

ĐỀ ÔN TẬP HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH/THÀNH PHỐ SỐ 1

Ngày thi: 28/12/2022

Thời gian làm bài: 169 phút

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình

$$(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2} = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

b) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng $(ab - cd)(bc - da)(ca - ab)$ là số chính phương.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$x^3 - 9y^3 - 7x^2y + 15xy^2 + 4x - 4y - 8 = 0.$$

b) Tồn tại hay không số nguyên n thỏa mãn $3n^2 - 2023n + 7$ là số chính phương?

c) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $\sqrt{4^x + 3y + 2} + \sqrt{2^x - 3y + 2}$ là số nguyên.

Bài 3 (3.0 điểm).

a) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + yz$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\frac{ab}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{bc}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{ca}{a+b}} \leq 3.$$

Bài 4 (6.0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB , C là một điểm nằm trên đường tròn sao cho C khác A, B và $AC < BC$. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Lấy điểm K nằm trên đoạn thẳng MB sao cho $MK > KB$. Trên tia đối của tia BM , lấy điểm N sao cho $MK = NB$. Từ N , kẻ tiếp tuyến thứ hai ND với đường tròn (O) (D là tiếp điểm), tiếp tuyến này cắt đường thẳng CM tại P . Qua O , vẽ $OS \parallel BD$ và $OT \parallel BC$ ($S \in PN$, $T \in PM$).

a) Chứng minh rằng $\angle SON = 90^\circ$ và đường thẳng ST tiếp xúc với đường tròn (O) .

b) Chứng minh rằng $AS \cdot BN = AT \cdot BM$ và ba điểm P, A, K thẳng hàng.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn BK và H là trực tâm của tam giác PON . Chứng minh rằng $BH \perp OI$.

Bài 5 (1.0 điểm). Xét bảng ô vuông 10×10 . Ta viết các số $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ vào mỗi ô vuông của bảng này, sao cho mỗi ô vuông được điền bởi đúng một số và mỗi số xuất hiện đúng 10 lần. Chứng minh rằng, luôn tồn tại bốn số phân biệt được điền vào cùng một hàng hoặc cùng một cột.

—HẾT—