

Phép tính giới hạn hàm một biến

Trương Phước Nhân, 10/01/2023

1. Khái niệm về các số và các hàm số

Khi chúng ta học chữ viết của một ngôn ngữ, chẳng hạn như ngôn ngữ tiếng Anh, chúng ta bắt đầu với các chữ cái của bảng chữ cái $A, B, C, \dots$; khi chúng ta học âm nhạc, chẳng hạn như âm nhạc cổ điển phương Tây, chúng ta bắt đầu với các nốt Đô, Rê, Mi, ... Tương tự, khi chúng ta học toán, chúng ta sẽ bắt đầu với $1, 2, 3, \dots$; chúng được gọi là ***các số nguyên dương*** hoặc ***các số tự nhiên***. Chúng ta cũng kí hiệu tập các số nguyên dương này bởi $\mathbb{N}$. Như vậy,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Những con số này đã được biết đến từ thời cổ đại. Qua nhiều năm, số 0 được hình thành và sau đó là các số nguyên âm. Cùng với nhau, chúng ta sẽ tạo thành tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Như vậy,

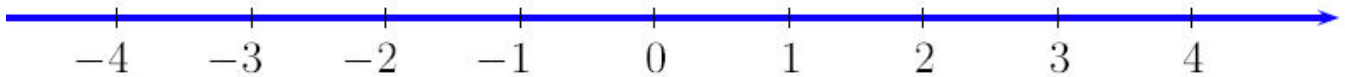
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Thương của các số nguyên được gọi là ***các số hữu tỉ***. Chúng ta sẽ kí hiệu tập tất cả các số hữu tỉ bởi $\mathbb{Q}$.

Như vậy,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Về mặt hình học, các số nguyên có thể được biểu diễn bởi các điểm nằm trên một đường thẳng bằng cách cố định một điểm gốc (biểu thị số 0) và một khoảng cách đơn vị. Một đường thẳng như vậy được gọi là một ***trục số*** và nó có thể được biểu diễn như trong hình vẽ bên dưới đây.



Hình vẽ minh họa trục số.

Bằng cách chia nhỏ đoạn nối giữa 0 và 1 một cách hợp lý, chúng ta cũng có thể biểu diễn các số hữu tỉ như $\frac{1}{n}$, trong đó $n \in \mathbb{N}$, và điều này cũng có thể được sử dụng để biểu diễn bất kỳ nào bởi một điểm duy nhất trên trục số. Chúng ta có thể nhận thấy rằng các số hữu tỉ được trải khá dày đặc trên trục số. Tuy nhiên, một số khoảng trống vẫn còn. Chẳng hạn, số $\sqrt{2}$ có thể được biểu diễn bởi một điểm duy nhất nằm giữa 1 và 2 trên trục số bằng cách sử dụng các cấu trúc hình học đơn giản nhưng như chúng ta có thể thấy ngay rằng đây không phải là một số hữu tỉ. Như vậy, chúng ta buộc phải tính đến cái gọi là ***các số vô tỷ***, chính xác là các “số” cần thiết để lấp đầy các khoảng trống còn lại trên trục số sau khi đã đánh dấu tất cả các số hữu tỉ. Các số hữu tỉ và các số vô tỷ cũng nhau sẽ tạo thành tập $\mathbb{R}$, được gọi là ***tập các số thực***. Biểu diễn hình học của các số thực dưới dạng các điểm trên trục số ngụ ý rằng có một thứ tự tự nhiên giữa các số thực. Cụ thể, những số thực lớn hơn 0, nghĩa là các điểm nằm bên phải của 0, được gọi là ***các số dương***.

1.1. Tính chất của các số thực

Để chắc chắn, chúng ta chưa định nghĩa chính xác số thực là gì và ý nghĩa của việc chúng là số dương. Đối với vấn đề này, chúng ta thậm chí còn chưa định nghĩa các số nguyên dương 1, 2, 3, ... hoặc các số hữu tỉ. (Đối với một người theo chủ nghĩa thuần túy, điều này có vẻ không được thỏa đáng. Một người nếu mới bắt đầu tận tâm trong nghiên cứu giải tích cũng có thể cảm thấy khó chịu vào một số thời điểm khi các khái niệm cơ bản về số (thực) chưa xác định rõ ràng.) Nhưng ít nhất chúng ta cũng đã quen thuộc với cái sau. Chúng ta cũng đã làm quen với phép cộng và phép nhân các số hữu tỉ. Đối với các số thực, không dễ xác định, tốt hơn hết là ít nhất chúng ta hãy xác định các thuộc tính mà chúng ta sẽ coi là đương nhiên. Chúng ta sẽ lưu ý rằng trong quá trình phát triển tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ sử dụng các thuộc tính này hoặc các hệ quả bắt nguồn từ chúng. Bằng cách này, cuối cùng chúng ta sẽ không cần phải chấp nhận quá nhiều thứ dựa trên niềm tin.

Chúng ta giả sử rằng tồn tại một tập $\mathbb{R}$ (gồm các phân tử được gọi là các số thực) có chứa tập $\mathbb{Q}$ gồm tất cả các số hữu tỉ (và đặc biệt là các số 0 và 1) sao cho thỏa mãn ba loại tính chất sau.

Tính chất đại số

Chúng ta có các phép toán cộng (kí hiệu bởi $+$) và phép nhân (kí hiệu bởi $\cdot$ hoặc đặt chúng cạnh nhau) trên $\mathbb{R}$, chúng là dạng mở rộng của các phép toán cộng và phép nhân thông thường của các số hữu tỉ và thỏa mãn các tính chất sau:

$$A1 \quad a + (b + c) = (a + b) + c \text{ và } a(bc) = (ab)c \text{ với mọi } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$A2 \quad a + b = b + a \text{ và } ab = ba \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$A3 \quad a + 0 = a \text{ và } a \cdot 1 = a \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}.$$

A4 Với mọi $a \in \mathbb{R}$, tồn tại một $a' \in \mathbb{R}$ sao cho $a + a' = 0$. Hơn nữa, nếu $a \neq 0$ thì sẽ tồn tại một $a^* \in \mathbb{R}$ sao cho $aa^* = 1$.

$$A5 \quad a(b + c) = ab + ac \text{ với mọi } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Thật thú vị khi lưu ý rằng một số tính chất đơn giản của các số thực mà chúng ta muốn coi là đương nhiên lại có thể được suy ra như một hệ quả của các tính chất trên. Chẳng hạn, chúng ta hãy chứng minh rằng $a \cdot 0 = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Đầu tiên, từ A3, chúng ta sẽ có $0 + 0 = 0$. Do đó, từ A5, $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Bây giờ, từ A4, chúng ta sẽ có một $b' \in \mathbb{R}$ sao cho $a \cdot 0 + b' = 0$. Như vậy,

$$0 = a \cdot 0 + b' = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + b' = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + b') = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0,$$

trong đó đẳng thức thứ ba được suy ra từ A1 và đẳng thức cuối cùng được suy ra từ A3. Điều này hoàn tất phép chứng minh! Đặc biệt, điều này cũng chứng tỏ rằng, với mọi $a \in \mathbb{R}$, có duy nhất một phân tử $a' \in \mathbb{R}$ sao cho $a + a' = 0$; phân tử này được gọi là **số đối của a** và được kí hiệu bởi $-a$. Tương tự, nếu $a \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ thì cũng sẽ tồn tại duy nhất một phân tử $a^* \in \mathbb{R}$ sao cho $aa^* = 1$; phân tử này được gọi là **nghịch đảo của a** và được kí hiệu bởi a^{-1} hoặc $1/a$.

Một khi tất cả các thủ tục này đã được hiểu, chúng ta có thể tự do thay thế các biểu thức như

$$a(1/b), a + a, aa, (a + b) + c, (ab)c, a + (-b),$$

bởi các biểu thức đơn giản hơn tương ứng, cụ thể là,

$$a/b, 2a, a^2, a + b + c, abc, a - b.$$

Ở đây, chẳng hạn, việc viết $a + b + c$ là có ý nghĩa và rõ ràng, điều này có được là nhờ có A1. Tổng quát hơn, giả sử cho trước một số hữu hạn các số thực $a_1, \dots, a_n$, tổng $a_1 + \dots + a_n$ cũng có một ý nghĩa rõ ràng. Để biểu thị những tổng như vậy, “kí hiệu sigma” có thể khá hữu ích. Như vậy, $a_1 + \dots + a_n$ thường được kí hiệu bởi $\sum_{i=1}^n a_i$ hoặc đôi khi đơn giản chỉ là $\sum_i a_i$ hoặc $\sum a_i$. Chúng ta nhận xét rằng, theo quy ước, tổng rỗng được định nghĩa bằng không, trong khi tích rỗng được định nghĩa bằng một. Như vậy, nếu $n = 0$ thì $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, trong khi $\prod_{i=1}^n a_i = 1$.

Tính chất thứ tự

Tập $\mathbb{R}$ có chứa một tập con $\mathbb{R}^+$, được gọi là tập tất cả các số thực dương, thỏa mãn các tính chất sau:

O1 Với mọi $a \in \mathbb{R}$, có đúng một trong các mệnh đề sau là đúng:

$$a \in \mathbb{R}^+; a = 0; -a \in \mathbb{R}^+.$$

O2 Nếu $a, b \in \mathbb{R}^+$ thì $a + b \in \mathbb{R}^+$ và $ab \in \mathbb{R}^+$.

Với sự tồn tại của $\mathbb{R}^+$, chúng ta có thể định nghĩa một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ như sau:

Với $a, b \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ nói ***a nhỏ hơn b*** và viết $a < b$ nếu $b - a \in \mathbb{R}^+$. Đôi khi, chúng ta sẽ viết $b > a$ thay cho $a < b$ và nói rằng b lớn hơn a . Cách định nghĩa này được suy ra từ các tính chất đại số và việc $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$. Ngoài ra, các tính chất sau đây là hệ quả trực tiếp của A1 – A5 và O1 – O2:

(i) Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, có đúng một trong các mệnh đề sau là đúng:

$$a < b; a = b; b < a.$$

(ii) Nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

(iii) Nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$, với $a < b$, thì $a + c < b + c$. Hơn nữa, nếu $c > 0$ thì $ac < bc$, trường hợp ngược lại nếu $c < 0$ thì $ac > bc$.

Lưu ý rằng, như một hệ quả của các tính chất trên, $1 > 0$. Thật vậy, từ (i), chúng ta sẽ có $1 > 0$ hoặc $1 < 0$. Nếu chúng ta có $1 < 0$ thì chúng ta phải có $-1 > 0$. Do đó, từ (iii), $1 = (-1)(-1) > 0$, mâu thuẫn. Như vậy, $1 > 0$. Lập luận tương tự cho thấy rằng $a^2 > 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Cách kí hiệu $a \leq b$ cũng thường được dùng để chỉ $a < b$ hoặc $a = b$. Tương tự, $a \geq b$ có nghĩa là $a > b$ hoặc $a = b$.

Giả sử S là một tập con của $\mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng S là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq \alpha$ với mọi $x \in S$. Một số thực α như vậy được gọi là một ***cận trên của S***. Chúng ta sẽ nói rằng S bị chặn dưới nếu tồn tại một số thực β như vậy được gọi là một ***cận dưới của S***. Một tập S được gọi là ***bị***

chặn nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới; mặt khác, S được gọi là **không bị chặn**. Lưu ý rằng nếu $S = \emptyset$, nghĩa là, nếu S là tập rỗng thì mọi số thực đều là cận trên cũng như cận dưới của S .

Giả sử S là một tập con của $\mathbb{R}$. Một phần tử $M \in \mathbb{R}$ được gọi là **supremum** hoặc **cận trên nhỏ nhất** của một tập S nếu

- (i) M là một cận trên của S , nghĩa là $x \leq M$ với mọi $x \in S$,
- (ii) $M \leq \alpha$ với mọi cận trên α của S .

Dễ dàng nhận thấy từ định nghĩa rằng nếu S có một supremum thì nó phải là duy nhất; chúng ta kí hiệu nó bởi $\sup S$. Lưu ý rằng $\emptyset$ không có bất kỳ một supremum nào.

Một phần tử $m \in \mathbb{R}$ được gọi là **infimum** hoặc **cận dưới lớn nhất** của một tập S nếu

- (i) m là một cận dưới của S , nghĩa là $m \leq x$ với mọi $x \in S$,
- (ii) $\beta \leq m$ với mọi cận dưới β của S .

Một lần nữa, dễ dàng nhận thấy rằng từ định nghĩa rằng nếu S có một infimum thì nó phải là duy nhất; chúng ta kí hiệu nó bởi $\inf S$. Lưu ý rằng $\emptyset$ không có bất kỳ một infimum nào.

Nếu supremum của tập S là một phần tử của S thì nó được gọi là **cực đại** của S và được kí hiệu là $\max S$; tương tự, nếu phần tử infimum của tập S là một phần tử của S thì nó được gọi là **cực tiểu** của S và được kí hiệu là $\min S$.

Tính chất cuối cùng và có lẽ là quan trọng nhất của $\mathbb{R}$ mà chúng ta sẽ trình bày bên dưới đây:

Tính chất đầy đủ

Mọi tập con khác rỗng bị chặn trên của $\mathbb{R}$ đều có một supremum.

Ý nghĩa của Tính chất đầy đủ sẽ trở nên rõ ràng hơn từ các kết quả được chứng minh trong mục này cũng như các mục tiếp theo.

Kết quả 1.1.1.

Giả sử S là một tập con khác rỗng bị chặn dưới của $\mathbb{R}$.

Khi đó, S sẽ có một infimum.

Chứng minh kết quả 1.1.1.

Kí hiệu $T = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta \leq a \text{ với mọi } a \in S\}$. Do S bị chặn dưới nên T khác rỗng, và do S khác rỗng nên T bị chặn trên. Như vậy, T có một supremum. Dễ dàng nhận thấy rằng $\sup T$ là infimum của S . $\square$

Kết quả 1.1.2.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > x$. Hơn nữa, với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ sao cho $-m < x$.

Chứng minh kết quả 1.1.2.

Giả sử phản chứng. Khi đó, x là một cận trên của $\mathbb{N}$. Do đó, $\mathbb{N}$ sẽ có một supremum. Kí hiệu $M = \sup \mathbb{N}$.

Do $M - 1 < M$ nên $M - 1$ sẽ không thể là một cận trên của $\mathbb{N}$. Như vậy, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $M - 1 < n$. Nhưng khi đó $n + 1 \in \mathbb{N}$ và $M < n + 1$, điều này mâu thuẫn với việc M là một cận trên của $\mathbb{N}$. Khẳng định thứ hai về sự tồn tại của $m \in \mathbb{N}$ sao cho $-m < x$ được suy ra bằng cách áp dụng khẳng định đầu tiên cho $-x$. $\square$

Khẳng định đầu tiên trong mệnh đề trên đôi khi được gọi là **Tính chất Archimedean của $\mathbb{R}$** . Quan sát rằng, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, bằng cách áp dụng Kết quả 1.1.2) cho $x = 1/\varepsilon$, chúng ta sẽ tìm được một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho $(1/n) < \varepsilon$. Lưu ý rằng, từ Kết quả 1.1.2), với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại các số tự nhiên $m, n \in \mathbb{N}$ sao cho $-m < x < n$. Số lớn nhất trong số tất cả các số nguyên k thỏa mãn $-m \leq k \leq n$ và $k \leq x$ được gọi là **phần nguyên của x** và được kí hiệu bởi $[x]$. Lưu ý rằng phần nguyên của x có thể được đặc trưng bởi các tính chất sau:

$$[x] \in \mathbb{Z} \text{ và } [x] \leq x < [x] + 1.$$

Đôi khi, phần nguyên của x được gọi là **sàn của x** và được kí hiệu bởi $[x]$. Tương tự, số nguyên nhỏ nhất $\geq x$ được gọi là **trần của x** và được kí hiệu bởi $\lceil x \rceil$. Chẳng hạn, $\lceil \frac{3}{2} \rceil = \lceil 1.5 \rceil = 2$, trong khi $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = \lfloor 1.5 \rfloor = 1$.

Với mọi $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$, chúng ta định nghĩa **lũy thừa bậc n của a** là tích $a \dots a$ của a với chính nó n lần. Hơn nữa, chúng ta cũng định nghĩa $a^0 = 1$ và $a^{-n} = (a^{-1})^n$ với điều kiện $a \neq 0$. Theo cách này, lũy thừa nguyên cho tất cả các số thực khác không sẽ xác định. Các tính chất cơ bản sau đây là hệ quả trực tiếp của các tính chất đại số và các tính chất thứ tự của $\mathbb{R}$.

- (i) $(a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$ và $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (với $a_1 a_2 \neq 0$ nếu $n \leq 0$).
- (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ và $a^{m+n} = a^m a^n$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$ và $a \in \mathbb{R}$ (với $a \neq 0$ nếu $m \leq 0$ hoặc $n \leq 0$).
- (iii) Nếu $n \in \mathbb{N}$ và $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ với $0 \leq b_1 < b_2$ thì $b_1^n < b_2^n$.

Hai tính chất đầu tiên ở trên đôi khi còn được gọi là **định luật số mũ** hoặc **định luật chỉ số** (đối với các lũy thừa nguyên)

Kết quả 1.1.3.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $a \in \mathbb{R}$ với $a \geq 0$, tồn tại duy nhất một số thực $b \in \mathbb{R}$ sao cho $b \geq 0$ và $b^n = a$.

Chứng minh kết quả 1.1.3.

Tính duy nhất là hiển nhiên bởi vì $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ với $0 \leq b_1 < b_2$ ngụ ý rằng $b_1^n < b_2^n$. Để chứng minh sự tồn tại của một số thực $b \in \mathbb{R}$ với $b \geq 0$ và $b^n = a$, lưu ý rằng trường hợp $a = 0$ là tầm thường và, hơn nữa, trường hợp $0 < a < 1$ có thể được suy ra từ trường hợp $a > 1$ bằng cách lấy các nghịch đảo. Như vậy, không giảm tính quát của vấn đề, chúng ta giả sử rằng $a \geq 1$.

Kí hiệu

$$S_a = \{x \in \mathbb{R}: x^n \leq a\}.$$

Khi đó, S_a là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ (bởi vì $1 \in S_a$) và bị chặn trên (chẳng hạn, bởi a). Kí hiệu $b = \sup S_a$. Lưu ý rằng do $1 \in S_a$ nên chúng ta sẽ có $b \geq 1 > 0$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $b^n = a$ bằng cách chỉ ra rằng mỗi bất đẳng thức $b^n < a$ và $b^n > a$ đều dẫn đến mâu thuẫn.

Lưu ý rằng, từ Định lí hệ số nhị thức, với mọi $\delta \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có

$$(b + \delta)^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} \delta + \binom{n}{2} b^{n-2} \delta^2 + \dots + \delta^n.$$

Bây giờ, giả sử $b^n < a$.

Chúng ta định nghĩa

$$\varepsilon = a - b^n, M = \max \left\{ \binom{n}{k} b^{n-k} : k = 1, \dots, n \right\}, \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{nM} \right\}.$$

Khi đó, $M \geq 1$ và $0 < \delta^k \leq \delta$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

Do đó,

$$(b + \delta)^n \leq b^n + M\delta + M\delta^2 + \dots + M\delta^n \leq b^n + nM\delta \leq b^n + \varepsilon = a.$$

Như vậy, $b + \delta \in S_a$. Nhưng điều này lại mâu thuẫn với việc b là một cận trên của S_a .

Kế tiếp, giả sử $b^n > a$. Lần này, chúng ta sẽ chọn $\varepsilon = b^n - a$ và định nghĩa M và δ như trước.

Lập luận tương tự cũng chỉ ra rằng

$$(b - \delta)^n \geq b^n - nM\delta \geq b^n - \varepsilon = a.$$

Nhưng do $b - \delta < b$ nên $b - \delta$ không thể là một cận trên của S_a . Điều này có nghĩa là sẽ tồn tại một số thực $x \in S_a$ sao cho $b - \delta < x$. Do đó, $(b - \delta)^n < x^n \leq a$, mâu thuẫn. Như vậy, $b^n = a$. $\square$

Từ Kết quả 1.1.3), với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $a \in \mathbb{R}$ với chúng ta có thể định nghĩa **căn bậc n của a** là số thực b duy nhất sao cho $b \geq 0$ và $b^n = a$; chúng ta biểu diễn số thực này bởi $\sqrt[n]{a}$ hoặc $a^{1/n}$. Trong trường hợp $n = 2$, chúng ta chỉ cần viết $\sqrt{a}$ thay vì $\sqrt[2]{a}$. Từ tính duy nhất của căn bậc n , các tính chất tương tự như các tính chất (i), (ii), (iii) đã nêu ngay trước khi trình bày Kết quả 1.1.3) đều có thể được chứng minh dễ dàng cho căn bậc n thay vì lũy thừa bậc n . Tổng quát hơn, với mọi với mọi $r \in \mathbb{Q}$, chúng ta viết $r = m/n$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$ với $n > 0$ và định nghĩa $a^r = (a^m)^{1/n}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$ với $a > 0$. Lưu ý rằng nếu $r = p/q$ với các số $p, q \in \mathbb{Z}$ nào đó với $q > 0$ thì, với mọi $a \in \mathbb{R}$ với $a > 0$, chúng ta sẽ có $(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}$. Chẳng hạn, điều này có thể nhận được bằng cách nâng cả hai vế lên lũy thừa bậc nq , sử dụng định luật số mũ cho lũy thừa và tính duy nhất của nghiệm. Như vậy, lũy thừa hữu tỉ của các số thực dương dường như được định nghĩa một cách rõ ràng. Nói chung, đối với các số thực âm, các lũy thừa hữu tỉ không nguyên không xác định trong $\mathbb{R}$. Chẳng hạn, $(-1)^{1/2}$ không thể bằng bất kỳ số thực $b \in \mathbb{R}$ nào, bởi vì $b^2 \geq 0$. Tuy nhiên, trong một trường hợp đặc biệt, chúng ta có thể định nghĩa lũy thừa hữu tỉ của các số thực âm. Chính

xác hơn, nếu $n \in \mathbb{N}$ là một số lẻ và $a \in \mathbb{R}$ là một số thực dương thì chúng ta sẽ định nghĩa

$$(-a)^{1/n} = -(a^{1/n}).$$

Dễ dàng nhận thấy rằng điều này xác định một cách rõ ràng và kết quả là, với mọi $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, lũy thừa bậc r x^r xác định bất cứ khi nào $r \in \mathbb{Q}$ có mẫu là một số lẻ, nghĩa là khi $r = m/n$ với $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}$ với n là một số lẻ. Cuối cùng, nếu r là một số hữu tỉ dương bất kỳ thì chúng ta đặt $0^r = 0$. Đối với các lũy thừa hữu tỉ, bất kể khi nào chúng xác định, các dạng tương tự của các tính chất (i), (ii), (iii) đã nêu ngay trước khi trình bày Kết quả 1.1.3) vẫn đúng. Các dạng tương tự này cũng có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách nâng cả hai vế của đẳng thức hoặc bất đẳng thức mong muốn lên lũy thừa bậc đủ cao để làm giảm các tính chất tương ứng của các lũy thừa nguyên và sử dụng tính duy nhất nghiệm.

