r)\binom{k}{t} + r\binom{k+1}{t} \leq (s - 1)\binom{n}{t}$ .

Như vậy, chẳng hạn,

$$z(n, n; s, 2) \leq \frac{n}{2} \left( 1 + (4(s-1)(n-1) + 1)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Thật vậy, với cách kí hiệu của Kết quả 4.2.5), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng  $n \binom{y}{2} \leq (s-1) \binom{n}{2}$ .

Như vậy,  $y^2 - y - (s-1)(n-1) \leq 0$ .

Điều này ngụ ý rằng  $ny$  tối đa không vượt quá  $\frac{n}{2} \left( 1 + (4(s-1)(n-1) + 1)^{\frac{1}{2}} \right)$ .

Phương pháp chứng minh Kết quả 4.2.5) cũng đưa ra một chặn trên cho  $ex(n; K_2(t))$  – số các cạnh lớn nhất có thể có trong một đồ thị bậc  $n$  mà không có chứa bất kì một  $t \times t$  đồ thị lưỡng phân đầy đủ.

#### Kết quả 4.2.7.

Giả sử cho trước các số nguyên không âm  $n, s, t, k, r$ . Kí hiệu  $G$  là một đồ thị bậc  $z = \frac{ny}{2} = \frac{1}{2}(kn + r)$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $K_{s,t}$  nào.

Khi đó,  $n \binom{y}{t} \leq (n-r) \binom{k}{t} + r \binom{k+1}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}$ . Hơn nữa,  $ex(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n$ .

#### Chứng minh kết quả 4.2.7.

Tương tự như trong Kết quả 4.2.5), chúng ta sẽ nói rằng một  $t$  – tập các đỉnh là được phủ bởi một đỉnh  $x$  nếu  $x$  được nối với tất cả các đỉnh của  $t$  – tập đó. Do  $G$  không có chứa bất kì một đồ thị  $K_{s,t}$  nào nên mọi  $t$  – tập đều được phủ bởi tối đa  $s-1$  đỉnh.

Như vậy, nếu  $G$  có dãy bậc  $(d_i)_{i=1}^n$  thì  $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}$  và phần còn lại được thực hiện tương tự như trong Kết quả 4.2.5) và Kết quả 4.2.6). □

Trên thực tế, chúng ta không cần phải lặp lại phép chứng minh của Kết quả 4.2.5) để chứng minh Kết quả 4.2.7): một phép lập luận “trùng lặp” đơn giản và tổng quát sẽ thực hiện được công việc này.

Giả sử cho trước một đồ thị  $G$  với tập đỉnh  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  và xây dựng một đồ thị lưỡng phân  $H = (V_1, V_2, E(H))$  như sau:

Chọn ra hai bản sao rời rạc của  $V(G)$ , tạm giả sử là  $V_1 = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  và  $V_2 = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$ . Đồ thị  $H$  sẽ có phân hoạch lưỡng phân  $(V_1, V_2)$  và  $x'_i x''_j \in E(H)$  nếu và chỉ nếu  $x_i x_j \in E(G)$ .

Hiển nhiên,  $\|H\| = 2\|G\|$ ; trên thực tế,  $d_G(x_i) = d_H(x'_i) = d_H(x''_i)$ , với mọi  $i$ . Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng nếu  $K_{s,t} \not\subset G$  thì  $K_{s,t} \not\subset H$ . Như vậy,  $z(n, n; s, t) \geq 2ex(n, K_{s,t})$ .

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Chúng ta có thể nói gì về hàm  $z(n, n; t, t)$ ?”.

Theo Kết quả 4.2.6), chúng ta thấy rằng nếu  $t \geq 2$  thì

$$z(n, n; t, t) \leq (t-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + (t-1)n. \quad (1)$$

Hơn nữa, từ Kết quả 4.2.7),

$$ex(n, K_{t,t}) \leq \frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n. \quad (2)$$

Rất có thể các bất đẳng thức (1) và (2) đưa ra bậc chính xác của các hàm  $z(n, n; t, t)$  và  $ex(n, K_{t,t})$  nhưng cho đến nay điều này chỉ được chứng minh với  $t = 2$  và  $t = 3$ . Trên thực tế, khá khó để chúng ta có thể tìm được các chặn dưới không tầm thường của  $z(m, n; s, t)$ . Trong **Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên**, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp xác suất để thu được một chặn dưới không tầm thường của  $z(m, n; s, t)$ . Ở đây, chúng ta sẽ giới thiệu một kết quả cơ bản cho trường hợp  $t = 2$  được chứng minh bởi Reiman vào năm 1958 thể hiện mối liên hệ giữa bài toán Zarankiewicz và các cấu hình tổ hợp, cụ thể là các mặt phẳng xạ ảnh, và chúng ta sẽ kết thúc lại phần này của bài viết với một số kết quả gần đây nhất cho trường hợp  $t \geq 3$ .

#### Kết quả 4.2.8. (Reiman)

Với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , chúng ta sẽ có  $z(n, n; 2, 2) \leq \frac{1}{2}n \left\{ 1 + (4n-3)^{\frac{1}{2}} \right\}$  và dấu “=” sẽ xảy ra với vô số các giá trị của  $n$ . Hơn nữa,  $ex(n, C_4) \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3})$ .

### Chứng minh kết quả 4.2.8.

Do  $2ex(n, K_{s,t}) \leq z(n, n; s, t)$  nên bất đẳng thức thứ hai được suy ra ngay lập tức từ bất đẳng thức thứ nhất. Hơn nữa, bất đẳng thức thứ nhất chỉ là trường hợp  $s = 2$  của bất đẳng thức (1). Trên thực tế, việc chứng minh Kết quả 4.2.5) cho chúng ta biết một lượng thông tin đáng kể về các đồ thị  $G$  mà tại đó dấu “=” đạt được. Chúng ta phải có  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ , hai đỉnh bất kì trong lớp đỉnh thứ hai  $V_2$  đều có bậc  $d$  và hai đỉnh bất kì trong lớp đỉnh thứ nhất  $V_1$  đều có đúng một đỉnh láng giềng chung. Hơn nữa, các khẳng định với  $V_1$  và  $V_2$  còn có thể được hoán đổi cho nhau.

Chúng ta sẽ gọi các đỉnh trong  $V_2$  là **các điểm** và các tập  $N(x), x \in V_1$ , là **các đường thẳng**. Theo nhận xét ở trên, chúng ta sẽ có  $n$  điểm và  $n$  đường thẳng sao cho mỗi điểm đều nằm trên  $d$  đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chứa  $d$  điểm, có đúng một đường thẳng đi qua hai điểm bất kì và hai đường thẳng bất kì giao nhau tại đúng một điểm. Như vậy, chúng ta thu được một **mặt phẳng xạ ảnh với bậc  $d - 1$** . Do các bước của quá trình lập luận trên có thể truy ngược lại nên chúng ta có thể thấy rằng dấu “=” sẽ xảy ra với vô số các giá trị của  $n$  mà tại đó chúng ta sẽ có một mặt phẳng xạ ảnh với  $n$  điểm. Đặc biệt, dấu “=” sẽ xảy ra với mọi  $n = q^2 + q + 1$  trong đó  $q$  là lũy thừa của một số nguyên tố nào đó.

Như vậy, chúng ta chỉ cần xem xét cấu trúc thực tế của  $G$  đối với các giá trị trên của  $n$ . Kí hiệu  $q$  là lũy thừa của một số nguyên tố nào đó và  $PG(2, q)$  là mặt phẳng xạ ảnh trên một trường bậc  $q$ . Kí hiệu  $V_1$  là tập các điểm và  $V_2$  là tập các đường thẳng.

Khi đó,  $|V_1| = |V_2| = q^2 + q + 1 = n$ .

Kí hiệu  $G$  là đồ thị lưỡng phân  $G_2(n, n)$  với các lớp đỉnh là  $V_1$  và  $V_2$  trong đó chúng ta sẽ nối một điểm  $P \in V_1$  với một đường thẳng  $l \in V_2$  bởi một cạnh nếu và chỉ nếu điểm  $P$  thực sự nằm trên đường thẳng  $l$ .

Khi đó,  $G$  sẽ có chứa  $n(q + 1) = \frac{1}{2}n \{1 + (4n - 3)^{\frac{1}{2}}\}$  cạnh và nó cũng không thể chứa bất kì một đồ thị  $C_4$  nào. □

Một biến thể khác của phép xây dựng nêu trên có thể được sử dụng để chứng minh rằng đánh giá cho  $ex(n, K_{2,2}) = ex(n, C_4)$  nêu trong Kết quả 4.2.7) về cơ bản là tốt nhất có thể.

Nhận thấy rằng các kết quả cho  $K_{3,3}$  gần như đều thỏa mãn các kết quả nêu trên cho  $K_{2,2} = C_4$ .

Từ (1) và (2), chúng ta thấy rằng  $z(n, n; 3, 3) \leq \left(2^{\frac{1}{3}} + o(1)\right)n^{\frac{5}{3}}$  và  $ex(n, K_{3,3}) \leq \frac{1}{2} \left(2^{\frac{1}{3}} + o(1)\right)n^{\frac{5}{3}}$ .

Bằng cách sử dụng một phép xây dựng khéo léo dựa trên các mô hình hình học hữu hạn, Brown đã chỉ ra vào năm 1966 rằng  $z(n, n; 3, 3) \geq (1 + o(1))n^{\frac{5}{3}}$  và  $ex(n, K_{3,3}) \geq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)n^{\frac{5}{3}}$ . Do đó, các bất đẳng thức (1) và (2) đưa ra các bậc chính xác cho  $K_{3,3}$ . Tuy nhiên, mãi cho đến hơn 30 năm sau, chúng ta mới có thể chứng minh được rằng các hằng số  $(1 + o(1))$  và  $\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$  trong các chặn dưới của Brown là tốt nhất có thể được.

Năm 1996, Füredi đã đưa ra cải tiến đáng kể đầu tiên cho chặn trên đơn giản nêu trong Kết quả 4.2.6) khi ông đã chứng minh được rằng, với mọi  $1 \leq t \leq s \leq m$ , chúng ta luôn có

$$z(m, n; s, t) \leq (s - t + 1)^{\frac{1}{t}} n m^{1 - \frac{1}{t}} + tn + tm^{2 - \frac{2}{t}}. \quad (3)$$

Bằng cách kết hợp (3) với chặn dưới được giới thiệu bởi Brown, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng  $z(n, n; 3, 3) = (1 + o(1))n^{\frac{5}{3}}$  và  $ex(n, K_{3,3}) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)n^{\frac{5}{3}}$ .

Bất chấp tất cả những kết quả nêu ở trên, chúng ta vẫn còn rất nhiều việc phải làm: Rất có thể (1) và (2) không chỉ đưa ra các bậc chính xác mà còn ngụ ý rằng  $z(n, n; t, t) = (c_t + o(1))n^{2 - \frac{1}{t}}$  và  $ex(n, K_{t,t}) = \frac{1}{2}(c_t + o(1))n^{2 - \frac{1}{t}}$ . Hơn nữa, có lẽ bất đẳng thức Füredi (3) về cơ bản là tốt nhất có thể và  $c_t = 1$ .

### 4.3. Đường đi và chu trình Hamiltonian

Một lớp các đồ thị được gọi là **đơn điệu** nếu với bất kì một đồ thị  $L$  nào thuộc lớp này và nếu  $M$  là một đồ thị nhận được từ  $L$  bằng cách bổ sung thêm vào  $L$  một cạnh nào đó (nhưng không có đỉnh) thì  $M$  cũng thuộc lớp đó. Phần lớn các định lý trong lý thuyết đồ thị đều có thể được biểu diễn lại bằng cách nói rằng

một lớp đơn điệu  $\mathcal{M}$  được chứa trong một lớp đơn điệu  $\mathcal{P}$  khác. Tất nhiên, các lớp này thường được mô tả lại dưới dạng các bất biến đồ thị hoặc các đồ thị chứa chúng. Chẳng hạn, với trường hợp đơn giản nhất của định lý Turán được thảo luận trong phần trước, chúng ta biết được rằng lớp  $\mathcal{M} = \left\{ G(n, m) : m > \frac{n^2}{4} \right\}$  được chứa trong lớp  $\mathcal{P} = \{G : G \text{ có chứa một tam giác}\}$ . Lưu ý rằng một lớp  $\mathcal{P}$  gồm các đồ thị được gọi là một **thuộc tính của các đồ thị** nếu  $L \in \mathcal{P}$  và  $L \cong M$  thì  $M \in \mathcal{P}$ .

