

Chủ đề 09. Đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị

Các đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị và các xích Markov với số trạng thái hữu hạn đã được nghiên cứu rất nhiều trong hơn 90 năm, nhưng các nghiên cứu về chúng chỉ thực sự thành công trong khoảng hai thập kỷ qua. Những lý do chính lý giải cho sự thành công này nằm ở chỗ chúng ta đã khai thác có hệ thống một cách hiệu quả mối liên hệ đáng ngạc nhiên và cực kỳ hữu ích với các mạng điện, sự xuất hiện của các phương pháp lập luận tổ hợp phức tạp, việc sử dụng các tính chất phổ của các ma trận có liên quan, các ứng dụng của giải tích điều hòa. Trong chủ đề này của bài viết, chúng ta sẽ đi sâu vào khảo sát lý thuyết về các đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị, nhấn mạnh các phương pháp lập luận tổ hợp phức tạp, giới thiệu mối liên hệ đáng ngạc nhiên của nó với các mạng điện và các giá trị riêng.

Một **đường đi ngẫu nhiên trên một đồ thị** đúng như tên gọi của nó: một đường đi $X_0X_1 \dots$ nhận được theo một quá trình ngẫu nhiên nhất định. Ở dạng đơn giản nhất, nó chỉ phụ thuộc vào đồ thị và không có gì khác nữa. Bắt đầu một đường đi đơn giản như vậy tại một đỉnh X_0 bất kỳ, đỉnh tiếp theo của nó, tạm giả sử là X_1 , được chọn một cách ngẫu nhiên trong số các đỉnh láng giềng của X_0 , đỉnh X_2 cũng là một đỉnh láng giềng ngẫu nhiên của X_1 , v.v... Trên thực tế, một đường đi ngẫu nhiên trên một đồ thị đơn giản như vậy chỉ kém tổng quát hơn một chút so với một xích Markov hữu hạn khả nghịch: bằng cách gán các trọng lượng vào các cạnh và cho phép cả các cạnh khuyên, mọi xích Markov hữu hạn khả nghịch đều có thể thu được theo cách này. Theo cách kí hiệu thông thường cho các xích Markov, thay vì $X_0X_1 \dots$, chúng ta sẽ dùng $X_0, X_1, \dots$ để kí hiệu cho một đường đi ngẫu nhiên. Thoạt nhìn, các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị dường như chỉ là các xích Markov hữu hạn khá đặc biệt, nhưng thực tế thì không phải vậy: xích Markov hữu hạn chỉ là các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị định hướng được trang bị trọng lượng và cho phép cả các cạnh khuyên. Theo quan điểm này, không có gì đáng ngạc nhiên khi các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị lại có tầm quan trọng lớn lao.

Trong **Chủ đề 02. Bài toán thiết kế mạng điện**, chúng ta đã giới thiệu về các mạng điện và nghiên cứu các tính chất cơ bản của chúng mà đỉnh cao là định lý Kirchhoff. Trong phần đầu tiên, chúng ta sẽ tiến thêm một bước nữa khi đi sâu hơn một chút nữa vào lý thuyết về các mạng điện: thay vì sử dụng quan điểm tĩnh trong đó các dòng điện là các nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính hoặc các tỷ lệ của các đại lượng được mô tả bởi các đồ thị, chúng ta sẽ mô tả các dòng điện như các biến cực tiểu hóa các hàm năng lượng bậc hai nhất định nào đó. Điều này ngụ ý rằng sự phân phối của các dòng điện là khá ổn định: những thay đổi khá nhỏ trong các điện trở của các dây dẫn sẽ không dẫn đến sự phân phối của các dòng điện hoàn toàn khác. Quan trọng hơn, nó cũng ngụ ý rằng việc cắt dây dẫn không làm giảm tổng điện trở và việc rút ngắn các đỉnh không làm tăng điện trở.

Mối liên hệ giữa các đường đi ngẫu nhiên và các mạng điện sẽ được thiết lập trong phần thứ hai. Mối liên hệ mật thiết này mang lại lợi ích to lớn cho cả hai lĩnh vực này: chúng ta có thể sử dụng các đường đi ngẫu nhiên để chứng minh các kết quả về các mạng điện và, ngược lại, chúng ta cũng có thể sử dụng lý thuyết về các mạng điện của mình để chứng minh các kết quả tuyệt vời về các đường đi ngẫu nhiên. Điểm nổi bật của phần thứ hai nằm ở một phép chứng minh ấn tượng về định lý cổ điển của Pólya về các mạng tinh thể dựa trên mối liên hệ với các mạng điện này.

Trong phần thứ ba, chúng ta sẽ nghiên cứu các thông số tiêu chuẩn của các đường đi ngẫu nhiên như thời điểm va chạm, thời điểm rời đi và thời điểm trở lại. Ngoài việc sử dụng các phương pháp lập luận tổ hợp phức tạp, chúng ta cũng sẽ tiếp tục khai thác mối liên hệ của chúng với các mạng điện.

Phần cuối cùng sẽ liên quan đến một câu hỏi quan trọng về các đường đi ngẫu nhiên: Tốc độ hội tụ đến phân phối ổn định nhanh như thế nào? Như chúng ta sẽ thấy, tốc độ hội tụ này sẽ bị chi phối bởi tính chất mở rộng của đồ thị.

9.1. Nhắc lại về các mạng điện

Chúng ta sẽ tóm tắt lại một cách ngắn gọn các khái niệm đã trình bày trong **Chủ đề 02. Bài toán thiết kế mạng điện**. Một **mạng điện** $N = (V, E, r) = (G, r)$ được định nghĩa là một đa đồ thị $G = (V, E)$ được trang bị một hàm $r: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, trong đó $r_e = r(e)$ được gọi là **điện trở của cạnh e** . Để tạo sự thuận tiện, thông thường nó cũng được biểu diễn lại dưới dạng $N = (G, c)$, trong đó c là **hàm độ dẫn điện** và $c_e = 1/r_e$ là độ dẫn điện của cạnh e .

Nếu có một **hiệu điện thế** $p_e = p_{ab}$ trong một cạnh e từ a đến b thì sẽ có một **dòng điện** w_e chạy trong e từ a đến b theo định luật Ohm (OL):

$$w_e = p_e / r_e.$$

Sự phân phối của các dòng điện tuân theo các định luật Kirchhoff:

Định luật Kirchhoff về hiệu điện thế (KPL) chỉ ra rằng tổng các hiệu điện thế chạy xung quanh một chu trình bất kì luôn bằng 0 và **định luật Kirchhoff về cường độ dòng điện** (KCL) khẳng định rằng tổng cường độ dòng điện đi vào một đỉnh bất kì luôn bằng 0. (Khi tính tổng cường độ dòng điện tại một đỉnh bất kì, chúng ta phải tính đến tổng cường độ dòng điện đi vào và đi ra khỏi mạng tại đỉnh đó.)

Định lý Kirchhoff (Kết quả 2.1.1) đưa ra một cách giải thích tổ hợp về các dòng điện chạy trong các cạnh của một mạng điện khi cho một dòng điện có cường độ 1 từ một đỉnh phát s đến một đỉnh thu t . Điều này cũng ngụ ý một kết quả tương tự cho trường hợp có nhiều đỉnh phát và nhiều đỉnh thu: **Nếu $s_1, \dots, s_k$ là các đỉnh của một mạng điện (liên thông) $N = (V, E, r)$ và $w_1, \dots, w_k$ là các số thực có tổng bằng 0 thì chúng ta sẽ có duy nhất một sự phân phối của các dòng điện và các hiệu điện thế trong các cạnh sao cho, với mọi $i = 1, \dots, k$, luôn có một dòng điện có cường độ w_i đi vào (hoặc $-w_i$ rời khỏi) mạng tại đỉnh s_i và không có bất kì một dòng điện nào đi vào (hoặc rời khỏi) mạng tại các đỉnh khác.**

Tuy hơi ngạc nhiên nhưng, từ định lý Kirchhoff, chúng ta có thể chứng minh được rằng: **Nếu một dây dẫn bị cắt thì tổng điện trở của mạng giữa hai đỉnh là không giảm.** Tất nhiên, nếu chúng ta tin rằng ba định luật về các dòng điện nêu trên mô tả một hệ vật lý với một số tính chất mà chúng ta coi là “tự nhiên” thì **nguyên lý đơn điệu** nêu ở trên vẫn được thỏa mãn. Tuy nhiên, như chúng ta đã biết rằng, sau khi đã công nhận ba định luật về các dòng điện nêu trên, chúng ta đã có tiếng nói riêng của mình: có duy nhất một sự phân phối của các dòng điện và hiển nhiên tổng điện trở của chúng được xác định một cách rõ ràng, nên chúng ta không thể dựa vào trực giác vật lý của mình. Những khó khăn trong việc chứng minh nguyên lý đơn điệu nêu ở trên cho thấy những thiếu sót trong cách tiếp cận tĩnh dựa trên việc sử dụng ngay lập tức toàn bộ lực lượng của định luật Kirchhoff và định luật Ohm: mặc dù định lý Kirchhoff cho chúng ta biết rằng bài toán luôn có một nghiệm, nhưng dường như nghiệm này là một hàm không thể đoán trước được và không ổn định của các phương trình.

Như chúng ta sẽ thấy sau đây, sẽ tốt hơn nhiều nếu chỉ sử dụng một số điều kiện được đưa ra bởi các định luật của chúng ta và xác định một số hàm đạt cực tiểu tại các vị trí thỏa mãn các phương trình còn lại. Không giống như các nghiệm của các hệ phương trình, các bài toán tối ưu hóa này hoạt động theo cách dễ dự đoán

hơn rất nhiều và cho phép chúng ta hiểu rõ hơn về sự phân phối của các dòng điện và các điện thế. Đặc biệt, chúng ta cũng sẽ đưa ra một số phương pháp tối ưu hóa rõ ràng để xây dựng các dòng điện và các điện thế. Như là một kết quả của những phương pháp này, chúng ta có thể đưa ra một phép chứng minh khác cho nguyên lý đơn điệu.

Nếu chúng ta không muốn phải tính cả ba định luật cùng một lúc thì có hai cách tiếp cận để chúng ta có thể lựa chọn trong quá trình tìm kiếm các dòng điện và các điện thế thích hợp. Chúng ta có thể xem xét các dòng điện thỏa mãn KCL, sử dụng OL để xác định các hiệu điện thế và sau đó sử dụng một hàm để chọn ra các dòng điện thỏa mãn KPL, hoặc chúng ta có thể xem xét một phân phối của các hiệu điện thế thỏa mãn KPL, xác định dòng điện theo OL và sau đó sử dụng một hàm để chọn ra các dòng điện thỏa mãn KCL. Như chúng ta sẽ thấy, chúng ta không cần phải cố gắng quá nhiều: nó thực sự là rất dễ.

Lưu ý rằng mục đích của chúng ta chỉ là chứng minh **tính tồn tại** của một phân phối của các dòng điện như vậy: như chúng ta đã biết trước từ mục **2.1. Đồ thị và Mạng điện, tính duy nhất** được suy ra ngay lập tức từ nguyên lý chồng chất nghiệm.

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại rằng KPL tương đương với khả năng xác định một **điện thế tuyệt đối** V_x cho mọi đỉnh x sao cho $p_{xy} = V_x - V_y$ cho mỗi cạnh xy .

Thật vậy, nếu (p_{xy}) là một phân phối của các hiệu điện thế thỏa mãn KPL và $ux_1x_2 \dots x_kv$, $uy_1y_2 \dots y_lv$ là các $u - v$ đường đi thì

$$p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \dots + p_{x_kv} = p_{uy_1} + p_{y_1y_2} + \dots + p_{y_lv}. \quad (1)$$

Để xác định các điện thế tuyệt đối, chúng ta hãy chọn ra một đỉnh v bất kỳ và tạm giả sử $V_v = 0$. Với mỗi đỉnh u , chúng ta hãy chọn ra một $u - v$ đường đi $ux_1x_2 \dots x_kv$ và kí hiệu $V_u = p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \dots + p_{x_{k-1}x_k} + p_{x_kv}$.

Từ (1), V_u được xác định một cách rõ ràng, nghĩa là nó không phụ thuộc vào cách chúng ta chọn $u - v$ đường đi $ux_1x_2 \dots x_kv$. Rõ ràng là $p_{xy} = V_x - V_y$ với mọi cạnh xy . Điều ngược lại thậm chí còn đơn giản hơn: nếu (V_x) là một phép gán các điện thế tuyệt đối cho các đỉnh thì $p_{xy} = V_x - V_y$ sẽ cho chúng ta một phân phối của các hiệu điện thế thỏa mãn KPL.

Chúng ta sẽ viết ra một cách rõ ràng cả hai cách tiếp cận để có được các dòng điện thích hợp trong một mạng điện sao cho không có dòng điện nào đi vào hoặc đi ra mạng tại các đỉnh khác với $s_1, \dots, s_k$.

Cách tiếp cận KCL và OL. Xét một luồng (u_{xy}) với các nguồn (các đỉnh phát và các đỉnh thu) $s_1, \dots, s_k$, nghĩa là, với mọi $x \neq s_1, \dots, s_k$, $\sum_{y \in N(x)} u_{xy} = 0$. Để điều chỉnh luồng này thành một dòng điện tương ứng với các nguồn (các đỉnh phát và các đỉnh thu) $s_1, \dots, s_k$, tất cả những gì chúng ta cần làm là phải đảm bảo KPL được thỏa mãn, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^k u_{x_ix_{i+1}} r_{x_ix_{i+1}} = 0 \quad (2)$$

với mọi chu trình $x_1x_2 \dots x_k$, với $x_{k+1} \equiv x_1$.

Cách tiếp cận KPL và OL. Xét một phân phối (V_x) của các điện thế tuyệt đối trên tập các đỉnh. Phân phối này tạo ra một dòng điện tương ứng với các nguồn $s_1, \dots, s_k$ khi và chỉ khi KCL được thỏa mãn, nghĩa là

$$\sum_{y \in N(x)} \frac{V_x - V_y}{r_{xy}} = 0 \quad (3)$$

với mọi đỉnh $x \neq s_1, \dots, s_k$. (Lưu ý rằng mọi phép gán (V_x) của các điện thế tuyệt đối đều tạo ra một phân phối của các dòng điện, nhưng có thể có một số dòng điện đi vào hoặc đi ra mạng tại các đỉnh khác với $s_1, \dots, s_k$.) Chúng ta có thể viết lại (3) dưới dạng các độ dẫn điện $c_{xy} = 1/r_{xy}$ và $C_x = \sum_{y \in N(x)} c_{xy}$. Một phân phối (V_x) của các điện thế tuyệt đối sẽ tạo ra một phân phối của các dòng điện tương ứng với các nguồn $s_1, \dots, s_k$ khi và chỉ khi, với mọi đỉnh $x \neq s_1, \dots, s_k$, chúng ta đều có

$$C_x V_x = \sum_{y \in N(x)} c_{xy} V_y. \quad (4)$$

Trong cả hai cách tiếp cận nêu trên, chúng ta đều sử dụng cùng một hàm để xác định các dòng điện.