Các số thực không phải là các số hữu tỉ sẽ được gọi là các số vô tỉ. Khả năng lấy căn bậc n cũng cung cấp một phương pháp hữu ích để chúng ta có thể xây dựng một số ví dụ về các số vô tỉ. Chẳng hạn, chúng ta sẽ chứng minh dưới đây một kết quả cô điển: $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Phép chứng minh mà chúng ta trình bày ở đây hoàn toàn có thể được điều chỉnh để chứng minh một số số như vậy, chẳng hạn, $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{16}$, cũng đều là các số vô tỉ. Đầu tiên, chúng ta hãy nhắc lại khái niệm quen thuộc về tính chia hết trong tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Giả sử cho trước các số nguyên $m, n \in \mathbb{Z}$, chúng ta sẽ nói rằng **m chia hết n** hoặc **m là một thừa số của n** nếu $n = lm$ với một số nguyên $l \in \mathbb{Z}$ nào đó và kí hiệu $m|n$. Đôi khi, chúng ta sẽ kí hiệu $m \nmid n$ nếu m không chia hết cho n . Hai số nguyên m và n được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu các số nguyên duy nhất chia hết cả m và n là 1 và -1 . Chúng ta có thể chỉ ra rằng nếu $m, n, n' \in \mathbb{Z}$ sao cho m, n nguyên tố cùng nhau và $m|nn'$ thì $m|n'$. Chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng bất kỳ số hữu tỉ nào cũng có thể được viết dưới dạng

$$r = \frac{p}{q}, \text{ trong đó } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p, q \text{ nguyên tố cùng nhau.}$$

Biểu diễn nêu trên của r được gọi là **dạng thu gọn của r** . Tử số (cụ thể là p) và mẫu số (cụ thể là q) trong biểu diễn thu gọn xác định một cách duy nhất bởi r .

Kết quả 1.1.4.

Không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2. Nói cách khác, $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Chứng minh kết quả 1.1.4.

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ. Biểu diễn $\sqrt{2}$ ở dạng thu gọn p/q , trong đó $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p, q$ nguyên tố cùng nhau. Khi đó, $p^2 = 2q^2$. Do đó, q chia hết p^2 . Điều này ngụ ý rằng q chia hết p , nên p/q là một số nguyên. Nhưng không có bất kỳ một số nguyên nào có bình phương bằng 2 bởi vì $(\pm 1)^2 = 1$ và bình phương của bất kỳ số nguyên nào khác 1 hoặc -1 đều ≥ 4 . Như vậy, $\sqrt{2}$ không thể là một số hữu tỉ. $\square$

Kết quả sau đây chỉ ra rằng các số hữu tỉ cũng như các số vô tỉ được trải khá dày đặc trên trục số.

Kết quả 1.1.5.

Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$, luôn tồn tại một số hữu tỉ cũng như một số vô tỉ nằm giữa a và b .

Chứng minh kết quả 1.1.5.

Từ Kết quả 1.1.2), chúng ta luôn có thể tìm được một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > 1/(b - a)$. Kí hiệu $m = [na] + 1$. Khi đó, $m - 1 \leq na < m$, nên

$$a < \frac{m}{n} \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

Như vậy, chúng ta đã tìm được một số hữu tỉ (cụ thể là m/n) nằm giữa a và b . Cuối cùng, $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$ và nếu r là một số hữu tỉ nằm giữa $a + \sqrt{2}$ và $b + \sqrt{2}$ thì $r - \sqrt{2}$ sẽ là một số hữu tỉ nằm giữa a và b . $\square$

Bây giờ, chúng ta sẽ giới thiệu một số thuật ngữ cơ bản hữu ích trong việc xử lí các số thực. Giả sử cho trước các số thực $a, b \in \mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa **khoảng mở từ a đến b** là tập

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

và **khoảng đóng từ a đến b** là tập

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Các **nửa khoảng mở** (hoặc **nửa khoảng đóng**) **từ a đến b** được định nghĩa là tập

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ và } [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Nói cách khác, $(a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$ và $[a, b) = [a, b] \setminus \{b\}$. Lưu ý rằng nếu $a > b$ thì mỗi khoảng này đều rỗng, trong khi nếu $a = b$ thì $[a, b] = \{a\}$ trong khi các khoảng từ a đến b khác đều là rỗng. Nếu I là một tập con của $\mathbb{R}$ có dạng $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ hoặc $(a, b]$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$, thì a được gọi là **đầu mút trái của I** trong khi b được gọi là **đầu mút phải của I** . Nói chung, a và b sẽ được gọi là **các đầu mút của I** .

Sẽ rất hữu ích khi xem xét các kí hiệu ∞ (được gọi là **dương vô cực** hoặc **vô cực**) và $-\infty$ (được gọi là **âm vô cực**), chúng có thể được coi là các đầu mút hư cấu (trái và phải) của trục số. Như vậy,

$$-\infty < a < \infty \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}.$$

Tập $\mathbb{R}$ cùng với các kí hiệu bổ sung ∞ và $-\infty$ đôi khi còn được gọi là **tập các số thực mở rộng**. Chúng ta cũng sẽ sử dụng các kí hiệu ∞ và $-\infty$ để, với mọi $a \in \mathbb{R}$, định nghĩa các **nửa khoảng vô hạn** sau:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

và

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

Tập $\mathbb{R}$ cũng có thể được coi là khoảng vô hạn kép $(-\infty, \infty)$ và như vậy đôi khi chúng ta cũng có thể sử dụng kí hiệu khoảng này cho tập tất cả các số thực.

Lưu ý rằng mỗi loại khoảng ở trên đều có một tính chất cơ bản chung. Chúng ta sẽ phát biểu điều này thông qua định nghĩa dưới đây.

Giả sử cho trước một tập con $I \subseteq \mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng I là một **khoảng** nếu

$$a, b \in I \text{ và } a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I.$$

Nói cách khác, đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của I luôn nằm trong I . Điều này đôi khi còn được thể hiện bằng cách nói rằng một khoảng là một “tập liên thông”.

Kết quả 1.1.6.

Nếu $I \subseteq \mathbb{R}$ là một khoảng thì I là một khoảng mở hoặc một khoảng đóng hoặc một nửa khoảng mở hoặc một nửa khoảng đóng hoặc khoảng vô hạn kép.

Chứng minh kết quả 1.1.6.

Nhận thấy rằng nếu $I = \emptyset$ thì $I = (a, a)$ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Giả sử $I \neq \emptyset$.

Định nghĩa

$$a = \begin{cases} \inf I & \text{nếu } I \text{ bị chặn dưới,} \\ -\infty & \text{trường hợp ngược lại,} \end{cases} \quad \text{và } b = \begin{cases} \sup I & \text{nếu } I \text{ bị chặn trên,} \\ \infty & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Lưu ý rằng, từ Tính chất đầy đủ và Kết quả 1.1.1), cả a và b đều xác định một cách rõ ràng và $a \leq b$. Do I là một khoảng nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$(i) I = (a, b), \text{ hoặc } (ii) I = [a, b], \text{ hoặc } (iii) I = [a, b), \text{ hoặc } (iv) I = (a, b],$$

tùy thuộc vào việc (i) $a \notin I$ và $b \notin I$, hoặc (ii) $a \in I$ và $b \in I$, hoặc (iii) $a \in I$ và $b \notin I$, hoặc (iv) $a \notin I$ và $b \in I$. Điều này hoàn tất phép chứng minh của mệnh đề trên. $\square$

Trong phép chứng minh của mệnh đề trên, chúng ta đã xem xét cả các khoảng có thể được rút gọn thành tập rỗng hoặc thành một tập chỉ chứa một điểm. Tuy nhiên, để tránh những điều quá tầm thường, chúng ta thường sẽ không làm như vậy trong phần tiếp theo. Từ nay trở đi, khi chúng ta viết $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ hoặc $(a, b]$, chúng ta sẽ luôn ngầm giả định a và b là các số thực và $a < b$.

Với mọi số thực a , **giá trị tuyệt đối** hoặc **môđun của a** (được kí hiệu lại bởi $|a|$) được định nghĩa là

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0, \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Lưu ý rằng $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$ và $|ab| = |a||b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Khái niệm giá trị tuyệt đối đôi khi có thể khá hữu ích trong việc mô tả các khoảng nhất định đối xứng qua một điểm. Chẳng hạn, nếu $a \in \mathbb{R}$ và ε là một số thực dương bất kỳ thì

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

1.2. Các bất đẳng thức

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ mô tả và chứng minh một số bất đẳng thức hữu ích cho chúng ta trong các phần tiếp theo.

Kết quả 1.2.1. (Các bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị tuyệt đối)

Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có:

(i) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

(ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Chứng minh kết quả 1.2.1.

Rõ ràng là $a \leq |a|$ và $b \leq |b|$. Như vậy, $a + b \leq |a| + |b|$. Tương tự, $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Điều này ngụ ý tính đúng đắn của khẳng định (i). Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (ii), lưu ý rằng từ khẳng định (i), chúng ta sẽ có $|a - b| \geq |(a - b) + b| - |b| = |a| - |b|$ cũng như $|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$. □

Bất đẳng thức thứ nhất trong mệnh đề trên đôi khi còn được gọi là **bất đẳng thức tam giác**. Một hệ quả trực tiếp của điều này đó là nếu $a_1, \dots, a_n$ là các số thực bất kỳ thì

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Kết quả 1.2.2. (Các bất đẳng thức cơ bản liên quan đến lũy thừa và căn)

Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có:

(i) $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$, trong đó $M = \max\{|a|, |b|\}$.

(ii) $|a^{1/n} - b^{1/n}| \leq |a - b|^{1/n}$, với điều kiện $a \geq 0$ và $b \geq 0$.

Chứng minh kết quả 1.2.2.

(i) Xét hằng đẳng thức

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}).$$

Lấy giá trị tuyệt đối cả hai vế và sử dụng Kết quả 1.2.1). Giá trị tuyệt đối của thừa số thứ hai bên phải bị chặn trên bởi nM^{n-1} . Điều này ngụ ý tính đúng đắn của bất đẳng thức nêu trong khẳng định (i).

(ii) Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $a \geq b$. Kí hiệu $c = a^{1/n}$ và $d = b^{1/n}$. Khi đó, $c - d \geq 0$ và, từ Định lý hệ số nhị thức,

$$c^n = [(c - d) + d]^n = (c - d)^n + \dots + d^n \geq (c - d)^n + d^n.$$

$$\text{Như vậy, } a - b = c^n - d^n \geq (c - d)^n = [a^{1/n} - b^{1/n}]^n.$$

Điều này ngụ ý tính đúng đắn của bất đẳng thức nêu trong khẳng định (ii). □

Chúng ta nhận thấy rằng bất đẳng thức cơ bản đối với các lũy thừa nguyên nêu trong khẳng định (i) của Kết quả 1.2.2) vẫn đúng trong trường hợp tổng quát hơn, đối với các lũy thừa hữu tỉ. Đối với khẳng định (ii), bất đẳng thức sẽ yếu hơn một chút nếu, thay vì xét các căn bậc n , chúng ta hãy xét các căn hữu tỉ.

Kết quả 1.2.3. (Các bất đẳng thức nhị thức)

Với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$ sao cho $1 + a \geq 0$, chúng ta sẽ có

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Tổng quát hơn, với mọi số thực $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ và mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho $1 + a_i \geq 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$ và $a_1, \dots, a_n$ có cùng dấu, chúng ta sẽ có

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + \dots + a_n).$$

Chứng minh kết quả 1.2.3.

Rõ ràng, bất đẳng thức thứ nhất có thể được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức thứ hai bằng cách đặt $a_1 = \dots = a_n = a$. Để chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức thứ hai, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số n . Trường hợp $n = 1$, tính đúng đắn là hiển nhiên. Nếu $n > 1$ và khẳng định đã được chứng minh là đúng cho $n - 1$ thì

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq (1 + b_n)(1 + a_n),$$

trong đó $b_n = a_1 + \dots + a_{n-1}$.

Kế tiếp, do b_n và a_n có cùng dấu, nên

$$(1 + b_n)(1 + a_n) = 1 + b_n + a_n + b_n a_n \geq 1 + b_n + a_n.$$

Điều này chỉ ra rằng $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + \dots + a_n)$. □

Lưu ý rằng bất đẳng thức thứ nhất trong mệnh đề trên là hệ quả trực tiếp của Định lý hệ số nhị thức khi $a \geq 0$, mặc dù chúng ta đã chứng minh nó trong trường hợp tổng quát hơn khi $a \geq -1$. Chúng ta sẽ gọi bất đẳng thức thứ nhất trong Kết quả 1.2.3) là **Bất đẳng thức nhị thức**. Mặt khác, chúng ta cũng sẽ gọi bất đẳng thức hai trong Kết quả 1.2.3) là **Bất đẳng thức nhị thức suy rộng**. Chúng ta cũng nhận thấy rằng bất đẳng thức nhị thức cũng đúng trong trường hợp tổng quát hơn, đối với các lũy thừa hữu tỉ.

Kết quả 1.2.4. (Bất đẳng thức AM - GM)

Giả sử $n \in \mathbb{N}$ và $a_1, \dots, a_n$ là các số thực không âm.

Khi đó, trung bình cộng của $a_1, \dots, a_n$ sẽ lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng, nghĩa là

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Hơn nữa, đẳng thức sẽ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = \dots = a_n$.

Chứng minh kết quả 1.2.4.

Nhận thấy rằng nếu có một số $a_i = 0$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $a_i > 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Kí hiệu $g = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$ và $b_i = a_i/g$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Khi đó, $b_1, \dots, b_n$ đều là các số dương và $b_1 \dots b_n = 1$. Chúng ta sẽ chỉ ra bằng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số n rằng $b_1 + \dots + b_n \geq n$. Điều này sẽ là hiển nhiên nếu $n = 1$ hoặc nếu mỗi $b_1, \dots, b_n$ đều bằng 1. Giả sử $n > 1$ và không phải b_i nào cũng bằng 1. Khi đó, hệ thức $b_1 \dots b_n = 1$ ngụ ý rằng trong số các số $b_1, \dots, b_n$ phải có một số < 1 cũng như một số > 1 . Bằng cách gán nhãn lại $b_1, \dots, b_n$ nếu cần thiết, chúng ta có thể giả sử rằng $b_1 < 1$ và $b_n > 1$. Kí hiệu $c_1 = b_1 b_n$. Khi đó, $c_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1$. Như vậy, từ giả thiết quy nạp $c_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq n - 1$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} b_1 + \dots + b_n &= (c_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + b_1 + b_n - c_1 \\ &\geq (n - 1) + b_1 + b_n - b_1 b_n \\ &= n + (1 - b_1)(b_n - 1) \\ &> n, \end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng xảy ra bởi vì $b_1 < 1$ và $b_n > 1$.

Điều này chỉ ra rằng $b_1 + \dots + b_n \geq n$ và, hơn nữa, bất đẳng thức luôn nghiêm ngặt trừ khi $b_1 = \dots = b_n = 1$. Bằng cách thay $b_i = a_i/g$, chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn. $\square$

Kết quả 1.2.5. (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)

Giả sử $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ là các số thực bất kì.

Khi đó,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Hơn nữa, đẳng thức sẽ xảy ra khi và chỉ khi hai dãy $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ tỉ lệ với nhau, nghĩa là nếu $a_i b_j = a_j b_i$ với mọi $i, j = 1, \dots, n$.

Chứng minh kết quả 1.2.5.

Nhận thấy rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j)(a_j b_i).$$

Kế tiếp, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, chúng ta có $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ và đẳng thức sẽ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta$. (Điều này được suy ra bằng cách xét biểu thức $(\alpha - \beta)^2$.) Nếu chúng ta áp dụng điều này cho từng số hạng trong tổng thứ hai nêu ở trên thì chúng ta sẽ nhận được

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right),$$

và, hơn nữa, đẳng thức sẽ xảy ra khi và chỉ khi $a_i b_j = a_j b_i$ với mọi $i, j = 1, \dots, n$. Điều này chứng minh tính đúng đắn của kết quả mà chúng ta mong muốn. $\square$

Bằng cách phân tích các lập luận nêu trong phép chứng minh của Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, chúng ta sẽ thu được đẳng thức sau, trên thực tế nó cũng có thể được kiểm chứng trực tiếp một cách dễ dàng:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Đẳng thức này thường được gọi là **Hằng đẳng thức Lagrange**.

1.3. Hàm số và các tính chất hình học của nó

Khái niệm hàm có một tầm quan trọng đặc biệt trong cả lý thuyết tính toán và lý thuyết giải tích thực. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ bắt đầu với một mô tả không chính thức về khái niệm này và, sau đó, là một định nghĩa chính xác. Tiếp theo, chúng ta sẽ phác thảo một số thuật ngữ cơ bản liên quan đến các hàm số. Sau đó, chúng ta sẽ đưa ra các ví dụ cơ bản về các hàm, bao gồm các hàm đa thức, các hàm phân thức và các hàm đại số. Cuối cùng, chúng ta sẽ thảo luận một số tính chất hình học của các hàm và nêu ra một số kết quả cơ bản liên quan đến chúng.

Thông thường, một hàm thường được mô tả với sự trợ giúp của một biểu thức theo một tham số duy nhất (giả sử là x), thay đổi trên một tập cho trước nào đó; tập này được gọi là **tập xác định** của hàm đó.

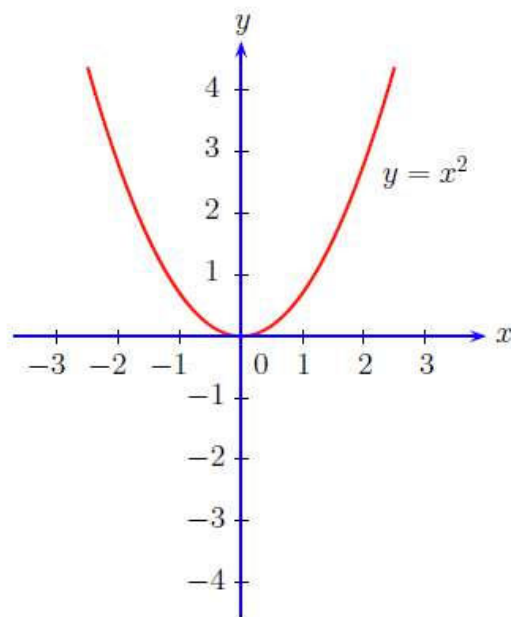
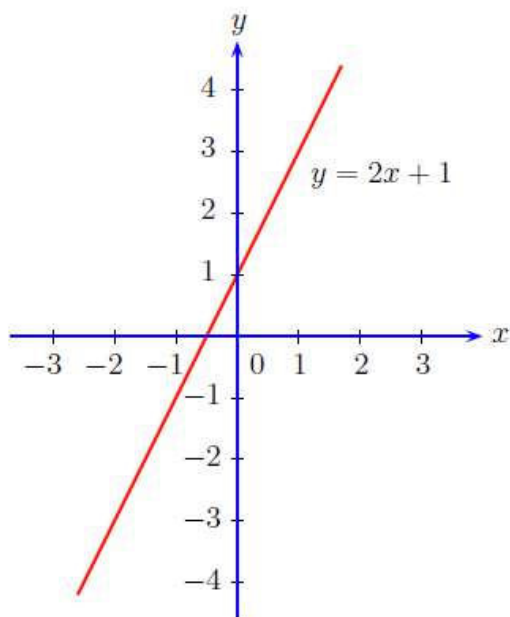
Chẳng hạn, mỗi một trong các biểu thức

$$(i) f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}, \quad (ii) f(x) = x^2, x \in \mathbb{R},$$

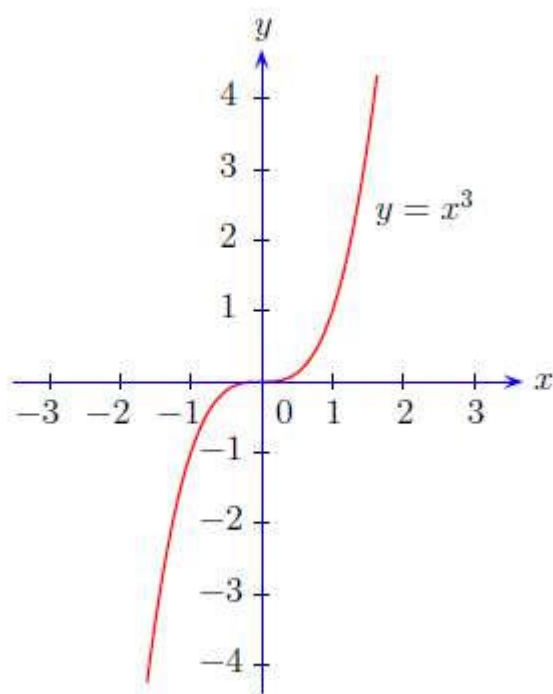
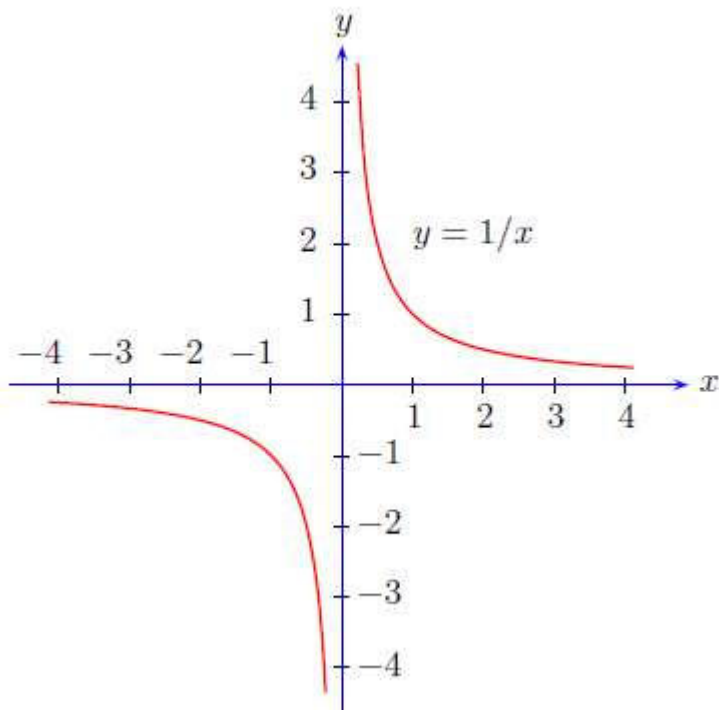
$$(iii) f(x) = 1/x, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \quad (iv) f(x) = x^3, x \in \mathbb{R},$$

đều xác định một hàm f . Trong (i), (ii), (iv), tập xác định là tập $\mathbb{R}$ gồm tất cả các số thực trong khi, trong (iii), tập xác định là tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gồm tất cả các số thực khác không. Lưu ý rằng mỗi một hàm trong (i) – (iv) đều nhận “giá trị” của nó trong tập $\mathbb{R}$; để nhấn mạnh điều này, chúng ta sẽ nói rằng $\mathbb{R}$ là **tập xác định chung** của các hàm này hoặc chúng là **các hàm giá trị thực**.

Giả sử cho trước một hàm giá trị thực f với tập xác định là một tập con D của $\mathbb{R}$, thường sẽ rất hữu ích khi xem xét **đồ thị của f** , tập con có dạng $\{(x, f(x)): x \in D\}$ của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Nói cách khác, đây là tập các điểm trên đường cong xác định bởi $y = f(x), x \in D$, trong mặt phẳng xy .



Hình vẽ minh họa đồ thị của các hàm $f(x) = 2x + 1$ và $f(x) = x^2$.



Hình vẽ minh họa đồ thị các hàm $f(x) = 1/x$ và $f(x) = x^3$.

Nói chung, chúng ta luôn có thể nói về một hàm từ bất kì một tập D nào đến bất kì một tập E nào và điều này sẽ liên kết mỗi điểm của D với duy nhất một phần tử của E . Một định nghĩa chính thức cho một hàm số sẽ được đưa ra dưới đây. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng, về mặt bản chất, điều này sẽ đồng nhất một hàm số với đồ thị của nó!