Câu hỏi được đặt ra ở đây đó là: “Làm thế nào để chúng ta có thể quyết định xem một lớp  $\mathcal{M}$  có nằm trong một lớp  $\mathcal{P}$  khác hay không?”. Năm 1976, Bondy và Chvátal đã chỉ ra rằng, trong một số trường hợp, có một cách đơn giản và thú vị để giải quyết vấn đề này. Giả sử chúng ta có một lớp  $\mathcal{T}$  gồm các bộ ba  $(G, x, y)$ , trong đó  $G$  là một đồ thị và  $x, y$  là các đỉnh không liên hợp nào đó của  $G$ , sao cho nếu  $(G, x, y) \in \mathcal{T}$  và  $G \in \mathcal{M}$  thì  $G$  sẽ thuộc  $\mathcal{P}$  nếu và chỉ nếu  $G^+ = G + xy$ . (Chẳng hạn,  $\mathcal{P}$  là thuộc tính có chứa một  $K_r$  và  $\mathcal{T} = \{(G, x, y) : |N(x) \cap N(y)| < r - 2\}$ ) Như vậy, chúng ta đã thay thế  $G$  bởi  $G^+$ . Nếu  $G^+$  cũng có chứa hai đỉnh không liên hợp nào đó, tạm giả sử là  $u$  và  $v$ , thì chúng ta có thể lặp lại thao tác nêu ở trên: chúng ta có thể thay thế  $G^+$  bởi  $G^{++} = G^+ + uv$ . Bằng cách tiếp tục làm theo cách này, chúng ta sẽ nhận được một đồ thị  $G^* \supset G$  thuộc  $\mathcal{P}$  và  $G^*$  được gọi là **bao đóng của  $G$  đối với  $\mathcal{T}$** , nghĩa là nó có các thuộc tính bổ sung mà không có bất kì đỉnh  $a, b \in G^*$  nào với  $(G^*, a, b) \in \mathcal{T}$  có thể có. Như vậy, để quyết định xem liệu các đồ thị  $G^*$  có thuộc lớp  $\mathcal{M}$  hay không, chúng ta chỉ cần xem xét xem liệu chúng có thuộc lớp  $\mathcal{P}$  hay không là đủ.

Tất nhiên, phương pháp nêu trên chỉ khả thi nếu: (i) lớp  $\mathcal{T}$  đủ đơn giản; (ii) chúng ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng  $G$  thuộc  $\mathcal{P}$  nếu và chỉ nếu  $G^+$  cũng thuộc  $\mathcal{P}$ ; (iii) nếu chúng ta bắt đầu với một đồ thị  $G \in \mathcal{M}$  thì chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được đồ thị  $G^* \in \mathcal{M}$  cũng thuộc  $\mathcal{P}$ . Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ đưa ra hai ví dụ của Bondy và Chvátal thỏa mãn tất cả các yêu cầu nêu trên: chúng ta sẽ đưa ra các điều kiện đủ để một đồ thị có chứa một chu trình hoặc đường đi Hamilton. Do các tính chất đặc biệt của các ví dụ này nên sẽ rất tiện lợi khi chúng ta sử dụng các kí hiệu và thuật ngữ hơi khác nhau.

Giả sử cho trước các số tự nhiên  $n, k$  và kí hiệu  $\mathcal{P}$  là một lớp các đồ thị bậc  $n$ . Chúng ta sẽ nói rằng  $\mathcal{P}$  là  **$k$  – ổn định** nếu, với mọi đồ thị  $G$  với bậc  $n$  và với hai đỉnh phân biệt  $x, y$  bất kì nào đó không liên hợp của  $G$  sao cho  $d(x) + d(y) \geq k$ , thì  $G$  sẽ có thuộc tính  $\mathcal{P}$  nếu và chỉ nếu  $G^+ = G + xy$  cũng có thuộc tính đó. Dễ dàng nhận thấy rằng, với mọi đồ thị  $G$  với bậc  $n$ , chúng ta chỉ có thể có duy nhất một **đồ thị tối thiểu  $G^* = C_k(G)$**  có chứa  $G$  sao cho  $d_{G^*}(x) + d_{G^*}(y) \leq k - 1$  với  $xy \notin E(G^*)$ .

Với cách kí hiệu nêu trên, chúng ta sẽ chọn  $\mathcal{T} = \{(G, x, y) : |G| = n, xy \notin E(G), d(x) + d(y)\}$ . Điều này chắc chắn đủ đơn giản để thỏa mãn điều kiện (i). Điều đáng phấn khởi ở đây đó là  $G^* = C_k(G)$  là duy nhất. Từ định nghĩa, hầu như chúng ta sẽ có ngay **nguyên lý ổn định** sau: nếu  $\mathcal{P}$  là một thuộc tính  $k$  – ổn định của các đồ thị bậc  $n$  thì  $G$  sẽ có thuộc tính  $\mathcal{P}$  nếu và chỉ nếu  $C_k(G)$  cũng có thuộc tính  $\mathcal{P}$ . Chúng ta sẽ gọi  $C_k(G)$  là một  **$k$  – bao đóng** của  $G$ .

Điều kiện (ii) cũng được thỏa mãn, bởi vì ý chính của phép chứng minh của Kết quả 4.1.2) là thuộc tính của việc có chứa một chu trình Hamilton là  $n$  – ổn định và thuộc tính của việc có chứa một đường đi Hamilton là  $(n - 1)$  – ổn định. Thật vậy, nếu  $d(x) + d(y) \geq n - 1$  với hai đỉnh phân biệt  $x, y$  bất kì nào đó không liên hợp của  $G$  thì  $G$  sẽ là một đồ thị liên thông, nên chúng ta có thể tiếp tục áp dụng phép chứng minh Kết quả 4.1.2). (Trên thực tế, đây cũng chính là lí do để thúc đẩy chúng ta đưa ra khái niệm  $k$  – bao đóng) Từ nguyên lý ổn định, chúng ta dễ dàng nhận được dạng sau của Kết quả 4.1.2) trong trường hợp  $k = n$  và  $n - 1$ :

**Kết quả 4.3.1.**

Một đồ thị  $G$  là Hamiltonian nếu và chỉ nếu  $C_n(G)$  cũng là Hamiltonian. Hơn nữa,  $G$  sẽ có một đường đi Hamilton nếu và chỉ nếu  $C_{n-1}(G)$  cũng có một đường đi Hamilton.

Tùy thuộc vào khối lượng công việc mà chúng ta có thể và sẵn sàng thực hiện công việc ở giai đoạn cuối cùng này (xem điều kiện (iii)), chúng ta sẽ có được các điều kiện đủ khác để một đồ thị là Hamiltonian. Tất nhiên, trường hợp  $k = n$  của Kết quả 4.1.2) thu được mà không tốn bất kì một khó khăn nào và trường hợp  $k = n - 1$  cũng vậy, bởi vì các điều kiện chỉ ra ngay lập tức rằng  $C_n(G) = K_n$  trong trường hợp đầu tiên,  $C_{n-1}(G) = K_n$  trong trường hợp thứ hai và  $K_n$  là một đồ thị Hamiltonian nếu  $n \geq 3$ . Để có thể sử dụng tốt hơn Kết quả 4.3.1), chúng ta sẽ chứng minh một bổ đề kỹ thuật vô danh sau đây:

**Kết quả 4.3.2.**

Giả sử  $G$  là một đồ thị với tập đỉnh  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sao cho  $k$  - bao đóng  $C_k(G)$  chỉ chứa tối đa không vượt quá  $t \leq n - 2$  đỉnh với bậc  $n - 1$ .

Khi đó, chúng ta sẽ tìm được các chỉ số  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , sao cho  $x_i x_j \in E(G)$  và thỏa mãn bốn bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned} j &\geq \max\{2n - k - i, n - t\}, \\ d(x_i) &\leq i + k - n, d(x_j) \leq j + k - n - 1, \\ d(x_i) + d(x_j) &\leq k - 1. \end{aligned} \quad (*)$$

Lưu ý rằng chúng ta không giả thiết dãy bậc  $d(x_1), d(x_2), \dots, d(x_n)$  của  $G$  được sắp xếp theo bất kì một thứ tự nào.

**Chứng minh kết quả 4.3.2.**

Nhận thấy rằng do  $H = C_k(G)$  không phải là một đồ thị đầy đủ nên chúng ta có thể tìm được hai chỉ số  $i$  và  $j$  như sau:

$$\begin{aligned} j &= \max\{l: d_H(x_l) \neq n - 1\}, \\ i &= \max\{l: x_l x_j \notin E(H)\}. \end{aligned}$$

Khi đó,  $x_i x_j \notin E(H)$ , nên  $d_H(x_i) + d_H(x_j) \leq k - 1$ . Điều này ngụ ý bất đẳng thức thứ tư nêu trong (\*). Do mỗi một trong các đỉnh  $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n$  đều có bậc  $n - 1$  trong  $H$  nên

$$n - j \leq t,$$

$$n - j \leq \delta(H) \leq d_H(x_i).$$

Hơn nữa, do đỉnh  $x_j$  được nối với  $n - j$  đỉnh nằm sau nó và với  $j - i - 1$  đỉnh đứng trước nó, nên

$$d_H(x_j) \geq (n - j) + (j - i - 1) = n - i - 1.$$

Những bất đẳng thức này cho phép chúng ta chỉ ra rằng các chỉ số  $i, j, 1 \leq i < j \leq n$  cũng thỏa mãn ba bất đẳng thức còn lại trong (\*).

Thật vậy,

$$d_G(x_i) \leq d_H(x_i) \leq k - 1 - d_H(x_j) \leq k - 1 - (n - i - 1) = i + k - n,$$

$$d_G(x_j) \leq d_H(x_j) \leq k - 1 - d_H(x_i) \leq k - 1 - (n - j) = j + k - n - 1,$$

$$i + j \geq (n - d_H(x_j) - 1) + (n - d_H(x_i)) \geq 2n - 1 - (k - 1) = 2n - k. \quad \square$$

Bằng cách kết hợp Kết quả 4.3.1) và Kết quả 4.3.2) (với  $t = n - 2$  và  $k = n$  hoặc  $n - 1$ ), chúng ta dễ dàng thu được định lí sau đây của Bondy và Chvátal – một điều kiện đủ khá phức tạp nhưng hữu ích cho sự tồn tại của một đường đi hoặc chu trình Hamilton.

#### Kết quả 4.3.3. (Bondy – Chvátal)

Giả sử  $G$  là một đồ thị với tập đỉnh  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, n \geq 3$ . Kí hiệu  $\varepsilon = 0$  hoặc  $1$  và giả sử rằng không tồn tại các chỉ số  $i, j, 1 \leq i < j \leq n$  sao cho  $x_i x_j \notin E(G)$  và

$$j \geq n - i + \varepsilon,$$

$$d(x_i) \leq i - \varepsilon, d(x_j) \leq j - 1 - \varepsilon,$$

$$d(x_i) + d(x_j) \leq n - 1 - \varepsilon.$$

Khi đó, nếu  $\varepsilon = 0$  thì  $G$  sẽ có chứa một chu trình Hamilton, và nếu  $\varepsilon = 1$  thì  $G$  sẽ có chứa một đường đi Hamilton.

Một hệ quả tức thì của kết quả này là định lí sau đây của Chvátal:

#### Kết quả 4.3.4. (Chvátal)

Giả sử  $G$  là một đồ thị với dãy bậc  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n, n \geq 3$ , kí hiệu  $\varepsilon = 0$  hoặc  $1$ , sao cho

$$d_{n-k+\varepsilon} \geq n - k \text{ bất cứ khi nào } d_k \leq k - \varepsilon < \frac{1}{2}(n - \varepsilon).$$

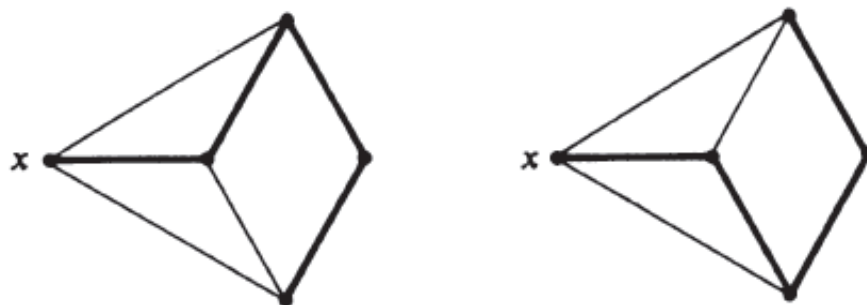
Khi đó, nếu  $\varepsilon = 0$  thì  $G$  sẽ có chứa một chu trình Hamilton, và nếu  $\varepsilon = 1$  thì  $G$  sẽ có chứa một đường đi Hamilton.

Chúng ta lưu ý rằng các khẳng định nêu trong kết quả trên theo một nghĩa nào đó là tốt nhất có thể. Đặc biệt, nếu  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  là một dãy bậc sao cho  $d_k \leq k < \frac{n}{2}$  và  $d_{n-k} < n - k$  thì chúng ta sẽ tìm được một đồ thị  $G$  với tập đỉnh  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sao cho  $d(x_i) \geq d_i, 1 \leq i \leq n$ , và  $G$  không có chứa bất kì một chu trình Hamilton nào.