Giả sử cho trước một cạnh xy với điện trở r_{xy} , hiệu điện thế $p_{xy} = V_x - V_y$. Khi đó, chúng ta sẽ có một dòng điện với cường độ $w_{xy} = p_{xy}/r_{xy} = (V_x - V_y)/r_{xy}$, **năng lượng trong cạnh xy** được định nghĩa là

$$w_{xy}^2 r_{xy} = \frac{(V_x - V_y)^2}{r_{xy}} = (V_x - V_y) w_{xy}.$$

Năng lượng toàn phần trong một mạng $N = (G, r) = (V(G), E(G), r)$ được xác định bởi

$$\sum_{xy \in E(G)} w_{xy}^2 r_{xy} = \sum_{xy \in E(G)} \frac{(V_x - V_y)^2}{r_{xy}} = \sum_{xy \in E(G)} (V_x - V_y) w_{xy}. \quad (5)$$

Trong các công thức và các tổng kế tiếp nêu ở trên, các cạnh được định hướng một cách tùy ý. Điều này chỉ đơn giản là để tránh việc phải tính tổng hai lần; nếu các cạnh không được định hướng thì năng lượng toàn phần sẽ được xác định bởi công thức $\frac{1}{2} \sum_{x,y} w_{xy}^2 r_{xy}$, với quy ước $0 \cdot \infty = 0$ (trường hợp xy không phải là một cạnh, $r_{xy} = \infty$ và $w_{xy} = 0$.) Đặc biệt, phần cuối cùng của công thức (5) rõ ràng là không thể xác định được nếu các cạnh không được định hướng. Hơn nữa, nói một cách chính xác, các công thức trên không chính xác ngay cả với các cạnh được định hướng: do mạng của chúng ta có thể có một số cạnh từ x đến y nên, trong (3), (4), (5), tổng sẽ đại diện cho tổng trên tất cả các cạnh từ x đến y và r_{xy}, c_{xy}, w_{xy} là các hàm của các cạnh từ x đến y , chứ không phải của cặp (x, y) . Tuy nhiên, chúng ta không thể chắc chắn rằng cách tốc ký này sẽ không dẫn đến nhầm lẫn.

Chúng ta hãy tạm dừng lại một chút để nhận xét rằng chúng ta sẽ không mất gì từ tính tổng quát nếu chúng ta chỉ chú ý đến các **mạng điện đơn**, nghĩa là các mạng điện trong đó mỗi cạnh đều có điện trở bằng 1, bởi vì mọi mạng điện đều có thể xấp xỉ bởi một mạng điện khác (có nhiều cạnh hơn) trong đó tất cả các cạnh đều có cùng điện trở. Trong nhiều tính toán, thật thuận tiện khi có các điện trở tổng quát, trong khi đôi khi, như trong (5), các khái niệm sẽ rõ ràng hơn cho các mạng đơn. Thật vậy, với một mạng đơn $N = (G, 1)$, năng lượng toàn phần trong N là giá trị của dạng bậc hai được xác định bởi Laplacian $L = D - A$ trên vector (V_x) của các điện thế tuyệt đối. Tất nhiên, trong trường hợp tổng quát, chúng ta cũng gặp phải tình huống tương tự: tất

cả những gì chúng ta phải làm đó là lấy Laplacian của đồ thị trọng lượng với trọng lượng độ của mỗi cạnh e là độ dẫn điện $c_e = 1/r_e$.

Chúng ta quay lại với nhiệm vụ chứng minh sự tồn tại của các dòng điện thỏa mãn cả ba định luật. **Nguyên lý Thomson** phát biểu rằng các dòng điện và các điện thế được phân phối theo cách sao cho năng lượng toàn phần trong mạng là cực tiểu. Nguyên lý này có hai cách phát biểu khác nhau: trong Kết quả 9.1.1), chúng ta chọn các điện thế và, trong Kết quả 9.1.2), chúng ta chọn các dòng điện. Kết quả 9.1.1) còn được gọi là **nguyên lý Dirichlet**.

Kết quả 9.1.1.

Giả sử cho trước một mạng điện $N = (G, r), s_1, \dots, s_k \in V(G), V_{s_1}, \dots, V_{s_k} \in \mathbb{R}$.

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được các điện thế tuyệt đối $V_x, x \in V(G) \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ sao cho

$$E = E(V_x) = \sum_{xy \in E(G)} \frac{(V_x - V_y)^2}{r_{xy}}$$

là tối tiểu. Phân phối (V_x) này của các điện thế tuyệt đối sẽ tạo ra một dòng điện thích hợp với không gì khác hơn là các nguồn $s_1, \dots, s_k$. Giá trị cực tiểu của E chính là năng lượng toàn phần của mạng điện.

Chứng minh kết quả 9.1.1.

Do hàm năng lượng E là một hàm liên tục theo các điện thế tuyệt đối $(V_x) \in \mathbb{R}^{V(G)}$ và $E \rightarrow \infty$ khi $\max |V_x| \rightarrow \infty$ nên giá trị cực tiểu của E phải đạt được tại một điểm (V_x) nào đó.

Hơn nữa, tại điểm $(V_x) \in \mathbb{R}^{V(G)}$ này, chúng ta sẽ có

$$\frac{\partial E}{\partial V_x} = 0$$

với mọi $x \neq s_1, \dots, s_k$, nên

$$\sum_{y \in N(x)} \frac{2(V_x - V_y)}{r_{xy}} = 2 \sum_{y \in N(x)} w_{xy} = 0.$$

Như vậy, các điện thế tuyệt đối này sẽ xác định một phân phối của các dòng điện (bằng cách sử dụng OL) thỏa mãn KCL. □

Kết quả 9.1.2.

Giả sử cho trước một mạng điện $N = (G, r), s_1, \dots, s_k \in V(G)$ và $u_{s_1}, \dots, u_{s_k} \in \mathbb{R}$ sao cho $\sum_{i=1}^k u_{s_i} = 0$.

Xét hàm năng lượng $E = E(u) = \sum_{xy \in E(G)} u_{xy}^2 r_{xy}$ đối với các luồng $u = (u_{xy})$ sao cho, với mọi $i = 1, \dots, k$, có một dòng điện với cường độ u_{s_i} đi vào mạng tại s_i (hoặc một dòng điện với cường độ $-u_{s_i}$ rời khỏi mạng tại s_i) và, tại các đỉnh khác, không có bất kì một dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi mạng.

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được một luồng $u = (u_{xy})$ như vậy sao cho $E(u)$ là tối tiểu. Luồng này sẽ thỏa mãn KPL, nghĩa là nó là một dòng điện thực sự. Giá trị cực tiểu của $E(u)$ chính là năng lượng toàn phần của dòng điện.

Chứng minh kết quả 9.1.2.

Một lần nữa, tính compact cũng chỉ ra rằng giá trị cực tiểu của $E(u)$ phải đạt được tại một luồng $u = (u_{xy})$ nào đó. Giả sử cho trước một chu trình $x_1 x_2 \dots x_l x_{l+1} \equiv x_1$. Kí hiệu $u(\varepsilon)$ là luồng thu được từ u bằng cách tăng từng $u_{x_i x_{i+1}}$ lên ε đơn vị, với mọi $i = 1, \dots, l$.

Khi đó,

$$\frac{dE(u(\varepsilon))}{d\varepsilon} = 0 \text{ tại điểm } \varepsilon = 0,$$

nên

$$2 \sum_{i=1}^l u_{x_i x_{i+1}} r_{x_i x_{i+1}} = 0.$$

Như vậy, KPL được thỏa mãn, như chúng ta đã tuyên bố. □

Độ dẫn điện hiệu dụng $C_{eff} = C_{eff}(s, t)$ của một mạng điện từ s đến t là giá trị của cường độ dòng điện từ s đến t nếu chúng ta đặt giữa s và t một hiệu điện thế có giá trị bằng 1. **Điện trở hiệu dụng** $R_{eff} = R_{eff}(s, t) = 1/C_{eff}(s, t)$ là giá trị hiệu điện thế giữa s và t để đảm bảo có một dòng điện có cường độ bằng 1 từ s đến t .

Kết quả kế tiếp, **nguyên lý Rayleigh** hoặc **nguyên lý bảo toàn năng lượng**, ngụ ý rằng nếu chúng ta thay một mạng với một đỉnh phát s và một đỉnh thu t bởi một dây dẫn có điện trở là điện trở hiệu dụng của mạng này thì năng lượng của hệ thống sẽ không thay đổi.

Kết quả 9.1.3.

Giả sử $u = (u_{xy})$ là một luồng từ s đến t với giá trị $u_s = \sum_{y \in N(s)} u_{sy} = -\sum_{z \in N(t)} u_{tz} = -u_t$, nghĩa là u là một luồng thỏa mãn KCL tại mọi đỉnh khác với s và t , và (V_x) là một hàm bất kỳ xác định trên tập các đỉnh.

Khi đó,

$$(V_s - V_t)u_s = \sum_{xy \in E(G)} (V_x - V_y)u_{xy}.$$

Chứng minh kết quả 9.1.3.

Nhận thấy rằng vế phải của đẳng thức trên có thể biểu diễn lại dưới dạng

$$\sum_{x \in V(G)} V_x (\sum_{y \in N^+(x)} u_{xy} - \sum_{z \in N^-(x)} u_{zx}) = V_s u_s + V_t u_t = (V_s - V_t)u_s.$$

Điều này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta. □

Kết quả 9.1.4.

Năng lượng toàn phần trong một dòng điện từ s đến t là $(V_s - V_t)w_s$, trong đó $w_s = \sum_{x \in N(s)} w_{sx}$ là cường độ của dòng điện. Nếu $V_s - V_t = 1$ thì năng lượng toàn phần sẽ bằng độ lớn của cường độ dòng điện, nghĩa là năng lượng toàn phần, tổng dòng điện và độ dẫn điện hiệu dụng là như nhau. Nếu $w_s = 1$ thì năng lượng toàn phần chính là hiệu điện thế giữa s và t , nghĩa là năng lượng toán phần, hiệu điện thế và điện trở hiệu dụng là như nhau.

Chứng minh kết quả 9.1.4.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra ngay lập tức từ Kết quả 9.1.3. □

Kết quả 9.1.1) và Kết quả 9.1.4) ngụ ý biểu thức sau đây cho độ dẫn điện hiệu dụng:

Kết quả 9.1.5.

Độ dẫn điện hiệu dụng $C_{eff}(s, t)$ của mạng giữa s và t là

$$C_{eff}(s, t) = \inf \left\{ \sum_{xy \in E(G)} \frac{(V_x - V_y)^2}{r_{xy}} : V_s = 1, V_t = 0 \right\}.$$

Tương tự, Kết quả 9.1.2) và Kết quả 9.1.4) cũng đưa ra một biểu thức khá hữu ích cho điện trở hiệu dụng $R_{eff}(s, t)$.

Kết quả 9.1.6.

Điện trở hiệu dụng $R_{eff}(s, t)$ của mạng giữa s và t là

$$R_{eff}(s, t) = \inf \left\{ \sum_{xy \in E(G)} u_{xy}^2 r_{xy} : (u_{xy}) \text{ là một } s - t \text{ luồng với kích thước } 1. \right\}.$$

Hai Kết quả 9.1.5) và Kết quả 9.1.6) ngụ ý tính đúng đắn của “chén thánh” của phần này – **nguyên lý đơn điệu**.

Kết quả 9.1.7.

Nếu điện trở của một dây dẫn tăng thì điện trở hiệu dụng (giữa hai đỉnh) sẽ không giảm. Đặc biệt, nếu chúng ta cắt một dây dẫn thì điện trở hiệu dụng không giảm, còn nếu chúng ta nối tắt hai đỉnh thì điện trở hiệu dụng không tăng.

Chứng minh kết quả 9.1.7.

Nếu $r_{x_0 y_0}$ tăng thì biểu thức của $C_{eff}(s, t)$ trong Kết quả 9.1.5) sẽ không tăng. Tương tự, biểu thức của $R_{eff}(s, t)$ trong Kết quả 9.1.6) cũng sẽ không giảm. □

Mục tiêu tiếp theo của chúng ta là thiết lập mối liên hệ giữa các đường đi ngẫu nhiên và các mạng điện; các kết quả ở trên sẽ rất hữu ích trong việc giải quyết các câu hỏi về các đường đi ngẫu nhiên.

9.2. Mối liên hệ giữa các mạng điện và các đường đi ngẫu nhiên

Giả sử cho trước một cặp (G, S) , trong đó G là một đồ thị đơn và $S \subset V(G)$.

Một hàm $f: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một **hàm điều hòa trên G với biên S** nếu

$$f(x) = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in N(x)} f(y),$$

bất cứ khi nào $x \in V(G) \setminus S$ và $d(x) \geq 1$.

Các hàm điều hòa có tầm quan trọng đặc biệt trong lý thuyết về các mạng điện và chúng ta đã gặp chúng trong phần trước nhưng không gọi tên chúng.

Thật vậy, với một đồ thị G cho trước, chúng ta có thể biến nó thành một mạng điện đơn bằng cách gán cho mỗi cạnh xy một độ dẫn điện $c_{xy} = 1$ và lấy $S = \{s_1, \dots, s_k\}$. Khi đó, (4) chính xác là đang phát biểu rằng nếu không có dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi G tại các đỉnh khác với s_i thì hàm V_x của các điện thế tuyệt đối là điều hòa trên G với biên S :

$$V_x = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in N(x)} V_y, \quad (6)$$

bất cứ khi nào $x \in V(G) \setminus S$ và $d(x) \geq 1$.

Một nguồn tự nhiên khác của các hàm điều hòa xác định trên một đồ thị là đến từ các đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị. Giả sử cho trước một đồ thị liên thông G với một tập không rỗng $S \subset V(G)$ và g là một hàm giá trị thực xác định trên S . Với mỗi $x \in V(G)$, chúng ta hãy chơi một trò chơi sau. Bắt đầu từ x , di chuyển một cách ngẫu nhiên trong G , dừng lại ngay khi chúng ta tìm thấy một đỉnh s của S : nếu điều này xảy ra thì chúng ta sẽ nói rằng **x thắng $g(s)$** . Nói một cách chính xác hơn, kí hiệu $X_0 = x$. Giả sử chúng ta đã xác định được $X_t = y$, nếu $y \in S$ thì chúng ta sẽ dừng dây lại ngay; trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ chọn ra ngẫu nhiên một đỉnh láng giềng z của y và kí hiệu $X_{t+1} = z$. Nếu đường đi ngẫu nhiên $X_0, X_1, \dots$ này kết thúc tại $s \in S$ thì chúng ta sẽ nói rằng x thắng $g(s)$. Kế tiếp, giả sử E_x là mức tăng kỳ vọng của x . Như vậy, nếu $x \in S$ thì $E_x = g(x)$; trường hợp ngược lại, mức tăng kỳ vọng của x chính là giá trị trung bình của các kỳ vọng sau một bước, nghĩa là

$$E_x = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in N(x)} E_y. \quad (7)$$

Điều này chứng tỏ rằng E_x là một hàm điều hòa trên G với biên S . Ngoài ra, nếu $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ và $g(s_i) = V_{s_i}$ thì các phương trình (6) và (7) chỉ ra rằng (E_x) chính là sự phân phối của các điện thế tuyệt đối nếu mỗi s_i được đặt tại V_{s_i} và không có dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi mạng tại các đỉnh khác với s_i .

Tầm quan trọng của các hàm điều hòa trong các nghiên cứu về các dòng điện và các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị thiết lập mối liên hệ mật thiết giữa hai lĩnh vực này. Chỉ riêng điều này thôi cũng đã quá đủ để làm cho các nghiên cứu về các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị trở nên đáng giá, nhưng còn có một lý do khác, thậm chí còn thuyết phục hơn: các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị trọng lượng, sẽ được giới thiệu tiếp theo, chính là các xích Markov hữu hạn khả nghịch.

Mục đích chính của phần này là giới thiệu các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị và trình bày mối liên hệ giữa các đường đi ngẫu nhiên và các mạng điện. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng mỗi liên hệ này mang lại lợi ích to lớn cho cả hai lý thuyết này bằng cách đưa ra thêm hai cách chứng minh khác cho nguyên lý đơn điệu và sử dụng các mạng điện trong các nghiên cứu về các đường đi ngẫu nhiên.