Định nghĩa và các thuật ngữ

Giả sử cho trước các tập bất kì D và E . Chúng ta sẽ dùng $D \times E$ để kí hiệu cho tập tất cả các cặp sắp thứ tự (x, y) trong đó x thay đổi trên tập các phần tử của D và y thay đổi trên tập các phần tử của E . Một **hàm từ D đến E** được định nghĩa là một tập con f của $D \times E$ thỏa mãn tính chất: với mỗi $x \in D$, có duy nhất một $y \in E$ sao cho $(x, y) \in f$. Tập D được gọi là **tập xác định** (hoặc **tập nguồn**) **của f** và tập E được gọi là **tập xác định chung** (hoặc **tập đích**) **của f** .

Thông thường, chúng ta sẽ viết $f: D \rightarrow E$ để chỉ ra rằng f là một hàm từ D đến E . Ngoài ra, thay vì $(x, y) \in f$, chúng ta sẽ thường viết $y = f(x)$ và gọi $f(x)$ là **giá trị của f tại x** . Điều này cũng có thể được biểu thị bằng cách viết $x \mapsto f(x)$ và nói rằng **f ánh xạ x tới $f(x)$** . Các hàm $f: D \rightarrow E$ và $g: D \rightarrow E$ được gọi là **bằng nhau** và chúng ta sẽ viết $f = g$ nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in D$.

Nếu $f: D \rightarrow E$ là một hàm thì tập con $f(D) = \{f(x): x \in D\}$ của E được gọi là **tập giá trị của f** . Chúng ta sẽ nói rằng f là **toàn ánh** nếu $f(D) = E$.

Mặt khác, nếu f ánh xạ các điểm phân biệt này thành các điểm phân biệt khác, nghĩa là nếu

$$x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

thì f được gọi là một **phép 1 – 1** hoặc một **đơn ánh**. Nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh thì nó sẽ được gọi là một **phép tương ứng 1 – 1** hoặc một **song ánh**.

Khái niệm về một hàm song ánh này cũng có thể được sử dụng để định nghĩa một số thuật ngữ cơ bản liên quan đến các tập như sau. Giả sử cho trước một số nguyên không âm n nào đó, xét tập $\{1, \dots, n\}$ gồm n số nguyên dương đầu tiên. Lưu ý rằng nếu $n = 0$ thì $\{1, \dots, n\}$ là tập rỗng. Một tập D được gọi là **hữu hạn** nếu tồn tại một song ánh từ $\{1, \dots, n\}$ lên D , với n là một số nguyên không âm nào đó. Trong trường hợp này, số nguyên không âm n là duy nhất và nó được gọi là **lực lượng** (hoặc **số phần tử**) **của D** . Một tập không hữu hạn sẽ được gọi là **vô hạn**.

Các ví dụ đơn giản nhất về các hàm xác định trên các tập tùy ý là các hàm đồng nhất và hàm hằng. Với mọi tập D cho trước, **hàm đồng nhất trên D** là hàm $id: D \rightarrow D$ xác định bởi $id_D(x) = x$ với mọi $x \in D$. Với mọi tập D và E cho trước, một hàm $f: D \rightarrow E$ xác định bởi $f(x) = c$ với mọi $x \in D$, trong đó c là một phần tử cố định nào đó của E , được gọi là một **hàm hằng**. Lưu ý rằng id_D luôn là một song ánh, trong khi hàm hằng không phải là một đơn ánh (trừ khi D là một tập đơn!) cũng như là một toàn ánh (trừ khi E là một tập đơn!). Bằng cách xem xét các ví dụ ở trên một cách cụ thể hơn, chúng ta nhận thấy rằng các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi (i) hoặc (iv) ở trên là các song ánh, trong khi hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ xác định bởi (ii) là toàn ánh nhưng không phải 1 – 1 và hàm $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi (iii) là 1 – 1 nhưng không phải toàn ánh.

Nếu $f: D \rightarrow E$ và $g: D' \rightarrow E'$ là các hàm sao cho $f(D) \subseteq D'$ thì hàm $h: D \rightarrow E'$ xác định bởi $h(x) = g(f(x))$, $x \in D$, được gọi là **hàm hợp của g với f** và được kí hiệu là $g \circ f$.

Lưu ý rằng bất kì hàm $f: D \rightarrow E$ nào cũng có thể được sử dụng để tạo ra một toàn ánh bằng cách thay thế tập xác định chung E bởi tập giá trị $f(D)$; nói một cách chính xác hơn, điều này có thể được thực hiện bằng cách xét hàm $\tilde{f}: D \rightarrow f(D)$ xác định bởi $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in D$. Đặc biệt, nếu $f: D \rightarrow E$ là một đơn ánh

thì, với mọi $y \in f(D)$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in D$ sao cho $f(x) = y$. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết $x = f^{-1}(y)$. Như vậy, chúng ta sẽ thu được một hàm $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ sao cho $f^{-1} \circ f = id_D$ và $f \circ f^{-1} = id_{f(D)}$. Chúng ta sẽ gọi f^{-1} là **hàm ngược của f** .

Chẳng hạn, hàm ngược của hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi (i) ở trên là hàm $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f^{-1}(y) = (y - 1)/2$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, trong khi hàm ngược của hàm $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi (iii) ở trên là hàm $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ xác định bởi $f^{-1}(y) = 1/y$ với mọi $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nói chung, nếu một hàm $f: D \rightarrow E$ không đơn ánh thì chúng ta sẽ không thể nói về hàm ngược của nó. Tuy nhiên, đôi khi chúng ta cũng có thể hạn chế tập xác định của một hàm về thành một tập nhỏ hơn và một “phép thu hẹp” của f có thể trở thành một đơn ánh. Với mọi tập con C của D , **phép thu hẹp của f trên C** được định nghĩa là hàm $f|_C: C \rightarrow E$ xác định bởi $f|_C(x) = f(x)$ với mọi $x \in C$. Chẳng hạn, nếu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi (ii) thì f sẽ không thể là $1 - 1$ nhưng phép thu hẹp $f|_{[0, \infty)}$ của nó lại là $1 - 1$ và hàm ngược $g = (f|_{[0, \infty)})^{-1}$ của nó xác định bởi $g(y) = \sqrt{y}$ với mọi $y \in [0, \infty)$.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ là một **tập đối xứng qua gốc tọa độ**, nghĩa là chúng ta sẽ có $-x \in D$ bất cứ khi nào $x \in D$. Chẳng hạn, D có thể là toàn bộ đường thẳng thực $\mathbb{R}$ hoặc một khoảng có dạng $(-a, a)$ hoặc đường thẳng thực bị thủng $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một **hàm chẵn** nếu $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in D$, trong khi hàm f sẽ được gọi là một **hàm lẻ** nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in D$. Chẳng hạn, hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ là một hàm chẵn, trong khi hàm $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 1/x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3$ đều là các hàm lẻ. Mặt khác, hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$ là không chẵn cũng như không lẻ.

Về mặt hình học, giả sử cho trước một tập $D \subseteq \mathbb{R}$ và một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, trên thực tế, f là một hàm tương ứng với tính chất, với mọi $x_0 \in D$, đường thẳng đứng $x = x_0$ trong mặt phẳng xy cắt đồ thị của f tại đúng một điểm. Ngoài ra, tính chất f là $1 - 1$ sẽ tương ứng với điều kiện bổ sung, với mọi $y_0 \in \mathbb{R}$, đường thẳng nằm ngang $y = y_0$ cắt đồ thị của f tại nhiều nhất một điểm. Mặt khác, tính chất một điểm $y_0 \in \mathbb{R}$ nằm trong tập giá trị $f(D)$ của f sẽ tương ứng với điều kiện bổ sung, đường thẳng nằm ngang $y = y_0$ cắt đồ thị của f tại ít nhất một điểm. Trong trường hợp hàm ngược $f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ tồn tại, đồ thị của nó sẽ thu được từ đồ thị của f bằng cách lấy đối xứng đồ thị dọc theo đường chéo $y = x$. Giả sử cho trước một tập đối xứng qua gốc tọa độ D , chúng ta nhận thấy rằng việc nói rằng f là một hàm chẵn sẽ tương ứng với việc nói rằng đồ thị của f đối xứng qua trục y , trong khi việc nói rằng f là một hàm lẻ sẽ tương ứng với việc nói rằng đồ thị của f đối xứng qua gốc tọa độ. Lưu ý rằng nếu f lẻ và $1 - 1$ thì tập giá trị $f(D)$ của nó sẽ đối xứng và $f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lẻ.

Giả sử cho trước các hàm giá trị thực $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta có thể định nghĩa các hàm mới $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$ và $fg: D \rightarrow \mathbb{R}$, được gọi tương ứng là tổng và tích của f và g , lần lượt được định nghĩa theo từng thành phần, nghĩa là

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ và } (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Trong trường hợp f là hàm hằng xác định bởi $f(x) = c$ với mọi $x \in D$, hàm fg thường được kí hiệu là cg và được gọi là **bội** (theo c) của g . Chúng ta sẽ thường viết $f - g$ thay cho $f + (-1)g$. Trong trường hợp $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$, **thương f/g** sẽ xác định và nó cũng là một hàm từ D đến $\mathbb{R}$ xác định bởi

$(f/g)(x) = f(x) / g(x)$ với mọi $x \in D$. Đôi khi, chúng ta sẽ viết $f \leq g$ khi $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in D$.

Các ví dụ cơ bản về các hàm

Trong số các hàm cơ bản, các hàm cơ bản nhất là những hàm thu được từ các đa thức. Trước tiên, chúng ta hãy xem lại một số sự kiện đại số có liên quan đến các đa thức.

Một **đa thức** (theo một biến x) với các hệ số thực được định nghĩa là một biểu thức có dạng

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

trong đó n là một số nguyên không âm và $c_0, c_1, \dots, c_n$ là các số thực.

Chúng ta sẽ gọi $c_0, c_1, \dots, c_n$ là các **hệ số** của đa thức ở trên và, cụ thể hơn, c_i là **hệ số của x^i** với $i = 0, 1, \dots, n$. Trong trường hợp $c_n \neq 0$, đa thức được gọi là có **bậc n** và c_n được gọi là **hệ số bậc cao nhất** của nó. Một đa thức (theo x) với hệ số bậc cao nhất bằng 1 được gọi là **monic** (theo x). Hai đa thức được gọi là **bằng nhau** nếu các hệ số tương ứng của chúng bằng nhau. Đặc biệt, $c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$ là đa thức không khi và chỉ khi $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Bậc của đa thức không xác định. Nếu $p(x)$ là một đa thức khác 0 thì bậc của nó sẽ được kí hiệu là $\deg p(x)$. Các đa thức bậc 1, 2, 3 lần lượt được gọi là các đa thức tuyến tính, đa thức bậc hai và bậc ba. Các đa thức bậc 0 cũng như đa thức không đều được gọi là **các đa thức hằng**. Tập tất cả các đa thức theo x với các hệ số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}[x]$. Phép cộng và phép nhân đa thức cũng được định nghĩa theo cách tương tự.

Chẳng hạn,

$$(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 2x^2 + 5) = x^3 + 3x^2 + 2x + 8$$

và

$$(x^2 + 2x + 3)(x^3 + 2x^2 + 5) = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 10x + 15.$$

Nói chung, với mọi $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, tổng $p(x) + q(x)$ và tích $p(x)q(x)$ đều là các đa thức trong $\mathbb{R}[x]$. Hơn nữa, nếu $p(x)$ và $q(x)$ đều khác không thì $p(x)q(x)$ cũng khác không và $\deg(p(x)q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$, trong khi $p(x) + q(x)$ là đa thức không hoặc $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$. Chúng ta sẽ nói rằng $q(x)$ **chia hết** $p(x)$ và viết $q(x) | p(x)$ nếu $p(x) = q(x)r(x)$ với một $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ nào đó. Chúng ta cũng có thể viết $q(x) \nmid p(x)$ nếu $q(x)$ không chia hết $p(x)$.

Nếu $p(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{R}[x]$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì chúng ta sẽ dùng $p(\alpha)$ để kí hiệu cho số thực $c_n \alpha^n + \cdots + c_1 \alpha + c_0$ và gọi nó là giá trị của $p(x)$ tại α . Trong trường hợp $p(\alpha) = 0$, chúng ta sẽ nói rằng α là một **nghiệm** (thực) của $p(x)$. Tồn tại các đa thức không có nghiệm thực. Chẳng hạn, đa thức bậc hai $x^2 + 1$ không có nghiệm thực nào bởi vì $\alpha^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Tổng quát hơn, nếu $q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là bất kì một đa thức bậc hai nào thì chúng ta sẽ có

$$4aq(x) = (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac).$$

Như vậy, $q(x)$ sẽ có một nghiệm thực khi và chỉ khi $b^2 - 4ac \geq 0$; thật vậy, nếu $b^2 - 4ac \geq 0$ thì $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ là các nghiệm của $q(x)$.

Chúng ta sẽ gọi $b^2 - 4ac$ là **biệt thức** của đa thức bậc hai $q(x) = ax^2 + bx + c$.

Các thương của các đa thức, nghĩa là các biểu thức có dạng $p(x)/q(x)$, trong đó $p(x)$ là một đa thức với các hệ số thực và $q(x)$ là một đa thức với các hệ số khác không, được gọi là các **phân thức thực** (hoặc **phân thức**). Hai phân thức $p_1(x)/q_1(x)$ và $p_2(x)/q_2(x)$ được gọi là **bằng nhau** nếu, khi nhân chéo, các đa thức tương ứng bằng nhau, nghĩa là nếu $p_1(x)q_2(x) = p_2(x)q_1(x)$. Tổng và tích của các phân thức cũng được định nghĩa theo cách tương tự.

Các sự kiện cơ bản về các đa thức và các phân thức gồm:

(i) Nếu một đa thức khác không có bậc n thì nó sẽ có nhiều nhất n nghiệm. Như vậy, nếu $p(x)$ là một đa thức với các hệ số thực sao cho $p(\alpha) = 0$ với mọi α nằm trong một tập con vô hạn D của $\mathbb{R}$ thì $p(x)$ sẽ là đa thức hằng.

(ii) (**Định lý cơ bản của đại số thực**) Mọi đa thức khác không với các hệ số thực đều có thể được phân tích nhân tử thành tích của một số hữu hạn của các đa thức tuyến tính và các đa thức bậc hai với biệt thức âm.

(iii) (**Định lý phân tích của các hàm phân thức thực**) Mọi phân thức thực đều có thể phân tích thành tổng của một đa thức và một số hữu hạn các phân thức có dạng

$$\frac{A}{(x - \alpha)^i} \text{ hoặc } \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^j},$$

trong đó A, B, C và α, β, γ là các số thực và i, j là các số nguyên dương.

Trên thực tế, phép phân tích thừa số trong (ii) là duy nhất cho đến khi sắp xếp lại các thừa số. Trong (iii), chúng ta có thể chọn $(x - \alpha)^i$ và $(x^2 + \beta x + \gamma)^j$ nằm trong số các thừa số của mẫu số của phân thức đã cho và, trong trường hợp đó, phép phân tích thành các phân thức cũng là duy nhất cho đến khi sắp xếp lại các số hạng. Một ví dụ đơn giản và hữu ích về phép phân tích thành các phân thức thu được bằng cách chọn ra các số thực phân biệt α, β bất kì và lưu ý rằng

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{x - \beta}, \text{ trong đó } A_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} \text{ và } A_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Tổng quát hơn, nếu $p(x), q(x)$ là các đa thức với $\deg p(x) < \deg q(x)$ và $q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$, trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là các số thực phân biệt, thì

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_r}{x - \alpha_k} \text{ trong đó } A_i = \frac{p(\alpha_i)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)} \text{ với } i = 1, \dots, r.$$

Khi đó, đây chính là phép phân tích thành các phân thức của $p(x)/q(x)$. Nói chung, phép phân tích thành các phân thức của một phân thức có thể sẽ phức tạp hơn. Một ví dụ điển hình như sau:

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 3x - 7}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} = (x - 1) + \frac{2}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Bây giờ, chúng ta hãy quay trở lại với các hàm. Bằng cách tính giá trị của các đa thức tại các số thực, chúng ta sẽ thu được các hàm được gọi là các hàm đa thức. Như vậy, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ thì một **hàm đa thức** xác định trên D được định nghĩa là một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \text{ với mọi } x \in D,$$

trong đó n là một số nguyên không âm và $c_0, c_1, \dots, c_n$ là các số thực.

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể xem các hàm đa thức xác định trên D là lớp các hàm nhận được từ hàm đồng nhất xác định trên D và các hàm hằng từ D đến $\mathbb{R}$ bằng cách xây dựng tổng và tích của các hàm này. Nếu D là một tập vô hạn thì, từ khẳng định (i) nêu ở trên, một hàm đa thức xác định trên D và đa thức tương ứng sẽ xác định duy nhất lẫn nhau. Trong trường hợp này, chúng ta có thể đồng nhất chúng với nhau và cho phép các hàm đa thức này kế thừa một số thuật ngữ đã được xây dựng cho các đa thức. Chẳng hạn, một hàm đa thức được gọi là có bậc n nếu đa thức tương ứng có bậc n .

Các hàm phân thức làm phát sinh các hàm giá trị thực xác định trên các tập con D của $\mathbb{R}$ với điều kiện mẫu số của chúng không triệt tiêu tại bất kì điểm nào của D . Như vậy, một **hàm phân thức** xác định trên D là một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = p(x)/q(x)$ với mọi $x \in D$, trong đó p và q là các hàm đa thức xác định trên D sao cho $q(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$.

Các hàm đa thức và các hàm phân thức (xác định trên $D \subseteq \mathbb{R}$) là các trường hợp đặc biệt của các hàm đại số (xác định trên $D \subseteq \mathbb{R}$) được định nghĩa sau đây. Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một **hàm đại số** nếu $y = f(x)$ thỏa mãn một phương trình với các hệ số là các đa thức, nghĩa là

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0 \text{ với mọi } x \in D,$$

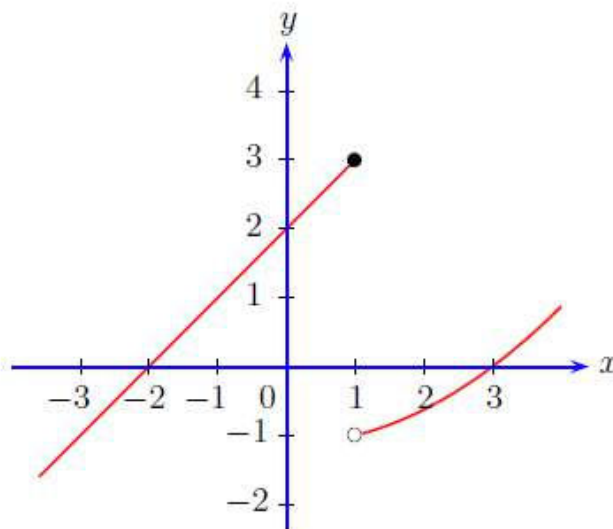
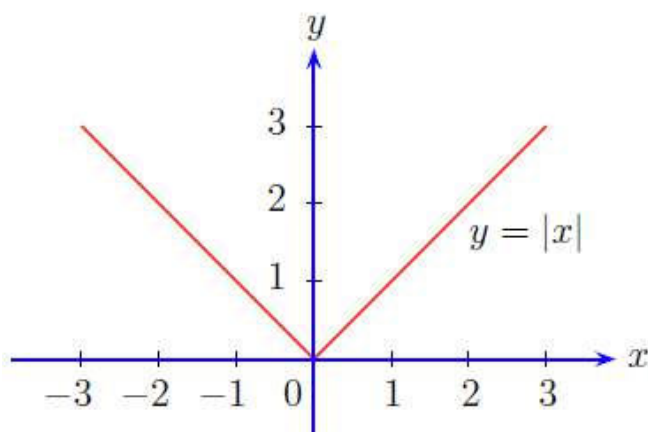
trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ là các đa thức sao cho $p_n(x)$ là một đa thức khác không.

Chẳng hạn, hàm $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ là một hàm đại số bởi vì $y = f(x)$ thỏa mãn phương trình $y^n - x = 0$ với mọi $x \in [0, \infty)$.

Chúng ta cũng có thể chứng minh rằng các tổng, tích, thương của các hàm đại số cũng là các hàm đại số. Sau đây, chúng ta sẽ trình bày một ví dụ minh họa đơn giản giải thích tại sao một tính chất như vậy là đúng. Xét tổng $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ của các hàm rõ ràng là đại số. Để chỉ ra rằng tổng này là đại số, viết $y - \sqrt{x} = \sqrt{x+1}$, bình phương cả hai vế và rút gọn thành $y^2 - 1 = 2y\sqrt{x}$; tiếp theo, bình phương hai vế một lần nữa, chúng ta sẽ thu được phương trình $y^4 - 2(1+2x)y^2 + 1 = 0$, đpcm. Các hàm đại số cũng có tính chất là căn của chúng cũng là đại số. Nói một cách chính xác hơn, nếu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là đại số và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in D$ thì mọi căn của f cũng là đại số, nghĩa là, với mọi $d \in \mathbb{N}$, hàm $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \sqrt[d]{f(x)}$ là hàm đại số. Điều này có thể được suy ra bằng cách thay thế y bởi y^d trong phương trình đại số được thỏa mãn bởi $y = f(x)$ và, lưu ý rằng, phương trình kết quả sẽ được thỏa mãn bởi $y = g(x)$. Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng các hàm đại số sẽ tạo thành một lớp hàm khá lớn đóng kín dưới các phép toán cơ bản của đại số. Lớp này có thể được xem như một kho dự trữ cơ bản của các hàm mà từ đó có thể rút ra nhiều ví dụ khác nhau. Một hàm giá trị thực không phải là hàm đại số sẽ được gọi là một **hàm siêu việt**.