Có một cách thông thường khác để giúp chúng ta có thể chỉ ra một đồ thị có chứa một chu trình hoặc đường đi Hamilton. Kí hiệu  $S$  là một  $x_0$  – đường đi dài nhất trong  $G$ , nghĩa là một đường đi dài nhất bắt đầu tại  $x_0$ :  $S = x_0 x_1 \dots x_k$ . Khi đó,  $N(x_k) \subset \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ , bởi vì nếu không thì  $S$  có thể được tiếp tục để nhận được một đường đi dài hơn. Nếu  $x_k$  liên hợp với một  $x_j, 0 \leq j < k - 1$  nào đó thì  $S' =$

$x_0x_1 \dots x_jx_kx_{k-1} \dots x_{j+1}$  sẽ là một  $x_0$  – đường đi dài nhất khác. Chúng ta sẽ gọi  $S'$  là một **phép biến đổi sơ cấp của  $S$** . Nó nhận được từ  $S$  bằng cách xóa cạnh  $x_jx_{j+1}$  và thêm vào nó cạnh  $x_kx_j$ . Lưu ý rằng nếu  $S'$  là một phép biến đổi sơ cấp của  $S$  thì  $S$  cũng là một phép biến đổi sơ cấp của  $S'$  và  $S$  có đúng

$d(x_k) - 1$  phép biến đổi sơ cấp. Kết quả của một dãy các phép biến đổi sơ cấp sẽ được gọi là một **phép biến đổi**.



Hình ảnh minh họa một  $x$  – đường đi và một phép biến đổi đơn giản của nó.

Định lý sau đây thường được gọi là Bổ đề Pósa: như chúng ta sẽ thấy trong Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên, nó có thể được sử dụng để chứng minh sự tồn tại của các chu trình Hamilton trong các đồ thị ngẫu nhiên. Để trình bày nó, kí hiệu  $L$  là tập các đỉnh cuối (khác với  $x_0$ ) của các phép biến đổi của  $S$ , và kí hiệu  $N = \{x_j \in S: x_{j-1} \in L \text{ hoặc } x_{j+1} \in L\}$  và  $R = V \setminus N \cup L$ . Như vậy,  $L$  là tập các đỉnh cuối của các phép biến đổi,  $N$  là tập các đỉnh láng giềng của chúng trên  $S$  và  $R$  là các đỉnh còn lại.

#### Kết quả 4.3.5. (Pósa)

Đồ thị  $G$  không có chứa bất kì một  $L - R$  cạnh nào.

#### Chứng minh kết quả 4.3.5.

Nhắc lại rằng không thể có bất kì một cạnh nào giữa  $L$  và  $V(G) \setminus V(S)$  (bởi vì  $S$  là một  $x_0$  – đường đi dài nhất), nên đặc biệt chúng ta dễ dàng suy ra rằng  $V(S) = V(P)$ , với mọi phép biến đổi  $P$  của  $S$ .

Giả sử  $x_ix_j \in E(G)$ , trong đó  $x_i \in L$  và  $x_j \in R$ . Kí hiệu  $S_i$  là một phép biến đổi của  $S$  kết thúc tại  $x_i$ . Do có ít nhất một đỉnh láng giềng của  $x_j$  trên  $S_j$  là đỉnh cuối của một phép biến đổi sơ cấp của  $S_i$  nên  $x_j$  không thể có cùng các đỉnh láng giềng trên  $S$  và  $S_i$ , bởi vì nếu không thì  $x_j$  sẽ thuộc  $N$ . Tuy nhiên, khi cạnh  $x_{i'}x_j, j' = j - 1$  hoặc  $j + 1$ , bị xóa trong một dãy  $S \rightarrow S' \rightarrow S'' \rightarrow \dots \rightarrow S_i$  các phép biến đổi sơ cấp nên một trong các đỉnh  $x_{j'}, x_j$  sẽ được đưa vào  $L$  và cái kia thì được đưa vào  $N$ . Như vậy,  $x_j \in L \cup N = V(G) \setminus R$ , mâu thuẫn giả thiết của bài toán.  $\square$

Các định lý sau đây cũng thu được khi sử dụng các phép biến đổi sơ cấp: chúng được đề xuất bởi Thomason – người đã mở rộng các kết quả trước đó của Smith.

#### Kết quả 4.3.6.

Giả sử  $W$  là tập các đỉnh có bậc chẵn trong một đồ thị  $G$  và kí hiệu  $x_0$  là một đỉnh bất kì của  $G$ .

Khi đó, chúng ta sẽ có một số chẵn các  $x_0$  – đường đi dài nhất kết thúc tại  $W$ .

### Chứng minh kết quả 4.3.6.

Giả sử  $H$  là đồ thị có tập đỉnh là tập  $\Sigma$  gồm các  $x_0$  – đường đi dài nhất trong  $G$ , trong đó  $P_1 \in \Sigma$  sẽ được nối với  $P_2 \in \Sigma$  nếu  $P_2$  là một phép biến đổi sơ cấp của  $P_1$ . Do bậc của  $P = x_0 x_1 \dots x_k \in \Sigma$  trong  $H$  là  $d(x_k) - 1$  nên tập các đường đi dài nhất kết thúc tại  $W$  chính là tập các đỉnh có bậc lẻ trong  $H$ . Như vậy, số các đỉnh có bậc lẻ sẽ là một số chẵn trong bất kì một đồ thị nào. Điều này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta.  $\square$

### Kết quả 4.3.7.

Giả sử  $G$  là một đồ thị trong đó mọi đỉnh đều có bậc lẻ.

Khi đó, mọi cạnh của  $G$  đều được chứa trong một số chẵn các chu trình Hamilton.

### Chứng minh kết quả 4.3.7.

Giả sử  $x_0 y \in E(G)$ . Khi đó, trong  $G' = G - x_0 y$ , chỉ có duy nhất  $x_0$  và  $y$  có bậc chẵn; nên, trong  $G'$ , có một số chẵn các  $x_0$  – đường đi lớn nhất kết thúc tại  $y$ . Như vậy,  $G$  sẽ không có bất kì một chu trình Hamilton nào có chứa  $x_0 y$  hoặc nó sẽ có một số chẵn dương các chu trình Hamilton có chứa  $x_0 y$ .  $\square$

Trường hợp nổi bật nhất của Kết quả 4.3.7) là trong các khối lập phương, mọi cạnh đều được chứa trong một số chẵn các chu trình Hamilton; đặc biệt, với mỗi cạnh của một chu trình Hamilton bất kì, có một chu trình Hamilton khác có chứa cạnh đó.

## 4.4. Cấu trúc của các đồ thị

Nhận thấy rằng do đồ thị Turán  $T_r(n)$  không có chứa bất kì một đồ thị đầy đủ với bậc  $r + 1$  nào nên nó sẽ có ít nhất  $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{n}{2}$  cạnh. Tuy nhiên, một đồ thị với bậc  $n$  và kích thước  $\geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{n}{2}$  cạnh không nhất thiết chỉ có chứa một đồ thị  $K_{r+1}$ . Mục đích chính của phần này của bài viết là chứng minh một kết quả sâu sắc của Erdős và Stone, được xuất bản năm 1946, chỉ ra rằng nếu, với mọi số thực dương  $\varepsilon > 0$  cho trước, thì việc có  $\geq \varepsilon n^2$  cạnh không thể đảm bảo nó chỉ có chứa một đồ thị  $K_{r+1}$  nhưng chắc chắn nó sẽ có chứa một đồ thị  $K_{r+1}(t)$  – một đồ thị  $(r + 1)$  – phần đầy đủ với  $t$  đỉnh trong mỗi lớp, với  $t \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Định lý Erdős – Stone còn được gọi là định lý cơ bản của lý thuyết cực trị đồ thị.

Một kết quả sắc nét hơn đáng kể được công bố bởi Bollobás và Erdős vào năm 1976 – kết quả này chỉ ra rằng  $\log n$  chính là bậc của  $t$  khi tiến tới  $\infty$ ; đây chính là định lý chúng ta sẽ chứng minh. Nói một cách chính xác, để làm cho các phép tính trở nên dễ chịu hơn, chúng ta sẽ chỉ trình bày cách chứng minh một dạng yếu hơn của kết quả này.

Với  $r = 1$ , vấn đề này chính là bài toán Zarankiewicz đã được thảo luận trong mục 4.2. **Đồ thị con đầy đủ**, nhưng lần này là đối với các đồ thị khá dày đặc, với  $t \rightarrow \infty$ . Những gì chúng ta muốn có thể được xem trong (2), nhưng bởi vì chúng ta sẽ dễ dàng hài lòng với một kết quả thậm chí còn đơn giản hơn, chúng ta có thể bỏ qua lập luận này. Chúng ta có thể khẳng định rằng nếu, với mọi số thực dương  $\varepsilon > 0$  cho trước và  $n$  đủ lớn, thì mọi đồ thị  $G$  với bậc  $n$  và bậc nhỏ nhất  $\geq \varepsilon n$  đều có chứa một đồ thị  $K_2(t)$  với  $t \geq \varepsilon \log n$ .

Để chứng minh điều này, giả sử  $G$  không có chứa bất kì một đồ thị  $K_2(t)$  nào. Như trước đây, chúng ta sẽ nói rằng **một tập gồm  $t$  đỉnh được phủ bởi một đỉnh  $x$**  nếu  $x$  được nối với mọi đỉnh nằm trong tập đó. Mọi

đỉnh của  $G$  đều phủ ít nhất  $\binom{\varepsilon n}{t}$  tập gồm  $t$  đỉnh và không có bất kì một tập gồm  $t$  đỉnh nào được phủ chỉ bởi  $t$  đỉnh.

Như vậy,  $n\binom{\varepsilon n}{t} < t\binom{n}{t}$ .

Bất đẳng thức này là sai đối với  $t = \lceil \varepsilon \log n \rceil$  và  $n$  đủ lớn, bởi vì khi đó

$$\begin{aligned} t\binom{n}{t}/n\binom{\varepsilon n}{t} &\leq \frac{t}{n}\varepsilon^{-t}\left(1 - \frac{t}{\varepsilon n}\right)^{-t} < \frac{2t}{n}\varepsilon^{-t} \\ &< \frac{2t}{\varepsilon n}e^{\log(1/\varepsilon)\varepsilon \log n} \leq \frac{2t}{\varepsilon n}n^{\frac{1}{\varepsilon}} < 1. \end{aligned}$$

Điều chúng ta vừa chứng minh là trường hợp  $r = 1$  của định lí dưới đây; kết quả này chỉ yếu hơn một chút so với dạng phát biểu của Định lí Erdős – Stone được đưa ra trong Kết quả 4.4.3):

#### Kết quả 4.4.1.

Giả sử cho trước một số nguyên  $r \geq 1$  và một số thực dương  $\varepsilon > 0$ .

Khi đó, chúng ta có thể tìm được một số nguyên  $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$  sao cho nếu  $|G| = n \geq n_0$  và  $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n$  thì  $G \supset K_{r+1}(t)$  với  $t \geq \frac{\varepsilon \log n}{2^{r-1}(r-1)!}$ .

#### Chứng minh kết quả 4.4.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ áp dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $r$ . Như trong trường hợp  $r = 1$  đã chứng minh ở trên, chúng ta chỉ cần tiến hành chứng minh bước quy nạp là đủ. Giả sử cho trước một số nguyên  $r \geq 2$  và kí hiệu  $G$  là một đồ thị với  $n$  đỉnh và bậc nhỏ nhất  $\geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n$ . Lưu ý rằng  $0 < \varepsilon < 1/r$ . Do  $\delta(G) > \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r(r-1)}\right)n$  nên, từ giả thiết quy nạp của bài toán,  $G$  có chứa một đồ thị  $K_r(T) = K$ , với  $T = \lfloor d_r \log n \rfloor$  đỉnh trong mỗi lớp, trong đó  $d_r = 2^{2-r}/r!$ . Kí hiệu  $U$  là một tập các đỉnh nào đó nằm trong  $G - K$  được nối với ít nhất  $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|K|$  đỉnh của  $K$ . Chúng ta sẽ chứng minh rằng  $|U| \geq \varepsilon n$ . Để thấy điều này, chúng ta nhận xét rằng số các cạnh  $f$  nằm giữa  $K$  và  $G - K$  sẽ thỏa mãn  $|K|\left\{\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n - |K|\right\} \leq f \leq |U||K| + (n - |U|)\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|K|$ , nghĩa là

$$\frac{r\varepsilon n}{n} \leq |U|\left(1 - \frac{r\varepsilon}{2}\right) + r|K|.$$

Điều này ngụ ý rằng  $|U| \geq r\varepsilon n/2 \geq \varepsilon n$  nếu  $n$  đủ lớn, nghĩa là khẳng định của chúng ta là đúng.