Một xích Markov (với thời gian rời rạc) trên một tập hữu hạn hoặc đếm được các trạng thái V được định nghĩa là một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \dots$ lấy các giá trị trong V sao cho, với mọi $x_0, \dots, x_{t+1} \in V$, xác suất để $X_{t+1} = x_{t+1}$, với điều kiện chúng ta đã có $X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t$, chỉ phụ thuộc vào x_t và x_{t+1} . Do hầu hết các xích Markov của chúng ta đều sẽ được xác định bởi các đồ thị nên chúng ta có xu hướng sẽ gọi chúng là các đường đi ngẫu nhiên.

Giả sử cho trước một đồ thị G với bậc n không có chứa các cạnh kép nhưng có thể chứa một cạnh khuyên nào đó tại mỗi đỉnh. Với mỗi cạnh và cạnh khuyên xy , chúng ta gán một **trọng lượng dương** $a_{xy} > 0$. Đặc biệt, a_{xx} là trọng lượng của cạnh khuyên xx tại x . Bằng cách dùng a để kí hiệu cho hàm $xy \mapsto a_{xy}$, chúng ta nhận được một **đồ thị trọng lượng** (G, a) .

Kế tiếp, giả sử cho trước một đồ thị trọng lượng (G, a) , với mọi đỉnh $x \in V(G)$, kí hiệu $A_x = \sum_{y \in N(x)} a_{xy}$ và, với mọi $x, y \in V(G)$, xác định

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{a_{xy}}{A_x} & \text{nếu } x \text{ được nối với } y \text{ bởi một cạnh hoặc cạnh khuyên nào đó,} \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Như vậy, $P = (P_{xy})$ là một ma trận cấp $n \times n$ với các phần tử không âm trong đó tổng của mỗi hàng đều bằng 1.

Một đường đi ngẫu nhiên được xác định bởi một đồ thị trọng lượng sẽ là một xích Markov xác định trên $V = V(G)$ với **ma trận chuyển xác suất** $(P_{xy})_{x,y \in V}$, trong đó P_{xy} là xác suất đi từ x đến y . Khái niệm đường đi ngẫu nhiên (RW) xác định trên một đồ thị trọng lượng mà chúng ta đang muốn nói đến chính là đường đi ngẫu nhiên với ma trận chuyển xác suất như nêu ở trên.

Như vậy, một RW là một dãy các biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, \dots$, mỗi biến sẽ nhận các giá trị trong tập các đỉnh V , sao cho

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = P_{x_t x_{t+1}},$$

với mọi đường đi $x_0 x_1 \dots x_t$ trong đồ thị G .

Nếu G không có chứa bất kỳ một đường đi $x_0 x_1 \dots x_t$ nào thì $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = 0$. Nếu $X_t = y$ thì chúng ta sẽ nói rằng tại thời điểm t đường đi đi qua y .

Nói một cách chính xác, chúng ta có xu hướng sẽ xét toàn bộ lớp các RW có cùng ma trận chuyển xác suất $P = (P_{xy})$, nghĩa là chúng ta sẽ dùng $(X_t)_{t=0}^\infty$ để kí hiệu cho bất kỳ RW nào có ma trận chuyển xác suất này. Để có thể chọn ra một RW cụ thể trong số các RW này, chúng ta thường cố định phân phối ban đầu, nghĩa là phân phối của X_0 . Trên thực tế, phần lớn thời gian chúng ta sẽ bắt đầu đường đi ngẫu nhiên $(X_i)_{i=0}^\infty$ tại một đỉnh nhất định cho trước, nghĩa là $X_0 = x_0$ đối với một $x_0 \in V(G)$ nào đó.

Việc định nghĩa một đường đi ngẫu nhiên trên một đa đồ thị trọng lượng, với các cạnh kép và các cạnh khuyên, chỉ hơi kém tự nhiên hơn một chút. Giả sử cho trước một đa đồ thị trọng lượng (G, a) với hàm trọng lượng $a: E(G) \rightarrow \mathbb{R}, e \mapsto a_e > 0$. Với mọi $x \in V(G)$, kí hiệu $\bar{A}_x$ là tổng của các trọng lượng a_e của tất cả các cạnh và các cạnh khuyên e liên thuộc với x và, với mọi $x, y \in V(G)$, kí hiệu $\bar{a}_{xy}$ là tổng trọng lượng của tất cả các cạnh và các cạnh khuyên nối x với y . Khi đó, $P = (P_{xy})$, với $P_{xy} = \frac{\bar{a}_{xy}}{\bar{A}_x}$, là ma trận chuyển xác suất của một RW xác định trên đồ thị trọng lượng (G, a) .

Theo trực giác, trong một RW xác định trên một đa đồ thị trọng lượng, nếu chúng ta đang ở tại một đỉnh x thì chúng ta có thể chọn ra ngẫu nhiên một trong các cạnh và các cạnh khuyên liên thuộc với x (chứ không phải một trong các đỉnh láng giềng) theo trọng lượng của chúng và đi qua cạnh đó tới đầu mút khác.

Kế tiếp, các đa đồ thị trọng lượng mà chúng ta đặc biệt quan tâm là các mạng điện (G, c) , với hàm độ dẫn c : trọng lượng của một cạnh e được coi là độ dẫn điện c_e của nó. Một RW trên một mạng điện luôn được coi là một RW với hàm trọng lượng như vậy.

Để đơn giản hóa cách ký hiệu, chúng ta có thể giả sử rằng mạng điện của chúng ta không có các cạnh kép và các cạnh khuyên, nên chúng ta có thể dùng c_{xy} để kí hiệu cho độ dẫn của cạnh từ x đến y . Trên thực tế, sẽ rất thuận tiện nếu chúng ta không có các cạnh khuyên, mặc dù sự tồn tại của các cạnh khuyên sẽ không làm ảnh hưởng gì đến công thức của chúng ta: điểm khác biệt duy nhất có thể xảy ra đó là nếu chúng ta không có cạnh khuyên nào thì RW của chúng ta không được phép nán lại tại một đỉnh.

Như vậy, từ giờ trở đi, một mạng điện $N = (G, c)$ luôn được giả định nằm trên một đồ thị đơn G , nên một RW trên N sẽ có ma trận chuyển xác suất $P = (P_{xy})$, với P_{xy} được xác định bởi

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{c_{xy}}{C_x} & \text{nếu } xy \in E(G), \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

trong đó $C_x = \sum_{y \in N(x)} c_{xy}$.

Sau tất cả phần mở đầu nêu ở trên, chúng ta sẽ bắt tay vào một chút toán học. Đầu tiên, chúng ta sẽ quay lại ví dụ về thế năng tuyệt đối được đưa ra bởi các đường đi ngẫu nhiên, nhưng chúng ta sẽ trình bày lại kết quả này theo cách hơi khác đi đôi chút. Một lần nữa, chúng ta sẽ chỉ xem xét các mạng với một đỉnh phát và một đỉnh thu, nhưng chúng ta sẽ chứng minh nhiều hơn một chút so với nhận xét trước đây của chúng ta. Để mô tả các dòng điện, trước hết, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm về **xác suất $P_{esc} = P_{esc}(s \rightarrow t)$ để thoát khỏi s đến t** (hoặc đơn giản chỉ là **xác suất thoát**): xác suất để, bắt đầu từ s , chúng ta đi đến t trước khi chúng ta quay lại s .

Kết quả 9.2.1.

Giả sử cho trước một mạng điện liên thông $N = (G, c)$ và các đỉnh $s, t \in V(G), s \neq t$.

Với mọi $x \in V(G)$, kí hiệu $V_x = P(\text{bắt đầu từ } x, \text{ chúng ta đến } s \text{ trước khi đến } t)$, nên $V_s = 1$ và $V_t = 0$.

Khi đó, $(V_x)_{x \in V(G)}$ là phân phối của các điện thế tuyệt đối khi s được đặt ở 1 và t được đặt ở 0. Tổng cường độ dòng điện từ s đến t là

$$C_{eff}(s, t) = C_s P_{esc}(s \rightarrow t). \quad (8)$$

Hơn nữa,

$$\frac{P_{esc}(s \rightarrow t)}{P_{esc}(t \rightarrow s)} = \frac{C_t}{C_s}. \quad (9)$$

Chứng minh kết quả 9.2.1.

Bằng cách xem xét bước đi đầu tiên của RW bắt đầu tại $x \neq s, t$, chúng ta nhận thấy rằng

$$V_x = \sum_y P_{xy} V_y = \sum_{y \in N(x)} \frac{c_{xy}}{C_x} V_y,$$

nên (4) được thỏa mãn:

$$C_x V_x = \sum_{y \in N(x)} c_{xy} V_y.$$

Như vậy, $(V_x)_{x \in V(G)}$ thực sự là phân phối của các điện thế tuyệt đối như đã tuyên bố.

Lưu ý rằng

$$P_{esc}(s \rightarrow t) = 1 - \sum_{y \in N(s)} P_{sy} V_y,$$

bởi vì bước đi đầu tiên đưa chúng ta đến một đỉnh láng giềng y của s , với xác suất là P_{sy} , và từ đó, với xác suất V_y , chúng ta đi đến s trước khi đến t .

Như vậy, tổng cường độ dòng điện từ s đến t là

$$\begin{aligned} C_{eff}(s, t) &= \sum_{y \in N(s)} (V_s - V_y) c_{sy} = \sum_{y \in N(s)} (V_s - V_y) \frac{c_{sy} C_s}{C_s} \\ &= C_s \sum_{y \in N(s)} \left(\frac{c_{sy}}{C_s} - V_y \frac{c_{sy}}{C_s} \right) = C_s \left(1 - \sum_{y \in N(s)} P_{sy} V_y \right) \\ &= C_s P_{esc}(s \rightarrow t). \end{aligned}$$

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của (8).

Cuối cùng, (9) được suy ra dễ dàng như sau:

$$\frac{P_{esc}(s \rightarrow t)}{P_{esc}(t \rightarrow s)} = \frac{C_{eff}(s, t)/C_s}{C_{eff}(t, s)/C_t} = \frac{C_t}{C_s},$$

bởi vì $C_{eff}(s, t) = C_{eff}(t, s)$. □

Có nguy cơ quá khoa trương khi chúng ta sẽ biểu diễn lại V_x và $P_{esc}(s \rightarrow t)$ theo các thời gian xảy ra.

Với một tập các trạng thái S , chúng ta sẽ xác định hai thời gian xảy ra:

$$\tau_S = \min\{t \geq 0: X_t \in S\} \text{ và } \tau_S^+ = \min\{t \geq 1: X_t \in S\}.$$

Do chúng ta thường bắt đầu RW của mình ở một trạng thái x trong S nên điều quan trọng ở đây đó là chúng ta phải phân biệt rõ giữa hai thời điểm này. Các định nghĩa tương tự có thể được sử dụng cho các xích Markov tổng quát, nên thời gian xảy ra được định nghĩa cho các quá trình đồ thị ngẫu nhiên chính là τ_S . Ngoài ra, với mọi $x \in V$, chúng ta sẽ dùng P_x và E_x để kí hiệu cho xác suất và kỳ vọng với điều kiện RW của chúng ta bắt đầu từ x ; nếu chúng ta bắt đầu từ một phân phối p thì chúng ta sẽ kí hiệu P_p và E_p .

Với cách kí hiệu này,

$$V_x = P_x(X_{\tau_{\{s,t\}}} = s) \text{ và } P_{esc}(s \rightarrow t) = P_s(X_{\tau_{\{s,t\}}^+} = t).$$

Tương tự như Kết quả 9.2.1), chúng ta cũng có một cách mô tả đơn giản về các điện thế tuyệt đối và các dòng điện trong các cạnh, khi cho một dòng điện với cường độ bằng 1 chạy từ s đến t . Cách mô tả về RW này của chúng ta bắt đầu tại s và dừng lại khi chúng ta đến t lần đầu tiên. Với một đỉnh x bất kỳ trong mạng của chúng ta, kí hiệu $S_x = S_x(s \rightarrow t)$ là **thời gian lưu trú dự kiến tại x** : giá trị kỳ vọng của số các lần chúng ta ở x trước khi đến t , nếu chúng ta bắt đầu ở s .

Với các thời gian xảy ra và kỳ vọng có điều kiện nêu ở trên,

$$S_x(s \rightarrow t) = E_s(|\{i < \tau_{\{t\}}: X_i = x\}|).$$

Như vậy, nếu mạng của chúng ta là một mạng đơn không tầm thường với hai đỉnh, giả sử là s và t , được nối với nhau bởi một cạnh với điện trở bằng 1 thì $S_s(s \rightarrow t) = 1$, bởi vì nếu chúng ta bắt đầu từ s thì $\tau_{\{t\}} = 1$ và $X_0 = s$. Ngoài ra, $S_s(s \rightarrow t) = 0$ với mọi mạng.

Kết quả 9.2.2.

Giả sử cho trước một mạng điện liên thông $N = (G, c)$ với $s, t \in V(G), s \neq t$. Với $x \in V(G)$, kí hiệu $V_x = S_x(s \rightarrow t)/C_x$. Hơn nữa, với $xy \in E(G)$, kí hiệu E_{xy} là hiệu dự kiến giữa số lần chúng ta đi qua cạnh xy từ x đến y và số lần chúng ta đi qua nó từ y đến x , nếu chúng ta bắt đầu tại s và dừng lại khi đi đến t .

Khi đó, bằng cách đặt một điện thế tuyệt đối $R_{eff}(s, t)$ tại s và một điện thế tuyệt đối 0 tại t sao cho có một dòng điện với cường độ bằng 1 đi từ s đến t qua N , phân phối của các điện thế tuyệt đối chính là (V_x) .

Ngoài ra,

$$R_{eff}(s, t) = \frac{S_x(s \rightarrow t)}{C_s}.$$

Hơn nữa, dòng điện chạy trong cạnh xy chính là E_{xy} .

Chứng minh kết quả 9.2.2.

Chúng ta biết rằng S_t , nên $V_t = 0$. Chúng ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng (V_x) thỏa mãn (4) với mọi $x \neq s, t$. Thật vậy, chúng ta nhận được x từ một trong các đỉnh láng giềng của nó, nên

$$S_x = \sum_{y \in N(x)} S_y P_{yx} = \sum_{y \in N(x)} S_y \frac{c_{xy}}{C_y},$$

không gì khác hơn ngoài (4):

$$C_x V_x = \sum_{y \in N(x)} c_{xy} V_y.$$

Như vậy, phân phối (V_x) của các điện thế tuyệt đối sẽ thỏa mãn KCL tại mọi đỉnh khác với s và t . Hơn nữa, với sự phân phối này của các điện thế tuyệt đối, không có dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi mạng tại bất kỳ đỉnh nào khác ngoài s và t .

Tất cả những gì còn lại để kiểm tra đó là chúng ta phải có một dòng điện như đã tuyên bố trong mỗi cạnh và cường độ của tổng dòng điện từ s đến t là 1.

Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Dòng điện w_{xy} trong cạnh xy gây ra bởi các điện thế tuyệt đối (V_x) là bao nhiêu?”.

Từ Định luật Ohm, nó sẽ bằng

$$\begin{aligned} w_{xy} &= (V_x - V_y) c_{xy} = \left(\frac{S_x}{C_x} - \frac{S_y}{C_y} \right) c_{xy} \\ &= \frac{S_x c_{xy}}{C_x} - \frac{S_y c_{xy}}{C_y} = S_x P_{xy} - S_y P_{yx}, \end{aligned}$$

và biểu thức cuối cùng chính là E_{xy} .