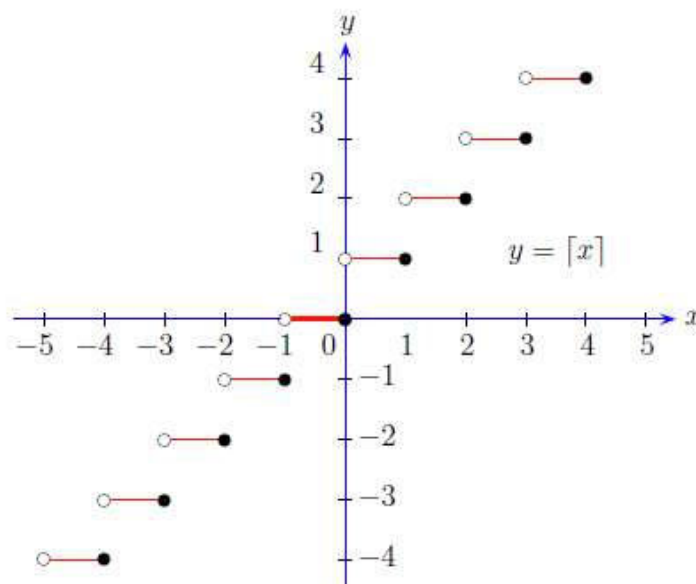
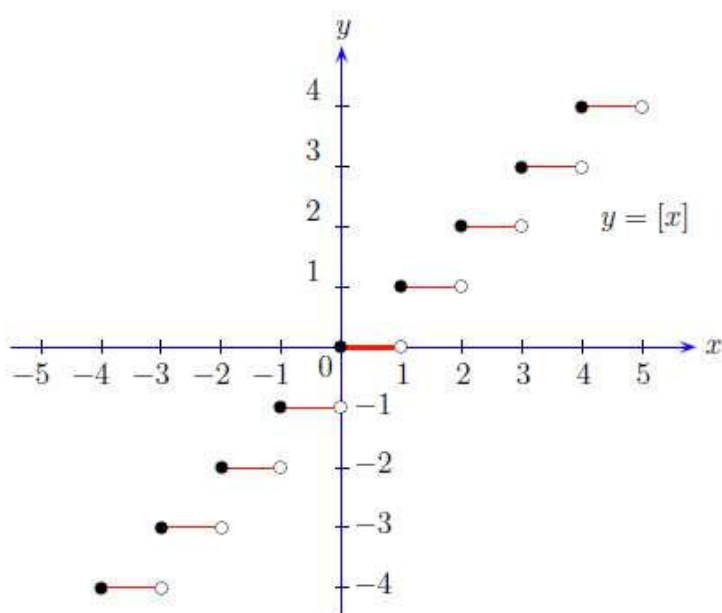
Ngoài các phép toán đại số, một cách hiệu quả khác để xây dựng các hàm mới là ghép các hàm đã biết lại với nhau. Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi một trong hai điều sau đây:

$$(i) f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0, \end{cases} \quad (ii) f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x \leq 1, \\ (x^2 - 9)/8 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$



Hình vẽ minh họa đồ thị của các hàm $f(x) = |x|$ và $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x \leq 1, \\ (x^2 - 9)/8 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

Bằng cách lấy phần nguyên (hoặc sàn) của một số thực, chúng ta sẽ tạo ra một hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = [x]$, mà chúng ta sẽ gọi là **hàm phần nguyên** hoặc **hàm sàn**. Tương tự, hàm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \lceil x \rceil$ sẽ được gọi là hàm trần. Hai hàm này cũng có thể được xem như các ví dụ về các hàm thu được bằng cách ghép các hàm đã biết lại với nhau và đồ thị của chúng được thể hiện trong hình vẽ bên dưới đây.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm phần nguyên $y = [x]$ và hàm trần $y = \lceil x \rceil$.

Như đã thấy trong hình vẽ, thường xảy ra trường hợp đồ thị của các hàm xác định bằng cách ghép các hàm khác nhau lại với nhau trông như bị gãy hoặc có các cạnh giống như cái mỏ. Ngoài ra, nói chung, các hàm như vậy không phải là đại số. Tuy nhiên, các hàm như vậy có thể khá hữu ích trong việc xây dựng các ví dụ về các “hành vi hoang dã” nhất định.

Nhận xét. Các đa thức (theo một biến) tương tự như các số nguyên. Tương tự, các hàm phân thức tương tự như các số hữu tỉ. Các hàm đại số và các hàm siêu việt cũng có các điểm tương tự trong lý thuyết số học, được định nghĩa như sau. Một số thực α được gọi là một **số đại số** nếu nó thỏa mãn một phương trình đa thức khác không với các hệ số nguyên nào đó. Các số không phải là số đại số được gọi là các **số siêu việt**. Chẳng hạn, chúng ta có thể nhận thấy rằng $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[5]{7}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là các số đại số. Ngoài ra, mọi số hữu tỉ đều là một số đại số. Mặt khác, không dễ để chúng ta có thể đưa ra các ví dụ cụ thể về các số siêu việt.

Tiếp theo, chúng ta sẽ thảo luận một số tính chất hình học của các hàm giá trị thực xác định trên các tập con nhất định của $\mathbb{R}$.

Các hàm bị chặn

Khái niệm về một tập bị chặn có một sự tương tự trong trường hợp các hàm. Trên thực tế, chúng ta sẽ sử dụng các thuật ngữ về hàm cho tập giá trị của chúng. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ đưa ra các định nghĩa như sau.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số.

1. f được gọi là **bị chặn trên** trên D nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq \alpha$ với mọi $x \in D$. Bất kì một số thực α nào như vậy đều được gọi là một **chặn trên** của f .

2. f được gọi là **bị chặn dưới** trên D nếu tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq \beta$ với mọi $x \in D$. Bất kì một số thực β nào như vậy đều được gọi là một **chặn dưới** của f .

3. f được gọi là **bị chặn** trên D nếu nó bị chặn trên D cũng như bị chặn dưới trên D .

Lưu ý rằng f bị chặn trên D khi và chỉ khi tồn tại một số thực $\gamma \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \leq \gamma$ với mọi $x \in D$. Bất kì một số thực γ nào như vậy đều được gọi là một **chặn cho giá trị tuyệt đối của f** . Về mặt hình học, f bị chặn trên có nghĩa là đồ thị của f nằm dưới một đường thẳng nằm ngang nào đó, trong khi f bị chặn dưới có nghĩa là đồ thị của nó nằm trên một đường thẳng nằm ngang nào đó.

Chẳng hạn, hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x^2$ bị chặn trên trên $\mathbb{R}$, trong khi hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên, cả hai hàm này đều không bị chặn trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ đưa ra một ví dụ về một hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$. Đối với hàm này, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $0 \leq f(x) < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Trên thực tế, các chặn 0 và 1 là tối ưu theo nghĩa

$$\inf\{f(x): x \in \mathbb{R}\} = 0 \text{ và } \sup\{f(x): x \in \mathbb{R}\} = 1.$$

Trong số các đẳng thức này, đẳng thức thứ nhất là hiển nhiên bởi vì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Để nhận được đẳng thức thứ hai, kí hiệu α là một chặn trên sao cho $\alpha < 1$.

Khi đó, $1 - \alpha > 0$, nên chúng ta có thể tìm được một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{n} < 1 - \alpha \text{ và } f(\sqrt{n-1}) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > \alpha,$$

mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ rằng $\sup\{f(x): x \in \mathbb{R}\} = 1$. Như vậy, chúng ta có một sự khác biệt về chất giữa infimum của (tập giá trị của) f đạt được và supremum không đạt được. Điều này gợi ý định nghĩa tổng quát sau đây.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta sẽ nói rằng

1. f **đạt được chặn trên** của nó trên D nếu tồn tại một số thực $c \in D$ sao cho

$$\sup\{f(x): x \in D\} = f(c),$$

2. f **đạt được chặn dưới** của nó trên D nếu tồn tại một số thực $d \in D$ sao cho

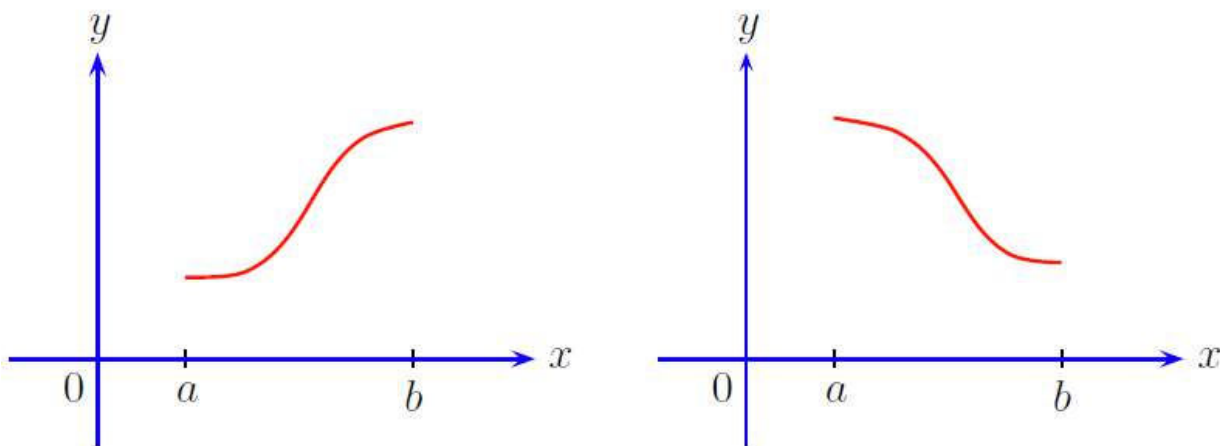
$$\inf\{f(x): x \in D\} = f(d),$$

3. f **đạt được các chặn của nó** trên D nếu nó đạt được cận trên của nó trên D cũng như đạt được cận dưới của nó trên D .

Trong trường hợp f đạt được chặn trên, chúng ta có thể viết $\max\{f(x): x \in D\}$ thay cho $\sup\{f(x): x \in D\}$. Tương tự, nếu f đạt được chặn dưới của nó thì “inf” có thể được thay thế bởi “min”.

Tính đơn điệu, tính lồi, tính lõm

Tính đơn điệu là một tính chất hình học của một hàm giá trị thực xác định trên một tập con của $\mathbb{R}$ tương ứng với đồ thị của nó đang tăng hoặc đang giảm.



Hình vẽ minh họa đồ thị đặc trưng của các hàm tăng và các hàm giảm xác định trên $I = [a, b]$.

Một định nghĩa hình thức được nêu ra như sau. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ sao cho D có chứa một khoảng I nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta sẽ nói rằng

1. f **tăng (đơn điệu)** trên I nếu

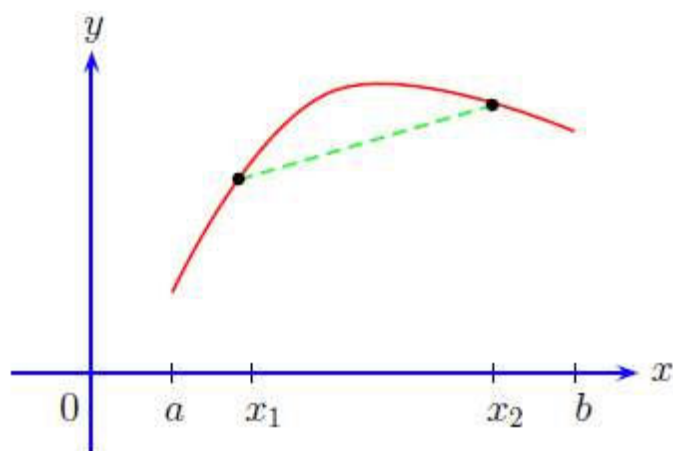
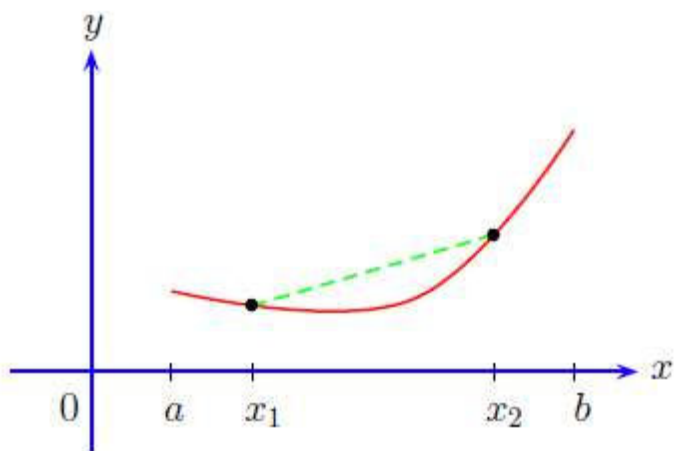
$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

2. f **giảm (đơn điệu)** trên I nếu

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

3. f **đơn điệu** trên I nếu f đơn điệu tăng trên I hoặc f đơn điệu giảm trên I .

Kế tiếp, chúng ta sẽ thảo luận về các tính chất phức tạp hơn của một hàm, được gọi là tính lồi và tính lõm. Về mặt hình học, những khái niệm này được mô tả một cách dễ dàng. Một hàm được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đồ thị của nó luôn nằm trên đồ thị. Một hàm được gọi là lõm nếu bất kì đoạn thẳng nào như vậy sẽ luôn nằm dưới đồ thị.



Hình vẽ minh họa đồ thị đặc trưng của các hàm lồi và các hàm lõm xác định trên $I = [a, b]$.

Để xây dựng định nghĩa một cách chính xác hơn, trước hết chúng ta cần lưu ý rằng tính lồi hoặc tính lõm đều có thể được xác định tương ứng với một khoảng I nào đó chứa trong tập xác định của một hàm f và, với bất kì $x_1, x_2 \in I$ nào với $x_1 < x_2$, phương trình của đường thẳng nối giữa các điểm $(x_1, f(x_1))$ và $(x_2, f(x_2))$ tương ứng trên đồ thị của f xác định bởi

$$y - f(x_1) = m(x - x_1), \text{ trong đó } m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Như vậy, một lần nữa, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ sao cho D có chứa một khoảng I nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta sẽ nói rằng

1. f **lồi** trên I nếu

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

2. f lõm trên I nếu

$$x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) - f(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Một cách khác để chúng ta có thể hình thành các định nghĩa về tính lồi và tính lõm như sau. Đầu tiên, lưu ý rằng, với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ với $x_1 < x_2$, các điểm x nằm giữa x_1 và x_2 có dạng $(1 - t)x_1 + tx_2$ với một số $t \in (0,1)$; trên thực tế, t và x xác định duy nhất lẫn nhau, bởi vì

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2 \Leftrightarrow t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Bằng cách thay điều này vào định nghĩa nêu trên, chúng ta sẽ nhận thấy rằng f lồi trên I nếu (và chỉ nếu), với mọi $x_1, x_2 \in I$ với $x_1 < x_2$ và với mọi $t \in (0,1)$, chúng ta sẽ có $f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$. Tất nhiên, vai trò của t và $1 - t$ có thể dễ dàng được đảo ngược cho nhau và, với quan điểm này, chúng ta sẽ không cần phải giả sử $x_1 < x_2$. Như vậy, f lồi trên I nếu (và chỉ nếu)

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in I \text{ và } t \in (0,1).$$

Tương tự, f lõm trên I nếu (và chỉ nếu)

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \geq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in I \text{ và } t \in (0,1).$$

Trong mỗi định nghĩa trên, trên thực tế, chúng ta có thể thu được một kết luận mạnh hơn mức cần thiết để thỏa mãn các định nghĩa về các hàm tăng/giảm và lồi/lõm. Cụ thể, thay vì các bất đẳng thức “ $\leq$ ” và “ $\geq$ ”, chúng ta sẽ thu được các bất đẳng thức nghiêm ngặt “ $<$ ” và “ $>$ ” tương ứng. Nếu chúng ta muốn nhấn mạnh thì thuật ngữ **tăng nghiêm ngặt**, **giảm nghiêm ngặt**, **lồi nghiêm ngặt**, **lõm nghiêm ngặt** sẽ được sử dụng. Các định nghĩa của các khái niệm này đều có thể nhận được bằng cách thay đổi bất đẳng thức “ $<$ ” và “ $>$ ” tương ứng. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ nói rằng một hàm là **đơn điệu nghiêm ngặt** nếu nó tăng hoặc giảm nghiêm ngặt.

Các điểm cực trị địa phương và các điểm uốn

Những điểm mà tại đó đồ thị của một hàm số có cực đại hoặc cực tiểu, hoặc tại đó tính lồi chuyển thành tính lõm (hoặc ngược lại), rất được quan tâm trong giải tích và các ứng dụng của nó. Bây giờ, chúng ta sẽ chính thức giới thiệu thuật ngữ sẽ được sử dụng để mô tả loại hành vi này.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in D$ sao cho D có chứa một khoảng $(c - r, c + r)$ với một số $r > 0$ nào đó. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta sẽ nói rằng

1. f có một **cực đại địa phương** tại c nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f(x) \leq f(c)$ với mọi $x \in (c - \delta, c + \delta)$,
2. f có một **cực tiểu địa phương** tại c nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f(x) \geq f(c)$ với mọi $x \in (c - \delta, c + \delta)$,
3. f có một **cực trị địa phương** tại c nếu f có một cực đại địa phương tại c hoặc một cực tiểu địa phương tại c .

4. c được gọi là một **điểm uốn** của f nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho f lồi trên $(c - \delta, c)$ trong khi f lõm trên $(c, c + \delta)$ hoặc ngược lại, nghĩa là f lõm trên $(c - \delta, c)$ trong khi f lồi trên $(c, c + \delta)$.

Cần lưu ý rằng các thuật ngữ cực đại địa phương, cực tiểu địa phương và cực trị thường được sử dụng dưới dạng số nhiều là các cực đại địa phương, cực tiểu địa phương và cực trị địa phương tương ứng.

Chẳng hạn,

- (i) Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x^2$ có một cực đại địa phương tại gốc tọa độ, nghĩa là tại 0.
- (ii) Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = |x|$ có một cực tiểu địa phương tại gốc tọa độ, nghĩa là tại 0.
- (iii) Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3$ có một điểm uốn tại gốc tọa độ, nghĩa là tại 0.

Như đã được đề cập trước đây, hàm có thể thỏa mãn tính chất theo nghĩa mạnh hơn. Chẳng hạn, với hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi (i), chúng ta không chỉ có $f(x) \leq f(0)$ trong một khoảng nào đó xung quanh 0 và, trên thực tế, $f(x) < f(0)$ với mọi điểm x nằm trong khoảng xung quanh điểm 0, ngoại trừ điểm 0. Để nhấn mạnh điều này, thuật ngữ **cực đại địa phương nghiêm ngặt**, **cực tiểu địa phương nghiêm ngặt**, **cực trị địa phương nghiêm ngặt** sẽ được sử dụng. Hai khái niệm đầu tiên của các khái niệm này được xác định bằng cách thay đổi trong 1) và 2) các bất đẳng thức “ $\leq$ ” và “ $\geq$ ” bởi các bất đẳng thức nghiêm ngặt “ $<$ ” và “ $>$ ” và điều kiện “ $x \in (c - \delta, c + \delta)$ ” bởi điều kiện “ $x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c$ ”. Chúng ta sẽ nói rằng f có một cực trị địa phương nghiêm ngặt tại c khi nó có một cực đại địa phương nghiêm ngặt hoặc một cực tiểu địa phương nghiêm ngặt tại c . Cuối cùng, khái niệm về một điểm uốn nghiêm ngặt sẽ được xác định bằng cách bổ sung thêm từ “nghiêm ngặt” ngay sau từ “lồi” và “lõm” trong định nghĩa về điểm uốn nêu ở trên.

Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ có chứa một khoảng mở có dạng $(c - r, c + r)$ với một số $r > 0$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f giảm trên $(c - \delta, c]$ và tăng trên $[c, c + \delta)$ với một số $0 < \delta \leq r$ thì f sẽ phải có cực tiểu địa phương tại c . Nhưng điều ngược lại không nhất thiết phải đúng.

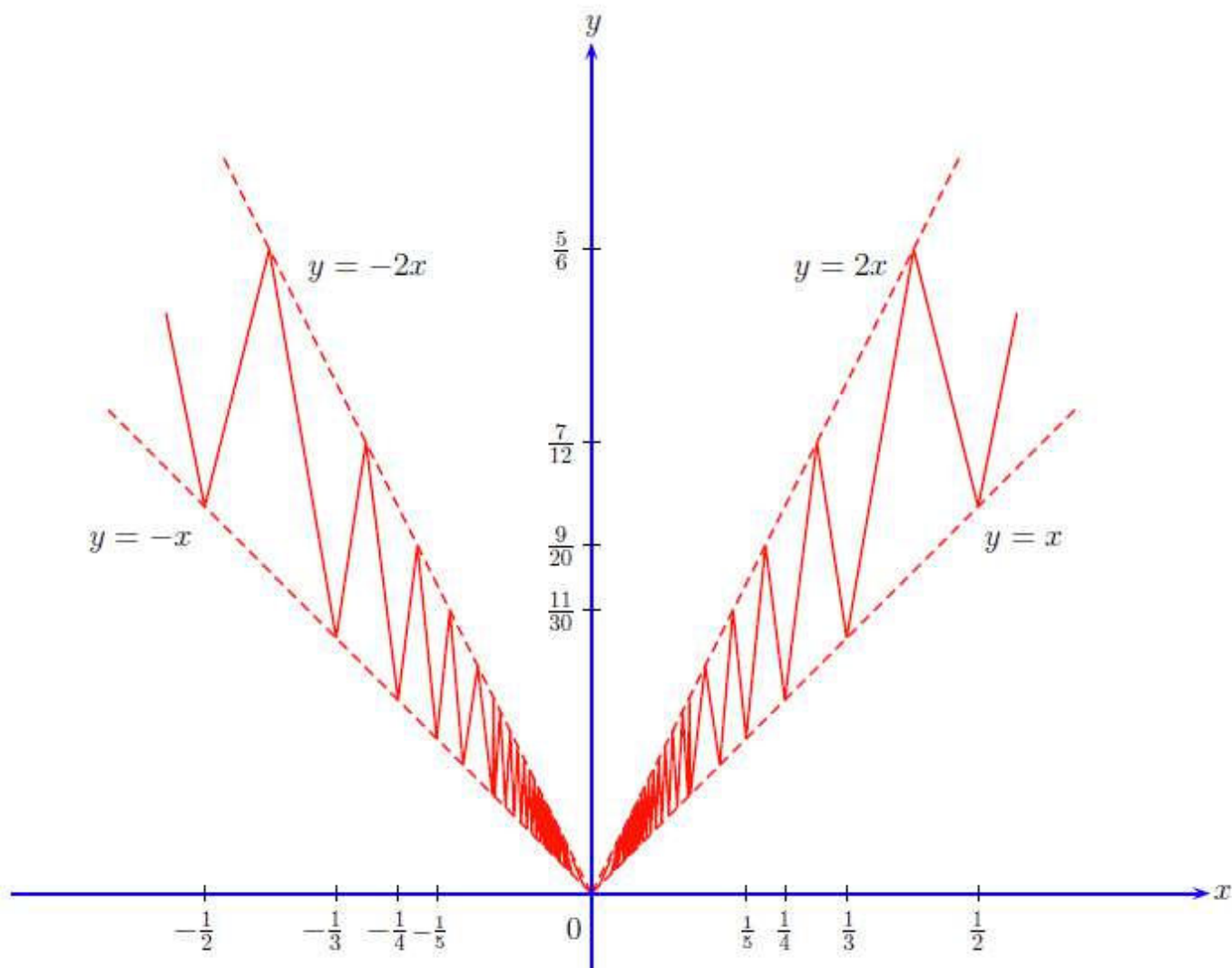
Chẳng hạn, xét hàm $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thu được bằng cách ghép vô số các đường zigzag lại với nhau như sau. Trên $[1/(n+1), 1/n]$, chúng ta định nghĩa f sao cho đồ thị của nó được tạo thành bởi các đoạn thẳng PM và MQ , trong đó P, Q là các điểm nằm trên đường thẳng $y = x$ có tọa độ x lần lượt là $1/(n+1)$ và $1/n$, trong khi M là điểm nằm trên đường thẳng $y = 2x$ có hoành độ x là trung điểm của hoành độ x của P và Q .

Nói một cách chính xác, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta định nghĩa

$$f(x) = \begin{cases} 2(n+1)x - \frac{2n+1}{n+1} & \text{nếu } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ -2nx + \frac{2n+1}{n} & \text{nếu } \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ngoài ra, kí hiệu $f(0) = 0$ và $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in [-1, 0)$.

Rõ ràng là f có một cực tiểu địa phương tại 0. Tuy nhiên, không có bất kì một số thực $\delta > 0$ nào sao cho f giảm trên $(-\delta, 0]$ và f tăng trên $[0, \delta)$.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm zigzag tuyến tính từng phần $f(x)$.

Nhận xét tương tự cũng đúng đối với khái niệm cực đại địa phương.