Kí hiệu  $t = \lfloor \log n / 2^{r-1}(r-1)! \rfloor$ .

Khi đó,  $t \leq \lfloor (r\varepsilon/2)T \rfloor$ , nên  $\left\lfloor \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|K| \right\rfloor = \lfloor (r-1)T + (r\varepsilon/2)T \rfloor \geq (r-1)T + t$ .

Chúng ta cũng sẽ nói một đồ thị con  $H$  của  $G$  là **được phủ bởi một đỉnh  $x$**  nếu  $x$  được nối với mọi đỉnh của  $H$ . Bất đẳng thức nêu ở trên chỉ ra rằng mọi đỉnh của  $U$  đều phủ ít nhất một đồ thị con  $K_r(t)$  của  $K$ . Trong  $K$ , do chỉ có  $\binom{T}{t}^r$  đồ thị con như vậy nên chúng ta có thể tìm được một tập  $W \subset U$ ,  $|W| \geq |U|/\binom{T}{t}^r$  sao cho mọi đỉnh của  $W$  đều phủ cùng một đồ thị con  $K_r(t)$  của  $K$ . Để hoàn tất phép chứng minh, tất cả

những gì chúng ta phải làm đó là chỉ ra rằng  $|W| \geq t$ . Kế tiếp,  $t/eT > \varepsilon/3$ , và từ công thức Stirling,  $t \geq (t/e)^t$ , nên

$$\begin{aligned} |W| &\geq \varepsilon n \left( \frac{t}{eT} \right)^{tr} \geq \varepsilon n (\varepsilon/3)^{tr} \\ &> \varepsilon n (\varepsilon/3)^r e^{\log(\varepsilon/3) r \varepsilon \log n / 2^{r-1} (r-1)!}. \end{aligned}$$

Do  $r \leq 2^{r-1} (r-1)!$  và  $\log(\varepsilon/3) \varepsilon \geq \log(1/6)/2 > -1$  nên chúng ta suy ra rằng  $|W| > t$ . □

Quan sát sau đây cho phép chúng ta làm suy yếu điều kiện trên bậc nhỏ nhất nêu ở trên về thành điều kiện trên kích thước:

#### Kết quả 4.4.2.

Giả sử cho trước các số thực  $c, \varepsilon > 0$ .

Khi đó, nếu  $n$  đủ lớn, tạm giả sử  $n > 3/\varepsilon$ , thì mọi đồ thị với bậc  $n$  và kích thước  $\geq (c + \varepsilon) \binom{n}{2}$  đều có chứa một đồ thị con  $H$  với  $\delta(H) \geq c|H|$  và  $|H| \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}} n$ .

#### Chứng minh kết quả 4.4.2.

Giả sử  $G$  là một đồ thị với bậc  $n > 3/\varepsilon$  và kích thước  $\|G\| \geq (c + \varepsilon) \binom{n}{2}$ . Lưu ý rằng, trong trường hợp này,  $0 < \varepsilon < \varepsilon + c \leq 1$ . Nếu khẳng định nêu trên là sai thì chúng ta sẽ tìm được một dãy các đồ thị  $G_n = G \supset G_{n-1} \supset \dots \supset G_l, l = \left\lfloor \varepsilon^{\frac{1}{2}} n \right\rfloor$  sao cho  $|G_j| = j$  và, với  $n \geq j > l$ , chỉ có duy nhất các đỉnh của  $G_j$  không nằm trong  $G_{j-1}$  là có bậc  $< cj$  trong  $G_j$ .

Khi đó,

$$\begin{aligned} \|G_l\| &> (c + \varepsilon) \binom{n}{2} - \sum_{j=l+1}^n c_j = (c + \varepsilon) \binom{n}{2} - c \left\{ \binom{n+1}{2} - \binom{l+1}{2} \right\} \\ &> \varepsilon \binom{n}{2} + c \binom{l+1}{2} - cn > \varepsilon \binom{n}{2} > \binom{l}{2}, \text{ bởi vì } 0 < \varepsilon < 1 \text{ và } n \geq 3/n. \end{aligned}$$

Điều mâu thuẫn này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta. □

Bằng cách kết hợp Kết quả 4.4.1) và Kết quả 4.4.2), chúng ta sẽ thu được dạng mạnh sau đây của Định lý Erdős – Stone được đề xuất vào năm 1946 và được phổ biến bởi Bollobás và Erdős vào năm 1973:

#### Kết quả 4.4.3. (Erdős – Stone)

Giả sử cho trước một số nguyên  $r \geq 1$  và một số thực dương  $\varepsilon > 0$ .

Khi đó, chúng ta có thể tìm được một số nguyên  $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$  sao cho nếu  $|G| = n \geq n_0$  và  $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}$  thì  $G \supset K_{r+1}(t)$  với  $t \geq \frac{\varepsilon \log n}{2^{r+1}(r-1)!}$ .

#### Chứng minh kết quả 4.4.3.

Nhận thấy rằng nếu  $n > 3/\varepsilon$  thì, từ Kết quả 4.4.2),  $G$  sẽ có chứa một đồ thị con  $H$  với  $|H| = h \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}}n$  và  $\delta(H) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)h$ . Như vậy, nếu  $n$  đủ lớn thì  $H$  sẽ có chứa một đồ thị con  $K_{r+1}(t)$  với  $t \geq \frac{\varepsilon}{2} \log h / (2^{r-1}(r-1)!) \geq \varepsilon \log n / (2^{r+1}(r-1)!) như đã tuyên bố.  $\square$$

Hàm  $n_0(r, \varepsilon)$  xuất hiện trong Kết quả 4.4.3) là không lớn lắm: chúng ta có thể kiểm tra được rằng  $n_0(r, \varepsilon) = \max\{[3/\varepsilon], 100\}$ .

Theo một nghĩa nào đó, Kết quả 4.4.3) là tốt nhất có thể: với mọi số thực  $\varepsilon$  và  $r$  cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được một hằng số  $d_r^*$  tiến tới 0 với  $\varepsilon$  sao cho đồ thị được mô tả trong định lí sẽ không cần thiết phải có chứa một đồ thị  $K_r(t)$  với  $t = \lfloor d_r^* \log n \rfloor$ . Trên thực tế, chúng ta sẽ thấy rằng nếu  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  và  $d_2^* > -2 / \log(2\varepsilon)$  thì, với mọi  $n$  đủ lớn, chúng ta có thể tìm được một đồ thị  $G(n, m)$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $K_2(t)$  nào với  $m = \lfloor \varepsilon n^2 \rfloor$  và  $t = \lfloor d_2^* \log n \rfloor$ . Kết quả này ngụ ý ngay lập tức rằng nếu  $r > 2$  và  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(r-1)^{-2}$  thì bất cứ giá trị nào lớn hơn  $-2/\log(2(r-1)^2\varepsilon)$  cũng sẽ đúng cho  $d_r^*$ .

Thực tế là ví dụ này chỉ ra bậc chính xác của  $d(\varepsilon, r)$  là một kết quả sâu sắc hơn rất nhiều: điều này đã được chứng minh bởi Chvátal và Szemerédi vào năm 1981 bằng cách sử dụng một công cụ rất mạnh, Bổ đề Szemerédi, sẽ được trình bày trong phần kế tiếp.

Do  $d \log n \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$  nên, từ Định lí Erdős – Stone, chúng ta có ngay các hệ quả sau đây. Đầu tiên là dạng yếu hơn một chút của Định lí Erdős – Stone:

#### Kết quả 4.4.4.

Kí hiệu  $F = K_{r+1}(t)$  với  $r \geq 1$  và  $t \geq 1$ .

Khi đó, kích thước lớn nhất có thể có của một đồ thị bậc  $n$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $K_{r+1}(t)$  nào là

$$ex(n; F) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

### Kết quả 4.4.5.

Giả sử cho trước các đồ thị không rỗng  $F_1, F_2, \dots, F_l$ . Kí hiệu  $r + 1$  là giá trị nhỏ nhất có thể có trong số các sắc số của  $F_i$ , nghĩa là  $r + 1$  là giá trị nhỏ nhất có thể có để có ít nhất một trong số các  $F_i$  được chứa trong một đồ thị  $F = K_{r+1}(t)$  với một số  $t$  nào đó.

Khi đó, kích thước lớn nhất có thể có của một đồ thị bậc  $n$  không có chứa bất kì một đồ thị con  $F_i$  nào là

$$ex(n; F_1, F_2, \dots, F_l) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

Kết quả 4.4.3) là cơ sở của một nghiên cứu khá chi tiết về cấu trúc của các đồ thị cực trị, được đề xuất bởi Erdős và Simonovits, cho chúng ta kết quả chính xác hơn đáng kể so với Kết quả 4.4.5). Tuy nhiên, lý thuyết này nằm ngoài phạm vi bài viết này của chúng ta.

**Mật độ của một đồ thị  $G$  với bậc  $n$**  được định nghĩa là chỉ số  $\frac{\|G\|}{\binom{n}{2}}$ . **Mật độ trên của một đồ thị vô hạn  $G$**  được định nghĩa là cận trên của các mật độ của các đồ thị con hữu hạn lớn tùy ý của  $G$ . Điều đáng ngạc nhiên và thú vị là không phải mọi giá trị từ 0 đến 1 đều là mật độ trên của một đồ thị vô hạn nào đó; trên thực tế, phạm vi của các mật độ trên là một tập đếm được.

#### Kết quả 4.4.6.

Mật độ trên của một đồ thị vô hạn  $G$  có thể là  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ , hoặc 0. Mỗi giá trị này đều là mật độ trên của một số đồ thị vô hạn nào đó.

#### Chứng minh kết quả 4.4.6.

Giả sử  $G_r$  là một đồ thị  $r$  – phần đầy đủ với vô số các đỉnh trong mỗi lớp. Do mật độ của  $K_r(t)$  sẽ tiến tới  $1 - \frac{1}{r}$  nên điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định thứ hai.

Kế tiếp, kí hiệu  $\alpha$  là mật độ trên của  $G$  và giả sử rằng  $\alpha > 1 - \frac{1}{r-1}$  với  $r \geq 2$ .

Khi đó, chúng ta có thể tìm được một số  $\varepsilon > 0$  sao cho  $G$  có chứa các đồ thị  $H_k$  có bậc  $n_k$  với  $n_k \rightarrow \infty$  sao cho

$$\|H_k\| \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon \right) n_k^2.$$

Theo Kết quả 4.4.3), mỗi  $H_k$  đều có chứa một đồ thị con  $K_r(t_k)$  với  $t_k \rightarrow \infty$ ; các đồ thị con  $K_r(t_k)$  này chỉ ra rằng  $\alpha \geq \frac{1}{r}$ . □

Các kết quả ở trên đưa ra câu trả lời khá thỏa đáng cho bài toán đồ thị con bị cấm với điều kiện là không có đồ thị con nào bị cấm là đồ thị lưỡng phân, và Erdős và Simonovits đã chứng minh một số kết quả mạnh hơn đáng kể.

Tuy nhiên, với một đồ thị lưỡng phân tổng quát  $F$ , kết quả  $ex(n; F) = o(n^2)$  là khá yếu và, với hầu hết các đồ thị lưỡng phân  $F$ , chúng ta thậm chí không thể xác định số mũ  $\alpha$  của  $n$  sao cho

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n; F)}{n^\alpha} < \infty.$$

Ngoài ra, chúng ta cũng chỉ có các kết quả thô cho các siêu đồ thị và chúng ta vẫn còn rất nhiều việc phải làm.