Cuối cùng, tổng dòng điện chạy qua mạng từ s đến t sẽ bằng 1:

$$w_s = \sum_{y \in N(s)} w_{sy} = \sum_{y \in N(s)} E_{sy} = 1,$$

bởi vì mỗi đường đi từ s đến t đều mất thêm 1 bước từ s (qua một cạnh rời khỏi s) so với s (qua một cạnh thành s). Nhưng do chúng ta có một điện thế tuyệt đối bằng 0 tại t và tổng dòng điện từ s đến t là 1 nên điện thế tuyệt đối $R_{eff}(s \rightarrow t)$ được đặt tại đỉnh s , nghĩa là $V_s = R_{eff}(s \rightarrow t)$, như chúng ta đã tuyên bố. $\square$

Kết quả 9.2.1) và 9.2.2) đưa ra hai biểu thức thay thế cho $R_{eff}(s \rightarrow t)$. Bằng cách cân bằng chúng, chúng ta nhận thấy rằng xác suất thoát chính là nghịch đảo của thời gian lưu trú dự kiến tại s :

$$P_{esc}(s \rightarrow t) = \frac{1}{S_x(s \rightarrow t)}. \quad (10)$$

Nhận định trên có thể được chứng minh trực tiếp một cách dễ dàng.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chuyển sang khảo sát các mạng vô hạn liên thông hữu hạn địa phương. Như vậy, giả sử $N = (G, c)$, trong đó $G = (V(G), E(G))$ là một đồ thị vô hạn liên thông sao cho mọi đỉnh đều có bậc hữu hạn và $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ là hàm độ dẫn. Như trước đây, chúng ta sẽ định nghĩa một RW trên $V(G)$ bằng cách xác định ma trận chuyển xác suất P_{xy} là $\frac{c_{xy}}{C_x}$ nếu xy là một cạnh và 0 trong trường hợp ngược lại.

Chọn ra một đỉnh $s \in V(G)$ và kí hiệu $P_{esc}^{(\infty)} = P_{esc}(s, \infty)$ là xác suất để, khi bắt đầu từ s , chúng ta không bao giờ phải quay trở lại s . RW của chúng ta được gọi là **transient** nếu $P_{esc}^{(\infty)} > 0$ và nó được gọi là **recurrent** nếu $P_{esc}^{(\infty)} = 0$. Dễ dàng nhận thấy rằng cách định nghĩa này không phụ thuộc vào cách lựa chọn s của chúng ta. Tương tự như Kết quả 9.2.1), chúng ta cũng có kết quả sau:

Kết quả 9.2.3.

Một RW trên một mạng điện vô hạn liên thông hữu hạn địa phương là transient khi và chỉ khi điện trở hiệu dụng giữa một đỉnh s bất kỳ và ∞ là hữu hạn và nó là recurrent khi và chỉ khi điện trở hiệu dụng này là vô hạn.

Mặc dù về mặt trực quan rõ ràng Kết quả 9.2.3) có nghĩa là gì và nó tuân theo Kết quả 9.2.2) như thế nào, nhưng chúng ta vẫn hãy mô phạm lại nó một chút:

Chúng ta chọn ra một đỉnh s cố định và, với $l \in \mathbb{N}$, kí hiệu N_l là mạng nhận được từ N bằng cách rút ngắn tất cả các đỉnh có khoảng cách đến $s \geq l$ để tạo thành một đỉnh t_l mới. Kí hiệu $R_{eff}^{(l)}$ là điện trở hiệu dụng của mạng N_l giữa s và t_l và kí hiệu $C_{eff}^{(l)} = 1/R_{eff}^{(l)}$ là độ dẫn điện hiệu dụng của nó. Từ nguyên lý đơn điệu, chúng ta biết rằng dãy $(R_{eff}^{(l)})$ là tăng và dãy $(C_{eff}^{(l)})$ là giảm, nên chúng ta có thể định nghĩa điện trở hiệu dụng của N giữa s và ∞ là $R_{eff}^{(\infty)} = \lim_{l \rightarrow \infty} R_{eff}^{(l)}$ và độ dẫn điện hiệu dụng là $C_{eff}^{(\infty)} = \lim_{l \rightarrow \infty} C_{eff}^{(l)}$.

Kí hiệu $P_{esc}^{(l)}$ là xác suất để, khi bắt đầu từ s , chúng ta đi được một khoảng cách ít nhất là l từ s , trước khi quay trở lại s . Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $P_{esc}^{(\infty)} = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{esc}^{(l)}$.

Có thể nhận thấy ngay rằng $P_{esc}^{(l)}$ cũng chính là xác suất để thoát đến t_l trong N_l , khi chúng ta bắt đầu tại s trong N_l . Từ Kết quả 9.2.1), $P_{esc}^{(l)} = C_{eff}^{(l)} / C_s$. Như vậy, $P_{esc}^{(\infty)} > 0$ khi và chỉ khi $C_{eff}^{(l)}$ bị chặn bởi 0, nghĩa là khi và chỉ khi $R_{eff}^{(l)} = 1/C_{eff}^{(l)}$ nhỏ hơn hoặc bằng một số thực r nào đó với mọi l . Nhưng điều này cũng sẽ đúng khi và chỉ khi $R_{eff}^{(\infty)} \leq r$, đpcm.

Từ Kết quả 9.2.3), chúng ta thực sự quan tâm đến cách thực hành “thực tế” để chứng minh $R_{eff}^{(\infty)}$ và $C_{eff}^{(\infty)}$ bị chặn bởi các đại lượng nhất định nào đó. Chúng ta sẽ bắt đầu với $R_{eff}^{(\infty)}$.

Kết quả 9.2.4.

Điện trở hiệu dụng $R_{eff}^{(\infty)}$ của N giữa s và ∞ nhỏ hơn hoặc bằng r khi và chỉ khi chúng ta có một dòng điện (u_{xy}) trong mạng N sao cho chúng ta có một dòng điện có cường độ 1 đi vào mạng tại s , không có dòng điện nào đi vào hoặc rời khỏi mạng ở các đỉnh khác và năng lượng toàn phần của hệ, $\sum_{xy \in E(G)} u_{xy}^2 r_{xy}$, nhỏ hơn hoặc bằng r .

Chứng minh kết quả 9.2.4.

Giả sử $R_{eff}^{(l)} \leq r$ với mọi l . Kết quả 9.1.6) đảm bảo sẽ có một luồng $u^{(l)}$ với kích thước 1 từ s đến t_l trong N_l , với năng lượng toàn phần nhỏ hơn hoặc bằng r . Từ tính compact, chúng ta sẽ có một dãy con của $(u^{(l)})$

hội tụ đến một luồng u với các tính chất yêu cầu. Từ Kết quả 9.1.6), chiều ngược lại của khẳng định hiển nhiên cũng đúng. $\square$

Các kết quả tương tự cho $C_{eff}^{(\infty)}$ thậm chí còn dễ dàng hơn; nó có thể được suy ra ngay lập tức từ Kết quả 9.1.5) và $C_{eff}^{(\infty)} = \lim_{l \rightarrow \infty} C_{eff}^{(l)}$.

Kết quả 9.2.5.

Độ dẫn điện hiệu dụng $C_{eff}^{(\infty)} \leq C$ khi và chỉ khi, với mọi $C' > C$, chúng ta luôn có thể tìm được một hàm (V_x) trên tập các đỉnh $V(G)$ sao cho $V_s = 1$, $V_x = 0$ với tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các đỉnh x và $\sum_{xy \in E(G)} (V_x - V_y)^2 c_{xy} < C'$.

Kết quả 9.2.4) và 9.2.5) cũng chỉ ra cho chúng ta một phiên bản rõ ràng hơn sau đây của Kết quả 9.2.3).

Kết quả 9.2.6.

Giả sử cho trước một mạng điện vô hạn, liên thông, hữu hạn địa phương $N = (G, c) = (G, 1/r)$, trong đó $c = 1/r$ là độ dẫn điện và r là điện trở.

Khi đó, RW là transient khi và chỉ khi chúng ta có thể tìm được một luồng (u_{xy}) với năng lượng toàn phần hữu hạn $\sum_{xy \in E(G)} u_{xy}^2 r_{xy}$ trong đó không có dòng điện nào rời khỏi bất kỳ đỉnh nào, nhưng có thể có một số dòng điện đi vào mạng tại một số đỉnh nào đó. Ngoài ra, RW là recurrent khi và chỉ khi, với mọi $\varepsilon > 0$, chúng ta luôn có thể tìm được một hàm (V_x) trên tập các đỉnh sao cho $V_s \geq 1$ với một đỉnh s nào đó, $V_x = 0$ với tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các đỉnh x và $\sum_{xy \in E(G)} (V_x - V_y)^2 c_{xy} < \varepsilon$.

Kết quả 9.2.6) ngụ ý dạng biến thể đường đi ngẫu nhiên của nguyên lý đơn điệu: khi chứng minh tính transience, chúng ta có thể cắt các cạnh, khi chứng minh tính recurrent, chúng ta có thể nối tắt các đỉnh.

Như một ứng dụng nổi bật của Kết quả 9.2.6), chúng ta sẽ chứng minh kết quả tuyệt vời sau đây của Pólya về các đường đi ngẫu nhiên trên các mạng $\mathbb{Z}^d$.

Kết quả 9.2.7.

Mọi đường đi ngẫu nhiên đơn trên một mạng d – chiều $\mathbb{Z}^d$ sẽ là recurrent nếu $d = 1, 2$ và là transient nếu $d \geq 3$.

Chứng minh kết quả 9.2.7.

Các đường đi ngẫu nhiên đơn (SRW) đang được đề cập chính là các RW trên mạng điện đơn tương ứng với đồ thị $\mathbb{Z}^d$, trong đó mỗi cạnh đều có điện trở bằng 1. Từ nguyên lý đơn điệu, tất cả những gì chúng ta phải làm đó là chỉ ra rằng các SRW trên $\mathbb{Z}^2$ là recurrent còn trên $\mathbb{Z}^3$ là transient.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định thứ nhất, với mọi $n \geq 1$, chập tất cả $8n$ đỉnh $x = (x_1, x_2)$ với $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) = n$ thành một đỉnh a_n mới và kí hiệu $a_0 = 0$. Mạng mới nhận được là một mạng đường đi vô hạn về một phía $a_0 a_1 a_2 \dots$, với $r_{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{8n+4}$. Do $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+4} = \infty$ nên điện trở hiệu dụng giữa a_0 và ∞ là ∞ , nghĩa là SRW thực sự là recurrent.

Tuy nhiên, chúng ta vẫn cần đưa ra một lập luận hơi khác một chút, lần này dựa trên Kết quả 9.2.6).

Kí hiệu $S_m = \sum_{i=1}^m 1/i$ và, với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, chúng ta xác định V_x bởi

$$V_x = \begin{cases} 1 - S_k/S_n & \text{nếu } \max(|x_1|, |x_2|) = k < n, \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó,

$$\sum_{xy \in E(\mathbb{Z}^2)} (V_x - V_y)^2 \leq \sum_{k=1}^n 8k(kS_n)^{-2} = \frac{8}{S_n},$$

và vế phải của đánh giá trên có xu hướng tiến đến 0 khi $n \rightarrow \infty$.

Để thấy rằng các SRW trên $\mathbb{Z}^3$ là transient, chúng ta cần xác định một luồng $u = (u_{xy})$ trong phân tám dương như sau. Giả sử cho trước một đỉnh $x = (x_1, x_2, x_3)$ với $x_i \geq 0$ và $x_1 + x_2 + x_3 = n$, chúng ta sẽ gửi một dòng điện với cường độ $2(x_i + 1)/(n+1)(n+2)(n+3)$ đi đến đỉnh $x + e_i$, trong đó (e_1, e_2, e_3) là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó, chúng ta sẽ có một dòng điện có cường độ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ đi vào mạng tại 0 và KCL được thỏa mãn tại mọi đỉnh khác, bởi vì tổng cường độ dòng điện đi vào tại một đỉnh $x = (x_1, x_2, x_3)$, với $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = n \geq 1$, là $2(x_1 + x_2 + x_3)/n(n+1)(n+2) = 2/(n+1)(n+2)$ và tổng cường độ dòng điện rời khỏi nó là $2(x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1)/(n+1)(n+2)(n+3) = 2/(n+1)(n+2)$.

Nhận thấy rằng năng lượng toàn phần của dòng điện này là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1+x_2+x_3=n} \sum_{i=1}^3 \frac{4(x_i + 1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \frac{4(n+1)(n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2},$$

bởi vì chúng ta có $\binom{n+2}{2}$ điểm (x_1, x_2, x_3) trong $\mathbb{Z}^3$ với $x_1 + x_2 + x_3 = n$ và nếu $x_i \geq 0$ và $x_1 + x_2 + x_3 = n$ thì $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 \leq (n+1)^2 + 1 + 1 \leq (n+1)(n+3)$.

Do đó, năng lượng toàn phần tối đa sẽ không vượt quá $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+3)} = 1$.

Như vậy, từ Kết quả 9.2.6), các SRW trên $\mathbb{Z}^3$ là transient. □

Rõ ràng, cách chứng minh nêu ở trên của định lí Pólya không thực sự thể hiện được sức mạnh của Kết quả 9.2.6), kết quả này có thể được sử dụng để chứng minh tính transient và tính recurrent của các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị vô hạn tổng quát hơn nhiều so với các mạng.

9.3. Các thời gian xảy ra và các thời gian di chuyển

Nhận thấy rằng chúng ta thu được các kết quả trong phần trước chỉ bằng cách dựa vào những sự kiện thô sơ nhất liên quan đến các đường đi ngẫu nhiên. Do chúng ta muốn giữ nguyên về cơ bản phần trình bày nên chúng ta vẫn sẽ tiếp tục đi theo hướng phân tích này; tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy thuận tiện hơn khi sử dụng một số tính chất cơ bản của các đường đi ngẫu nhiên.

Mục đích của chúng ta trong phần này của bài viết là nghiên cứu các tham số quan trọng của các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị, chẳng hạn như thời gian xảy ra dự kiến, thời gian di chuyển và thời gian lưu

trú. Ngoài các lập luận tổ hợp, chúng ta cũng sẽ sử dụng mối liên hệ giữa các đường đi ngẫu nhiên và các mạng điện, vì lợi ích của cả hai lý thuyết. Đối với các kết quả khác, chúng ta sẽ chứng minh một định lý của Foster cho rằng tổng của các điện trở trên các cạnh trong một đồ thị đơn sẽ chỉ phụ thuộc vào bậc của đồ thị đó.

Một đặc điểm hấp dẫn của lý thuyết này nằm ở chỗ nó có rất nhiều mối liên hệ: các kết quả về bậc nêu trong phần trình bày của chúng ta chỉ là một trong nhiều khả năng có thể xảy ra khác nhau.

Để nhấn mạnh bản chất tổ hợp của các kết quả và để giữ cho cách ký hiệu được đơn giản, chúng ta sẽ chỉ xem xét các đường đi ngẫu nhiên đơn trên một đồ thị cố định G cho trước với n đỉnh và m cạnh sao cho ma trận chuyển xác suất là $P = (P_{xy})$, trong đó $P_{xy} = 1/d(x)$ nếu $xy \in E(G)$. Trên thực tế, khi thực hiện cách làm này, chúng ta không làm mất tính tổng quát của vấn đề: tất cả các kết quả này đều có thể được dịch ngay lập tức sang cho trường hợp độ dẫn chung.

Với mọi phân phối xác suất ban đầu cho trước $p = (p_x)_{x \in V(G)}$, phân phối xác suất sau một bước là $pP = (\sum_x p_x P_{xy})_{y \in V(G)}$, bởi vì y nhận được một “khối lượng” (hoặc một “xác suất”) $p_x P_{xy}$ từ mỗi đỉnh x . Nếu G là một đa đồ thị thì $P_{xy} = m(xy)/d(x)$, trong đó $m(xy)$ là số các cạnh từ x đến y . Trong trường hợp này, trong một bước, mỗi cạnh e từ x đến y đều mang một tỉ lệ $1/d(x)$ của xác suất p_x từ x đến y và một tỉ lệ $1/d(y)$ của xác suất p_y từ y đến x . Để đơn giản cách ký hiệu, chúng ta sẽ tạm giới hạn sự chú ý của bản thân vào các đồ thị đơn không có các cạnh khuyên, mặc dù rõ ràng là tất cả các kết quả này đều có thể chuyển sang cho các đa đồ thị và, tổng quát hơn một chút, cho các đa đồ thị trọng lượng, như trong mục 9.2. Mối liên hệ giữa các mạng điện và các đường đi ngẫu nhiên.