Trong các ví dụ nêu ở trên, các ví dụ minh họa các hiện tượng hình học của các tính chất tăng/giảm, lồi/lõm, cực đại/cực tiểu địa phương, các điểm uốn, việc kiểm tra các tính chất tương ứng khá dễ dàng. Trên thực tế, chúng ta đã xem xét những hàm đơn giản nhất trong số những hàm nguyên mẫu của các hiện tượng nêu ở trên. Nhưng ngay cả như vậy, việc chứng minh tính lồi hoặc lõm trong trường hợp các hàm x^2 và x^3 cũng đòi hỏi một số nỗ lực nhất định. Khi xem xét các hàm phức tạp hơn, việc xác minh tất cả các tính chất hình học này có thể ngày càng trở nên khó khăn hơn. Trong bài viết “**Phép tính vi phân hàm một biến (2)**”, chúng ta sẽ mô tả một số kết quả cơ bản từ lý thuyết giải tích có thể làm cho việc xác minh như vậy trở nên đơn giản hơn rất nhiều đối với một lớp lớn các hàm. Tuy nhiên, thật hữu ích khi nhớ rằng cách định nghĩa cũng như ý tưởng trực quan đằng sau các tính chất này là hình học và, như vậy, nó độc lập với các khái niệm về giải tích mà chúng ta sẽ gặp trong các phần tiếp theo của bài viết.

Tính chất giá trị trung bình

Bây giờ, chúng ta hãy xem xét một tính chất hình học trực quan tương ứng của một hàm với ý tưởng cho rằng đồ thị của một hàm không có “điểm gián đoạn” hoặc “tính không liên tục”. Chẳng hạn, nếu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$ hoặc bởi $f(x) = x^2$ hoặc bởi $f(x) = |x|$ thì đồ thị của f dường như không có “điểm gián đoạn” nào. Nhưng nếu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x \leq 1, \\ (x^2 - 9)/8 & \text{nếu } x > 1, \end{cases}$$

thì đồ thị của f dường như có một “điểm gián đoạn”.

Điều kiện trực quan trên đồ thị này của một hàm giá trị thực f có thể được công thức hóa bằng cách phát biểu rằng mọi giá trị trung gian của f đều có thể đạt được bởi f . Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa sau.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta sẽ nói rằng f có **tính chất giá trị trung gian** trên I nếu, với mọi $a, b \in I$ với $a < b$ và $r \in \mathbb{R}$,

$$r \text{ nằm giữa } f(a) \text{ và } f(b) \Rightarrow r = f(x) \text{ với một số } x \in [a, b] \text{ nào đó.}$$

Lưu ý rằng nếu $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian trên I và J là một khoảng con nào đó của I thì f cũng sẽ có tính chất giá trị trung gian trên J .

Kết quả 1.3.1.

Giả sử I là một khoảng nào đó và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó,

$$f \text{ có tính chất giá trị trung gian trên } I \Rightarrow f(I) \text{ là một khoảng.}$$

Chứng minh kết quả 1.3.1.

Giả sử $c, d \in f(I)$ với $c < d$. Khi đó, $c = f(a)$ và $d = f(b)$ với các số $a, b \in I$ nào đó. Nhận thấy rằng nếu $r \in (c, d)$ thì, từ tính chất giá trị trung gian của f trên I , tồn tại một số thực $x \in I$ nằm giữa a và b sao cho $f(x) = r$. Như vậy, $r \in f(I)$. Điều này chỉ ra rằng $f(I)$ là một khoảng. $\square$

Nhận xét.

Nhận thấy rằng chiều ngược lại của kết quả trên cũng đúng với các hàm đơn điệu. Để nhận thấy điều này, giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu sao cho $f(I)$ là một khoảng. Giả sử $x_1, x_2 \in I$ sao cho $x_1 < x_2$ và r là một số thực nào đó nằm giữa $f(x_1)$ và $f(x_2)$. Do $f(I)$ là một khoảng nên tồn tại một số thực $x \in I$ sao cho $r = f(x)$. Kế tiếp, do f đơn điệu tăng trên I nên chúng ta sẽ phải có $f(x_1) \leq f(x_2)$; do đó, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Như vậy, $x_1 \leq x \leq x_2$. Tương tự, nếu f đơn điệu giảm trên I thì chúng ta sẽ phải có $f(x_1) \geq f(x) \geq f(x_2)$; do đó, $x_1 \leq x \leq x_2$. Điều này chỉ ra rằng f có tính chất giá trị trung gian trên I .

Tuy nhiên, nói chung, chiều ngược lại của kết quả nêu trong Kết quả 1.3.1) là không đúng. Chẳng hạn, nếu $I = [0, 2]$ và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

thì $f(I) = I$ là một khoảng nhưng I không có tính chất giá trị trung gian trên I . Chẳng hạn, $\frac{5}{4}$ nằm giữa $1 = f(1)$ và $\frac{3}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right)$, nhưng $\frac{5}{4} \neq f(x)$ với mọi $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Chúng ta cũng có thể lưu ý trong ví dụ này rằng f là một đơn ánh nhưng không đơn điệu trên I . Ngoài ra, $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, nên rõ ràng nó không thể là một khoảng.

Kết quả 1.3.2.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó,

f có tính chất giá trị trung gian trên $I \Leftrightarrow$ với mọi khoảng con J của I , $f(J)$ là một khoảng.

Chứng minh kết quả 1.3.2.

Tính đúng đắn của chiều $\Rightarrow$ được suy ra từ việc áp dụng Kết quả 1.3.1) cho các phép thu hẹp của f trên các khoảng con J của I . Ngược lại, giả sử $f(J)$ là một khoảng nào đó với mọi khoảng con J của I . Giả sử $a, b \in I$ với $a < b$ và $r \in \mathbb{R}$ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Xét $J = [a, b]$. Khi đó, J là một khoảng con của I , nên $f(J)$ sẽ là một khoảng có chứa cả $f(a)$ và $f(b)$. Do đó, $r = f(x)$ với một số $x \in J$ nào đó. Như vậy, f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên I . $\square$

Mối quan hệ giữa tính đơn điệu (nghiêm ngặt) và tính chất giá trị trung gian sẽ được làm rõ hơn trong kết quả sau đây.

Kết quả 1.3.3.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số.

Khi đó, f là đơn ánh và có tính chất giá trị trung gian trên I khi và chỉ khi f đơn điệu nghiêm ngặt và $f(I)$ là một khoảng. Trong trường hợp này, $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là đơn điệu nghiêm ngặt và có tính chất giá trị trung gian trên $f(I)$.

Chứng minh kết quả 1.3.3.

Giả sử f là đơn ánh và có tính chất giá trị trung gian trên I . Từ Kết quả 1.3.1), $f(I)$ là một khoảng. Giả sử f không đơn điệu nghiêm ngặt trên I . Khi đó, tồn tại các số $x_1, x_2 \in I$ và các số $y_1, y_2 \in I$ sao cho

$$x_1 < x_2 \text{ nhưng } f(x_1) \geq f(x_2) \text{ và } y_1 < y_2 \text{ nhưng } f(y_1) \leq f(y_2).$$

Kí hiệu $a = \min\{x_1, y_1\}$ và $b = \max\{x_2, y_2\}$. Lưu ý rằng $a < b$. Kế tiếp, giả sử $f(a) \leq f(b)$. Khi đó, chúng ta sẽ phải có $f(x_1) \leq f(b)$ bởi vì, nếu không, $f(x_1) > f(b) \geq f(a)$ và, từ tính chất giá trị trung

gian của f trên I , tồn tại một số $z_1 \in [a, x_1]$ sao cho $f(z_1) = f(b)$. Nhưng do $z_1 \leq x_1 < x_2 \leq b$ nên điều này sẽ mâu thuẫn với giả thiết f là một đơn ánh. Như vậy, chúng ta sẽ có $f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(b)$. Một lần nữa, từ tính chất giá trị trung gian của f trên I , tồn tại một số $w_1 \in [x_2, b]$ sao cho $f(w_1) = f(x_1)$. Nhưng do $x_1 < x_2 \leq w_1$ nên điều này sẽ mâu thuẫn với giả thiết f là một đơn ánh. Kế tiếp, giả sử $f(b) < f(a)$. Ở đây, chúng ta sẽ phải có $f(y_2) \leq f(a)$ bởi vì, nếu không, $f(y_2) > f(a) > f(b)$ và, từ tính chất giá trị trung gian của f trên I , tồn tại một số $z_2 \in [y_2, b]$ sao cho $f(z_2) = f(a)$. Nhưng do $a \leq y_1 < y_2 \leq z_2$ nên điều này sẽ mâu thuẫn với giả thiết f là một đơn ánh. Như vậy, chúng ta sẽ có $f(y_1) \leq f(y_2) \leq f(a)$. Một lần nữa, từ tính chất giá trị trung gian của f trên I , tồn tại một số $w_2 \in [a, y_1]$ sao cho $f(w_2) = f(y_2)$. Nhưng do $w_2 \leq y_1 < y_2$ nên điều này sẽ mâu thuẫn với giả thiết f là một đơn ánh. Điều này chỉ ra rằng f là đơn điệu nghiêm ngặt trên I .

Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử f đơn điệu nghiêm ngặt trên I và $f(I)$ là một khoảng. Khi đó, chúng ta nhận thấy rằng f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên I . Ngoài ra, tính đơn điệu nghiêm ngặt rõ ràng ngụ ý với chúng ta rằng f là một đơn ánh.

Cuối cùng, giả sử f là một đơn ánh và có tính chất giá trị trung gian trên I . Khi đó, như đã thấy ở trên, f là đơn điệu nghiêm ngặt trên I . Điều này ngụ ý rằng f^{-1} đơn điệu nghiêm ngặt trên $f(I)$. Ngoài ra, $f(I)$ là một khoảng và $I = f^{-1}(f(I))$. Như vậy, từ sự tương đương đã được chứng minh ở trên, f^{-1} có tính chất giá trị trung gian trên $f(I)$. □

2. Khái niệm về các dãy số

Ý nghĩa của từ “dãy” gần như là tự nó giải thích cho chính nó. Nó đề cập đến một sự kế thừa của các đối tượng nhất định. Đối với chúng ta, những đối tượng này sẽ là các số thực. Một dãy số thực trông giống như một chuỗi liên tiếp vô tận chẳng hạn như

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

trong đó a_n là các số thực.

Chẳng hạn, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ là một dãy số thực. Nếu chúng ta nhìn vào một dãy thì tự nhiên sẽ hỏi nó sẽ dẫn đến đâu. Chẳng hạn, dãy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ở trên dường như tiến tới 0. Chúng ta sẽ làm cho ý tưởng này trở nên chính xác hơn bằng cách định nghĩa khái niệm về sự hội tụ của các dãy.

Trong mục **2.1. Tính hội tụ của các dãy số** dưới đây, chúng ta sẽ bắt đầu với một định nghĩa chính thức của một dãy và tiếp tục thảo luận về một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan. Đồng thời, chúng ta cũng sẽ xem xét một số ví dụ về các dãy số và xem liệu chúng có tiến đến một số cố định nào hay không. Kế tiếp, trong mục **2.2. Các dãy con và các dãy Cauchy**, chúng ta sẽ xét khái niệm dãy con của một dãy đã cho và đây cũng là một lớp đặc biệt của các dãy được gọi là các dãy Cauchy. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng bất kì một chuỗi nào trong $\mathbb{R}$ thỏa mãn một điều kiện nhẹ là “bị chặn” đều có chứa một dãy con hội tụ. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng một dãy trong $\mathbb{R}$ là hội tụ khi và chỉ khi nó là một dãy Cauchy.

2.1. Tính hội tụ của các dãy số

Một **dãy** (trong $\mathbb{R}$) được định nghĩa là một hàm giá trị thực có tập xác định là tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên. Thông thường, chúng ta sẽ biểu thị các dãy bởi (a_n) , (b_n) , v.v... hoặc đôi khi bởi (A_n) , (B_n) , v.v... Giá trị của dãy (a_n) tại $n \in \mathbb{N}$ được xác định bởi a_n và nó được gọi là **số hạng thứ n** của dãy đó. Một số ví dụ đơn giản được liệt kê ra sau đây: với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét

$$(i) a_n = 1, (ii) a_n = (-1)^n, (iii) a_n = \frac{1}{n}, (iv) a_n = n, (v) a_n = (-1)^n n.$$

Chúng ta sẽ sử dụng các thuật ngữ “bị chặn”, “không bị chặn”, “bị chặn trên”, “bị chặn dưới” cho một dãy cũng giống như cách chúng ta sử dụng chúng cho bất kì một hàm nào khác. Như vậy, các dãy xác định trong (i), (ii), (iii) là bị chặn, nhưng các dãy xác định trong (iv), (v) là không bị chặn. Dãy xác định trong (iv) là bị chặn dưới (bởi 1) nhưng không bị chặn trên, còn dãy xác định trong (v) không bị chặn trên cũng như không bị chặn dưới.

Chúng ta sẽ nói rằng (a_n) là **hội tụ** nếu tồn tại một số $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng (a_n) **hội tụ** tới a hoặc a là một **giới hạn** của (a_n) và viết $a_n \rightarrow a$ (khi $n \rightarrow \infty$). Một dãy không hội tụ được gọi là **phân kỳ**.

Chẳng hạn,

(i) Nếu $a_n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì hiển nhiên $a_n \rightarrow 1$.

(ii) Nếu $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì (a_n) là phân kỳ. Điều này có thể được suy ra như sau. Giả sử $a \in \mathbb{R}$. Nếu $|a| \neq 1$ thì chúng ta sẽ kí hiệu $\varepsilon = \min\{|a - 1|, |a + 1|\}$. Khi đó, $\varepsilon > 0$. Nhận thấy rằng $|a_n - a| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu $|a| = 1$ thì chúng ta sẽ kí hiệu $\varepsilon = 2$ và nhận xét rằng $|a_n - 1| \geq \varepsilon$ với mọi số lẻ n và $|a_n - (-1)| \geq \varepsilon$ với mọi số chẵn n .

(iii) Nếu $a_n = 1/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $a_n \rightarrow 0$. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, chúng ta có thể chọn $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ và khi đó $|a_n - 0| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$.

(iv) Nếu $a_n = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì (a_n) là phân kỳ. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, chúng ta sẽ có $|a_n - a| \geq 1$ với mọi $n \geq [|a|] + 1$. Tương tự, nếu $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì (a_n) là phân kỳ.

Trước khi bắt đầu thảo luận về các dãy hội tụ, chúng ta sẽ thực hiện hai quan sát sau.

Đầu tiên, tính hội tụ của dãy (a_n) sẽ không bị thay đổi nếu có một số hữu hạn các a_n được thay thế bởi một số b_n khác. Như vậy, nếu chúng ta thay thế $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ tương ứng bởi $b_{n_1}, \dots, b_{n_k}$ thì dãy bị thay đổi sẽ hội tụ khi và chỉ khi dãy ban đầu hội tụ. Với quan điểm này, đôi khi chúng ta cũng có thể coi $(1/a_n)$ là một dãy nếu chúng ta biết tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các a_n là khác không.

Kế tiếp, nếu $a_n \rightarrow a$ thì bất đẳng thức

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|, n \in \mathbb{N},$$

cho thấy rằng $|a_n| \rightarrow |a|$. Điều ngược lại là không đúng như chúng ta có thể thấy khi xét $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên, nếu $|a_n| \rightarrow 0$ thì rõ ràng là $a_n \rightarrow 0$.

Kết quả 2.1.1.

- (i) Mọi dãy hội tụ đều chỉ có duy nhất một giới hạn.
- (ii) Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Chứng minh kết quả 2.1.1.

(i) Giả sử $a_n \rightarrow a$ cũng như $a_n \rightarrow b$. Nếu $b \neq a$ thì chúng ta sẽ kí hiệu $\varepsilon = |a - b|$. Do $a_n \rightarrow a$ nên tồn tại một số $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon/2$ với mọi $n \geq n_1$ và do $a_n \rightarrow b$ nên tồn tại một số $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - b| < \varepsilon/2$ với mọi $n \geq n_2$. Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó,

$$|a - b| \leq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |a - b|.$$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $a = b$.

(ii) Giả sử $a_n \rightarrow a$. Khi đó, tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < 1$ với mọi $n > n_0$. Nếu $\alpha = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\}$ thì $|a_n| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, (a_n) là bị chặn. □

Giả sử $a_n \rightarrow a$. Xét khẳng định (i) của Kết quả 2.1.1), chúng ta sẽ nói rằng a là giới hạn của (a_n) và viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh một số kết quả rất hữu ích trong việc chứng minh tính hội tụ và phân kỳ của một loạt dãy khác nhau.

Đầu tiên, chúng ta xem xét xem các phép toán đại số trên $\mathbb{R}$ sẽ có liên quan như thế nào với khái niệm về tính hội tụ của một dãy số thực cho trước. Kết quả sau đây được gọi là **Quy tắc tính giới hạn cho các dãy**.

Kết quả 2.1.2.

Giả sử $a_n \rightarrow a$ và $b_n \rightarrow b$.

Khi đó,

- (i) $a_n + b_n \rightarrow a + b$,
- (ii) $ra_n \rightarrow ra$ với mọi $r \in \mathbb{R}$,
- (iii) $a_nb_n \rightarrow ab$,

(iv) nếu $a \neq 0$ thì tồn tại một số $m \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \neq 0$ với mọi $n \geq m$, và

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

Chứng minh kết quả 2.1.2.

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại các số tự nhiên $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_1 \text{ và } |b_n - b| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_2.$$

(i) Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0$,

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

(ii) Kí hiệu $n_0 = n_1$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0$,

$$|ra_n - ra| = |r||a_n - a| < |r|\varepsilon.$$

(iii) Từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.1), tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|a_n| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)ab| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &\leq \alpha\varepsilon + \varepsilon|b| \\ &= (\alpha + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) Do $|a| > 0$ nên sẽ tồn tại một số $m \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < |a|/2$ với mọi $n \geq m$. Nhưng khi đó $|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a|/2$ với mọi $n \geq m$. Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, m\}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0$, chúng ta sẽ có $a_n \neq 0$, và

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} < \frac{2\varepsilon}{|a|^2}.$$

Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên các kết luận mong muốn được suy ra một cách dễ dàng. □

Với các kí hiệu và giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách áp dụng kết hợp các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.1.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $a_n - b_n \rightarrow a - b$. Tương tự, bằng cách áp dụng kết hợp các khẳng định (iii) và (iv) của Kết quả 2.1.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu $b \neq 0$ thì $a_n/b_n \rightarrow a/b$. Hơn nữa, với mọi $m \in \mathbb{Z}$ cho trước, bằng cách áp dụng liên tiếp khẳng định (iii) hoặc (iv) của Kết quả 2.1.2), chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng $a_n^m \rightarrow a^m$, với điều kiện $a \neq 0$ trong trường hợp $m < 0$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra cách mà tính hội tụ được bảo toàn dưới tác dụng của quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ và phép toán lấy căn bậc k .

Kết quả 2.1.3.

Giả sử (a_n) và (b_n) là các dãy số và a, b là các số thực sao cho $a_n \rightarrow a$ và $b_n \rightarrow b$.

(i) Nếu tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq n_0$ thì $a \leq b$. Ngược lại, nếu $a < b$ thì tồn tại một số $m_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < b_n$ với mọi $n \geq m_0$.

(ii) Nếu $a_n \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $a \geq 0$ và $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh kết quả 2.1.3.

(i) Giả sử $b < a$. Kí hiệu $\varepsilon = (a - b)/2$. Do $b_n \rightarrow b$ nên tồn tại một số $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_1 \geq n_0$ và $b_n < b + \varepsilon$ với mọi $n \geq n_1$. Nhưng do $b + \varepsilon = (a + b)/2 = a - \varepsilon$ nên chúng ta sẽ có $a_n \leq b_n < a - \varepsilon$ với mọi $n \geq n_1$. Điều này mâu thuẫn với việc $a_n \rightarrow a$. Như vậy, $a \leq b$.

Ngược lại, giả sử $a < b$. Kí hiệu $\varepsilon = (b - a)/2$. Khi đó, tồn tại một số $m_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < a + \varepsilon$ với mọi $n \geq m_1$ và tồn tại một số $m_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $b_n > b - \varepsilon$ với mọi $n \geq m_2$. Kí hiệu $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Do $b - \varepsilon = (a + b)/2 = a + \varepsilon$ nên chúng ta sẽ có $a_n < (a + b)/2 < b_n$ với mọi $n \geq m_0$.

(ii) Khẳng định (i) ngụ ý rằng $a \geq 0$. Giả sử cho trước $k \in \mathbb{N}$ và $\varepsilon > 0$. Do $\varepsilon^k > 0$ nên tồn tại một số $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon^k$ với mọi $n \geq n_2$. Như vậy, từ các bất đẳng thức cơ bản liên quan đến các căn (khẳng định (ii) của Kết quả 1.2.2), chúng ta thu được

$$|a_n^{1/k} - a^{1/k}| \leq |a_n - a|^{1/k} < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_2.$$

Điều này chỉ ra rằng $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$. □

Chúng ta cũng cần lưu ý rằng có thể xảy ra việc $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $a_n < b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nhưng $a = b$. Chẳng hạn, xét $a_n = 0$ và $b_n = 1/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và nhận xét rằng $a = b = 0$.

Với các kí hiệu và giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách kết hợp khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.2) và khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.3), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu $a_n \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $a_n^r \rightarrow a^r$, trong đó r là một số hữu tỉ dương bất kì, bởi vì chúng ta có thể viết $r = m/k$, trong đó $m, k \in \mathbb{N}$. Điều này, cùng với khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.2), cũng cho thấy rằng nếu $a > 0$ thì $a_n^r \rightarrow a^r$, trong đó r là một số hữu tỉ âm bất kì.

Kết quả 2.1.4. (Định lý kẹp)

Giả sử (a_n) , (b_n) , (c_n) là các dãy và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $a_n \leq c_n \leq b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $a_n \rightarrow c$ cũng như $b_n \rightarrow c$.

Khi đó, $c_n \rightarrow c$.

Chứng minh kết quả 2.1.4.

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Do $a_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n - c > -\varepsilon$ với mọi $n \geq n_1$ và do $b_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $b_n - c < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_2$. Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Khi đó,

$$-\varepsilon < a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c < \varepsilon, \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Điều này chỉ ra rằng $c_n \rightarrow c$. □

Bây giờ, chúng ta sẽ sử dụng các kết quả trên để chỉ ra rằng supremum và infimum của một tập con của $\mathbb{R}$ đều là giới hạn của các dãy nào đó trong tập con này.

Kết quả 2.1.5.

Giả sử E là một tập con khác rỗng nào đó của $\mathbb{R}$.

(i) Nếu E là một tập bị chặn trên và $a = \sup E$ thì tồn tại một dãy (a_n) sao cho $a_n \in E$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $a_n \rightarrow a$.

(ii) Nếu E là một tập bị chặn dưới và $b = \inf E$ thì tồn tại một dãy (b_n) sao cho $b_n \in E$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $b_n \rightarrow b$.

Chứng minh kết quả 2.1.5.

Để chứng minh khẳng định (i), giả sử E là một tập bị chặn trên. Kí hiệu $a = \sup E$. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một $a_n \in E$ sao cho $a_n > a - (1/n)$. Do $a_n \leq a$ nên chúng ta nhận thấy rằng $0 \leq a - a_n < (1/n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, từ Định lý kẹp, $a_n \rightarrow a$.

Tính đúng đắn của khẳng định (ii) được chứng minh tương tự. □

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $a \in \mathbb{R}$ với $|a| < 1$.

Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

Nếu $a = 0$ thì điều này là hiển nhiên. Giả sử $a \neq 0$. Kí hiệu $1/|a| = 1 + h$.

