

**ĐỀ THI THỬ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP
QUẬN/HUYỆN SỐ 1**

Môn thi: Toán

Ngày thi: 06/11/2022

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x^2 - 4x + 6} + \frac{5(\sqrt{x^2 - 4x + 5})}{2} + \frac{5}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = 6.$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3a + 4b = 3c$ và $4a - 3b = 4c$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} - \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Bài 2 (4.0 điểm).

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = 6\,11\,2022.$$

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x + 1, y - 2) = 1$ và $2x^2 - y^2 + xy - 3x + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x + y$ không là số chính phương.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$1 \leq \sqrt{a + \frac{(b - c)^2}{4}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}.$$

Bài 4 (6.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , N là giao điểm của hai đường thẳng AH và DE , K là giao điểm của hai đường thẳng AO và BC .

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ và $OA \perp DE$.

b) Chứng minh rằng $\frac{AN}{AK} = \frac{AE}{AC}$ và $HM \parallel NK$.

c) Đường tròn (C, CN) cắt đường thẳng AH tại điểm thứ hai là P . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PK , Q là giao điểm của hai đường thẳng NI và BC . Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, NK, PQ đồng quy.

Bài 5 (2.0 điểm).

a) Cho số thực x thỏa mãn $x^{20} - x^{11}$ và $x^{20} - x^2$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng x cũng là số nguyên.

b) Bạn Huy sử dụng hai màu xanh và đỏ để tô lên các số $1, 2, 3, \dots, 11, 12$. Mỗi số được bạn Huy tô một màu và cả hai màu đều được sử dụng để tô. Sau khi tô xong 12 số này, bạn Huy lấy tất cả các số được tô chung màu nhân lại với nhau thì thu được hai kết quả và chúng nguyên tố cùng nhau. Hỏi, bạn Huy có bao nhiêu cách tô màu cho 12 số trên?