Kí hiệu $\pi = (\pi_x)_{x \in V}$ là phân phối xác suất trên $V = V(G)$ với $\pi_x = d(x)/2m$. Nếu π là phân phối xác suất ban đầu của chúng ta thì mỗi cạnh đều truyền $1/d(x)$ xác suất $\pi_x = d(x)/2m$ từ x đến y , nghĩa là mỗi cạnh đều truyền cùng một xác suất $1/2m$ theo cả hai hướng. Đặc biệt, ma trận P và vector π thỏa mãn các **phương trình cân bằng**:

$$\pi_x P_{xy} = \pi_y P_{yx} \text{ với mọi } x, y \in V.$$

Từ đó rõ ràng là π là một **phân phối ổn định đối với P** : $\pi P = \pi$.

Thật vậy,

$$(\pi P)_y = \sum_x \pi_x P_{xy} = \sum_x \pi_y P_{yx} = \pi_y \sum_x P_{yx} = \pi_y.$$

Điều gì sẽ xảy ra nếu SRW của chúng ta bắt đầu từ một phân phối xác suất $p = (p_x)_{x \in V}$? Nếu G là một đồ thị lưỡng phân thì pP^k , phân phối xác suất sau k bước, không nhất thiết phải tiến đến π khi $k \rightarrow \infty$, nhưng nếu G không phải là một đồ thị lưỡng phân thì $p^k = pP^k$ sẽ tiến tới π khi $k \rightarrow \infty$.

Nói một cách chính xác hơn, với mọi i cố định, x và y ,

$$P(X_j = x | X_i = y) \rightarrow \pi_x = \frac{d(x)}{2m},$$

khi $j \rightarrow \infty$.

Điều này ngụ ý rằng nếu $\varepsilon > 0$ và $|j - i|$ đủ lớn thì

$$|P(X_i = x|X_j = y) - P(X_i = x)P(X_j = y)| < \varepsilon. \quad (11)$$

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ bắt đầu SRW của mình từ một phân phối xác suất $p = (p_x)_{x \in V}$, nghĩa là $P(X_0 = x) = p_x$, và kí hiệu $p^k = (p_x^{(k)})_{x \in V}$, nghĩa là $p_x^{(k)} = P(X_k = x) = (pP^k)_x$.

Kí hiệu $S_k(x)$ là số lần chúng ta viếng thăm đỉnh x trong k bước đi đầu tiên, nghĩa là số lần x xuất hiện trong dãy $X_1, \dots, X_k$.

Kết quả 9.3.1.

Chúng ta luôn có $\lim_{k \rightarrow \infty} E(S_k(x)/k) = d(x)/2m$ và $(S_k(x)/k)_{x \in V}$ tiến tới π theo nghĩa xác suất khi $k \rightarrow \infty$.

Chứng minh kết quả 9.3.1.

Đầu tiên, lưu ý rằng

$$E(S_k(x)) = \sum_{i=1}^k P(X_i = x),$$

nên

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(S_k(x)/k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_x^{(i)} = \frac{d(x)}{2m}. \quad (12)$$

Để ước tính phương sai của $S_k(x)/k$, chúng ta chỉ cần lưu ý rằng, một cách rất thô sơ, nếu (10) đúng với $|j - i| \geq k_0$ thì

$$\begin{aligned} \sigma^2(S_k(x)) &= E\left(\left(S_k(x)\right)^2\right) - \left(E(S_k(x))\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (P(X_i = x, X_j = x) - P(X_i = x)P(X_j = x)) \\ &= \sum_{\substack{|i-j| < k_0 \\ i, j \leq k}} (P(X_i = x, X_j = x) - P(X_i = x)P(X_j = x)) \\ &\quad + \sum_{\substack{|i-j| \geq k_0 \\ i, j \leq k}} (P(X_i = x, X_j = x) - P(X_i = x)P(X_j = x)) \\ &\leq 2k_0 k + k^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Do đó, nếu $k \geq 2k_0/\varepsilon$ thì điều này chỉ ra rằng

$$\sigma^2(S_k(x)/k) = \frac{E\left(\left(S_k(x)\right)^2\right) - \left(E(S_k(x))\right)^2}{k^2} \leq \frac{2k_0}{k} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Như vậy,

$$P\left(\left|\frac{S_k(x)}{k} - \frac{E(S_k(x))}{k}\right| \geq \eta\right) \rightarrow 0,$$

với mọi $\eta > 0$, nên, từ (12), $S_k(x)/k \rightarrow d(x)/2m$ theo nghĩa xác suất. $\square$

Kí hiệu $H(x, y)$ là **thời gian xảy ra trung bình của y từ x** , nghĩa là thời gian dự kiến để đi từ x đến y :

$$H(x, y) = E_x(\tau_{\{y\}}^+).$$

Hiển nhiên,

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_k = y, X_i \neq y \text{ với } 1 \leq i < k | X_0 = x). \quad (13)$$

Bằng cách đặt $x = y$ trong công thức trên, chúng ta nhận thấy rằng $H(x, x) = E_x(\tau_{\{x\}}^+)$ là **thời gian quay lại trung bình của x** . Bắt đầu từ x , với xác suất $P_{xy} = 1/d(x)$, bước đi đầu tiên sẽ đưa chúng ta đi đến y , nên

$$H(x, x) = 1 + \sum_{z \in V} P_{xz} H(z, x) = 1 + \frac{1}{d(x)} \sum_{z \in N(x)} H(z, x).$$

Đôi khi, $H(x, y)$ còn được gọi là **thời gian xảy ra của y từ x** (hoặc **thời gian truy cập của y từ x**).

Hàm $H'(x, y) = E_x(\tau_{\{y\}})$ gần như giống với $H(x, y)$. Rõ ràng, $H'(x, y) = H(x, y)$ với $x \neq y$, nhưng nếu $x = y$ thì H' lại không cung cấp cho chúng ta thêm bất kỳ thông tin gì: $H'(x, x) = 0$. Trên thực tế, $H'(x, y)$ là một công cụ khá hữu ích để chúng ta có thể tính $H(x, y)$, bởi vì, lập luận như trong (13),

$$H(x, y) = 1 + \frac{1}{d(x)} \sum_{z \in N(x)} H'(z, y),$$

với mọi x, y .

Không có lý do gì để chúng ta mong đợi rằng $H(x, y)$ là một hàm đối xứng và thực tế là nó cũng không thể là một hàm đối xứng. Chẳng hạn, nếu G là một đường đi xyz thì $H(x, y) = 1$ và $H(y, x) = 3$. Tuy nhiên, kết quả tiếp theo đây, về $H(x, x)$, không có gì quá bất ngờ.

Kết quả 9.3.2.

Thời gian quay lại trung bình một đỉnh x trong một đồ thị liên thông là $H(x, x) = 2m/d(x)$.

Chứng minh kết quả 9.3.2.

Kí hiệu $Y_0 = 0$ và Y_l là thời gian để đường đi ngẫu nhiên $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ của chúng ta quay trở lại x lần thứ l khi chúng ta bắt đầu tại $X_0 = x$. Khi đó, $Y_1 = Y_1 - Y_0, Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có phân phối giống hệt nhau. Do đó, $E(Y_l) = lE(Y_1) = lH(x, x)$. Ngoài ra, $Y_l \leq k$ khi và chỉ khi $S_k(x) \geq l$.

Như vậy, với $\alpha > 0$,

$$Y_l/l \leq \alpha \text{ khi và chỉ khi } S_{\lfloor l\alpha \rfloor} \geq l.$$

Đặc biệt, $P(S_{\lfloor l\alpha \rfloor}/l\alpha \geq 1/\alpha) = P(Y_l/l \leq \alpha)$ nên, từ Kết quả 9.3.1),

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_l}{l} \leq \alpha\right) = \lim_{l \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_{\lfloor l\alpha \rfloor}}{l\alpha} \geq \frac{1}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \alpha > 2m/d(x), \\ 0 & \text{nếu } \alpha < 2m/d(x). \end{cases}$$

Như vậy, Y_l/l sẽ tiến tới $2m/d(x)$ theo nghĩa xác suất, nên $H(x, x) = 2m/d(x)$. $\square$

Trên thực tế, điều này còn đúng hơn nữa: không chỉ thời gian quay lại trung bình một đỉnh x chính xác là $2m/d(x)$, mà chúng ta còn mong đợi việc quay lại một đỉnh x qua cạnh yx sẽ diễn ra trong $2m$ bước.

Kết quả 9.3.3.

Giả sử xy là một cạnh cô định cho trước của đồ thị G của chúng ta.

Khi đó, thời gian dự kiến để một đường đi ngẫu nhiên đơn trên G , bắt đầu từ x , quay lại x qua cạnh yx là $2m$; nghĩa là nếu $X_0, X_1, X_2, \dots$ là SRW của chúng ta, với $X_0 = x$ và $Z = \min\{k \geq 2: X_{k-1} = y, X_k = x\}$, thì $E(Z) = 2m$.

Chứng minh kết quả 9.3.3.

Nhận thấy rằng xác suất để chúng ta đi qua cạnh yx tại thời điểm $k + 1$ là

$$P(X_k = y, X_{k+1} = x) = \frac{P(X_k = y)}{d(y)}.$$

Như vậy, bằng cách dùng $S_k(yx)$ để kí hiệu cho số lần chúng ta đi qua cạnh yx tính cho đến thời điểm $k + 1$,

$$\frac{E(S_k(yx))}{k} = \frac{E(S_k(y))}{kd(y)} \rightarrow \frac{1}{2m}.$$

Phép chứng minh của chúng ta cũng có thể được hoàn thành như trong Kết quả 9.3.2): bằng cách dùng Z_l để kí hiệu cho thời điểm thứ k mà đường đi ngẫu nhiên $(X_i)_{i=0}^\infty$ của chúng ta, bắt đầu tại $X_0 = x$, quay lại x lần thứ l , nghĩa là $X_{k-1} = y$ và $X_k = x$ lần thứ l , $E(Z_l) = lE(Z_1)$ và $S_k(xy) \leq l$ khi và chỉ khi $Z_l \leq k$. $\square$

Như một dạng biến nhỏ của Kết quả 9.3.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng, bất kể chúng ta bắt đầu SRW ở đâu và chúng ta định hướng cạnh uv theo bất kỳ hướng nào, $S_k(uv)/k \rightarrow 1/2m$ theo nghĩa xác suất. Nói một cách đại khái, điều này có nghĩa là SRW của chúng ta dành lượng thời gian như nhau ở mỗi cạnh, theo cả hai hướng. Điều này không có gì là quá ngạc nhiên: về lâu dài, $\pi_u = d(u)/2m$ thời gian chúng ta sẽ ở tại u , bất kể chúng ta bắt đầu từ đâu, và từ u với xác suất $1/d(u)$ chúng ta sẽ đi qua cạnh uv .

Do $d(x)/2m$ chỉ là tọa độ x của phân phối ổn định π nên, từ Kết quả 9.3.1), chúng ta có

$$H(x, x) = \frac{1}{\pi_x}. \quad (14)$$

Trên thực tế, (14) có một dạng tổng quát hơn đáng kể cho mọi xích Markov ergodic hữu hạn $(X_k)_{k=0}^\infty$. Giả sử $\pi = (\pi_x)_{x \in V}$ là một phân phối ổn định, nghĩa là nếu X_0 có phân phối π thì mọi X_k cũng đều có phân phối π . Với $S \subset V$, chúng ta xác định π_S bởi công thức $\pi_S(x) = \pi_x/\pi(S)$. Khi đó, về cơ bản, π_S chính là xác suất có điều kiện trên S sao cho $\pi_S(x) = \pi(x)/\pi(S)$ với $x \in S$; hơn nữa, với $y \in V/S$, chúng ta sẽ kí hiệu $\pi_S(y) = 0$. Nói cách khác, π_S chính là π với điều kiện xích Markov xác định trong S .

Khi đó, chúng ta sẽ có **công thức Kac**:

$$\pi(S)E_{\pi_S}(\tau_S^+) = 1, \quad (15)$$

trong đó E_{π_S} là kỳ vọng khi xích của chúng ta bắt đầu với phân phối ban đầu là π_S .

Chúng ta cũng có thể dễ dàng kiểm tra được rằng phép chứng minh của Kết quả 9.3.2) có thể được lặp lại để đưa ra khẳng định tổng quát hơn nêu ở trên. Tuy nhiên, ở đây, chúng ta vẫn sẽ trình bày một cách chứng minh khác cho (15).

Lưu ý rằng

$$\begin{aligned} P_\pi(\tau_S^+ = k) &= P_\pi(X_1 \notin S, \dots, X_{k-1} \notin S, X_k \in S) \\ &= P_\pi(X_1 \notin S, \dots, X_{k-1} \notin S) - P_\pi(X_1 \notin S, \dots, X_k \notin S) \\ &= P_\pi(X_1 \notin S, \dots, X_{k-1} \notin S) - P_\pi(X_0 \notin S, \dots, X_{k-1} \notin S) \\ &= P_\pi(X_0 \in S, X_1 \notin S, \dots, X_{k-1} \notin S) \\ &= \pi(S)P_{\pi_S}(\tau_S^+ \geq k). \end{aligned}$$

Bằng cách lấy tổng theo chỉ số k , chúng ta thu được kết quả sau

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_\pi(\tau_S^+ = k) = \pi(S) \sum_{k=1}^{\infty} P_{\pi_S}(\tau_S^+ \geq k) = \pi(S)E_{\pi_S}(\tau_S^+), \text{ như đã tuyên bố.}$$

Với một đồ thị chính quy G với bậc d , bằng cách kết hợp (14) và Kết quả 9.3.2), chúng ta nhận thấy rằng, với một đỉnh x cố định cho trước, giá trị trung bình của $H(x, y)$ trên $y \in N(x)$ chính là $n - 1$:

$$\frac{1}{d} \sum_{y \in N(x)} H(y, x) = H(x, x) - 1 = \frac{2m}{d-1} = n - 1.$$

Kết quả tương tự cũng đúng mà không cần phải giả sử tính chính quy, nhưng chúng ta phải lấy trung bình của thời gian xảy ra $H(x, y)$ trên tất cả $2m$ cặp đỉnh liên hợp có tính đến thứ tự. Nói cách khác, bắt đầu từ phân phối ổn định, chúng ta kỳ vọng rằng sẽ trở lại vị trí ban đầu sau n bước.

Kết quả 9.3.4.

Giả sử G là một đồ thị liên thông với cấp n và kích thước m .

Khi đó, thời gian xảy ra trung bình $H(x, y)$ của SRW trên G sẽ thỏa mãn hệ thức sau

$$\frac{1}{2m} \sum_{x \in V(G)} \sum_{y \in N(x)} H(x, y) = n - 1. \quad (16)$$

Chứng minh kết quả 9.3.4.

Giả sử $\pi = (\pi_x)$ là phân phối ổn định của ma trận chuyển xác suất $P = (P_{xy})$ sao cho $\pi P = \pi$ và $\pi_x P_{xy} = 1/2m$ với mọi $xy \in E(G)$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \sum_x \sum_{y \in N(x)} H(x, y) &= \sum_{x, y} \pi_x P_{xy} H(y, x) \\ &= \sum_x \pi_x \left(\sum_y P_{xy} H(y, x) \right) \\ &= \sum_x \pi_x (H(x, x) - 1) \\ &= \sum_x \pi_x \left(\frac{1}{\pi_x} - 1 \right) \\ &= n - 1. \end{aligned}$$

□

Kết quả 9.3.4) có một dạng cải tiến khá hấp dẫn cho một bất biến khác của các đường đi ngẫu nhiên, thời gian di chuyển trung bình. Với các đỉnh $x \neq y$, **thời gian di chuyển trung bình giữa x và y** , kí hiệu bởi $C(x, y)$, là số bước dự kiến trong một hành trình khứ hồi, một đường đi từ x đến y rồi quay lại x .