Khi đó, $h > 0$ và do đó, từ bất đẳng thức nhị thức nêu trong Kết quả 1.2.3), chúng ta sẽ có

$$\frac{1}{|a|^n} = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Như vậy, $0 < |a|^n < 1/nh$. Từ khẳng định (ii) của 2.1.2) và ví dụ minh họa thứ (iii), $1/nh \rightarrow 0$. Do đó, từ Định lý kẹp, $|a|^n \rightarrow 0$, nên do đó $a^n \rightarrow 0$. Như một hệ quả, chúng ta cũng có thể tìm được giới hạn của dãy (A_n) , trong đó $A_n = 1 + a + \dots + a^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $A_n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = \frac{1}{1 - a}.$$

(ii) Giả sử $a \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Chọn ra một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ sao cho $|a| < m$.

Khi đó, với mọi $n > m$, chúng ta sẽ có

$$0 \leq \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|^m}{m!} \prod_{j=m+1}^n \frac{|a|}{j} < \frac{|a|^m}{m!} \left(\frac{|a|}{m} \right)^{n-m} < \frac{m^m}{m!} \left(\frac{|a|}{m} \right)^{n-m}.$$

Do m là một hằng số và $(|a|/m)^n \rightarrow 0$ nên, từ Định lý kẹp, chúng ta nhận thấy rằng $|a^n/n!| \rightarrow 0$, nghĩa là $a^n/n! \rightarrow 0$.

(iii) Giả sử $a \in \mathbb{R}$ và $a > 0$.

Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.$$

Điều này là hiển nhiên nếu $a = 1$. Giả sử $a > 1$ và $\delta_n = a^{1/n} - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ Định lý hệ số nhị thức,

$$a = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \cdots + \delta_n^n > n\delta_n,$$

nên

$$0 < \delta_n < a/n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Do $a/n \rightarrow 0$ nên, từ Định lý kẹp, chúng ta dễ dàng suy ra $\delta_n \rightarrow 0$, nghĩa là $a^{1/n} \rightarrow 1$. Nếu $0 < a < 1$ thì, bằng cách kí hiệu $b = 1/a$, chúng ta nhận thấy rằng $1/a^{1/n} = b^{1/n} \rightarrow 1$, bởi vì $b > 1$. Như vậy, từ khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.2), $a^{1/n} \rightarrow 1/1 = 1$.

(iv) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu

$$C_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

Khi đó, $C_n \rightarrow 1$.

Để chứng minh điều này, kí hiệu

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \frac{n^2}{n^2 + n},$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, $A_n \leq C_n \leq B_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, từ Kết quả 2.1.2),

$$A_n = \frac{1}{1 + (1/n)} \rightarrow 1,$$

$$B_n = \frac{1}{1 + (1/n^2)} \rightarrow 1.$$

Như vậy, từ Định lí kẹp, $C_n \rightarrow 1$.

Chúng ta đã thấy trong khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.2) là mọi dãy hội tụ đều bị chặn. Mặt khác, không phải mọi dãy bị chặn đều hội tụ, như được chỉ ra trong ví dụ $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét một lớp các dãy mà sự hội tụ là tương đương với tính bị chặn.

Một dãy (a_n) được gọi là **(đơn điệu) tăng** nếu hàm tương ứng $n \mapsto a_n$ là (đơn điệu) tăng, nghĩa là nếu $a_n \leq a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tương tự, nó sẽ được gọi là **(đơn điệu) giảm** nếu hàm tương ứng là (đơn điệu) giảm, nghĩa là nếu $a_n \geq a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Một dãy được gọi là **đơn điệu** nó là đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm.

Kết quả 2.1.6.

(i) Một dãy đơn điệu tăng sẽ hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn trên. Hơn nữa, nếu một dãy (a_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Một dãy đơn điệu giảm sẽ hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn dưới. Hơn nữa, nếu một dãy (a_n) đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Chứng minh kết quả 2.1.6.

(i) Giả sử (a_n) là một dãy đơn điệu tăng. Giả sử nó bị chặn trên. Khi đó, tập $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ có một supremum. Kí hiệu $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Nhưng do (a_n) là đơn điệu tăng nên chúng ta sẽ có $a_{n_0} \leq a_n$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó,

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Như vậy, $a_n \rightarrow a$. Ngược lại, nếu (a_n) hội tụ thì nó sẽ bị chặn trên bởi khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.2).

(ii) Phép chứng minh cho khẳng định này cũng được thực hiện tương tự như trên. Ngoài ra, chúng ta cũng có thể quan sát thấy rằng nếu (a_n) là đơn điệu giảm và nếu chúng ta đặt $b_n = -a_n$ thì (b_n) là đơn điệu tăng. Hơn nữa, (a_n) sẽ bị chặn dưới khi và chỉ khi (b_n) bị chặn trên và, trong trường hợp này,

$\inf\{a_n: n \in \mathbb{N}\} = -\sup\{b_n: n \in \mathbb{N}\}$. Hơn nữa, từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.2), $a_n \rightarrow a$ khi và chỉ khi $-a_n \rightarrow -a$. Như vậy, tính đúng đắn của kết quả mong muốn được suy ra từ khẳng định (i) nêu ở trên. $\square$

Kết quả 2.1.7.

Một dãy đơn điệu sẽ hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn.

Chứng minh kết quả 2.1.7.

Tính đúng đắn của khẳng định nêu trên được suy ra từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.1.6). $\square$

Chẳng hạn,

(i) Xét dãy (A_n) xác định bởi

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng, (A_n) là một dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra, với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

Như vậy, (A_n) bị chặn trên. Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.6), (a_n) sẽ hội tụ.

(ii) Xét dãy (B_n) xác định bởi

$$B_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng (B_n) là hội tụ và giới hạn của nó sẽ bằng với giới hạn của dãy (A_n) xét trong (i) ở trên. Từ Định lý nhị thức, chúng ta sẽ có

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}.$$

Điều này chỉ ra rằng $B_n \leq A_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Để tìm ra một chặn dưới cho B_n theo A_n , chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức nhị thức tổng quát được đưa ra trong Kết quả 1.2.3) và nhận thấy rằng, với $k = 1, \dots, n$,

$$(1 - 0) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \left(0 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{k-1}{n}\right).$$

Bây giờ, do $0 + 1 + 2 + \cdots + (k-1) = (k-1)k/2$ nên chúng ta nhận thấy rằng

$$1 - \frac{(k-1)k}{2n} \leq \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}, \text{ với } k = 0, 1, \dots, n.$$

Bằng cách chia cả hai vế cho $k!$ và lấy tổng từ $k = 0$ đến $k = n$, chúng ta nhận thấy rằng

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \leq B_n.$$

Hơn nữa, từ (i) nêu ở trên,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \leq A_n < 3,$$

nên

$$A_n - \frac{3}{2n} < B_n \leq A_n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Như vậy, từ Định lý kẹp, (B_n) hội tụ và giới hạn của nó bằng với giới hạn của (A_n) .

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể lập luận như sau.

Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$ và $A_n \rightarrow A$.

Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $A - (\varepsilon/2) < a_n$ với mọi $n \geq n_0$. Đặc biệt, $A - \frac{\varepsilon}{2} < A_{n_0}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu

$$C_n = \sum_{k=0}^{n_0} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}.$$

Khi đó, $C_n \leq B_n$ với mọi $n \geq n_0$.

Từ các khẳng định (i) và (iii) của Kết quả 2.1.2),

$$C_n \rightarrow \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} = A_{n_0} \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Như vậy, tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$A_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < C_n \text{ với mọi } n \geq n_1.$$

Bây giờ, với mọi $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, chúng ta nhận thấy rằng

$$A - \varepsilon < A_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < C_n \leq B_n \leq A_n \leq A < A + \varepsilon.$$

Điều này chỉ ra rằng $B_n \rightarrow A$. Giá trị giới hạn chung này của các dãy (A_n) và (B_n) là một số thực quan trọng. Số thực này thường được kí hiệu là e .

(iii) Xét dãy (A_n) xác định bởi

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng, (A_n) là một dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} A_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Do đó, không tồn tại bất kì một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ nào sao cho $A_n \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, nghĩa là (A_n) không bị chặn trên. Như vậy, (A_n) không hội tụ.

Chúng ta hãy sửa đổi lại dãy (A_n) bằng cách đổi dấu các tổng thay thế của các số hạng của nó và định nghĩa

$$B_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng (B_n) hội tụ. Đầu tiên, lưu ý rằng $\frac{1}{2} \leq B_n \leq 1$. Kí hiệu $C_n = B_{2n-1}$ và $D_n = B_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có

$$C_{n+1} - C_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leq 0 \text{ và } D_{n+1} - D_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0.$$

Như vậy, (C_n) là một dãy đơn điệu giảm bị chặn dưới bởi $\frac{1}{2}$ và (D_n) là một dãy đơn điệu tăng bị chặn trên bởi 1. Từ Kết quả 2.1.6), cả (C_n) và (D_n) đều hội tụ. Giả sử $C_n \rightarrow C$ và $D_n \rightarrow D$. Bây giờ, do $D_n - C_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ nên chúng ta sẽ phải có $D = C$. Điều này chỉ ra rằng (B_n) hội tụ và $B_n \rightarrow C$.

(iv) Xét dãy (A_n) xác định bởi

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng, (A_n) là một dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra, với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &\leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{1}{n}$$

$$< 2.$$

Do đó, (A_n) bị chặn trên. Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.6), (A_n) hội tụ.

(v) Giả sử p là một số hữu tỉ và xét dãy (A_n) xác định bởi

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng, (A_n) là một dãy đơn điệu tăng. Chúng ta đã thấy trong (iii) và (iv) ở trên nếu $p = 1$ thì dãy (A_n) là phân kỳ, ngược lại nếu $p = 2$ thì nó là hội tụ. Điều này ngụ ý rằng (A_n) phân kỳ nếu $p \leq 1$ và nó là hội tụ nếu $p \geq 2$, bởi vì với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \text{ nếu } p \leq 1, \text{ trong khi } 0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \text{ nếu } p \geq 2.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ đưa ra một lập luận thay thế chứng tỏ rằng (A_n) hội tụ nếu $p > 1$. Giả sử $p > 1$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right) + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^p} \right) \\ &< 1 + 2 \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^p} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \right) \\ &= 1 + 2^{1-p} A_n \\ &< 1 + 2^{1-p} A_{2n+1}. \end{aligned}$$

Do $2^{1-p} < 1$ nên chúng ta nhận thấy rằng $A_{2n+1} < 1/(1 - 2^{p-1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, do $A_{2n} < A_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên (A_n) sẽ bị chặn trên. Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.6), chúng ta thấy rằng (A_n) là hội tụ.

(vi) Xét một dãy số được xác định bởi một hệ thức truy hồi tuyến tính, nghĩa là giả sử $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ và (a_n) được xác định bởi

$$a_1 = \alpha \text{ và } a_{n+1} = \beta a_n + \gamma \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Giả sử α, β, γ là các số thực không âm và $\beta < 1$.

Khi đó, mỗi a_n đều không âm và

$$a_2 - a_1 = \beta a_1 + \gamma - a_1 = \gamma - (1 - \beta)\alpha,$$

trong khi, với $n > 1$,

$$a_{n+1} - a_n = \beta a_n + \gamma - (\beta a_{n-1} + \gamma) = \beta(a_n - a_{n-1}).$$

Như một hệ quả, với mọi $n > 1$,

$$a_{n+1} - a_n = \beta^{n-1}(a_2 - a_1) = \beta^{n-1}[\gamma - (1 - \beta)\alpha].$$

Như vậy, nếu $\gamma \leq (1 - \beta)\alpha$ thì chúng ta (a_n) là một dãy đơn điệu giảm bị chặn dưới bởi 0. Bây giờ, giả sử rằng $\gamma > (1 - \beta)\alpha$. Khi đó, (a_n) là một dãy đơn điệu tăng. Hơn nữa, $a_1 = \alpha < \gamma/(1 - \beta)$ và, với $n > 1$,

$$a_n \leq \frac{\gamma}{1 - \beta} \Rightarrow a_{n+1} = \beta a_n + \gamma \leq \frac{\beta\gamma}{1 - \beta} + \gamma = \frac{\gamma}{1 - \beta}.$$

Nhận thấy rằng, trong trường hợp này, (a_n) là bị chặn trên bởi $\gamma/(1 - \beta)$. Như vậy, trong mọi trường hợp, Kết quả 2.1.6) chứng tỏ rằng (a_n) hội tụ. Giả sử $a_n \rightarrow a$. Khi đó, $a_{n+1} \rightarrow a$ và do $a_{n+1} = \beta a_n + \gamma \rightarrow \beta a + \gamma$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $a = \beta a + \gamma$, nghĩa là $a = \gamma/(1 - \beta)$.

Nhận xét 1.

Chúng ta sẽ giới thiệu một số kí hiệu để so sánh bậc độ lớn của hai dãy (a_n) và (b_n) .

Nếu tồn tại một số thực $K > 0$ và một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n| \leq K|b_n|$ với mọi $n \geq n_0$ thì chúng ta sẽ viết $a_n = O(b_n)$ và chúng ta sẽ nói rằng **(a_n) là một đại lượng vô cùng lớn của (b_n)** . Đặc biệt, nếu $b_n = 1$ với mọi n lớn thì $a_n = O(1)$ và điều này có nghĩa là dãy (a_n) bị chặn. Nói rộng ra, $a_n = O(b_n)$ nếu bậc độ lớn của (a_n) tối đa không vượt quá bậc độ lớn của (b_n) . Trong trường hợp (a_n) và (b_n) là các dãy đơn điệu tăng và $a_n = O(b_n)$, chúng ta sẽ nói rằng **tốc độ tăng trưởng của (a_n) tối đa không vượt quá tốc độ tăng trưởng của (b_n)** .

Chẳng hạn,

$$(-1)^n 10n + 100 = O(n) \text{ và } (-1)^n \frac{10}{n} + \frac{100}{n\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nếu, với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n| \leq \varepsilon|b_n|$ với mọi $n \geq n_0$ thì chúng ta sẽ viết $a_n = o(b_n)$ và chúng ta sẽ nói rằng **(a_n) là một đại lượng vô cùng bé của (b_n)** . Nếu $b_n \neq 0$ với mọi n lớn thì $a_n = o(b_n)$ có nghĩa là $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 0$ tồn tại và bằng không. Đặc biệt, nếu $b_n = 1$ với mọi n lớn thì $a_n = o(1)$ và điều này có nghĩa là $a_n \rightarrow 0$. Nói rộng ra, $a_n = o(b_n)$ nếu bậc độ lớn của (a_n) nhỏ hơn bậc độ lớn của (b_n) . Trong trường hợp (a_n) và (b_n) là các dãy đơn điệu tăng và $a_n = o(b_n)$, chúng ta sẽ nói rằng **tốc độ tăng trưởng của (a_n) nhỏ hơn tốc độ tăng trưởng của (b_n)** .

Chẳng hạn,

$$10n + 100 = o(n\sqrt{n}) \text{ và } (-1)^n \frac{10}{n} + \frac{100}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Giả sử tồn tại một số thực khác không $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau: Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - lb_n| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết $a_n \sim b_n$ và chúng ta sẽ nói rằng (a_n) **là tiệm cận với** (b_n) . Nói rộng ra, $a_n \sim b_n$ nếu (a_n) có cùng độ lớn với (b_n) . Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các dãy số thực. Nếu $b_n \neq 0$ với mọi n lớn thì $a_n \sim b_n$ có nghĩa là $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ tồn tại và khác không. Nếu (a_n) và (b_n) là các dãy đơn điệu tăng và $a_n \sim b_n$ thì chúng ta cũng sẽ nói rằng (a_n) và (b_n) có cùng tốc độ tăng trưởng.

Chẳng hạn,

$$10n^2 + 100n + 1000 \sim n^2 \text{ và } \frac{10}{n^2} + \frac{100}{n^3} + \frac{1000}{n^4} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Các kí hiệu được giới thiệu ở trên rất hữu ích trong việc tìm hiểu hành vi tiệm cận tương đối của hai dãy.

Nhận xét 2.

Trước khi kết thúc phần này của bài viết, chúng ta sẽ mô tả cách thức để trong một số trường hợp chúng ta có thể coi ∞ hoặc $-\infty$ là “giới hạn” của một dãy (a_n) . Chúng ta sẽ nói rằng (a_n) có **xu hướng tiến tới** ∞ hoặc **hội tụ tới** ∞ nếu, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n > \alpha$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, chúng ta sẽ viết $a_n \rightarrow \infty$. Chúng ta sẽ viết $a_n \nrightarrow \infty$ nếu (a_n) không có xu hướng tiến tới ∞ . Tương tự, chúng ta cũng sẽ nói rằng (a_n) có **xu hướng tiến tới** $-\infty$ hoặc **hội tụ tới** $-\infty$ nếu, với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < \beta$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, chúng ta sẽ viết $a_n \rightarrow -\infty$. Chúng ta sẽ viết $a_n \nrightarrow -\infty$ nếu (a_n) không có xu hướng tiến tới $-\infty$.

Nếu $a_n \rightarrow \infty$ và $b_n \rightarrow l$, trong đó $l \in \mathbb{R}$, thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $a_n + b_n \rightarrow \infty$, $a_n b_n \rightarrow \infty$ với điều kiện $l > 0$, $a_n b_n \rightarrow -\infty$ với điều kiện $l < 0$, trong khi nếu $l = 0$ thì chúng ta không thể nói gì về sự hội tụ của $(a_n b_n)$, chẳng hạn như các ví dụ (i) $a_n = n$ và $b_n = 0$, (ii) $a_n = n$ và $b_n = 1/n$, (iii) $a_n = n$ và $b_n = 1/\sqrt{n}$, (iv) $a_n = n$ và $b_n = -1/\sqrt{n}$, (v) $a_n = n$ và $b_n = (-1)^n/n$. Hơn nữa, nếu $a_n \rightarrow \infty$ và $b_n \rightarrow \infty$ thì $a_n + b_n \rightarrow \infty$ và $a_n b_n \rightarrow \infty$. Các kết luận tương tự cũng đúng nếu $a_n \rightarrow -\infty$ và $b_n \rightarrow -\infty$. Mặt khác, nếu $a_n \rightarrow \infty$ và $b_n \rightarrow -\infty$ thì chúng ta không thể nói gì về sự hội tụ của $a_n + b_n$, chẳng hạn như các ví dụ (i) $a_n = n$ và $b_n = -n$, (ii) $a_n = n$ và $b_n = -n + 1$, (iii) $a_n = n$ và $b_n = -\sqrt{n}$, (iv) $a_n = n$ và $b_n = -n^2$, (v) $a_n = n$ và $b_n = -n + (-1)^n$.

Nếu $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì rõ ràng $a_n \rightarrow \infty$ khi và chỉ khi $1/a_n \rightarrow 0$. Ngoài ra, nếu (a_n) là đơn điệu tăng thì dễ dàng nhận thấy rằng $a_n \rightarrow \infty$ khi và chỉ khi (a_n) không bị chặn trên. Tương tự, nếu $a_n < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $a_n \rightarrow -\infty$ khi và chỉ khi $1/a_n \rightarrow 0$. Ngoài ra, nếu (a_n) là đơn điệu giảm thì $a_n \rightarrow -\infty$ khi và chỉ khi (a_n) không bị chặn dưới.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử p là một số hữu tỉ dương và $a_n = n^p$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, $a_n \rightarrow \infty$. Thật vậy, với mọi số thực $\alpha \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có $a_n > \alpha$ nếu $n > [|\alpha|^{1/p}]$.

(ii) Giả sử $a_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$.

Khi đó, $a_n \rightarrow \infty$, bởi vì (a_n) là đơn điệu tăng và (a_n) không bị chặn trên.

(iii) Giả sử $a \in \mathbb{R}$ sao cho $|a| > 1$ và kí hiệu $a_n = a^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu $a > 1$ thì $1/a_n = (1/a)^n \rightarrow 0$, nên $a_n \rightarrow \infty$. Nếu $a < -1$ thì, bằng cách xét $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và lưu ý rằng $b_n = (a^2)^n/a \rightarrow -\infty$, $c_n = (a^2)^n \rightarrow \infty$, nên $a_n \nrightarrow \infty$, $a_n \nrightarrow -\infty$.

2.2. Các dãy con và các dãy Cauchy

Giả sử (a_n) là một dãy số. Nếu $n_1, n_2, \dots$ là các số nguyên dương sao cho $n_k < n_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ thì dãy (a_{n_k}) , với các số hạng là $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$, được gọi là một **dãy con** của (a_n) . Lưu ý rằng $n_1 < n_2 < \dots$ ngụ ý rằng $n_k \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$.

Dễ dàng nhận thấy rằng một dãy (a_n) hội tụ tới a khi và chỉ khi mọi dãy con của (a_n) đều hội tụ tới a . Điều này suy ra ngay sau khi quan sát thấy rằng bản thân (a_n) là một dãy con của (a_n) (nếu chúng ta chọn $n_k = k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$). Mặt khác, nếu (a_{n_k}) là một dãy con của (a_n) thì, với mọi $n_0 \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_k \geq n_0$ với mọi $k \geq k_0$.

Tương tự, chúng ta có thể thấy rằng một dãy (a_n) sẽ có xu hướng tiến tới ∞ khi và chỉ khi mọi dãy con của (a_n) đều có xu hướng tiến tới ∞ cũng như (a_n) sẽ có xu hướng tiến tới $-\infty$ khi và chỉ khi mọi dãy con của (a_n) đều có xu hướng tiến tới $-\infty$.

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh một sự thật đáng chú ý về các dãy con đơn điệu.

Kết quả 2.2.1.

Mọi dãy trong $\mathbb{R}$ đều có chứa một dãy con đơn điệu.

Chứng minh kết quả 2.2.1.

Giả sử (a_n) là một dãy trong $\mathbb{R}$. Xét các “đỉnh” trong (a_n) , nghĩa là những số hạng lớn hơn tất cả những số hạng kế tiếp. Kí hiệu E là tập tất cả các số nguyên dương n mà a_n là một “đỉnh”, nghĩa là

$$E = \{n \in \mathbb{N} : a_n > a_m \text{ với mọi } m > n\}.$$

Đầu tiên, giả sử E là một tập hữu hạn. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_1 > n$ với mọi $n \in E$. Do $n_1 \notin E$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_2 > n_1$ và $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Một lần nữa, do $n_2 \notin E$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_3 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_3 > n_2$ và $a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Giả sử đã chọn được n_k cho $k \in \mathbb{N}$ theo cách này, chúng ta lưu ý rằng $n_k \notin E$ và do đó sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ sao cho $n_{k+1} > n_k$ và $a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$. Như vậy, chúng ta sẽ thu được một dãy con đơn điệu tăng (a_{n_k}) của (a_n) .

Kế tiếp, giả sử E là một tập vô hạn. Nếu chúng ta liệt kê E là $n_1, n_2, \dots$, trong đó $n_1 < n_2 < \dots$ thì do $n_k \in E$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ nên chúng ta sẽ có $a_{n_k} > a_m$ với mọi $m > n_k$. Đặc biệt, bằng cách chọn $m = n_{k+1}$, chúng ta sẽ nhận được $a_{n_k} > a_{n_{k+1}}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Như vậy, chúng ta sẽ thu được một dãy con đơn điệu giảm (a_{n_k}) của (a_n) .