### 4.5. Bổ đề Szemerédi

Năm 1975, Szemerédi đã chứng minh một trong những kết quả tuyệt vời nhất trong toán tổ hợp: mọi tập các số tự nhiên với mật độ dương đều có chứa các cấp số cộng với chiều dài tùy ý. Một bước quan trọng trong phép chứng minh là một bổ đề có vẻ ngẫu nhiên nhưng hóa ra lại có tầm quan trọng thiết yếu trong việc giải quyết một loạt các bài toán cực trị. Bổ đề này thường được gọi là bổ đề chính quy của Szemerédi, mặc dù “tính đồng nhất” chứ không phải là “tính chính quy” sẽ được đề cập đến nhiều hơn. Nói một cách đơn giản, bổ đề chỉ ra rằng tập đỉnh của mọi đồ thị đều có thể được phân hoạch thành nhiều lớp gần như bằng nhau sao cho hầu hết các cặp của các lớp là “chính quy”, nghĩa là số các cạnh giữa hai tập con bất kì của các

lớp sẽ tỉ lệ với số các cạnh có thể có giữa các tập con miễn là các tập con đó không quá nhỏ. Do đó, với một cặp “chính quy” bất kì của các lớp, không thể xảy ra trường hợp có một số hai  $k$  – tập nào đó cảm sinh nhiều cạnh trong khi một số khác chỉ cảm sinh một vài cạnh. Để phát biểu bổ đề một cách chính xác, chúng ta sẽ cần đến một số định nghĩa và kí hiệu sau:

Giả sử cho trước một đồ thị  $G = (V, E)$  và một cặp  $(X, Y)$  gồm các tập con không rỗng của  $V$ , kí hiệu  $\|X, Y\| = \|X, Y\|_G$  là số các  $X - Y$  cạnh của  $G$  và kí hiệu  $d(X, Y) = d_G(X, Y) = \|X, Y\|/(|X||Y|)$  là mật độ của các  $X - Y$  cạnh của  $G$ . Chúng ta sẽ gọi  $(X, Y)$  là một  $\varepsilon$  – **regular cặp** nếu  $|d(X^*, Y^*) - d(X, Y)| < \varepsilon$  bất cứ khi nào  $X^* \subset X$  và  $Y^* \subset Y$  sao cho  $|X^*| \geq \varepsilon|X| > 0$  và  $|Y^*| \geq \varepsilon|Y| > 0$ . Một phân hoạch  $\mathcal{P} = (C_i)_{i=0}^k$  của tập đỉnh  $V$  được gọi là **phân hoạch đều với lớp đặc biệt  $C_0$**  nếu  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_k|$ . Cuối cùng, một  $\varepsilon$  – **regular phân hoạch** được định nghĩa là một phân hoạch đều  $(C_i)_{i=0}^k$  sao cho lớp đặc biệt  $C_0$  có tối đa là  $\varepsilon n$  đỉnh và, ngoại trừ tối đa  $\varepsilon k^2$  cặp, các cặp  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , đều là một  $\varepsilon$  – regular.

Bổ đề Szemerédi (Kết quả ) chỉ ra rằng mọi đồ thị đều có ít nhất một  $\varepsilon$  – regular phân hoạch với một số giới hạn các lớp. Chúng ta sẽ bắt đầu phép chứng minh này với hai bổ đề đơn giản: bổ đề đầu tiên liên quan đến mật độ  $d(X, Y)$  và bổ đề thứ hai là một bất đẳng thức đơn giản.

#### Kết quả 4.5.1.

Giả sử cho trước các tập đỉnh phân biệt  $X$  và  $Y$  của một đồ thị  $G$ ,  $X^* \subset X, Y^* \subset Y$  sao cho  $|X^*| \geq (1 - \gamma)|X| > 0$  và  $|Y^*| \geq (1 - \delta)|Y| > 0$ .

Khi đó,  $|d(X^*, Y^*) - d(X, Y)| < \gamma + \delta$  và  $|d^2(X^*, Y^*) - d^2(X, Y)| < 2(\gamma + \delta)$ .

#### Chứng minh kết quả 4.5.1.

Nhận thấy rằng do  $0 \leq \|X, Y\| - \|X^*, Y^*\| \leq (\gamma + \delta - \gamma\delta)|X||Y| < (\gamma + \delta)|X||Y|$  nên

$$d(X, Y) - d(X^*, Y^*) \leq \frac{\|X, Y\| - \|X^*, Y^*\|}{|X||Y|} < \gamma + \delta.$$

Nếu chúng ta thay thế  $G$  bởi phần bù  $\bar{G}$  thì các mật độ  $d$  đều được đổi thành  $1 - d$ , nên

$$d(X^*, Y^*) - d(X, Y) = d_{\bar{G}}(X, Y) - d_{\bar{G}}(X^*, Y^*) < \gamma + \delta.$$

Điều này hoàn tất phép chứng minh của bất đẳng thức thứ nhất.

Bất đẳng thức thứ hai là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức thứ nhất:

$$|d^2(X^*, Y^*) - d^2(X, Y)| = |d(X^*, Y^*) + d(X, Y)| |d(X^*, Y^*) - d(X, Y)| < 2(\gamma + \delta). \quad \square$$

#### Kết quả 4.5.2.

Giả sử cho trước  $(d_i)_{i=1}^s \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq t < s$ , kí hiệu  $D = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s d_i$  và  $d = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d_i$ .

Khi đó,  $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s d_i^2 \geq D^2 + \frac{t}{s-t} (D - d)^2 \geq D^2 + \frac{t}{s} (D - d)^2$ .

Hơn nữa, nếu  $t \geq \gamma s$  và  $|D - d| \geq \delta > 0$  thì  $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s d_i^2 \geq D^2 + \gamma \delta^2$ .

### Chứng minh kết quả 4.5.2.

Bằng cách kí hiệu  $e = \frac{1}{s-t} \sum_{i=t+1}^s d_i = \frac{sD-tD}{s-t}$ , tính lời của hàm  $x^2$  chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s d_i^2 &= \sum_{i=1}^t d_i^2 + \sum_{i=t+1}^s d_i^2 \geq tD^2 + (s-t)e^2 \\ &= tD^2 + \frac{s^2D^2 - 2stdD + t^2d^2}{s-t} \\ &= sD^2 + \frac{st}{s-t}(D-d)^2. \end{aligned}$$

□

Giả sử cho trước một phân hoạch  $\mathcal{P} = (C_i)_{i=0}^k$  với lớp đặc biệt  $C_0$ , chúng ta định nghĩa **trung bình bình phương của  $\mathcal{P}$**  bởi biểu thức

$$q(\mathcal{P}) = \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq i < j \leq k} d^2(C_i, C_j).$$

Do  $d^2(C_i, C_j) \leq 1$  với mọi chỉ số  $i$  và  $j$  và tổng trên có  $\binom{k}{2}$  số hạng nên chúng ta sẽ có  $0 \leq q(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}$ .

Bổ đề cuối cùng, nền tảng của phép chứng minh bổ đề Szemerédi, chỉ ra rằng nếu  $\mathcal{P}$  không phải là một phân hoạch  $\varepsilon$  – đều mặc dù  $C_0$  đủ nhỏ thì chúng ta vẫn có thể tìm được một phân hoạch  $\mathcal{P}' = (C'_i)_{i=0}^l$ , với  $l$  là một hàm cho trước nào đó của  $k$ , sao cho  $q(\mathcal{P}')$  lớn hơn đáng kể so với  $q(\mathcal{P})$  trong khi  $|C'_0|$  chỉ lớn hơn một chút so với  $|C_0|$ . Như vậy, để tìm một phân hoạch  $\varepsilon$  – đều như vậy, tất cả những gì chúng ta cần phải làm đó là thay thế liên tục nhiều lần một phân hoạch ban đầu thích hợp bởi một phân hoạch khác với giá trị trung bình bình phương được tăng lên đáng kể. Quá trình này sẽ kết thúc sau một số bước hữu hạn nhất định và thu được phân hoạch  $\varepsilon$  – đều cần tìm:

### Kết quả 4.5.3.

Giả sử cho trước một đồ thị  $G$  bậc  $n$  với  $V = \bigcup_{i=0}^k C_i$  là một phân hoạch đều của tập đỉnh với lớp đặc biệt  $C_0$  và  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_k| = c \geq 2^{3k+1}$ . Giả sử thêm rằng  $\mathcal{P} = (C_i)_{i=0}^k$  không phải là một phân hoạch  $\varepsilon$  – đều, trong đó  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  và  $2^{-k} \leq \varepsilon^5/8$ .

Khi đó, chúng ta có thể tìm được một phân hoạch đều  $\mathcal{P}' = (C'_i)_{i=0}^l$  với  $l = k(4^k - 2^{k-1})$  và lớp đặc biệt  $C'_0 \supset C_0$  sao cho  $|C'_0| \leq |C_0| + \frac{n}{2^k}$  và  $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}$ .

### Chứng minh kết quả 4.5.3.

Với một cặp  $(C_i, C_j)$  không phải là  $\varepsilon$  – regular, kí hiệu  $C_{ij} \subset C_i$  và  $C_{ji} \subset C_j$  là các tập con sao cho  $(C_i, C_j)$  không phải là  $\varepsilon$  – regular:  $|C_{ij}| \geq \varepsilon|C_i| = \varepsilon c$ ,  $|C_{ji}| \geq \varepsilon|C_j| = \varepsilon c$ ,  $|d(C_{ij}, C_{ji}) - d(C_i, C_j)| \geq \varepsilon$ . (1)

Hơn nữa, với một cặp  $\varepsilon$  – regular  $(C_i, C_j)$ , kí hiệu  $C_{ij} = C_{ji} = \emptyset$ .

Lý tưởng nhất, chúng ta sẽ phân hoạch mỗi tập  $C_i$  thành một vài tập  $C'_h$  (theo phát biểu của bổ đề, thành  $4^k - 2^{k-1}$  tập) có kích thước  $d$  sao cho mỗi  $C_{ij}$  đều là hợp của một số tập  $C'_h$  này. Theo cách làm này, một sự sai biệt lớn  $|d(C_{ij}, C_{ji}) - d(C_i, C_j)|$ , theo Kết quả 4.5.2), sẽ đảm bảo rằng phần của  $q(\mathcal{P}')$  phát sinh từ

$d^2(C_i, C_j)$ , cụ thể là  $\frac{d^2}{c^2} \sum \{d^2(C'_g, C'_h) : C'_g \subset C_{ij}, C'_h \subset C_{ji}\}$ , sẽ lớn hơn đáng kể so với  $d^2(C_i, C_j)$ . Đổi lại, điều này chỉ ra rằng  $q(\mathcal{P}')$  lớn hơn đáng kể so với  $q(\mathcal{P})$ .

Mặc dù chúng ta không thể xây dựng các tập  $C'_h$  sao cho mỗi  $C_{ij}$  đều là hợp của một số tập hợp này nhưng chúng ta vẫn có thể đi đến khá gần với nó: chúng ta sẽ chỉ ra rằng mỗi  $C_{ij}$  gần như là hợp của các tập  $C'_h$  mà nó chứa. Chúng ta sẽ làm điều này bằng cách xem xét, với mỗi  $C_i$ , tất cả các tập  $C_{ij}$  cùng một lúc và chọn ra các tập  $C'_g$  trong tương lai (kí hiệu lại bởi  $D_{ih}$ ) sao cho chúng không cắt ngang bất kì một tập  $C_{ij}$  nào. Cái giá mà chúng ta phải trả chỉ đơn giản là chúng ta không thể phân hoạch  $C_i$  thành các tập  $C'_g$ . Như vậy, chúng ta sẽ phải bổ sung thêm phần còn lại vào “thùng rác”  $C_0$  để thu được một tập đặc biệt  $C'_0$  mới lớn hơn một chút so với tập  $C_0$ .

Để thực hiện được kế hoạch này của chúng ta, với mỗi  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , chúng ta sẽ xem xét các **nguyên tử** của đại số xác định trên  $C_i$  cảm sinh bởi các tập  $C_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k, j \neq i$ . Các nguyên tử này chính là các lớp tương đương của quan hệ tương đương  $\sim$  xác định trên  $C_i$  trong đó  $x \sim y$  có nghĩa là  $x \in C_{ij}$  nếu và chỉ nếu  $y \in C_{ij}$ . Lưu ý rằng  $C_i$  chỉ có thể có tối đa  $2^{k-1}$  nguyên tử.

Kí hiệu  $d = \left\lfloor \frac{c}{4^k} \right\rfloor$ , nghĩa là  $d \geq 2^{k+1}$  và  $4^k d \leq c \leq 4^k(d+1) - 1$ , và  $H := 4^k - 2^{k-1}$ . Kí hiệu  $D_{ih}$ ,  $1 \leq h \leq H$ , là các  $d$ -tập con phân biệt của  $C_i$  sao cho mỗi  $D_{ih}$  đều được chứa trong một nguyên tử nào đó của  $C_i$ . Cách chọn các tập  $D_{ih}$  như vậy là hoàn toàn khả thi bởi vì tất cả ngoại trừ tối đa  $d-1$  phần tử của mỗi nguyên tử là có thể được phân hoạch thành các  $d$ -tập con và

$$Hd + 2^{k-1}(d-1) = 4^k d - 2^{k-1} < 4^k d \leq c.$$

Với  $i, j = 1, \dots, k, j \neq k$ , kí hiệu  $\bar{C}_i = \bigcup_{h=1}^H D_{ih}$  và  $\bar{C}_{ij} = \bigcup \{D_{ih} : D_{ih} \subset C_{ij}\} = \bigcup_{D_{ih} \subset C_{ij}} D_{ih}$ . Mục đích chính của chúng ta là sẽ chỉ ra rằng  $d(C_i, C_j)$  và  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$  là khá gần nhau và  $d(C_{ij}, C_{ji})$  và  $d(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$  cũng như vậy nếu  $(C_i, C_j)$  không phải là  $\varepsilon$ -regular, và  $d(\bar{C}_i, \bar{C}_j)$  và  $d(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$  gần như xa nhau như  $d(C_i, C_j)$  và  $d(C_{ij}, C_{ji})$ .