Như vậy,

$$C(x, y) = H(x, y) + H(y, x).$$

Khi đó, (16) tương đương với khẳng định:

$$\frac{1}{2m} \sum_{xy \in E(G)} C(x, y) = n - 1.$$

Như vậy, giá trị trung bình cộng của thời gian di chuyển giữa m cặp đỉnh liên hợp trong một đồ thị liên thông với bậc n là $2(n - 1)$.

Kết quả 9.3.5.

Với các kí hiệu nêu ở trên,

$$P_{esc}(s \rightarrow t) = \frac{C_{eff}(s, t)}{d(s)} = \frac{H(s, s)}{C(s, t)} = \frac{2m}{d(s)C(s, t)}. \quad (17)$$

Hơn nữa,

$$C(s, t) = 2mR_{eff}(s, t). \quad (18)$$

Chứng minh kết quả 9.3.5.

Đẳng thức đầu tiên trong (17) suy ra trực tiếp từ hệ thức nêu trong Kết quả 9.2.2). Để chứng minh các đẳng thức khác nêu trong (17), giả sử R là thời điểm đầu tiên đường đi ngẫu nhiên quay trở lại s và A là thời điểm đầu tiên nó quay trở lại s sau khi đã viếng thăm t . Khi đó, $E(R) = H(s, s) = 2m/d(s)$ và, từ cách xây dựng của chúng ta, $E(A) = C(s, t)$.

Nhận thấy rằng chúng ta luôn có $R \leq A$ và tạm giả sử rằng $P(R = A) = P_{esc}(s \rightarrow t) = q$.

Hơn nữa,

$$E(A - R) = (1 - q)E(A),$$

nên

$$C(s, t) = E(A) = \frac{E(R)}{q} = \frac{2m}{d(s)q}.$$

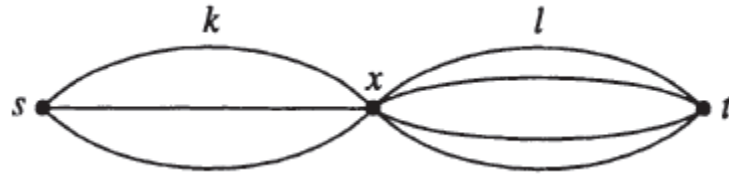
Như vậy, $P_{esc}(s \rightarrow t) = 2m/d(s)C(s, t)$, như đã tuyên bố. Do $H(s, s) = 2m/d(s)$ nên đẳng thức (17) được chứng minh. Cuối cùng, (18) được suy ra trực tiếp từ (17). $\square$

Các kết quả nêu trong mục **9.2. Mối liên hệ giữa các mạng điện và các đường đi ngẫu nhiên** cũng có các công thức hấp dẫn cho các đường đi ngẫu nhiên đơn. Chẳng hạn, số lần dự kiến chúng ta đi qua một cạnh cố định sx từ s đến x nếu chúng ta bắt đầu đường đi ngẫu nhiên tại s và dừng lại khi chúng ta đến t chỉ bằng $1/d(s)$ so với thời gian lưu trú $S_s(s \rightarrow t)$ tại s .

Nhưng, từ (8) và (10) (hoặc (17)), điều này chính xác là

$$\frac{S_s(s \rightarrow t)}{d(s)} = \frac{1}{d(s)P_{esc}(s \rightarrow t)} = R_{eff}(s, t).$$

Chúng ta sẽ minh họa những kết quả vừa trình bày này cho mạng điện đơn G_0 xác định trên ba đỉnh được biểu diễn trong hình vẽ dưới đây:



Hình vẽ minh họa đồ thị G_0 với ba đỉnh là s, t, x và $k + l$ cạnh: k cạnh từ s đến x và l cạnh từ x đến t .

Đầu tiên chúng ta sẽ tính các dữ liệu cho mạng điện đơn G_0 . Điện trở hiệu dụng của G_0 giữa s và t là $R_{eff}(s, t) = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{k+l}{kl}$, nên, bằng cách đặt một điện thế tuyệt đối $V_s = 1$ tại s và một điện thế tuyệt đối $V_t = 0$ tại t , chúng ta sẽ nhận được một dòng điện với cường độ $\frac{kl}{k+l}$. Trong một cạnh liên thuộc với s , chúng ta sẽ có một dòng điện với cường độ $\frac{l}{k+l}$ và, trong một cạnh liên thuộc với t , một dòng điện với cường độ $\frac{k}{k+l}$. Điều này có nghĩa là chúng ta sẽ có điện thế tuyệt đối $V_x = \frac{k}{k+l}$ tại đỉnh x .

Kế tiếp, xem xét một đường đi ngẫu nhiên đơn bất kỳ trên đồ thị G_0 . Xác suất để bắt đầu từ x chúng ta đến s trước t chỉ đơn giản là bước đầu tiên từ u đến s : điều này có xác suất xảy ra là $\frac{k}{k+l}$, chính là V_x . Xác suất thoát $P_{esc}(s \rightarrow t)$ chính là xác suất mà sau bước đầu tiên đưa chúng ta đến u , chúng ta đến t chứ không phải s : điều này có xác suất xảy ra là $\frac{l}{k+l}$. Như vậy, $C_s P_{esc}(s \rightarrow t) = kl/(k+l)$, đây thực sự chính là tổng cường độ dòng điện. Ngoài ra, $\frac{P_{esc}(s \rightarrow t)}{d(s)} = \frac{k+l}{kl}$ chính là điện trở hiệu dụng giữa s và t , như đã tuyên bố.

Trong SRW trên G_0 , thời gian lưu trú dự kiến tại s trên đường đi của chúng ta từ s đến t là

$$\frac{kl}{k+l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jk^{j-1}}{(k+l)^{j-1}} = \frac{k+l}{l},$$

nên số lần dự kiến chúng ta vượt qua một cạnh liên thuộc với s là $\frac{k+l}{kl}$, đây chính xác là $R_{eff}(s, t)$, như chúng ta biết rằng nó phải như vậy.

Số lần dự kiến SRW của chúng ta đi qua một cạnh cố định cho trước từ u đến t là bao nhiêu? Nếu chúng ta bắt đầu ở s và dừng ở t thì giá trị kỳ vọng này sẽ là $\frac{1}{l}$, như chúng ta đã biết, và nếu chúng ta bắt đầu tại t và dừng lại tại s thì nó sẽ là

$$\frac{k}{l(k+l)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jl^j}{(k+l)^j} = \frac{1}{k}.$$

Như vậy, $R_{eff}(s, t)$ là tổng của hai giá trị kỳ vọng này. Trên thực tế, điều này nói chung vẫn đúng cho trường hợp tổng quát chứ không chỉ đối với ví dụ đơn giản G_0 của chúng ta.

Để chứng minh điều này, đầu tiên, chúng ta sẽ cần thiết lập lại bối cảnh của bài toán. Giả sử s, t, x là các đỉnh của một đồ thị liên thông G , với $s \neq t$. Kí hiệu $S_x(s \leftrightarrow t)$ là **thời gian lưu trú dự kiến tại x** trong một hành trình khứ hồi ngẫu nhiên từ s đến t . Nói cách khác, $S_x(s \leftrightarrow t)$ là số lần dự kiến SRW trên G ở vị trí x nếu chúng ta bắt đầu ở vị trí s , tiếp tục cho đến khi chúng ta đạt đến vị trí t và sau đó dừng lại khi chúng ta một lần nữa quay lại vị trí s . Ngoài ra, với một cạnh xy , kí hiệu $S_{xy}(s \leftrightarrow t)$ là số lần dự kiến chúng ta đi qua cạnh xy từ x đến y trong một hành trình khứ hồi từ s đến t .

Rõ ràng,

$$S_{xy}(s \leftrightarrow t) = \frac{1}{d(x)} S_x(s \rightarrow t).$$

Kết quả 9.3.6.

Với một đồ thị liên thông G , các đỉnh $s \neq t$, một cạnh $xy \in E(G)$, chúng ta luôn có

$$R_{eff}(s, t) = S_{xy}(s \leftrightarrow t) = \frac{S_x(s \rightarrow t)}{d(x)} + \frac{S_x(t \rightarrow s)}{d(x)}.$$

Chứng minh kết quả 9.3.6.

Với các ký hiệu nêu trong Kết quả 9.2.2), $S_x(s \leftrightarrow t)$ chính là

$$S_x(s \rightarrow t) + S_x(t \rightarrow s) = V_x(s \rightarrow t)d(x) + V_x(t \rightarrow s)d(x).$$

Nhưng

$$V_z(s \rightarrow t) + V_z(t \rightarrow s) = R_{eff}(s, t) = R_{eff}(t, s), \quad (19)$$

với mọi z .

Thật vậy, $V_z(s \rightarrow t)$ là giá trị điện thế tại z nếu chúng ta đặt tại s một điện thế $R_{eff}(s, t)$ và tại t một điện thế 0, và $V_z(t \rightarrow s)$ là giá trị điện thế tại z nếu chúng ta đặt tại t một điện thế $R_{eff}(s, t)$ và tại s một điện thế 0. Như vậy, (19) tuân theo nguyên lý chồng chất nghiệm đã được thảo luận trong mục **2.1. Đồ thị và Mạng điện**. $\square$

Kết quả 9.3.6) có thể được sử dụng để đưa ra một phép chứng minh khác cho Kết quả 9.3.5). Để làm được điều này, chúng ta sẽ phát biểu lại Kết quả 9.3.5) dưới dạng:

$$C(s, t) = 2mR_{eff}(s, t) = \frac{2m}{d(s)P_{esc}(s \rightarrow t)} = \frac{H(s, s)}{P_{esc}(s \rightarrow t)}. \quad (20)$$

Kế tiếp, với một hành trình khứ hồi bất kỳ từ s đến t và quay lại s , trong mỗi bước, chúng ta sẽ đi qua một cạnh cho đến khi chúng ta dừng hành trình lại tại t , nên

$$C(s, t) = \sum_{x \in V(G)} \sum_{y \in N(x)} S_{xy}(s \leftrightarrow t).$$

Từ Kết quả 9.2.3), mỗi một trong tổng $2m$ số hạng trong vế phải đều là $R_{eff}(s, t)$, nên đẳng thức đầu tiên của (20) được chứng minh. Đẳng thức thứ hai và đẳng thức thứ ba được suy ra trực tiếp từ (8) và (17).

Có một dạng biến thể khác của xác suất thoát mà chúng ta quan tâm. Giả sử cho trước các đỉnh s và u , ký hiệu $P_{esc}(s \rightarrow t < u)$ là xác suất để nếu chúng ta bắt đầu từ s thì chúng ta sẽ đến t trước s hoặc u . Kết quả sau đây là một sự mở rộng nhẹ của Kết quả 9.2.1). Để chứng minh điều này, chúng ta hãy bổ sung thêm một đỉnh t' vào đồ thị và nối t' với t và u bằng nhiều cạnh. Áp dụng Kết quả 9.2.1) và 9.2.2) để đo cường độ dòng điện từ s đến t' .

Kết quả 9.3.7.

Giả sử s, t, u là các đỉnh phân biệt của một đồ thị. Giả sử chúng ta đặt tại s một điện thế 1 và tại t và u một điện thế 0.

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được một dòng điện với cường độ $d(s)P_{esc}(s \rightarrow t < u)$ rời G tại t .

Luật tương hỗ sau đây là hiển nhiên nếu chúng ta tin vào trực giác vật lý của chính mình. Như chúng ta sẽ thấy, nó cũng có thể được suy ra dễ dàng từ tính thuận nghịch của các đường đi ngẫu nhiên trên một đồ thị.

Kết quả 9.3.8.

Giả sử s, t, u là các đỉnh phân biệt của một đồ thị G .

Khi đó, $d(s)P_{esc}(s \rightarrow t < u) = d(t)P_{esc}(t \rightarrow s < u)$.

Chứng minh kết quả 9.3.8.

Giả sử $W_{s,t;u}$ là tập các đường đi $W = x_0x_1 \dots x_l$ trong $G - u$ sao cho $x_i = s$ khi và chỉ khi $i = 0$ và $x_i = t$ khi và chỉ khi $i = l$.

Khi đó, bằng cách dùng $(X_i)_{i=0}^\infty$ kí hiệu cho đường đi ngẫu nhiên của chúng ta,

$$P_{esc}(s \rightarrow t < u) = \sum_{W \in W_{s,t;u}} P(X_i = x_i, 1 \leq i \leq l | X_0 = s),$$

$$P_{esc}(t \rightarrow s < u) = \sum_{W \in W_{s,t;u}} P(X_i = x_{l-i}, 1 \leq i \leq l | X_0 = t).$$

Nhưng, với $W \in W_{s,t;u}$, chúng ta lại có

$$P(X_i = x_i, 1 \leq i \leq l | X_0 = s) = \prod_{i=0}^{l-1} d(x_i)^{-1},$$

$$P(X_i = x_{l-i}, 1 \leq i \leq l | X_0 = t) = \prod_{i=1}^l d(x_i)^{-1}.$$

Tỉ lệ của hai biểu thức này chính là $d(t)/d(s)$, như chúng ta đã tuyên bố. □

Kết quả 9.3.8) chính là kết quả cần thiết để chúng ta có thể chứng minh kết quả cơ bản trong lý thuyết về mạng điện là mọi mạng với tập đỉnh kèm U đều tương đương với một mạng với tập đỉnh U .

Một dạng biến thể nhỏ của phép chứng minh của Kết quả 9.3.8) cũng chỉ ra cho chúng ta một tính chất quan trọng của thời gian xảy ra trung bình: mặc dù $H(s, t)$ không nhất thiết phải bằng $H(t, s)$ nhưng khi “lấy theo các bộ ba” chúng ta nhất thiết sẽ có một đẳng thức.

Kết quả 9.3.9.

Giả sử s, t, u là các đỉnh của một đồ thị G .

Khi đó, $H(s, t) + H(t, u) + H(u, s) = H(s, u) + H(u, t) + H(t, s)$.

Chứng minh kết quả 9.3.9.

Nhận thấy rằng về trái là thời gian dự kiến để đi từ s đến t , sau đó đến u và cuối cùng quay lại s , còn về phải là độ dài dự kiến của đường đi theo hướng ngược lại. Như vậy, bằng cách dùng τ kí hiệu cho thời điểm đầu tiên đường đi bắt đầu từ s hoàn thành chuyến viếng thăm $s \rightarrow t \rightarrow u \rightarrow s$ và τ' kí hiệu cho thời điểm đầu tiên đường đi hoàn thành chuyến viếng thăm $s \rightarrow u \rightarrow t \rightarrow s$, khẳng định trên tuyên bố rằng $E_s(\tau) = E_s(\tau')$.

Xét một đường đi đóng kín $W = x_0 x_1 \dots x_l$ bắt đầu và kết thúc tại s , nghĩa là $x_0 = x_l = s$.

Rõ ràng,

$$P(X_i = x_i, 1 \leq i \leq l | X_0 = s) = P(X_i = x_{l-i}, 1 \leq i \leq l | X_0 = t) = \prod_{i=0}^{l-1} d(x_i)^{-1},$$

nghĩa là, xác suất để chúng ta đi hết đường đi này theo một chiều chính là xác suất để chúng ta đi hết nó theo chiều ngược lại.

Cố định N và giả sử $S = x_0 x_1 \dots$ là một đường đi vô hạn với $x_0 = s$. Kí hiệu $l = l(S, N) = \max\{i \leq N : x_i = s\}$ và S' là đường đi $x_l x_{l-1} \dots x_0 x_{l+1} x_{l+2} \dots$. Từ các quan sát nêu ở trên, $S \mapsto S'$ là một phép biến đổi bảo toàn độ đo của không gian các đường đi ngẫu nhiên bắt đầu tại s . Do $\tau(S) \leq N$ khi và chỉ khi $\tau'(S') \leq N$ nên chúng ta sẽ có $P_s(\tau \leq N) = P_s(\tau' \leq N)$. Như vậy, $E_s(\tau) = E_s(\tau')$, như chúng ta đã tuyên bố. $\square$

Kết quả 9.3.8) ngụ ý một dạng khác của luật tương hỗ.