Trong mọi trường hợp, chúng ta đã chứng minh được rằng (a_n) luôn có chứa một dãy con đơn điệu. $\square$

Chúng ta sẽ sử dụng kết quả trên để chứng minh hai kết quả quan trọng trong giải tích, được gọi là Định lý Bolzano – Weierstrass và Điều kiện Cauchy. Để hiểu rõ kết quả thứ nhất, lưu ý rằng mọi dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ đều bị chặn (khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.6), nhưng một dãy bị chặn không nhất thiết phải hội tụ.

Kết quả 2.2.2. (Bolzano – Weierstrass)

Mọi dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ đều có chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh kết quả 2.2.2.

Giả sử (a_n) là một dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$. Từ Kết quả 2.2.1), (a_n) có chứa một dãy con đơn điệu (a_{n_k}) nào đó. Do (a_n) bị chặn nên dãy con (a_{n_k}) của nó cũng vậy. Như vậy, từ Kết quả 2.1.7), (a_{n_k}) sẽ là một dãy hội tụ. $\square$

Kết quả sau đây có thể được xem như một phiên bản phức tạp hơn của Định lý Bolzano – Weierstrass.

Kết quả 2.2.3.

Giả sử (a_n) là một dãy nào đó trong $\mathbb{R}$.

Khi đó, nếu (a_n) bị chặn trên và $a_n \nrightarrow -\infty$ hoặc (a_n) bị chặn dưới và $a_n \nrightarrow \infty$ thì (a_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh kết quả 2.2.3.

Đầu tiên, giả sử (a_n) bị chặn trên và $a_n \nrightarrow -\infty$. Khẳng định $a_n \nrightarrow -\infty$ có nghĩa là tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho, với mỗi $n_0 \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ với $n > n_0$ và $a_n \geq \beta$. Do đó, chúng ta sẽ có các số tự nhiên $n_1 < n_2 < \dots$ trong $\mathbb{N}$ sao cho $a_{n_k} \geq \beta$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$. Dãy con (a_{n_k}) trong $\mathbb{R}$ vì vậy sẽ bị chặn trên cũng như bị chặn dưới. Như vậy, từ Định lý Bolzano – Weierstrass, (a_{n_k}) sẽ có chứa một dãy con hội tụ nào đó. Cuối cùng, chúng ta cần lưu ý rằng một dãy con của (a_{n_k}) cũng sẽ là một dãy con của chính (a_n) .

Nếu (a_n) bị chặn dưới và $a_n \nrightarrow \infty$ thì phép chứng minh cũng được thực hiện theo cách tương tự. $\square$

Như một hệ quả của Định lý Bolzano – Weierstrass, chúng ta sẽ thu được một đặc trưng rất hữu ích của các dãy hội tụ như sau.

Kết quả 2.2.4.

Một dãy trong $\mathbb{R}$ là hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn và mọi dãy con hội tụ của nó đều có cùng một giới hạn.

Chứng minh kết quả 2.2.4.

Nếu một dãy (a_n) hội tụ đến a thì nó sẽ bị chặn (điều này suy ra từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.5) và rõ ràng mọi dãy con hội tụ của (a_n) đều hội tụ đến a .

Ngược lại, giả sử (a_n) là một dãy bị chặn và tồn tại một số thực $a \in \mathbb{R}$ sao cho mọi dãy con hội tụ của (a_n) đều hội tụ đến a . Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $a_n \rightarrow a$. Mặt khác, tồn tại một số thực dương $\varepsilon > 0$ và các số nguyên dương $n_1 < n_2 < \dots$ sao cho $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Từ Định lý Bolzano – Weierstrass, dãy bị chặn (a_{n_k}) sẽ có chứa một dãy con hội tụ, không thể hội tụ về a . Đây là một điều mâu thuẫn. $\square$

Nói chung, việc chứng minh sự hội tụ của một dãy (a_n) khá là khó bởi vì trước đó chúng ta phải dự đoán đúng giới hạn của (a_n) trước. Có một cách khá đơn giản để chúng ta có thể tránh việc phỏng đoán này, mà chúng ta sẽ trình bày ngay sau đây.

Một dãy (a_n) trong $\mathbb{R}$ được gọi là một **dãy Cauchy** nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Rõ ràng là nếu (a_n) là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ thì $(a_{n+1} - a_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Tuy nhiên, điều ngược lại lại không xảy ra. Chẳng hạn, nếu $a_n = \sqrt{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

nhưng (a_n) không phải là một dãy Cauchy, bởi vì, với mọi số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$, chúng ta có

$$a_{4n_0} - a_{n_0} = \sqrt{4n_0} - \sqrt{n_0} = \sqrt{n_0} \geq 1.$$

Kết quả sau đây đưa ra một điều kiện đủ hữu ích để một dãy là Cauchy.

Kết quả 2.2.5.

Giả sử (a_n) là một dãy các số thực và α là một số thực sao cho $\alpha < 1$ và

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}| \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ với } n \geq 2.$$

Khi đó, (a_n) là một dãy Cauchy.

Chứng minh kết quả 2.2.5.

Nhận thấy rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}| \leq \alpha^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \alpha^{n-1} |a_2 - a_1|.$$

Như vậy, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ với $m > n$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |a_2 - a_1| (\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \dots + \alpha^{n-1}) \\ &= |a_2 - a_1| \alpha^{n-1} \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

$$\leq |a_2 - a_1| \alpha^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Nhận thấy rằng nếu $a_2 = a_1$ thì rõ ràng là $a_n = a_1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và (a_n) là một dãy Cauchy. Giả sử $a_2 \neq a_1$ và giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Do $\alpha < 1$ nên chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $\alpha^n \rightarrow 0$.

Như vậy, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\alpha^{n-1} < \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{|a_2 - a_1|} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ với } n \geq n_0.$$

Điều này suy ra rằng $|a_m - a_n| < \varepsilon$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ với $m, n \geq n_0$. Như vậy, (a_n) là một dãy Cauchy. □

Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng điều kiện

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}| \text{ với một số } \alpha < 1 \text{ nào đó}$$

trong mệnh đề trên không thể suy yếu thành $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$.

Chẳng hạn, nếu $a_n = \sqrt{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = |a_n - a_{n-1}|,$$

nhưng, như chúng ta vừa thấy, dãy (a_n) không phải là một dãy Cauchy.

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để tuyên bố và chứng minh Điều kiện Cauchy, điều này đã được ám chỉ trước đó. Tóm lại, nó nói rằng, trong $\mathbb{R}$, các khái niệm về dãy hội tụ và dãy Cauchy là tương đương với nhau.

Kết quả 2.2.6. (Điều kiện Cauchy cho giới hạn của các dãy)

Một dãy (a_n) trong $\mathbb{R}$ là hội tụ khi và chỉ khi nó là một dãy Cauchy.

Chứng minh kết quả 2.2.6.

Giả sử (a_n) là một dãy hội tụ và $a_n \rightarrow a$. Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon/2$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Như vậy, (a_n) là một dãy Cauchy.

Ngược lại, giả sử (a_n) là một dãy Cauchy. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng (a_n) là một dãy bị chặn. Do (a_n) là Cauchy nên tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a_m| < 1 \text{ với mọi } n, m \geq n_1.$$

Như vậy,

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| < 1 + |a_{n_1}| \text{ với mọi } n \geq n_1.$$

Nếu chúng ta đặt $\alpha = \{|a_1|, \dots, |a_{n_1-1}|, 1 + |a_{n_1}|\}$ thì chúng ta sẽ có $|a_n| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, (a_n) là một dãy bị chặn.

Kế tiếp, từ Định lý Bolzano – Weierstrass, (a_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ (a_{n_k}) . Giả sử $a_{n_k} \rightarrow a$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, trên thực tế, $a_n \rightarrow a$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Do (a_n) là Cauchy nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Ngoài ra, do $a_{n_k} \rightarrow a$ nên tồn tại một số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } k \geq k_0.$$

Hơn nữa, do $n_1 < n_2 < \dots$ nên tồn tại một số tự nhiên $j \in \mathbb{N}$ sao cho $j \geq k_0$ và $n_j \geq n_0$.

Bây giờ,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Như vậy, (a_n) là một dãy hội tụ. □

Ví dụ sau đây cho chúng ta thấy sử dụng Điều kiện Cauchy để chứng minh sự hội tụ của một dãy.

Chẳng hạn, xét dãy (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng (a_n) là một dãy Cauchy. Rõ ràng là $a_n \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và do đó

$$a_n a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) a_{n-1} = a_{n-1} + 1 \geq 2 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ với } n \geq 2.$$

Do

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n a_{n-1}},$$

nên chúng ta nhận thấy rằng

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}| \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Do đó, từ Kết quả 2.2.5), (a_n) là một dãy Cauchy và, từ Kết quả 2.2.6, nó là một dãy hội tụ. Giả sử $a_n \rightarrow a$. Khi đó, $a_{n+1} \rightarrow a$ và do $a_{n+1} = 1 + (1/a_n)$ nên chúng ta sẽ có $a = 1 + (1/a)$. Ngoài ra, $a_n \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ ngụ ý rằng $a \geq 1$. Như vậy, $a = (1 + \sqrt{5})/2$.

Chúng ta có thể lưu ý rằng (a_n) không phải là một dãy đơn điệu. Trên thực tế, với mọi $n \in \mathbb{N}$ với $n \geq 2$, chúng ta sẽ có $a_n \leq a_{n+1}$ khi và chỉ khi $a_{n-1} \geq a_n$. Như vậy, chúng ta sẽ không thể dùng Kết quả 2.1.7) để suy ra sự hội tụ của (a_n) .

Chúng ta nhận xét rằng Tính đầy đủ của $\mathbb{R}$ được sử dụng chủ yếu (thông qua Kết quả 2.1.7 và Định lý Bolzano – Weierstrass) để chứng minh mọi dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ đều hội tụ. Ngược lại, giả sử mọi dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ đều hội tụ, chúng ta cũng có thể thiết lập được Tính đầy đủ của $\mathbb{R}$. Theo quan điểm này, Kết quả trong Kết quả 2.2.6) đôi khi còn được gọi là **Tính đầy đủ Cauchy của $\mathbb{R}$** .

3. Tính liên tục của hàm một biến

Trong mục trước của bài viết chúng ta đã nghiên cứu các dãy thực, nghĩa là các hàm giá trị thực xác định trên tập con $\mathbb{N}$ của $\mathbb{R}$. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ xét các hàm giá trị thực có tập xác định là các tập con tùy ý của $\mathbb{R}$. Câu hỏi cơ bản mà chúng ta phải giải quyết là: “Giả sử cho trước $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Nếu một số thực x trong D ở gần c thì liệu có phải luôn tồn tại một số thực l sao cho $f(x)$ ở gần l ?”. Để trả lời cho câu hỏi này và các câu hỏi liên quan, chúng ta sẽ cần phát triển các khái niệm về tính liên tục của một hàm số và giới hạn của một hàm số.

Trong mục **3.1. Tính liên tục của các hàm số** dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm về tính liên tục và rút ra một số kết quả cơ bản có liên quan. Kế tiếp, trong mục **3.2. Tính chất cơ bản của các hàm liên tục**, chúng ta sẽ xem xét khái niệm này trong mối quan hệ với các tính chất khác nhau của các hàm đã được giới thiệu trong mục **1.3. Hàm số và các tính chất hình học của nó**. Một số tính chất quan trọng của các hàm liên tục giá trị thực xác định trên một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ hoặc trên một khoảng bất kì sẽ có một tầm quan trọng cơ bản trong sự phát triển tiếp theo của chúng ta về tính toán và giải tích. Khái niệm cơ bản về giới hạn của các hàm số sẽ được thảo luận trong mục **3.3. Giới hạn của các hàm thực một biến**. Các xử lý của tất cả những điều này đều dựa trên khái niệm về sự hội tụ của các dãy và các kết quả đã được chứng minh trong mục **2. Khái niệm về các dãy số**.

3.1. Tính liên tục của các hàm số

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$. Xét một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và một điểm $c \in D$. Chúng ta sẽ nói rằng f là **liên tục tại c** nếu

$$(x_n) \text{ là một dãy bất kì nào đó trong } D \text{ và } x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c).$$

Nếu f không liên tục tại c thì chúng ta sẽ nói rằng f là **gián đoạn tại c** . Trong trường hợp f liên tục tại mọi điểm $c \in D$, chúng ta sẽ nói rằng f là **liên tục trên D** .

Chẳng hạn,

(i) Giả sử a và b là các số thực và $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = ax + b$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, f liên tục trên $\mathbb{R}$. Để nhận thấy điều này, chúng ta hãy đặt $c \in \mathbb{R}$ và (x_n) là bất kì một dãy nào trong $\mathbb{R}$ sao cho $x_n \rightarrow c$. Từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 2.1.2), $ax_n + b \rightarrow ac + b$, nghĩa là $f(x_n) \rightarrow f(c)$.

Như vậy, f liên tục trên $\mathbb{R}$.

(ii) Giả sử $f(x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Một lần nữa, f liên tục trên $\mathbb{R}$. Điều này sẽ được suy ra ngay khi chúng ta lưu ý rằng bất cứ khi nào $c \in \mathbb{R}$ và $x_n \rightarrow c$, chúng ta sẽ luôn có $|x_n| \rightarrow |c|$, bởi vì $||x_n| - |c|| \leq |x_n - c|$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ theo khẳng định (ii) của Kết quả 1.2.1).

(iii) Giả sử $f(x) = [x]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $c \in \mathbb{N}$ thì f sẽ không liên tục tại c , bởi vì $f(c) = c$, $c - (1/n) \rightarrow c$ và $f(c - (1/n)) = c - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $f(c - (1/n)) \nrightarrow f(c)$. Mặt khác, nếu $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ thì f sẽ liên tục tại c . Để nhận thấy điều này, chúng ta hãy đặt $\varepsilon = \min\{c - [c], [c] + 1 - c\}$. Khi đó, $\varepsilon > 0$ và do $x_n \rightarrow c$ nên sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \varepsilon$, nghĩa là $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$, và do đó $[c] < x_n < [c] + 1$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n) = [x_n] = [c]$ với mọi $n \geq n_0$.

Như vậy, $f(x_n) \rightarrow f(c)$.

(iv) Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là một số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là một số vô tỉ,} \end{cases}$$

Khi đó, f không liên tục tại mọi điểm $c \in \mathbb{R}$. Để nhận thấy điều này, chúng ta lưu ý rằng nếu c là một số hữu tỉ và $x_n = c + (\sqrt{2}/n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì mỗi x_n đều là một số vô tỉ và do đó $f(x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong khi $f(c) = 1$. Mặt khác, nếu c là một số vô tỉ và $x_n = ([nc] + 1)/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $c < x_n < c + (1/n)$, mỗi x_n đều là một số hữu tỉ và do đó $f(x_n) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong khi $f(c) = 0$.

Như vậy, trong cả hai trường hợp, $x_n \rightarrow c$, nhưng $f(x_n) \nrightarrow f(c)$. Hàm số này được gọi là **hàm Dirichlet**.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh một kết quả hữu ích liên quan đến dấu của các giá trị của một hàm số liên tục tại một điểm.

Kết quả 3.1.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục tại c .

Khi đó, nếu $f(c) > 0$ thì tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) > 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$. Tương tự, nếu $f(c) < 0$ thì tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) < 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$.

Chứng minh kết quả 3.1.1.

Giả sử $f(c) > 0$. Giả sử, với mọi $\delta > 0$, tồn tại một $x \in D$ sao cho $|x - c| < \delta$ và $f(x) \leq 0$. Bằng cách cho δ nhận các giá trị $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, chúng ta sẽ thu được các $c_n \in D$ sao cho $|c_n - c| < 1/n$ và $f(c_n) \leq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $c_n \rightarrow c$ và f liên tục tại c nên chúng ta sẽ có $f(c_n) \rightarrow f(c)$. Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3, chúng ta sẽ có $f(c) \leq 0$. Nhưng điều này sẽ mâu thuẫn với giả định của chúng ta cho rằng $f(c) > 0$. Như vậy, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) > 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$.

Phương pháp chứng minh cho trường hợp $f(c) < 0$ cũng được thực hiện tương tự như trên. □

Kết quả 3.1.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ và $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục tại c .

Khi đó,

(i) $f + g$ liên tục tại c ,

(ii) rf liên tục tại c với mọi $r \in \mathbb{R}$,

(iii) fg liên tục tại c ,

(iv) nếu $f(c) \neq 0$ thì sẽ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) \neq 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$; hơn nữa, hàm $1/f: D \cap (c - \delta, c + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại c ,

(v) nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$ thì, với mọi $k \in \mathbb{N}$, hàm $f^{1/k}: D \cap (c - \delta, c + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại c .

Chứng minh kết quả 3.1.2.

Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Khi đó, $f(x_n) \rightarrow f(c)$ và $g(x_n) \rightarrow g(c)$.

Từ các khẳng định (i), (ii), (iii) của Kết quả 2.1.2), chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(c) + g(c) = (f + g)(c),$$

$$(rf)(x_n) = rf(x_n) \rightarrow rf(c) = (rf)(c) \text{ với mọi } r \in \mathbb{R},$$

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(c)g(c) = (fg)(c).$$

Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của các khẳng định (i), (ii), (iii).

Kế tiếp, giả sử rằng $f(c) \neq 0$. Khi đó, $f(c) > 0$ hoặc $f(c) < 0$. Từ Kết quả 3.1.2), tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) \neq 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$. Bây giờ, do $x_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$ và như vậy $f(x_n) \neq 0$.

Từ khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.2), chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x_n) = \frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{f(c)} = \left(\frac{1}{f}\right)(c).$$

Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của khẳng định (iv).

Cuối cùng, nếu $f(x) \geq 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$ thì, từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.3), với mọi $k \in \mathbb{N}$, chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$(f^{1/k})(x_n) = (f(x_n))^{1/k} \rightarrow (f(c))^{1/k} = (f^{1/k})(c).$$

Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của khẳng định (v).

□

Với các kí hiệu và các giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách kết hợp các khẳng định (i) và (ii) của nó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng hiệu $f - g$ liên tục tại c . Tương tự, bằng cách kết hợp các khẳng định (iii) và (iv), chúng ta cũng nhận thấy rằng nếu $g(c) \neq 0$ thì thương f/g liên tục tại c . Hơn nữa, do mỗi số hữu tỉ dương r dưới dạng n/k , trong đó $n, k \in \mathbb{N}$, bằng cách kết hợp các khẳng định (iii) và (v), chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq 0$ bất cứ khi nào $x \in D$ và $|x - c| < \delta$ thì hàm f^r sẽ liên tục tại c với mọi số hữu tỉ dương r . Tương tự, bằng cách kết hợp các khẳng định (iii), (iv), (v), chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu $f(c) > 0$ thì hàm f^r liên tục tại c với mọi số hữu tỉ âm r .

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra rằng hợp của các hàm liên tục cũng là một hàm liên tục.

Kết quả 3.1.3.

Giả sử $D, E \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm sao cho $f(D) \subseteq E$. Giả sử cho trước một số $c \in D$. Giả sử f liên tục tại c và g liên tục tại $f(c)$.

Khi đó, $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại c .

Chứng minh kết quả 3.1.3.

Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Khi đó, $f(x_n) \rightarrow f(c)$, bởi vì f liên tục tại c . Bây giờ, $(f(x_n))$ là một dãy trong E và g liên tục tại $f(c)$. Như vậy,

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(c)) = (g \circ f)(c).$$

Điều này chỉ ra rằng $g \circ f$ liên tục tại c . □

Chúng ta cũng có thể ghép các hàm liên tục lại với nhau để xây dựng một hàm liên tục, như kết quả sau đây cho thấy.

Kết quả 3.1.4.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in D$. Giả sử $D_1 = \{x \in D: x \leq c\}$ và $D_2 = \{x \in D: c \leq x\}$. Giả sử $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm sao cho $f_1(c) = f_2(c)$.

Khi đó, hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \in D_1, \\ f_2(x) & \text{nếu } x \in D_2, \end{cases}$$

liên tục trên D nếu f_1 liên tục trên D_1 và f_2 liên tục trên D_2 .

Chứng minh kết quả 3.1.4.

Nhận thấy rằng nếu $c_1 \in D$ và $c_1 < c$ thì tính liên tục của f_1 tại c_1 sẽ ngụ ý tính liên tục của f tại c_1 . Tương tự, nếu $c_2 \in D$ và $c < c_2$ thì tính liên tục của f_2 tại c_2 cũng sẽ ngụ ý tính liên tục của f tại c_2 . Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng f liên tục tại c là đủ. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Nếu tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \leq c$ với mọi $n \geq n_1$ thì $f(x_n) = f_1(x_n)$ với mọi $n \geq n_1$ và tính liên tục của f_1 tại c ngụ ý rằng $f_1(x_n) \rightarrow f_1(c) = f(c)$. Tương tự, nếu tồn tại một số tự nhiên $n_2 \in$

$\mathbb{N}$ sao cho $x \leq x_n$ với mọi $n \geq n_2$ thì $f(x_n) = f_2(x_n)$ với mọi $n \geq n_2$ và tính liên tục của f_2 tại c ngụ ý rằng $f(x_n) \rightarrow f_2(c) = f(c)$. Trong trường hợp còn lại, chúng ta sẽ tìm được các số nguyên dương $l_1 < l_2 < \dots$ và $m_1 < m_2 < \dots$ sao cho $x_{l_k} \leq c < x_{m_k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $\mathbb{N} = \{l_k: k = 1, 2, \dots\} \cup \{m_k: k = 1, 2, \dots\}$. Rõ ràng $x_{l_k} \rightarrow c$ và $x_{m_k} \rightarrow c$ khi $k \rightarrow \infty$. Hơn nữa, $f(x_{l_k}) = f_1(x_{l_k})$ và $f(x_{m_k}) = f_2(x_{m_k})$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Từ tính liên tục của f_1 tại c , chúng ta sẽ có $f(x_{l_k}) \rightarrow f_1(c) = f(c)$ và, từ tính liên tục của f_2 tại c , chúng ta cũng sẽ có $f(x_{m_k}) \rightarrow f_2(c) = f(c)$. Điều này chỉ ra rằng $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Do đó, f liên tục tại c . Như vậy, chúng ta có thể kết luận rằng f liên tục trên D . $\square$

Chúng ta sẽ kết thúc phần này của bài viết bằng cách đưa ra một điều kiện về tính liên tục của một hàm tại một điểm mà không liên quan gì đến sự hội tụ của các dãy số.

Kết quả 3.1.5.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số.

Khi đó, f liên tục tại c khi và chỉ khi f thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ như sau:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $x \in D$ và $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.1.5.

Giả sử f liên tục tại c . Giả sử trong một khoảng khắc nào đó điều kiện $\varepsilon - \delta$ là không đúng. Điều này có nghĩa là tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, tồn tại một $x \in D$ sao cho

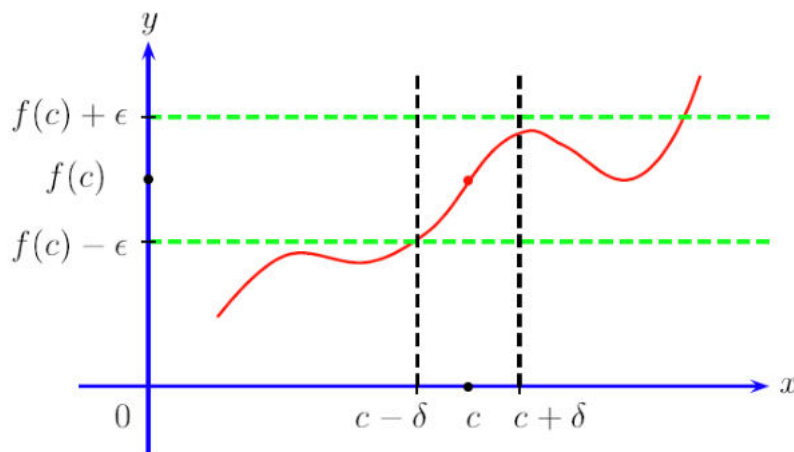
$$|x - c| < \delta, \text{ nhưng } |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon.$$

Khi đó, tồn tại một dãy (x_n) trong D sao cho $|x_n - c| < 1/n$, nhưng $|f(x_n) - f(c)| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nhưng khi đó $x_n \rightarrow c$ và $f(x_n) \nrightarrow f(c)$. Điều này mâu thuẫn với tính liên tục của f tại c .