Kế tiếp,

$$\frac{|C_i \setminus \bar{C}_i|}{|C_i|} \leq \frac{4^k(d+1) - (4^k - 2^{k-1})d}{4^k(d+1)} = \frac{4^k + 2^{k-1}d}{4^k(d+1)} < \frac{1}{d} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq 2^{-k} \leq \frac{\varepsilon^5}{8}. \quad (2)$$

Do đó, từ Kết quả 4.5.1),

$$|d(\bar{C}_i, \bar{C}_j) - d(C_i, C_j)| \leq \frac{\varepsilon^5}{4}, \quad (3)$$

$$|d^2(\bar{C}_i, \bar{C}_j) - d^2(C_i, C_j)| \leq \frac{\varepsilon^5}{2}. \quad (4)$$

Như vậy,

$$\frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq i < j \leq k} d^2(\bar{C}_i, \bar{C}_j) \geq \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq i < j \leq k} d^2(C_i, C_j) - \frac{\varepsilon^5}{4}. \quad (5)$$

Giả sử  $(C_i, C_j)$  không phải là một  $\varepsilon$  – regular.

Khi đó, từ (2),

$$\frac{|C_{ij} \setminus \overline{C}_l|}{|C_{ij}|} \leq \frac{|C_i \setminus \overline{C}_l|}{|C_{ij}|} \leq \frac{\varepsilon^4}{8}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} |\overline{C}_{ij}| &\geq |C_{ij}| - |C_i \setminus \overline{C}_l| \geq (\varepsilon - \varepsilon^5/8)|C_i| \geq (1 - 2^{-7})\varepsilon|C_i| \\ &\geq (1 - 2^{-7})\varepsilon|\overline{C}_l|. \end{aligned} \quad (7)$$

Kết quả 4.5.1) và bất đẳng thức (6) chỉ ra rằng

$$|d(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{jl}) - d(C_{ij}, C_{ji})| \leq \frac{\varepsilon^4}{4}, \quad (8)$$

và nên, từ (1), (3), (8),

$$\begin{aligned} |d(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{jl}) - d(\overline{C}_i, \overline{C}_j)| &\geq |d(C_{ij}, C_{ji}) - d(C_i, C_j)| - |d(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{jl}) - d(C_{ij}, C_{ji})| - |d(\overline{C}_i, \overline{C}_j) - d(C_i, C_j)| \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{4} - \frac{\varepsilon^5}{4} > \frac{15}{16}\varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Do đó, nếu  $(C_i, C_j)$  không phải là một  $\varepsilon$  – regular thì, từ Kết quả 4.5.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \sum_{u=1}^H \sum_{v=1}^H d^2(D_{iu}, D_{jv}) &\geq d^2(\overline{C}_i, \overline{C}_j) + \frac{|C_{ij}||C_{ji}|}{|\overline{C}_i||\overline{C}_j|} \left(\frac{15}{16}\varepsilon\right)^2 \\ &\geq d^2(\overline{C}_i, \overline{C}_j) + ((1 - 2^{-7})\varepsilon)^2 \left(\frac{15}{16}\varepsilon\right)^2 \\ &\geq d^2(\overline{C}_i, \overline{C}_j) + \frac{3}{4}\varepsilon^4, \end{aligned} \quad (10)$$

bởi vì, từ (7),  $|\overline{C}_{ij}||\overline{C}_{jl}| \geq ((1 - 2^{-7})\varepsilon)^2 |\overline{C}_i||\overline{C}_j|$ .

Hơn nữa, với mỗi cặp  $(C_i, C_j)$ , chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \sum_{u=1}^H \sum_{v=1}^H d^2(D_{iu}, D_{jv}) &\geq \left\{ \frac{1}{H^2} \sum_{u=1}^H \sum_{v=1}^H d(D_{iu}, D_{jv}) \right\}^2 \\ &= d^2(\overline{C}_i, \overline{C}_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Tất cả những gì còn lại mà chúng ta phải làm đó là đổi tên lại các tập  $D_{ih}$  thành  $C'_j$ ,  $1 \leq j \leq l$ , và kiểm tra xem phân hoạch thu được có các thuộc tính cần thiết hay không. Do đó, kí hiệu  $\{C'_1, \dots, C'_l\} = \{D_{ih}: 1 \leq i \leq k, 1 \leq h \leq H\}$  và  $C'_0 = V \setminus \bigcup_{j=1}^l C'_j$ .

Khi đó,  $C'_0 \supset C_0$ , trong đó  $|C'_0 \setminus C_0| = \sum_{i=1}^k |C_i \setminus \overline{C}_l| \leq \frac{n}{2^k}$  (điều này suy ra từ bất đẳng thức (2)).

Cuối cùng và quan trọng nhất, từ (5), (10) và thực tế là có ít nhất  $\varepsilon k^2$  cặp  $(C_i, C_j)$  không phải là  $\varepsilon$  – regular,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}') &= \frac{1}{l^2} \sum_{1 \leq i < j \leq l} d^2(C'_i, C'_j) \geq \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq i < j \leq k} d^2(\bar{C}_i, \bar{C}_j) + \frac{3}{4} \varepsilon^4 \frac{\varepsilon k^2}{k^2} \\
&\geq \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq i < j \leq k} d^2(C_i, C_j) - \frac{\varepsilon^5}{4} + \frac{3}{4} \varepsilon^5 \\
&\geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}.
\end{aligned}$$

□

Từ Kết quả 4.5.3), chúng ta chỉ còn một bước ngắn nữa để đi đến bổ đề chính quy của Szemerédi:

#### Kết quả 4.5.4. (Szemerédi)

Với mọi  $m \in \mathbb{N}$  và  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , chúng ta luôn có thể tìm được một số nguyên  $M = M(\varepsilon, m)$  sao cho mọi đồ thị với bậc  $\geq m$  đều có một  $\varepsilon$ -regular phân hoạch  $(C_i)_{i=0}^k$  với  $m \leq k \leq M$ .

#### Chứng minh kết quả 4.5.4.

Kí hiệu  $t = \lfloor \varepsilon^{-5} \rfloor$  và định nghĩa các số nguyên  $k_0, k_1, \dots, k_{t+1}$  bằng cách cho  $k_0$  là số nguyên nhỏ nhất sao cho  $k_0 \geq m$  và  $2^{-k_0} \leq \varepsilon^5/8$  và đặt  $k_{i+1} = k_i(4^{k_i} - 2^{k_i-1})$ . Chúng ta sẽ chỉ ra rằng chỉ cần chọn  $M = k_t 2^{3k_t+2}$  là sẽ làm được.

Giả sử cho trước một đồ thị  $G$  với bậc  $n \geq m$ . Bằng cách phân hoạch tập đỉnh của  $G$  thành  $n$  tập đơn và tập rỗng đóng vai trò là tập đặc biệt, chúng ta sẽ thu được một 0-regular phân hoạch  $(C_i)_{i=0}^n$ . Như vậy, khi chứng minh tuyên bố của mình, chúng ta có thể giả định rằng  $n > M$ .

Giả sử  $\mathcal{P}_0 = (C_i^{(0)})_{i=0}^{k_0}$  là một phân hoạch đều của tập các đỉnh của  $G$  với lớp đặc biệt  $C_0^{(0)}$  sao cho  $|C_1^{(0)}| = \dots = |C_{k_0}^{(0)}| = \lfloor \frac{n}{k_0} \rfloor$  và  $0 \leq |C_0^{(0)}| \leq n - k_0 \lfloor n/k_0 \rfloor < k_0 < \frac{\varepsilon}{2}n$ . Nếu  $\mathcal{P}_0$  là  $\varepsilon$ -regular thì phép chứng minh được hoàn tất. Ngược lại, kí hiệu  $\mathcal{P}_1 = (C_i^{(1)})_{i=0}^{k_1}$  là phân hoạch được nêu trong Kết quả 4.5.3) với  $|C_0^{(1)}| \leq |C_0^{(0)}| + \frac{n}{2k_0} < \varepsilon n$ . Một lần nữa, nếu  $\mathcal{P}_1$  là  $\varepsilon$ -regular thì phép chứng minh được hoàn tất; ngược lại, kí hiệu  $\mathcal{P}_2 = (C_i^{(2)})_{i=0}^{k_2}$  là phân hoạch được nêu trong Kết quả 4.5.3) với  $|C_0^{(2)}| \leq |C_0^{(0)}| + n(2^{-k_0} + 2^{-k_1}) < \varepsilon n$ . Bằng cách tiếp tục theo cách này, chúng ta sẽ thu được một  $\varepsilon$ -regular phân hoạch  $\mathcal{P}_j = (C_i^{(j)})_{i=0}^{k_j}$  cho một số  $j$  nào đó với  $0 \leq j \leq t$ .

Thật vậy, nếu  $\mathcal{P}_j$  không phải là một  $\varepsilon$ -regular và  $0 \leq j \leq t$  thì  $|C_i^{(j)}| \geq n/2k_j \geq 2^{3k_j+1}$  và  $2^{-k_j} \leq \varepsilon^5/8$ , nên Kết quả 4.5.3) đảm bảo tồn tại một phân hoạch  $\mathcal{P}_{j+1} = (C_i^{(j+1)})_{i=0}^{k_{j+1}}$  với tập đặc biệt  $|C_0^{(j+1)}| \leq |C_0^{(0)}| + n(2^{-k_0} + 2^{-k_1} + \dots + 2^{-k_j}) < \varepsilon n$ .

Tuy nhiên,  $\mathcal{P}_{t+1}$  không thể tồn tại vì nếu nó tồn tại thì chúng ta sẽ có

$$\frac{1}{2} > q(\mathcal{P}_{t+1}) = \frac{1}{k_{t+1}^2} \sum_{1 \leq i < j \leq t} d^2(C_i^{(t+1)}, C_j^{(t+1)}) \geq (t+1)(\varepsilon^5/2) > \frac{1}{2}.$$

Điều mâu thuẫn này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta.

□

Bổ đề chính quy có rất nhiều dạng biến thể khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ chỉ đưa ra hai dạng biến thể cơ để chúng ta dễ hình dung:

#### Kết quả 4.5.4’.

Với mọi  $\varepsilon > 0$  và  $m \in \mathbb{N}$ , chúng ta luôn tìm được một số tự nhiên  $M' = M'(\varepsilon, m)$  sao cho mọi đồ thị  $G = (V, E)$  đều có một phân hoạch  $V = \bigcup_{i=1}^k C_i$  sao cho  $m \leq k \leq M'$ ,  $|C_1| \leq |C_2| \leq \dots \leq |C_k| \leq |C_1| + 1$  và, với hầu hết nhưng ngoại trừ tối đa  $\varepsilon k^2$  cặp trong số các cặp  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , đều là  $\varepsilon$  – regular.

#### Kết quả 4.5.4’’.

Với mọi  $\varepsilon > 0$  và  $m \in \mathbb{N}$ , chúng ta luôn tìm được một số tự nhiên  $M'' = M''(\varepsilon, m)$  sao cho mọi đồ thị  $G = (V, E)$  đều có một phân hoạch  $V = \bigcup_{i=0}^k C_i$  sao cho  $m \leq k \leq M''$ ,  $|C_0| \leq k - 1$ ,  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_k|$  và, với hầu hết nhưng ngoại trừ tối đa  $\varepsilon \binom{k}{2}$  cặp trong số các cặp  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , đều là  $\varepsilon$  – regular.

Chặn trên của  $M(\varepsilon, m)$  được nêu trong phép chứng minh của Kết quả 4.5.4) là rất lớn: trừ khi  $m$  là rất lớn so với  $1/\varepsilon$ , nó sẽ vào khoảng  $2^{2^{\frac{2}{\varepsilon}}}$ , trong đó chiều cao của tháp này vào khoảng  $\varepsilon^{-5}$ . Ngay từ cái nhìn đầu tiên, điều này có vẻ vô cùng tồi tệ và khác xa với sự thật. Tuy nhiên, vào năm 1997, Gowers đã chứng minh được rằng  $M(\varepsilon, 2)$  tăng ít nhất như  $2^{2^{\frac{2}{\varepsilon}}}$ , trong đó chiều cao của tháp này vào khoảng  $\varepsilon^{-1/16}$ .

Trên thực tế, sẽ là một thành tựu đáng kể nếu chúng ta có thể đưa ra các ước lượng hợp lý hơn nhiều cho  $M(\varepsilon, m)$  hoặc  $M(\varepsilon, 2)$ .

Giả sử cho trước một đồ thị  $G$ , chúng ta sẽ gọi một phân hoạch  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k V_i$  của tập các đỉnh là một  $(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  – **regular** nếu  $|V_0| \leq \beta |V(G)|$ ,  $|V_1| \leq |V_2| \leq \dots \leq |V_k| \leq |V_1| + 1$  và, với hầu hết nhưng ngoại trừ tối đa  $\varepsilon k^2$  cặp trong số các cặp  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , sao cho nếu  $W_i \subset V_i, W_j \subset V_j, |W_i| \geq \gamma |V_i|, |W_j| \geq \gamma |V_j|$  thì  $|d(W_i, W_j) - d(V_i, V_j)| < \delta$ .