Kết quả 9.3.10.

Thời gian lưu trú dự kiến thỏa mãn hệ thức $d(s)S_x(s \rightarrow t) = d(x)S_s(x \rightarrow t)$.

Chứng minh kết quả 9.3.10.

Chúng ta xác định một đường đi ngẫu nhiên trên tập $\{s, t, x\}$ với các xác suất chuyển $p_{st} = P_{esc}(s \rightarrow t < x)$, $p_{sx} = P_{esc}(s \rightarrow x < t)$, $p_{ss} = 1 - p_{st} - p_{sx}$, v.v... Kết quả 9.3.8) ngụ ý rằng trên thực tế, RW mới này cũng khả nghịch, nghĩa là nó có thể được xác định trên tam giác trọng lượng $\{s, t, x\}$, với các cạnh khuyên tại các đỉnh. Như vậy, hệ thức $d(s)S_x(s \rightarrow t) = d(x)S_s(x \rightarrow t)$ là hệ quả trực tiếp của Kết quả 9.3.8) cho RW này. $\square$

Kết quả cuối cùng mà chúng ta trình bày là một kết quả cổ điển trong lý thuyết về các mạng điện: Định lý Foster. Nếu đồ thị của chúng ta là một cây với bậc n thì điện trở hiệu dụng trên mỗi cạnh đều là 1 và tổng điện trở hiệu dụng trên các cạnh là $n - 1$. Ngoài ra, chúng ta cũng biết từ định lý Kirchhoff rằng nếu mọi cạnh của một đồ thị liên thông với n đỉnh và m cạnh đều nằm trong cùng một số cây khung thì điện trở hiệu dụng trên bất kỳ cạnh nào cũng bằng $(n - 1)/m$, nên tổng điện trở hiệu dụng trên các cạnh cũng lại là $n - 1$. Điều đáng ngạc nhiên ở đây đó là tổng này bằng $n - 1$ với mọi đồ thị liên thông bậc n đã được chứng minh bởi Foster vào năm 1949. Hai phép chứng minh tuyệt vời dưới đây, được tìm thấy bởi Tetali vào năm 1991 và 1994, minh họa sức mạnh của “tòa nhà” phức tạp của các mối quan hệ mà chúng ta đã xây dựng.

Kết quả 9.3.11. (Foster)

Giả sử G là một đồ thị liên thông bậc n .

Khi đó, $\sum_{st \in E(G)} R_{eff}(s, t) = n - 1$.

Chứng minh thứ nhất của kết quả 9.3.11.

Từ Kết quả 9.3.10), với hai đỉnh t và x bất kỳ, chúng ta sẽ có

$$\sum_{s \in N(t)} \frac{S_x(s \rightarrow t)}{d(x)} = \sum_{s \in N(t)} \frac{S_s(x \rightarrow t)}{d(s)},$$

bởi vì hai tổng này có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

Kế tiếp, nếu $x \neq t$ thì vế phải bằng 1, bởi vì nó chính xác là số lần dự kiến chúng ta đến t từ một trong những đỉnh láng giềng của nó trong một đường đi ngẫu nhiên từ x đến t . Mặt khác, với $x = t$, vế phải sẽ bằng 0.

Như vậy, bằng cách lấy tổng trên $V = V(G)$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\sum_{t \in V} \sum_{s \in N(t)} \frac{S_x(s \rightarrow t)}{d(x)} = n - 1.$$

Nhưng về trái lại là

$$\sum_{st \in E(G)} \left\{ \frac{S_x(s \rightarrow t)}{d(x)} + \frac{S_x(t \rightarrow s)}{d(x)} \right\} = \sum_{st \in E(G)} R_{eff}(s, t),$$

với đẳng thức $R_{eff}(s, t) = \frac{S_x(s \rightarrow t)}{d(x)} + \frac{S_x(t \rightarrow s)}{d(x)}$ đã nêu trong Kết quả 9.3.6). □

Chứng minh thứ hai của kết quả 9.3.11.

Từ Kết quả 9.3.4) và 9.3.5) (hoặc (15) và (17)),

$$n - 1 = \frac{1}{2m} \sum_{st \in E(G)} C(s, t) = \frac{1}{2m} \sum_{st \in E(G)} 2m R_{eff}(s, t) = \sum_{st \in E(G)} R_{eff}(s, t). \quad \square$$

9.4. Độ dẫn điện và Độ trộn lẫn

Chúng ta đã biết rằng mọi đường đi ngẫu nhiên đơn trên một (đa) đồ thị liên thông không lưỡng phân đều hội tụ về một phân phối ổn định duy nhất, bất kể phân phối xác suất ban đầu của chúng ta là bao nhiêu. Mục đích của chúng ta trong phần này của bài viết là nghiên cứu tốc độ của sự hội tụ này: cụ thể, chúng ta sẽ liên kết tốc độ hội tụ này với một đặc tính giãn nở thực tế của đồ thị.

Để tránh tạo ra sự xáo trộn không cần thiết, chúng ta sẽ giới hạn sự chú ý của mình vào các đồ thị chính quy. Chúng ta sẽ xem các quy ước sau đây là tự nhiên khi xem xét các đường đi ngẫu nhiên trên các đồ thị trong đó một cạnh khuyên sẽ đóng góp một đơn vị vào bậc của một đỉnh (chứ không phải là hai như thông thường). Giả sử cho trước một (đa) đồ thị liên thông, không lưỡng phân, d – chính quy G : chúng ta sẽ nghiên cứu các đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị này. Để đơn giản cách ký hiệu, chúng ta sẽ chọn $V(G) = [n] = \{1, \dots, n\}$, nên ma trận chuyển xác suất P sẽ có dạng $P = (P_{ij})_{i,j=1}^n$.

Như đã nêu trong mục 9.3. Các thời gian xảy ra và các thời gian di chuyển, với một đường đi ngẫu nhiên $\tilde{X} = (X_t)_{t=0}^\infty$ trên G , chúng ta sẽ ký hiệu $p_i^{(t)} = P(X_t = i)$. Như vậy, $\tilde{X}$ là SRW với phân phối ban đầu $p_0 = (p_i^{(0)})_{i=1}^n$, và $p_t = (p_i^{(t)})_{i=1}^n = p_0 P^t$ là phân phối của X_t . Khi đó, p_t có xu hướng tiến đến phân phối ổn

định $\pi = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$. Khi đo tốc độ hội tụ của $p_t \rightarrow \pi$, việc chúng ta sử dụng chuẩn nào đối với không gian $C_0(G)$ không quan trọng lắm, mặc dù theo thông lệ, chúng ta thường làm việc với l_2 – chuẩn $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|)^{\frac{1}{2}}$ và l_1 – chuẩn $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Cụ thể, **độ trộn lẫn** của các đường đi ngẫu nhiên trên G được định nghĩa là

$$\mu = \sup_{p_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|p_t - \pi\|_2^{\frac{1}{t}},$$

trong đó supremum được tính trên tất cả các phân phối ban đầu p_0 .

Trên thực tế, chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng supremum đạt được trên rất nhiều phân phối và, trong cách định nghĩa này, chúng ta có thể chọn bất kỳ chuẩn nào trên $C_0(G)$ thay vì l_2 – chuẩn. Như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây, độ trộn lẫn μ có thể được mô tả một cách dễ dàng theo các giá trị riêng của P .

Từ cách định nghĩa, $P = A/d$, trong đó $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ là ma trận liên hợp của G , nghĩa là, với $i \neq j$, a_{ij} là số các cạnh từ i đến j và a_{ii} là số các cạnh khuyên tại i . Giả sử $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ là các giá trị riêng (được liệt kê cùng với các số bội) của ma trận Hermitian P . Chúng ta biết, từ Kết quả 8.2.1), rằng $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -1$. Không gian $C_0(G)$ có một cơ sở trực giao $w_1 = \pi, w_2, \dots, w_n$ gồm các vector riêng của P sao cho $w_i P = \lambda_i w_i$, $i = 1, \dots, n$. Đặc biệt, không gian con $\pi^\perp$ của $C_0(G)$ trực giao với $\pi = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ là bất biến đối với P và phép thu hẹp của P trên $\pi^\perp$ là một toán tử Hermitian với các giá trị riêng $\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ và chuẩn $\lambda = \max\{\lambda_2, |\lambda_n|\}$.

Kết quả 9.4.1.

Độ trộn lẫn μ chính là $\lambda = \max\{\lambda_2, |\lambda_n|\}$.

Chứng minh kết quả 9.4.1.

Giả sử cho trước một phân phối p_0 , kí hiệu $p_0 = \alpha\pi + p'_0$, trong đó $\langle p'_0, \pi \rangle = 0$.

Khi đó, $1 = \langle p_0, n\pi \rangle = \alpha \langle \pi, n\pi \rangle = \alpha$, nên $p_0 = \pi + p'_0$.

Do đó,

$$\|p_t - \pi\|_2 = \|p_0 P^t - \pi P^t\|_2 = \|(p_0 - \pi)P^t\|_2 = \|p'_0 P^t\|_2 \leq \lambda^t \|p'_0\| \leq \lambda^t.$$

Như vậy, $\mu = \sup_{p_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|p_t - \pi\|_2^{\frac{1}{t}} \leq \lambda$.

Bất đẳng thức ngược lại cũng đơn giản như vậy. Giả sử $|\lambda_j| = \lambda$, chúng ta hãy chọn ra một phân phối xác suất p_0 sao cho $p_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i$, với $\xi_i \neq 0$. Trên thực tế, chúng ta luôn có thể tìm được một vector $p_0 = (p_i^{(0)})$ với mọi $i \neq h$.

Tuy nhiên, với p_0 vừa chọn, chúng ta sẽ có $\xi_j \neq 0$, nên $\|p_t - \pi\|_2 = \|(p_0 - \pi)P^t\|_2 \geq \lambda^t \|\xi_j w_j\|$.

Điều này ngụ ý rằng $\mu \geq \lambda$, như chúng ta đã tuyên bố. □

Thông thường, không dễ để chúng ta có thể xác định hoặc ước lượng độ lớn của $\lambda = \max\{\lambda_2, |\lambda_n|\}$. Trên thực tế, đại lượng quan trọng cần quan tâm ở đây đó là λ_2 , chứ không phải $|\lambda_n|$. Điều này có thể được đảm bảo bằng cách “làm chậm đi” RW của chúng ta, như chúng ta sẽ làm dưới đây.

Giả sử $G = (V, E)$ một đồ thị d – chính quy cố định cho trước. **Đường đi ngẫu nhiên lười biếng (LRW) trên G với biến ngẫu nhiên ban đầu X_0** được định nghĩa là một xích Markov $\tilde{X} = (X_i)_{i=0}^\infty$ sao cho các biến ngẫu nhiên X_t chỉ nhận các giá trị trong $V = V(G) = [n]$ và, với $i, j \in V$, chúng ta sẽ có

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{nếu } i = j, \\ \frac{1}{2d} & , \text{nếu } i \sim j, \\ 0 & , \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Nói một cách hơi khác một chút, chúng ta sẽ gắn d cạnh khayên vào mỗi đỉnh và cho chạy đường đi ngẫu nhiên đơn trên đa đồ thị này.

Lưu ý rằng nếu P_S là ma trận chuyển của SRW trên G thì LRW sẽ có ma trận chuyển là $P_L = (P_S + I)/2$. Ngoài ra, nếu P_S có các giá trị riêng $\lambda_1 = 1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ thì P_L sẽ có các giá trị riêng $\frac{1}{2}(\lambda_1 + 1) = 1 \geq \frac{1}{2}(\lambda_2 + 1) \geq \dots \geq \frac{1}{2}(\lambda_n + 1) \geq 0$. Như vậy, độ trộn lẫn của LRW là $\frac{1}{2}(\lambda_2 + 1)$, giá trị riêng lớn thứ hai của P_L . Đặc biệt, nếu λ_2 gần bằng 1 thì SRW sẽ hội tụ nhanh khoảng hai lần so với LRW.

Trên thực tế, thay vì cố gắng đưa ra một chặn trên cho $\frac{1}{2}(\lambda_2 + 1)$, chúng ta sẽ ước tính tốc độ hội tụ đến phân phối ổn định theo **độ dẫn $\phi(G)$ của đồ thị G** , được định nghĩa bởi công thức

$$\phi(G) = \min_{U \subset V} \frac{e(U, \bar{U})}{d \min\{|U|, |\bar{U}|\}},$$

trong đó $\bar{U} = V \setminus U$ và $e(U, \bar{U})$ là số các cạnh từ U đến $\bar{U}$.

Lưu ý rằng, như chúng ta có thể giả sử, nếu $|U| \leq n/2$ thì $d|U| = \sum_{u \in U} d(u)$ sẽ là số cạnh tối đa có thể rời khỏi U , nên $e(U, \bar{U})/d|U|$ chính là tỷ lệ của “phân nửa số cạnh” rời khỏi U để đến $\bar{U}$.

Rõ ràng, $0 \leq \phi(G) \leq 1$, nhưng nếu n lớn thì $\phi(G)$ khó có thể lớn hơn $1/2$. Đồng thời, $\phi(G) = 0$ khi và chỉ khi G là không liên thông. Tổng quát hơn, khi nào thì $\phi(G)$ là đủ nhỏ? Câu trả lời cho vấn đề này đó là nếu, với một tập $U \subset V$ nào đó, chúng ta có số các $U - \bar{U}$ cạnh tương đối ít; nghĩa là, nếu chúng ta có một “nút thắt cổ chai” trong đồ thị. Chính sự tồn tại của một nút thắt cổ chai như vậy đã làm chậm đi quá trình hội tụ $p_t \rightarrow \pi$.

Giả sử cho trước một RW $\tilde{X} = (X_t)_{t=0}^\infty$ trên một đồ thị $G = (V, E)$ với $V = [n]$ như trước, chúng ta sẽ kí hiệu $p_i^{(t)} = P(X_t = i)$. Chúng ta định nghĩa **xác suất vượt tại đỉnh i tại thời điểm t** bởi $e_{i,t} = p_i^{(t)} - 1/n$ và kí hiệu $d_2(t) = \|p_t - \pi\|_2^2 = \sum_{i=1}^n e_{i,t}^2$.

Lưu ý rằng xác suất vượt thỏa mãn

$$e_{i,t+1} = p_i^{(t+1)} - \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} p_i^{(t)} + \frac{1}{2d} \sum_{j \in N(i)} p_j^{(t)} \right) - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} \left(p_i^{(t)} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2d} \sum_{j \in N(i)} \left(p_j^{(t)} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} e_{i,t} + \frac{1}{2d} \sum_{j \in N(i)} e_{j,t} \\
&= \frac{1}{2d} \sum_{j \in N(i)} (e_{i,t} + e_{j,t}). \tag{21}
\end{aligned}$$

Chúng ta đã sẵn sàng để trình bày kết quả chính của phần này của bài viết, kết quả này thiết lập một quan hệ chặt chẽ giữa độ dẫn của một đồ thị và tốc độ hội tụ của các đường đi ngẫu nhiên lười biếng.

Kết quả 9.4.2.

Giả sử G là một đồ thị chính quy không tầm thường với độ dẫn $\phi(G)$.

Khi đó, mọi LRW trên G đều thỏa mãn $d_2(t+1) \leq \left(1 - \frac{1}{4} \phi^2(G)\right) d_2(t)$.

Chúng ta sẽ thu được Kết quả 9.4.2) từ hai kết quả phụ quan trọng sau đây:

Kết quả 9.4.3.