Kí hiệu  $M(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  là số nguyên nhỏ nhất sao cho, với mọi đồ thị  $G$ , chúng ta luôn tìm được một phân hoạch  $(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  – regular  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k V_i$  với  $2 \leq k \leq M(\beta, \gamma, \varepsilon, \delta)$ . Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Làm cách nào để chúng ta có thể xác định bậc gần đúng của  $M(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  khi bốn biến  $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  tiến tới 0?”. Đây rất có thể là một hàm bậc cao; như một giải pháp tạm thời, chúng ta có thể cố gắng xác định bậc của  $M(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  khi một số biến được giữ không đổi và những biến khác tiến tới 0. Chẳng hạn, với một số giá trị  $\beta_0$  và  $\varepsilon_0$  đủ nhỏ cho trước, bậc gần đúng của  $M(\beta_0, \gamma, \delta, \varepsilon_0)$  khi  $\gamma$  và  $\delta$  tiến tới 0?

## 4.6. Các ứng dụng cơ bản của bổ đề Szemerédi

Công dụng chính của các phân hoạch kiểu Szemerédi là nó đảm bảo sự tồn tại của các đồ thị con nhất định nào đó ngay cả trong các đồ thị có không quá nhiều cạnh. Đây là một trong những cách tiêu chuẩn để giúp chúng ta có thể xác định tất cả các đồ thị  $r$  – phần nhỏ.

### Kết quả 4.6.1.

Giả sử cho trước  $f \geq 2, r \geq 2, 0 < \delta < 1/r$  và giả sử  $V_1, V_2, \dots, V_r$  là các tập đỉnh con phân biệt của một đồ thị  $G$  cho trước. Giả sử  $|V_i| \geq \delta^{-f}$ , với mọi  $i$ , và nếu  $1 \leq i < j \leq r$  và  $W_i \subset V_i, W_j \subset V_j$  sao cho  $|W_i| \geq \delta^f |V_i|$  và  $|W_j| \geq \delta^f |V_j|$  thì  $d(W_i, W_j) \geq \delta$ .

Khi đó, với tất cả các số nguyên không âm  $f_1, f_2, \dots, f_r$  sao cho  $\sum_{i=1}^r f_i = f$ , chúng ta luôn có thể tìm được các tập  $U_1 \subset V_1, U_2 \subset V_2, \dots, U_r \subset V_r$  với  $|U_i| = f_i, 1 \leq i \leq r$ , sao cho, với mọi  $1 \leq i < j \leq k$ , mọi đỉnh của  $U_i$  đều được nối với mọi đỉnh của  $U_j$ . Hơn nữa,  $G$  có chứa mọi đồ thị  $r$  – phần xác định trên  $f$  đỉnh.

### Chứng minh kết quả 4.6.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số  $f$ . Với  $f = 2$ , tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử  $f \geq 3$  và khẳng định trên đã được chứng minh là đúng với các giá trị nhỏ hơn của  $f$ . Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử thêm rằng  $f_1 \geq 1$ .

Với  $2 \leq i \leq r$ , kí hiệu  $R_i$  là tập các đỉnh trong  $V_1$  được nối với ít hơn  $\delta |V_i|$  đỉnh của  $V_i$ . Khi đó,  $|R_i| < \delta^f |V_i|$ , nên  $|\cup_{i=2}^r R_i| < (r-1)\delta^f |V_1| < |V_1|$ . Do đó, chúng ta có thể tìm được một đỉnh  $x \in V_1 \setminus \cup_{i=2}^r R_i$ ; kí hiệu  $V'_1 = V_1 \setminus \{x\}$  và  $V'_i = V_i \cap N(x)$  với  $i = 2, \dots, r$ . Khi đó,  $|V'_1| \geq \delta^{-f} - 1 \geq \delta^{-f+1}$  và  $|V'_1| \geq (1 - \delta^f)|V_1| \geq \delta |V_1|$ ; hơn nữa,  $|V'_i| \geq \delta |V_i| \geq \delta^{-f+1}$  với  $2 \leq i \leq r$ . Đồng thời, nếu  $W_i \subset V'_i$  và  $W_j \subset V'_j, 1 \leq i < j \leq r$ , sao cho  $|W_i| \geq \delta^{f-1} |V'_i|$  và  $|W_j| \geq \delta^{f-1} |V'_j|$  thì  $|W_i| \geq \delta^f |V_i|$  và  $|W_j| \geq \delta^f |V_j|$ , nên  $V'_1, V'_2, \dots, V'_r$  thỏa mãn các điều kiện cho  $0 < \delta < 1/r$  và  $f-1$ . Như vậy, từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta có thể tìm được các tập  $U'_1 \subset V'_1, \dots, U'_r \subset V'_r$  với  $|U'_1| = f_1 - 1$  và  $|U'_i| = f_i, 2 \leq i \leq r$  sao cho, với  $1 \leq i < j \leq r$ , mọi đỉnh của  $U'_i$  đều được nối với mọi đỉnh của  $U'_j$ . Hiển nhiên, các tập  $U_1 = U'_1 \cup \{x\}, U_2 = U'_2, \dots, U_r = U'_r$  thỏa mãn tất cả các yêu cầu của bài toán.  $\square$

Phép chứng minh nêu ở trên thực sự rất thô và ngay cả khi nó cho thấy rằng các hạn chế đối với  $\delta$  và  $V_i$  là hoàn toàn không bắt buộc và có thể được nói lỏng thành  $0 < \delta < (r-1)^{-1/2}, 0 < \delta < 1/2, |V_i| \geq \delta^{1-f}$ .

Một cách không thường xuyên hơn, Kết quả 4.6.1) có thể được sử dụng cùng với một phân hoạch kiểu Szemerédi như trong hệ quả tức thì sau đây của nó:

### Kết quả 4.6.2.

Giả sử cho trước  $f \geq 2, r \geq 2, 0 < \delta < 1/r$  và giả sử  $V_1, V_2, \dots, V_r$  là các tập đỉnh con phân biệt của một đồ thị  $G$  cho trước. Giả sử  $|V_i| \geq \delta^{-f}$ , với mọi  $i$ , và tất cả các cặp  $(V_i, V_j)$  đều là  $\delta^f$  – regular với mật độ  $\geq \delta + \delta^f$ .

Khi đó,  $G$  có chứa mọi đồ thị  $r$  – phần bậc  $f$ .

Như một ứng dụng của Kết quả 4.6.2), chúng ta có thể chứng minh được rằng nếu  $F$  là một đồ thị cho trước với sắc số  $\chi(F) = r \geq 2$  và  $n$  đủ lớn thì mọi đồ thị bậc  $n$  không có chứa  $F$  như một đồ thị con đều gần với một đồ thị không có chứa  $K_r$ .

Chúng ta sẽ thiết lập bối cảnh của bài toán một cách chung chung hơn một chút so với mức cần thiết cho các ứng dụng ngay lập tức. Giả sử cho trước  $m \geq 2, \varepsilon > 0, \delta > 0$ , kí hiệu  $M = M''(\varepsilon, m)$  như trong Kết quả 4.5.4''). Với mọi đồ thị  $G$  với bậc  $n \geq M$ , kí hiệu  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k C_i$  là phân hoạch đỉnh được nêu trong Kết quả 4.5.4''). Như vậy,  $m \leq k \leq M, |C_0| \leq k - 1, |C_1| = |C_2| = \dots = |C_k|$  và, với hầu hết nhưng ngoại trừ tối đa  $\varepsilon \binom{k}{2}$  cặp trong số các cặp  $(C_i, C_j), 1 \leq i < j \leq k$ , đều là  $\varepsilon$ -regular. Kí hiệu  $G[k; \varepsilon; d > \delta]$  là hợp của các đồ thị con lưỡng phân của  $G$  được cảm sinh bởi  $(C_i, C_j)$  với các cặp  $\varepsilon$ -regular có mật độ  $> \delta$ . Chúng ta sẽ gọi  $G[k; \varepsilon; d > \delta]$  là một  $(m; \varepsilon; d > \delta)$ -**piece của  $G$** . Đơn giản, chúng ta sẽ chọn tập đỉnh là  $\bigcup_{i=1}^k C_i$ , nên  $G[k; \varepsilon; d > \delta]$  là một đồ thị  $k$ -phần với các lớp đỉnh  $|C_1| = \dots = |C_k| = l$  sao cho  $n - k + 1 \leq kl \leq n$ . Hơn nữa, kí hiệu  $S[k; \varepsilon; d > \delta]$  là một đồ thị xác định trên  $[k]$  trong đó  $ij$  là một cạnh của  $S[k; \varepsilon; d > \delta]$  nếu và chỉ nếu  $(C_i, C_j)$  là một cặp  $\varepsilon$ -regular với mật độ  $> \delta$ . Chúng ta sẽ gọi  $S[k; \varepsilon; d > \delta]$  là bộ khung của  $G[k; \varepsilon; d > \delta]$ .

Lưu ý rằng  $G[k; \varepsilon; d > \delta]$  không phải là duy nhất; chúng ta chỉ chọn một trong những đồ thị có thể có và, đối với  $S[k; \varepsilon; d > \delta]$ , chúng ta chỉ lấy khung mà nó xác định. Hơn nữa, những đồ thị này không nhất thiết phải được xác định cho mọi  $k$ : tất cả những gì chúng ta biết là chúng được xác định cho một số  $k$  nào đó nằm trong  $m \leq k \leq M$ .

Chúng ta định nghĩa tương tự cho  $G[k; \varepsilon; \delta_1 < d < \delta_2]$  và  $S[k; \varepsilon; \delta_1 < d < \delta_2]$ .

### Kết quả 4.6.3.

Giả sử cho trước các số thực  $0 < \varepsilon < 1, 0 < \delta < 1$  và một số nguyên  $m \geq 2$ , kí hiệu  $M = M''(\varepsilon, m)$  như trong Kết quả 4.5.4''). Giả sử  $G$  là một đồ thị với bậc  $n \geq M$  và kí hiệu  $H = G[k; \varepsilon; d > \delta]$  là một  $(m; \varepsilon; d > \delta)$ -mặt của  $G$ .

Khi đó,  $\|G\| - \|H\| < \left( \varepsilon + \delta + \frac{1}{m} + \frac{2M}{n} \right) \frac{n^2}{2}$ .

Hơn nữa, nếu  $0 < \varepsilon \leq \delta/2, m \geq 4/\delta, n \geq 8M/\delta$  thì  $\|G\| - \|H\| < \delta n^2$ .

### Chứng minh kết quả 4.6.3.

Giả sử  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k C_i$  là phân hoạch đỉnh nêu trong Kết quả 4.5.4'') sao cho  $|C_0| \leq k - 1, |C_1| = \dots = |C_k|, m \leq k \leq M$ , và  $H$  là đồ thị  $k$ -phần tương ứng với các lớp đỉnh  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Hiển nhiên,  $E(G) - E(H)$  sẽ bao gồm bốn loại cạnh như sau: các cạnh liên thuộc với  $C_0$ ; các cạnh nối các đỉnh nằm trong cùng một lớp  $C_i, 1 \leq i \leq k$ ; các  $C_i - C_j$  cạnh với  $(C_i, C_j)$  không phải là  $\varepsilon$ -regular,  $1 \leq i < j \leq k$ ; các  $C_i - C_j$  cạnh với  $(C_i, C_j)$  là một cặp  $\varepsilon$ -regular với mật độ  $\leq \delta, 1 \leq i < j \leq k$ .

Như vậy,

$$\begin{aligned} \|\|G\| - \|H\|\| &< kn + k \binom{n/k}{2} + \varepsilon \binom{k}{2} \left( \frac{n}{k} \right)^2 + \delta \binom{n}{2} \\ &< kn + \frac{n^2}{2k} + \frac{\varepsilon n^2}{2} + \frac{\delta n^2}{2} \\ &\leq Mn + \frac{n^2}{2m} + \frac{\varepsilon n^2}{2} + \frac{\delta n^2}{2} \end{aligned}$$

$$\leq \left( \varepsilon + \delta + \frac{2M}{n} + \frac{1}{m} \right) \frac{n^2}{2}.$$

□

#### Kết quả 4.6.4.

Giả sử cho trước một số thực  $\varepsilon > 0$  và một đồ thị  $F$ .

Khi đó, chúng ta luôn tìm được một hằng số  $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$  sao cho: “nếu  $G$  là một đồ thị với bậc  $n \geq n_0$  và không chứa  $F$  như một đồ thị con thì  $G$  sẽ có chứa một tập  $E'$  với ít hơn  $\varepsilon n^2$  cạnh sao cho đồ thị con  $H = G - E'$  không chứa bất kì một đồ thị con nào có dạng  $K_r$  trong đó  $r = \chi(F)$ .”

#### Chứng minh kết quả 4.6.4.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng  $r \geq 2, 0 < \varepsilon < 1/r, f = |F| \geq 3$ .

Kí hiệu  $\delta = \varepsilon/2, m \geq 8/\varepsilon = 4/\delta, M = M''(\delta^f, m)$  như trong Kết quả 4.5.4’). Chúng ta sẽ chỉ ra rằng chỉ cần chọn  $n_0 = \lceil 8M\delta^{-f} \rceil$  là đủ.

Thật vậy, kí hiệu  $H = G[k; \delta^f; d > \delta + \delta^f]$  là một  $(m; \delta^f; d > \delta + \delta^f)$  – piece của  $G$  ứng với bộ khung  $S = [k; \delta^f; d > \delta + \delta^f]$ .

Khi đó, từ Kết quả 4.6.3),  $\|G\| - \|H\| < (\delta + \delta^f)n^2 < \varepsilon n^2$ .

Hơn nữa, từ Kết quả 4.6.1),  $S$  sẽ không có chứa  $K_r$ . Do đó, nó cũng sẽ không có chứa  $H$ .

□

Lưu ý rằng Kết quả 4.6.4) là một dạng mở rộng đáng kể của Kết quả 4.4.4) – dạng nguyên mẫu của định lí Erdős – Stone. Thật vậy, giả sử cho trước các số  $\varepsilon > 0, t \geq 1, n \geq n_0(\varepsilon, K_r(t))$ . Khi đó, mọi đồ thị  $G$  với bậc  $n$  và kích thước  $\geq t_{r-1}(n) + \varepsilon n^2$  đều có chứa một đồ thị  $K_r(t)$ : trường hợp ngược lại, từ Kết quả 4.6.4), bằng cách xóa đi ít hơn  $\varepsilon n^2$  cạnh của  $G$ , chúng ta sẽ nhận được một đồ thị  $H$  không có chứa bất kì một đồ thị  $K_r$  nào. Nhưng bởi vì  $\|H\| > t_{r-1}(n)$  nên định lí Turán sẽ chỉ ra rằng  $H$  có chứa một đồ thị  $K_r$  nào đó. Không cần phải nói, như một phép chứng minh của định lí Erdős – Stone, điều này quá nặng tay.

Ứng dụng cuối cùng của chúng ta đối với bổ đề Szemerédi liên quan đến trường hợp “hỗn hợp” tuyệt đẹp của bài toán cực trị đồ thị thuần túy, đó là xác định  $ex(n; F_1, \dots, F_k)$ . Chúng ta đã nghiên cứu  $ex(n; K_r)$ , được giải bởi định lí Turán, và  $ex(n; K_{s,t})$ , bài toán Zarankiewicz. Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta cấm cả  $K_r$  và  $K_{s,t}$ ?  $ex(n; K_r, K_{s,t})$  có thể lớn bao nhiêu?”. Trong trường hợp khi  $r$  và  $s$  được cố định và  $t = \lfloor cn \rfloor$  với một hằng số dương  $c$  nào đó, vào năm 1988, Frankl và Pach đã đưa ra một chặn trên cho hàm này. Đầu tiên, chúng ta sẽ cần đến kết quả độc lập sau đây:

#### Kết quả 4.6.5.

Giả sử  $H$  là một đồ thị  $r$  – phần với các lớp đỉnh  $C_1, C_2, \dots, C_k$  trong đó  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_k| = l$ . Giả sử chúng ta có thể  $q$  cặp  $(i, j), 1 \leq i < j \leq k$ , với  $E(C_i, C_j) \neq \emptyset$ . Giả sử thêm rằng  $2 \leq s \leq t$  và  $G$  không có chứa bất kì một đồ thị  $K_{s,t}$  nào với tất cả  $s$  đỉnh nằm trong cùng một lớp  $C_i$  nào đó.

Khi đó,  $2\|H\| \leq (2q)^{1-1/s} l^{2-1/s} (t-1)^{1/s} k^{1/s} + 2qls$ .

### Chứng minh kết quả 4.6.5.

Ngoại trừ một số biến thể nhỏ thì hầu như không phải tất cả các cặp  $(C_i, C_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , đều được nối với nhau bởi các cạnh, chúng ta sẽ tiến hành tương tự như trong ước lượng tiêu chuẩn của hàm Zarankiewicz  $z(s, t)$ . Kí hiệu  $d = 2\|G\|/k(l)$  là trung bình bậc của  $H$ . Chúng ta có thể giả sử rằng  $kd > 2q(s - 1)$ : trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ không có gì để chứng minh. Với  $x \in V(H)$  và  $1 \leq i \leq k$ , kí hiệu  $d_i(x)$  là số các đỉnh láng giềng của  $x$  trong  $C_i$ ; ngoài ra, kí hiệu  $P = \{(x, i): x \in V(H), 1 \leq i \leq k, d_i(x) \geq 1\}$ .

Khi đó, hiển nhiên,

$$|P| \leq 2ql.$$

Chúng ta định nghĩa một **claw** (hoặc  **$s$ -claw**) của  $H$  là một đồ thị star  $K_{1,s}$  với **cơ sở**, tập  $s$  đỉnh nằm trong lớp thứ hai, được chứa trong một lớp  $C_i$  nào đó. (Trong ước lượng tiêu chuẩn của hàm Zarankiewicz, cơ sở được phép xuất hiện ở bất kì đâu) Đỉnh nằm trong lớp đầu tiên của một claw sẽ được gọi là tâm của claw đó.

Do  $H$  không có chứa bất kì một đồ thị  $K_{s,t}$  nào nên, với mọi  $s$ -tập con  $S$  của  $C_i$ , chúng ta sẽ có tối đa  $t - 1$  claw với cùng một cơ sở  $S$ .

Do đó, bằng cách kí hiệu  $N$  là tổng số các claw trong  $H$ ,

$$N \leq (t - 1) \sum_{i=1}^k \binom{|C_i|}{s} = (t - 1)k \binom{l}{s}.$$

Mặt khác, với mỗi đỉnh  $x$  và mỗi lớp  $C_i$ , chúng ta luôn có  $\binom{d_i(x)}{s}$  claw với tâm  $x$  và cơ sở nằm trong  $C_i$ , nên

$$N = \sum_{x \in V(H)} \sum_{i=1}^k \binom{d_i(x)}{s} = \sum_{(x,i) \in P} \binom{d_i(x)}{s}.$$

Như vậy,

$$\sum_{(x,i) \in P} \binom{d_i(x)}{s} \leq (t - 1)k \binom{l}{s}.$$

Để chỉ ra một chặn dưới cho vế bên trái của bất đẳng thức trên, kí hiệu

$$f_s(u) = \begin{cases} u(u-1) \dots (u-s+1)/s!, & \text{nếu } u \geq s-1, \\ 0 & \text{nếu } u \leq s-1. \end{cases}$$

Khi đó,  $f_s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi. Do  $\sum_{(x,i) \in P} d_i(x) = 2\|H\| = kld$  và  $|P| \leq 2ql$  nên tính lồi của hàm  $f_s$  chỉ ra rằng

$$2ql f_s\left(\frac{kd}{2q}\right) \leq \sum_{(x,i) \in P} \binom{d_i(x)}{s}.$$

Do  $\frac{kd}{2q} > s - 1$  nên chúng ta sẽ có  $f_s\left(\frac{kd}{2q}\right) = \binom{kd/2q}{s}$ ; nhắc lại bất đẳng thức  $\sum_{x \in V_1} \binom{d(x)}{t} \leq (s-1) \binom{n}{t}$  trong Kết quả 4.2.5), chúng ta nhận thấy rằng

$$2ql \binom{kd/2q}{s} \leq (t-1)k \binom{l}{s}.$$

Nhưng khi đó, một cách khá thô thiển,

$$2ql \left( \frac{kd}{2q} - (s-1) \right)^s \leq (t-1)kl^s,$$

nên

$$2\|G\| = kld \leq (2q)^{1-1/s} l^{2-1/s} (t-1)^{1/s} k^{1/s} + 2ql(s-1). \quad \square$$

Kế tiếp, chúng ta sẽ trình bày chứng minh của định lí Frankl – Pach như chúng ta đã tuyên bố:

#### **Kết quả 4.6.6. (Frankl – Pach)**

Giả sử cho trước các số nguyên dương  $r \geq 3, s \geq 2$  và các hằng số dương  $c, \gamma > 0$ .

Khi đó, nếu  $n$  đủ lớn và  $G$  là một đồ thị với bậc  $n$  và không có chứa bất kì đồ thị nào trong  $K_r$  hoặc  $K_{s,t}$ , trong đó  $t = \lceil cn \rceil$ , thì

$$\|G\| \leq c^{1/s} \left( \frac{r-2}{r-1} \right)^{1-1/s} \frac{n^2}{2} + \gamma n^2.$$

#### **Chứng minh kết quả 4.6.6.**

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả định rằng  $0 < \gamma < 1/2$  và  $c < (r-2)/(r-1)$ , bởi vì chúng ta đã biết rằng  $\|G\| \leq t_{r-1}(n) \leq \frac{r-2}{2(r-1)} n^2$ .

Kí hiệu  $\delta = \gamma/2, m \geq 4/\delta$  và giả sử rằng  $n \geq 4Ms/\delta \geq 8M/\delta$ , trong đó  $M = M''(\delta^r; m)$ . Giả sử  $G$  là một đồ thị bậc  $n$  không có chứa  $K_r$  hoặc  $K_{s,t}$ . Kí hiệu  $H = G[k; \delta^r; d > \delta + \delta^r]$  là một  $(m; \delta^r; d > \delta + \delta^r)$  – piece của  $G$  ứng với bộ khung  $S$ . Khi đó, từ Kết quả 4.6.3),  $\|G\| - \|H\| < (\delta + \delta^r)n^2 < 2\gamma n^2/3$  và, từ Kết quả 4.6.2),  $S$  không có chứa  $K_r$ . Do đó, từ định lí Turán,  $q = \|S\| \leq (r-2)k^2/2(r-1)$ .

Do  $H$  không có chứa  $K_{s,t}$  nên, từ Kết quả 4.6.5), chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\begin{aligned} 2\|H\| &\leq \left( \frac{r-2}{r-1} \right)^{1-1/s} (kl)^{2-1/s} (t-1)^{1/s} + k^2ls, \text{ với } l = \lfloor n/k \rfloor, \\ &\leq c^{1/s} \left( \frac{r-2}{r-1} \right)^{1-1/s} n^2 + Msn \\ &\leq c^{1/s} \left( \frac{r-2}{r-1} \right)^{1-1/s} n^2 + \frac{\gamma n^2}{8}. \end{aligned}$$

Như vậy,

$$\|G\| < \|H\| + \gamma n^2/2 < \|H\| + \gamma n^2. \quad \square$$

Trên thực tế, chặn trên trong Kết quả 4.6.6) về cơ bản là tốt nhất có thể được: nếu  $r \geq 3$  và  $s \geq 2$  là các số nguyên được cho trước và  $0 < c \leq (r-2)/(r-1)$  thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ex(n; K_r, K_{s,t}) \binom{n}{2}^{-1} = c^{1/s} \left( \frac{r-2}{r-1} \right)^{1-1/s}, \text{ trong đó } t = \lfloor cn \rfloor.$$

Có rất nhiều ứng dụng đáng kể của bổ đề chính quy Szemerédi. Chẳng hạn, vào năm 1993, Komlós, Sárközy, Szemerédi đã chứng minh kết quả sau đây, đã được phỏng đoán từ trước đó bởi Bollobás vào năm 1978:

**Kết quả 4.6.7. (Komlós – Sárközy – Szemerédi – Bollobás)**

Với mọi  $\varepsilon > 0$  và  $\Delta \geq 1$ , chúng ta luôn tìm được một số  $n_0 = n_0(\varepsilon, \Delta)$  sao cho mọi đồ thị với bậc  $n$  và bậc nhỏ nhất  $\geq (1 + \varepsilon)n/2$  sẽ chứa mọi cây với bậc  $n$  và bậc lớn nhất  $\leq \Delta$ .

Trên thực tế, nói một cách chính xác hơn: giả sử cho trước  $\varepsilon > 0$ , nếu  $c > 0$  là đủ nhỏ và  $n$  là đủ lớn thì mọi đồ thị với bậc  $n$  và bậc nhỏ nhất  $\geq (1 + \varepsilon)n/2$  sẽ chứa mọi cây với bậc  $n$  và bậc lớn nhất  $\leq cn$ . Có rất nhiều phỏng đoán có liên quan đến kết quả trên, nổi tiếng nhất phải kể đến trong số đó là phỏng đoán được Erdős và Sós vào năm 1963: mọi đồ thị với bậc  $n$  và kích thước  $\lfloor (k - 1)n/2 \rfloor + 1$  sẽ chứa mọi cây có kích thước  $k$ .