Giả sử G là một đồ thị d – chính quy với $d \geq 1$.

Khi đó, với các kí hiệu nêu ở trên, $d_2(t+1) \leq d_2(t) - \frac{1}{2d} \sum_{ij \in E} (e_{i,t} - e_{j,t})^2$.

Chứng minh kết quả 9.4.3.

Từ hệ thức (21),

$$d_2(t+1) = \frac{1}{4d^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j \in N(i)} (e_{i,t} + e_{j,t}) \right\}^2.$$

Do $|N(i)| = d$ với mọi i nên, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho biểu thức $\left\{ \sum_{j \in N(i)} (e_{i,t} + e_{j,t}) \right\}^2$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned}
d_2(t+1) &\leq \frac{1}{4d^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j \in N(i)} (e_{i,t} + e_{j,t})^2 \right\} d \\
&= \frac{1}{2d} \sum_{ij \in E} (e_{i,t} + e_{j,t})^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{ij \in E} \{2(e_{i,t}^2 + e_{j,t}^2) - (e_{i,t} - e_{j,t})^2\}$$

$$= d_2(t) - \frac{1}{2d} \sum_{ij \in E} (e_{i,t} - e_{j,t})^2$$

□

Kết quả phụ thứ hai sẽ vất vả hơn một chút.

Kết quả 9.4.4.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị d – chính quy với độ dẫn $\phi(G)$ và giả sử $x: V \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto x_i$ là một ánh xạ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

$$\text{Khi đó, } \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (22)$$

Chứng minh kết quả 9.4.4.

Kí hiệu $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, với $y_m = 0$, thì

$$\sum_{ij \in E} (y_i - y_j)^2 \geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (23)$$

Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng bất đẳng thức này mạnh hơn (22). Thật vậy, không làm giảm tính tổng quát của (23), chúng ta luôn có thể giả sử rằng $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Bằng cách đặt $y_i = x_i - x_m$, bất đẳng thức (23) sẽ có dạng

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 &= \sum_{ij \in E} (y_i - y_j)^2 \geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \\ &\geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{nd}{2} \phi^2(G) x_m^2, \end{aligned}$$

bởi vì $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Kế tiếp, để chứng minh (23), kí hiệu

$$u_i = \begin{cases} y_i & \text{nếu } i \leq m, \\ 0 & \text{nếu } i > m, \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \leq m, \\ y_i & \text{nếu } i > m. \end{cases}$$

Như vậy, $y_i = u_i + v_i$ với mọi i . Ngoài ra, nếu $u_i \neq 0$ thì $u_i > 0$, $i < m$ và nếu $v_i \neq 0$ thì $v_i < 0$, $i > m$.

Do $(y_i - y_j)^2 = (u_i - u_j + v_i - v_j)^2 \geq (u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2$ với mọi cạnh ij nên chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2 \geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^m u_i^2, \quad (24)$$

$$\sum_{ij \in E} (v_i - v_j)^2 \geq \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=m}^n v_i^2.$$

Hơn nữa, do $m \geq n - m$ nên chúng ta chỉ cần chứng minh (24) là đủ.

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, trong phép chứng minh của (24), chúng ta có thể giả sử rằng $u_1 > 0$.

Từ bất đẳng thức Cauchy – Schwarz,

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{ij \in E} (u_i^2 - u_j^2) \right\}^2 &= \left\{ \sum_{ij \in E} (u_i - u_j)(u_i + u_j) \right\}^2 \\ &\leq \sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2 \sum_{kl \in E} (u_k + u_l)^2 \\ &\leq \sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2 \sum_{kl \in E} 2(u_k^2 + u_l^2) \\ &= 2d \sum_{k=1}^n u_k^2 \sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Trong phần kế tiếp của phép chứng minh, các tổng của chúng ta được tính trên tất cả các cạnh $ij \in E$ với $i < j$.

Rõ ràng,

$$\sum_{ij \in E} (u_i^2 - u_j^2) = \sum_{ij \in E} \sum_{l=i}^{j-1} (u_l^2 - u_{l+1}^2) = \sum_{l=1}^{n-1} (u_l^2 - u_{l+1}^2) e(U_l, \bar{U}_l),$$

trong đó $U_l = [l]$ và $\bar{U}_l = V - U_l = [n] - [l]$.

Do $u_m = u_{m+1} = \dots = u_n = 0$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} (u_i^2 - u_j^2) &= \sum_{l=1}^{m-1} (u_l^2 - u_{l+1}^2) e(U_l, \bar{U}_l) \\ &\geq \sum_{l=1}^{m-1} (u_l^2 - u_{l+1}^2) d \phi(G) l \\ &= d \phi(G) \sum_{l=1}^{m-1} u_l^2 \end{aligned}$$

$$= d\phi(G) \sum_{l=1}^n u_l^2. \quad (26)$$

Bất đẳng (25) và (26) chỉ ra rằng

$$\sum_{ij \in E} (v_i - v_j)^2 \geq \left\{ d\phi(G) \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\}^2 / \left\{ 2d \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\} = \frac{d}{2} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n u_i^2. \quad \square$$

Với hai kết quả phụ nêu ở trên, thật dễ dàng để chúng ta có thể chứng minh Kết quả 9.4.2):

Chứng minh kết quả 9.4.2.

Từ Kết quả 9.4.3),

$$d_2(t) - d_2(t+1) \geq \frac{1}{2d} \sum_{ij \in E} (e_{i,t} - e_{j,t})^2.$$

Bằng cách áp dụng Kết quả 9.4.4) với $x_i = e_{i,t}$, chúng ta nhận thấy rằng

$$d_2(t) - d_2(t+1) \geq \frac{1}{4} \phi^2(G) \sum_{i=1}^n e_{i,t}^2 = \frac{1}{4} \phi^2(G) d_2(t). \quad \square$$

Khoảng cách từ phân phối p_t tại thời điểm t đến phân phối ổn định π thường được đo bằng l_1 – chuẩn của các chênh lệch, khoảng cách này gấp đôi **tổng khoảng cách của các biến đổi**: $d_1(t) = 2d_{TV}(p_t, \pi) = \|p_t - \pi\|_1$. Nếu chúng ta muốn nhấn mạnh sự phụ thuộc của $d_1(t)$ vào RW $\tilde{X} = (X_t)_{t=0}^\infty$ thì chúng ta sẽ viết $d_1(\tilde{X}, t)$ thay cho $d_1(t)$.

Từ bất đẳng thức Cauchy – Schwarz,

$$d_1(t) = \sum_{i=1}^n |e_{i,t}| \leq \left(\sum_{i=1}^n e_{i,t}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = (nd_2(t))^{1/2}.$$

Ngoài ra, một cách tầm thường, $d_2(0) \leq 2$, với mọi phân phối. Như vậy, Kết quả 9.4.2) sẽ có một hệ quả quan trọng như sau:

Kết quả 9.4.5.

Mọi LRW trên một đồ thị chính quy G với bậc n và độ dẫn $\phi(G)$ đều thỏa mãn đánh giá

$$d_1(t) \leq (nd_2(t))^{1/2} \leq (2n)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \phi^2(G) \right)^{t/2} \leq (2n)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \phi^2(G) \right)^t.$$

Hơn nữa, độ trộn lẫn μ cũng thỏa mãn đánh giá

$$\mu \leq \left(1 - \frac{1}{4} \phi^2(G) \right)^{1/2} \leq 1 - \frac{1}{2} \phi^2(G).$$

Chúng ta biết rằng nếu λ_2 là giá trị riêng lớn thứ hai của SRW trên một đồ thị chính quy thì giá trị riêng lớn thứ hai của LRW là $\frac{1}{2}(\lambda_2 + 1)$. Như vậy, Kết quả 9.4.5) có một hệ quả như sau:

Kết quả 9.4.6.

Giá trị riêng lớn thứ hai của SRW trên một đồ thị chính quy với độ dẫn $\phi(G)$ tối đa sẽ là $1 - \phi^2(G)$.

Chứng minh kết quả 9.4.6.

Với các kí hiệu nêu ở trên, $\frac{1}{2}(\lambda_2 + 1) \leq 1 - \frac{1}{2}\phi^2(G)$, nên $\lambda_2 \leq 1 - \phi^2(G)$. □

Kết quả 9.4.5) và 9.4.6) có thể được sử dụng để chứng minh một số đường đi ngẫu nhiên nhất định hội tụ rất nhanh về phân phối ổn định. Giả sử cho trước một dãy các đồ thị $G_1, G_2, \dots$, với $|G_i| = n_i \rightarrow \infty$, chúng ta sẽ nói rằng các đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên dãy này là **các đường đi ngẫu nhiên trộn lẫn nhanh** nếu chúng ta có thể tìm được một đa thức f , đa thức này chỉ phụ thuộc vào dãy (G_i) , sao cho nếu $0 < \varepsilon < 1$ và $t \geq f(\log n_i) \log(1/\varepsilon)$ thì $d_1(\tilde{X}_t, t) \leq \varepsilon$ bất cứ khi nào $\tilde{X}_t$ là một đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên G_i . Như vậy, nếu các đường đi ngẫu nhiên của chúng ta trộn lẫn với nhau nhanh chóng thì chúng ta sẽ ở trong khoảng ε của phân phối ổn định sau tối đa một số đa thức bước theo logarit của bậc của đồ thị!. Điều này thực sự nhanh: chúng ta chỉ cần thực hiện một số bước ít hơn nhiều so với bậc của đồ thị.

Nhận thấy rằng nếu độ dẫn càng lớn thì sẽ đảm bảo quá trình hội tụ càng nhanh nhưng, trên thực tế, độ dẫn khá nhỏ cũng đủ để đảm bảo quá trình trộn lẫn nhanh.

Thật vậy, nếu G là liên thông và có bậc $n \geq 2$, nghĩa là $\phi(G) > 0$ và

$$t \geq 8\phi^{-2}(G) \left\{ \log(1/\varepsilon) + \frac{1}{2} \log(2n) \right\}$$

đối với một chỉ số $0 < \varepsilon < 1$ nào đó, thì

$$d_1(t) \leq (2n)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4}\phi^2(G) \right)^{t/2} \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \log(2n) - \frac{1}{8}\phi^2(G)t \right\} \leq \varepsilon.$$

Đặc biệt, nếu $n \geq 3$ và $t \geq 8\phi^{-2}(G) \log n \log(1/\varepsilon)$ thì $d_1(t) < \varepsilon$. Điều này chỉ ra cho chúng ta điều kiện đủ sau đây cho tính trộn lẫn nhanh.

Kết quả 9.4.7.

Giả sử $(G_i)_{i=1}^\infty$ là một dãy các đồ thị chính quy với $|G_i| = n_i \rightarrow \infty$.

Khi đó, nếu có một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\phi(G_i) \geq (\log n_i)^{-k}$ đối với mọi chỉ số i đủ lớn thì các đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên $(G_i)_{i=1}^\infty$ là trộn lẫn nhanh.

Chứng minh kết quả 9.4.7.

Chúng ta nhận thấy rằng nếu $t \geq 8(\log n_i)^{2k+1} \log(1/\varepsilon)$ thì $d_1(t) < \varepsilon$, miễn là n_i đủ lớn. □

Có nhiều họ đồ thị chính quy mà chúng ta có thể đưa ra một cận dưới tốt cho độ dẫn.

Như một ví dụ tầm thường, chúng ta sẽ chọn đồ thị đầy đủ K_n . Ngay lập tức, $\phi(K_n) > \frac{1}{2}$ với mọi chỉ số $n \geq 2$ nên các đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên K_n là trộn lẫn nhanh. Tất nhiên, điều này cũng có thể được suy ra dễ dàng từ những nguyên lý đầu tiên chúng ta trình bày.

Như một ví dụ ít tầm thường hơn, chúng ta sẽ chọn các siêu lập phương (hoặc các hình lập phương) $Q_1, Q_2, \dots$. Như vậy, $Q_d = \{0,1\}^d$ chính là hình lập phương d chiều: tập đỉnh của nó là tập gồm tất cả 2^d dãy $x = (x_i)_{i=1}^d$, với $x_i = 0$ hoặc 1 , và hai dãy sẽ được nối với nhau bởi một cạnh nếu chúng chỉ khác nhau ở một số hạng nào đó. Rõ ràng, Q_d là d – chính quy và khá dễ dàng để chúng ta có thể chứng minh được rằng $\phi(Q_d) = 1/d$. Các nút cổ chai tồi tệ nhất phát sinh giữa “đỉnh” và “đáy” của Q_n : chẳng hạn, $U = \{(x_i) \in Q_d : x_1 = 1\}$ và $\bar{U} = \{(x_i) \in Q_d : x_1 = 0\}$. Rõ ràng, $e(U, \bar{U}) = |U| = 2^{d-1}$, nên $\phi_{Q_n}(U) = 1/d$.

Do $\phi(Q_d) = 1/d = 1/\log n$, trong đó $n = 2^d = |Q_d|$, nên các đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên $(Q_d)_{d=1}^\infty$ là trộn lẫn nhanh.

Hình lập phương Q_d chính xác là $K_2^d = K_2 \times \dots \times K_2$, nghĩa là tích của d đường đi có chiều dài 1. Nếu lấy tích của d chu trình, mỗi chu trình đều có chiều dài l , thì chúng ta sẽ thu được hình xuyên T_l^d . Đồ thị này có l^d đỉnh và nó là $2d$ – chính quy. Ngoài ra, chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng, với $G = T_{2l}^d$, $\phi(G) = \frac{2}{ld}$. (Lưu ý rằng T_4^d chính là hình lập phương Q_{2d} .) Như vậy, với một giá trị l cố định cho trước, các đường đi ngẫu nhiên lười biếng trên $(T_{2l}^d)_{d=1}^\infty$ là trộn lẫn nhanh.

Chúng ta cũng có thể mở rộng Kết quả 9.4.2) cho các đường đi ngẫu nhiên khả nghịch hoặc cho các đường đi ngẫu nhiên đơn trên các đa đồ thị tổng quát. Giả sử cho trước một đa đồ thị $G = (V, E)$, chúng ta định nghĩa thể tích của một tập $U \subset V(G)$ bởi $\text{vol} U = \sum_{u \in U} d(u)$. Như đã trình bày từ trước, trong bậc $d(u)$ của u , chúng ta chỉ tính 1 đơn vị cho mỗi cạnh kề cận tại u thay vì 2 đơn vị.

Khi đó, độ dẫn của G sẽ được xác định bởi

$$\phi(G) = \min_{U \subset V} \frac{e(U, \bar{U})}{\min\{\text{vol} U, \text{vol} \bar{U}\}},$$

trong đó, một lần nữa, $\bar{U} = V \setminus U$.

Với cách định nghĩa về độ dẫn này, thật dễ dàng để chúng ta có thể chứng minh dạng tương tự của Kết quả 9.4.2).

Để kết lại phần này của bài viết, chúng ta nhận xét rằng các đường đi ngẫu nhiên trộn lẫn nhanh có nhiều ứng dụng quan trọng trong lý thuyết thuật toán. Cụ thể, các đường đi ngẫu nhiên trộn lẫn nhanh thường được sử dụng để tạo ra các phần tử xấp xỉ ngẫu nhiên trong các tập lớn không dễ mô tả, chẳng hạn như tập các cặp ghép hoàn hảo hoặc tập các cây khung trong một đồ thị, hoặc tập các nút mạng trong một vật thể lồi. Việc tạo ra các phần tử xấp xỉ ngẫu nhiên này cho phép chúng ta liệt kê các phần tử một cách tiệm cận. Một ứng dụng nổi bật của các đường đi ngẫu nhiên trộn lẫn nhanh có liên quan đến các thuật toán thời gian đa thức ngẫu nhiên để ước tính chính xác thể tích của các vật thể lồi trong $\mathbb{R}^n$.