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ là đúng. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho

$$x \in D \text{ và } |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Do $x_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Điều này chứng tỏ rằng f liên tục tại c . $\square$



3.2. Tính chất cơ bản của các hàm liên tục

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ xem xét mối quan hệ giữa tính liên tục của một hàm và các tính chất hình học khác nhau của một hàm đã được xem xét trước đó trong mục **1.3. Hàm số và các tính chất hình học của nó**. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ giới thiệu khái niệm về một hàm liên tục đều và thảo luận về mối quan hệ của nó với tính liên tục.

Tính liên tục và tính bị chặn

Một hàm bị chặn không nhất thiết phải liên tục. Chẳng hạn, hàm Dirichlet. Ngoài ra, một hàm số liên tục cũng không cần thiết phải bị chặn. Chẳng hạn, $f_1(x) = x$ với mọi $x \in D_1$ trong đó $D_1 = [0, \infty)$ và $f_2(x) = 1/x$ với mọi $x \in D_2$ trong đó $D_2 = (0, 1]$. Một lý do rõ ràng để giải thích cho việc tại sao hàm liên tục f_1 không bị chặn là miền D_1 của nó không bị chặn. Để xác định rõ lý do tại sao hàm liên tục f_2 không bị chặn trên miền D_2 của nó, chúng ta sẽ đưa ra khái niệm sau đây.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng D là một **tập đóng** nếu

(x_n) là một dãy bất kì nào đó trong D và $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in D$.

Lưu ý rằng khoảng $(0, 1]$ không phải là một tập đóng, bởi vì $(1/n) \in (0, 1]$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $(1/n) \rightarrow 0$ nhưng $0 \notin (0, 1]$. Tương tự, chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng các khoảng sau đây cũng không phải là các tập đóng:

$(a, b], [a, b), (a, b), (a, \infty), (-\infty, b)$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, các khoảng sau đây là các tập đóng:

$[a, b], [a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, \infty)$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Để chứng minh rằng $[a, b]$ là một tập đóng, xét một dãy (x_n) bất kì trong $[a, b]$ sao cho $x_n \rightarrow x$. Do $a \leq x_n \leq b$ và $x_n \rightarrow x$ nên, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3), chúng ta nhận thấy rằng $a \leq x \leq b$, nghĩa là $x \in [a, b]$. Chúng ta cũng có thể sử dụng phép chứng minh tương tự để chỉ ra rằng $[a, \infty)$ và $(-\infty, b]$ là các tập đóng. Rõ ràng $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ cũng là một tập đóng.

Bây giờ, chúng ta sẽ chỉ ra rằng nếu một hàm xác định trên một tập đóng và bị chặn là liên tục thì nó nhất thiết phải bị chặn. Trên thực tế, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một hàm như vậy sẽ luôn đạt được các chặn của nó trên miền xác định của nó.

Kết quả 3.2.1.

Giả sử D là một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Khi đó,

(i) f là một hàm bị chặn,

(ii) f đạt được các chặn của nó trên D , nghĩa là tồn tại các số thực r và s trong D sao cho

$$f(r) = \inf\{f(x): x \in D\} \text{ và } f(s) = \sup\{f(x): x \in D\}.$$

Chứng minh kết quả 3.2.1.

(i) Giả sử f không bị chặn trên D . Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một số $x_n \in D$ sao cho $|f(x_n)| > n$. Do D là một tập bị chặn nên dãy (x_n) sẽ bị chặn. Từ Định lý Bolzano – Weierstrass, (x_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ (x_{n_k}) . Nếu $x_{n_k} \rightarrow x$ thì $x \in D$, bởi vì D là một tập đóng. Ngoài ra, do f liên tục tại x nên chúng ta sẽ có $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Từ tính hội tụ của dãy $(f(x_{n_k}))$, dãy $(f(x_{n_k}))$ sẽ bị chặn bởi hằng định (ii) của Kết quả 2.1.1). Nhưng $|f(x_{n_k})| > n_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $n_k \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng f là một hàm bị chặn trên D .

(ii) Do hàm số f bị chặn trên D nên chúng ta sẽ tìm được các số thực $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho

$$m = \inf\{f(x): x \in D\} \text{ và } M = \sup\{f(x): x \in D\}.$$

Từ Kết quả 2.1.5), tồn tại các dãy (r_n) và (s_n) trong D sao cho $f(r_n) \rightarrow m$ và $f(s_n) \rightarrow M$. Do D là một tập bị chặn nên các dãy (r_n) và (s_n) đều bị chặn. Từ Định lý Bolzano – Weierstrass, (r_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là (r_{n_k}) , và (s_n) cũng sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là (s_{m_j}) . Nếu $r_{n_k} \rightarrow r$ và $s_{m_j} \rightarrow s$ thì r và s đều thuộc D , bởi vì D là một tập đóng. Ngoài ra, do f liên tục tại r và s nên chúng ta sẽ có $f(r_{n_k}) \rightarrow f(r)$ và $f(s_{m_j}) \rightarrow f(s)$.

Do đó,

$$f(r) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(r_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = m,$$

$$f(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(s_{m_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = M.$$

Như vậy, f đạt được các chặn của nó trên D . □

Tính liên tục và tính đơn điệu

Dễ dàng nhận thấy rằng một hàm số đơn điệu xác định trên một khoảng sẽ không nhất thiết phải liên tục. Chẳng hạn, nếu $f(x) = [x]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f đơn điệu trên $\mathbb{R}$, nhưng nó không liên tục tại mọi điểm $c \in \mathbb{Z}$. Tương tự, một hàm liên tục xác định trên một khoảng nào đó sẽ không nhất thiết phải đơn điệu ở đó, chẳng hạn như $f(x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, bây giờ chúng ta sẽ chứng minh một kết quả đặc biệt chỉ ra rằng nếu một hàm đơn điệu nghiêm ngặt trên một khoảng thì hàm ngược của nó (xác định trên tập giá trị của hàm đã cho) là liên tục, không phụ thuộc vào tính liên tục của hàm đã cho. Lưu ý rằng tập giá trị của hàm đã cho, nghĩa là tập xác định của hàm ngược, không nhất thiết phải là một khoảng.

Kết quả 3.2.2.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu nghiêm ngặt trên I .

Khi đó, $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Chứng minh kết quả 3.2.2.

Do f đơn điệu nghiêm ngặt trên I nên chúng ta có thể nhận thấy rằng f là một đơn ánh và hàm ngược $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ cũng được xác định một cách rõ ràng. Xét một số $d \in f(I)$. Khi đó, tồn tại duy nhất một số $c \in I$ sao cho $f(c) = d$.

Đầu tiên, giả sử f tăng nghiêm ngặt trên I . Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Giả sử c không phải đầu mút bên trái cũng như không phải đầu mút bên phải của khoảng I .

Khi đó, tồn tại các số $c_1, c_2 \in I$ sao cho

$$c - \varepsilon < c_1 < c < c_2 < c + \varepsilon.$$

Kí hiệu $d_1 = f(c_1)$ và $d_2 = f(c_2)$. Do f tăng nghiêm ngặt trên I nên chúng ta sẽ có $d_1 < d < d_2$ và do f^{-1} cũng tăng nghiêm ngặt trên $f(I)$ nên chúng ta sẽ có

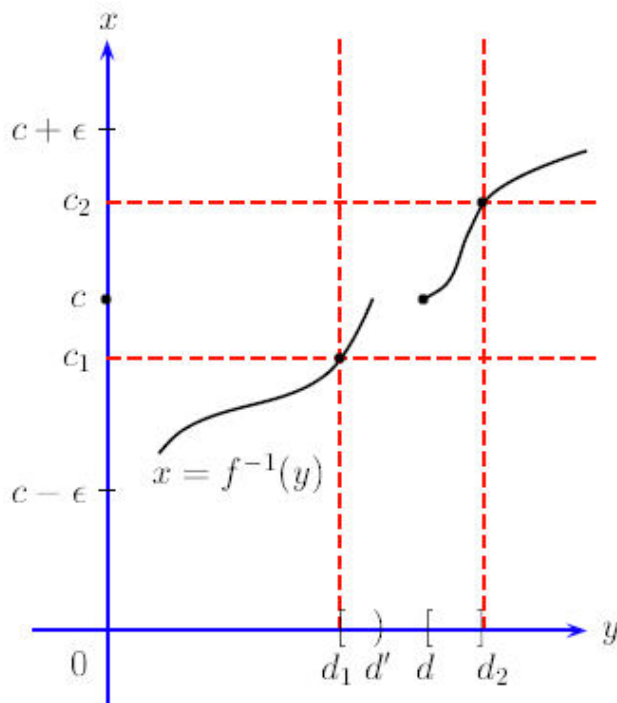
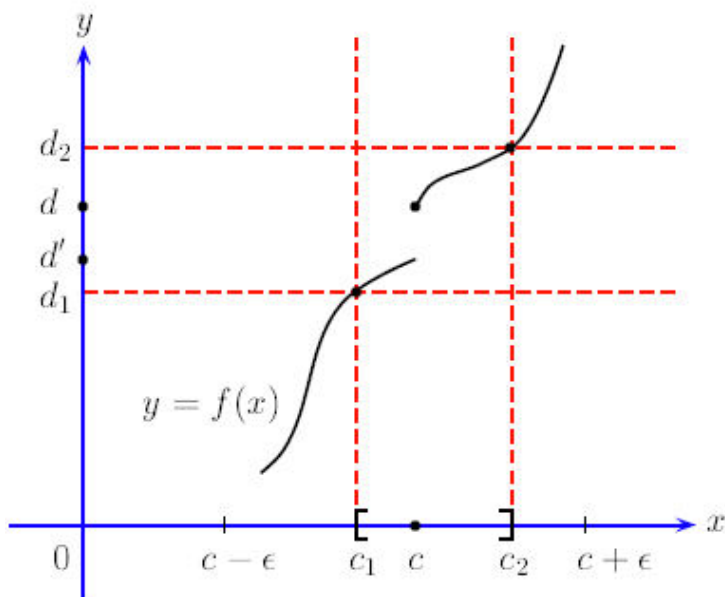
$$y \in f(I), d_1 < y < d_2 \Rightarrow c_1 = f^{-1}(d_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(d_2) = c_2,$$

nên $f^{-1}(d) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(d) + \varepsilon$.

Do đó, nếu chúng ta đặt $\delta = \min\{d - d_1, d_2 - d\}$ thì chúng ta sẽ nhận thấy rằng $\delta > 0$ và

$$y \in f(I), |y - d| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(d)| < \varepsilon.$$

Như vậy, f^{-1} liên tục tại d .



Hình vẽ minh họa.

Nếu $c = f^{-1}(d)$ là đầu mút bên trái của khoảng I thì do f và f^{-1} lần lượt là các hàm tăng nghiêm ngặt trên I và $f(I)$ nên chúng ta sẽ có

$$y \in f(I) \Rightarrow d \leq y \text{ và } f^{-1}(d) \leq f^{-1}(y),$$

và do đó phép lập luận trước đó vẫn hoạt động nếu chúng ta đặt $\delta = d_2 - d$.

Nếu $c = f^{-1}(d)$ là đầu mút bên phải của khoảng I thì, bằng cùng cách lập luận tương tự, chúng ta cũng sẽ có

$$y \in f(I) \Rightarrow y \leq d \text{ và } f^{-1}(y) \leq f^{-1}(d),$$

và do đó phép lập luận trước đó vẫn hoạt động nếu chúng ta đặt $\delta = d - d_1$.

Như vậy, trong tất cả các trường hợp, Kết quả 3.1.5) cho thấy rằng f^{-1} liên tục tại d . Do d là một điểm tùy ý của $f(I)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Lưu ý rằng $f(I)$ không nhất thiết phải là một khoảng.

Nếu f giảm nghiêm ngặt trên I thì $-f$ sẽ tăng nghiêm ngặt trên I và, bằng tất cả những gì chúng ta đã chứng minh ở trên, $(-f)^{-1}: (-f)(I) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Do $f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y)$ với mọi $y \in f(I)$ nên, từ Kết quả 3.1.3), f^{-1} là một hàm liên tục. $\square$

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x + [x]$. Nếu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ thì

$$f(x_1) = x_1 + [x_1] < x_2 + [x_1] \leq x_2 + [x_2] = f(x_2)$$

Do đó, f là một hàm tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu $m \in \mathbb{Z}$ thì chúng ta sẽ có

$$f(x) = x + m \text{ với mọi } x \in [m, m + 1).$$

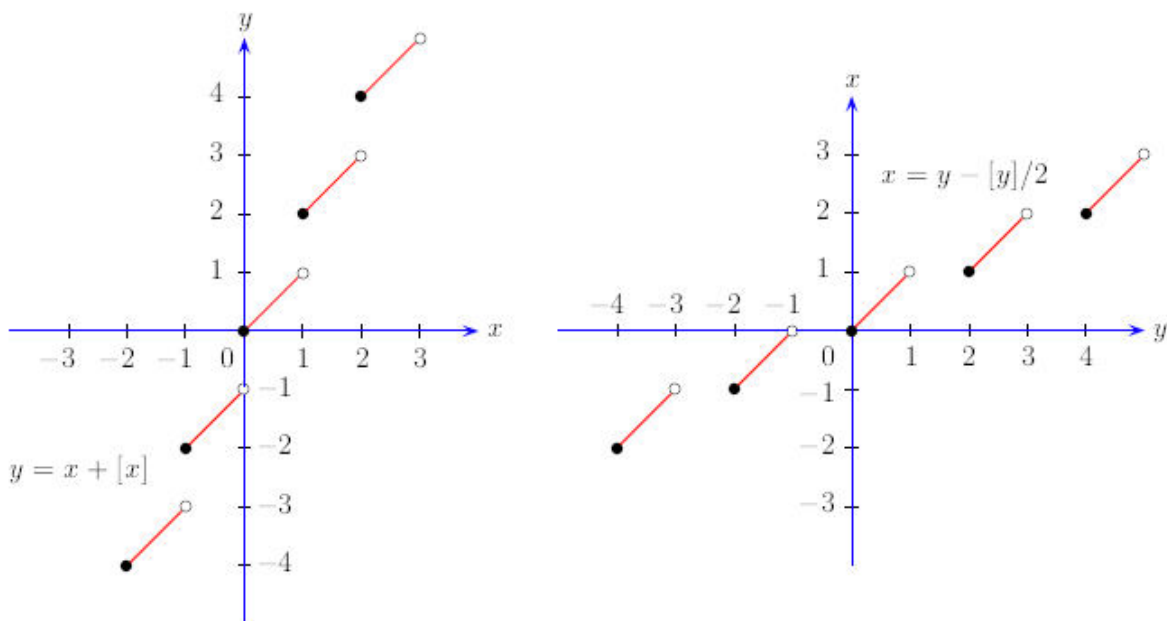
Như vậy, $f(\mathbb{R})$ là hợp của các nửa khoảng mở có dạng $[2m, 2m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$, nghĩa là $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid [y] \text{ là một số chẵn}\}$, nên nếu $m \in \mathbb{Z}$ thì chúng ta sẽ có

$$f^{-1}(y) = y - m \text{ với mọi } y \in [2m, 2m + 1).$$

Nói cách khác,

$$f^{-1}(y) = y - \frac{[y]}{2} \text{ với mọi } y \in f(\mathbb{R}).$$

Quan sát thấy rằng f^{-1} liên tục tại mọi điểm của $f(\mathbb{R})$ mặc dù f không liên tục tại mọi điểm $m \in \mathbb{Z}$.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm $f(x) = x + [x]$ và hàm ngược $f^{-1}(y) = y - [y]/2$ của nó.

Kết quả 3.2.3.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu nghiêm ngặt sao cho $f(I)$ là một khoảng.

Khi đó, f là đơn ánh và liên tục.

Chứng minh kết quả 3.2.3.

Do f tăng nghiêm ngặt trên I nên rõ ràng f là đơn ánh và hàm ngược $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ của nó cũng được xác định một cách rõ ràng. Kí hiệu $J = f(I)$ và $g = f^{-1}$. Khi đó, g tăng nghiêm ngặt trên khoảng J và, từ Kết quả 3.2.2), $g^{-1}: g(J) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục, nghĩa là $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cũng là một hàm liên tục. $\square$

Chúng ta sẽ chứng minh trong Kết quả 3.2.5) rằng điều ngược lại của khẳng định trên cũng đúng. Sau này chúng ta sẽ chứng minh một phiên bản mạnh hơn của khẳng định trên (trong đó tính đơn điệu nghiêm ngặt sẽ được thay thế bởi tính đơn điệu) trong Kết quả 3.3.11).

Tính liên tục và tính lồi

Dễ dàng nhận thấy rằng một hàm liên tục xác định trên một khoảng không nhất thiết phải lồi hoặc lõm trên khoảng đó. Chẳng hạn, nếu $f(x) = x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng nó sẽ không lồi cũng như không lõm trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, nếu một hàm lồi hoặc lõm trên một khoảng thì nó sẽ liên tục tại mọi điểm của khoảng đó ngoại trừ các đầu mút của nó. Tại các đầu mút của một khoảng, một hàm lồi (hoặc lõm) có thể không liên tục.

Chẳng hạn, giả sử cho trước một khoảng $I = [-1, 1]$ và một hàm $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } |x| < 1, \\ 2 & \text{nếu } x = -1 \text{ hoặc } 1. \end{cases}$$

Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng f lồi trên I , nhưng f không liên tục tại 1 cũng như tại -1 .

Tính liên tục và tính chất giá trị trung gian

Kết quả quan trọng sau đây cho thấy rằng một hàm liên tục trên một khoảng bất kì luôn có Tính chất giá trị trung gian.

Kết quả 3.2.4. (Định lí giá trị trung gian)

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Khi đó, f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên I . Đặc biệt, $f(I)$ sẽ là một khoảng.

Chứng minh kết quả 3.2.4.

Giả sử a, b là các số trong I với $a < b$. Khi đó, $[a, b] \subseteq I$. Giả sử r là một giá trị trung gian nằm giữa a và b , nghĩa là $r \in (f(a), f(b))$ hoặc $r \in (f(b), f(a))$.

Đầu tiên, giả sử $f(a) < f(b)$ sao cho $r \in (f(a), f(b))$.

Kí hiệu $S = \{x \in [a, b]: f(x) < r\}$.

Kế tiếp, $a \in S$, bởi vì $f(a) < r$. Do đó, $S \neq \emptyset$. Hơn nữa, tập S bị chặn trên bởi b . Nếu $c = \sup S$ thì, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.5), sẽ tồn tại một dãy (x_n) trong S sao cho $c_n \rightarrow c$. Do $c \in [a, b] \subseteq I$ nên f sẽ liên tục tại c . Như vậy, $f(c_n) \rightarrow f(c)$. Ngoài ra, $f(c_n) < r$, bởi vì $c_n \in S$. Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3), chúng ta kết luận rằng $f(c) \leq r$. Chúng ta lưu ý rằng $c \neq b$, bởi vì $r < f(b)$.

Kí hiệu

$$b_n = c + \frac{b - c}{n} \in [a, b] \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng, $b_n \rightarrow c$. Tính liên tục của f tại c ngụ ý rằng $f(b_n) \rightarrow f(c)$. Nhưng do $b_n > c$ và $c = \sup S$ nên chúng ta sẽ có $b_n \notin S$, nghĩa là $f(b_n) \geq r$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như đã nói đến ở phần trước của bài viết, khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3) chỉ ra rằng $f(c) \geq r$. Đặc biệt, $c \neq a$. Như vậy, $c \in (a, b)$ và $f(c) = r$.

Phép chứng minh cho trường hợp $r \in (f(b), f(a))$ cũng có thể được thực hiện theo cách tương tự. $\square$

Kết quả trên (cùng với Kết quả 1.3.3) và 3.2.2) có một hệ quả rất nổi bật sau đây.

Kết quả 3.2.5. (Định lí nghịch đảo liên tục)

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một đơn ánh liên tục.

Khi đó, hàm ngược $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục. Hơn nữa, f là đơn điệu nghiêm ngặt trên I và $f(I)$ là một khoảng.

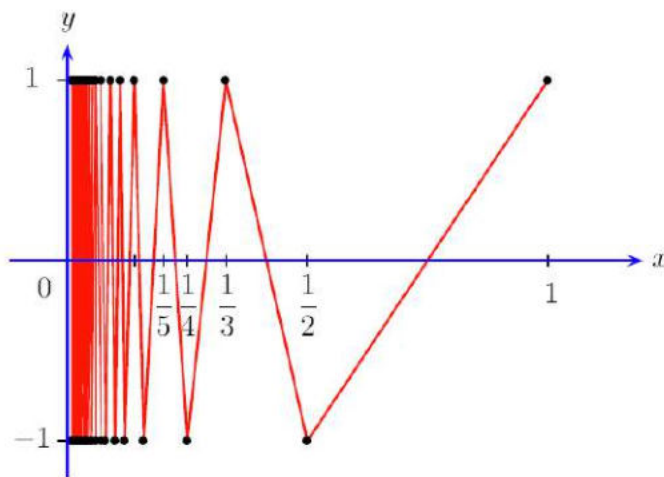
Chứng minh kết quả 3.2.5.

Từ Định lí giá trị trung gian (Kết quả 3.2.4), hàm đơn ánh f sẽ có Tính chất giá trị trung gian trên I . Do đó, từ Kết quả 1.3.3), f là đơn điệu nghiêm ngặt và $f(I)$ là một khoảng. Như vậy, từ Kết quả 3.2.2), f^{-1} là liên tục. $\square$

Kết quả trên cho thấy rằng điều ngược lại của Kết quả 3.2.3) cũng đúng. Tuy nhiên, điều ngược lại của Định lý giá trị trung gian nói chung là không đúng, nghĩa là một hàm không liên tục vẫn có thể có Tính chất giá trị trung gian trên một khoảng I . Chúng ta sẽ minh họa điều này bằng ví dụ sau đây.

Chẳng hạn,

Giả sử $D = [0,1]$ và xét một hàm “zigzag” xác định trên D với đồ thị là các đoạn thẳng nối giữa $(1,1)$ và $(\frac{1}{2}, -1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$ và $(\frac{1}{3}, 1)$, $(\frac{1}{3}, 1)$ và $(\frac{1}{4}, -1)$, v.v...



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm zigzag.

Nói một cách chính xác, hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau: $f(0) = 0$ và, với mọi $x \in (0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 2k(k+1)x - 2k - 1 & \text{nếu } \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ là một số lẻ,} \\ -2k(k+1)x + 2k + 1 & \text{nếu } \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ là một số chẵn.} \end{cases}$$

Chúng ta cần lưu ý rằng $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [0,1]$. Ngoài ra, với mọi $k \in \mathbb{N}$, hàm f nhận mọi giá trị từ -1 đến 1 trên khoảng $[1/(k+1), 1/k]$. Kí hiệu $I_k = [1/(k+1), 1/k]$ và, với mọi $x \in I_k$ với $k = 1, 2, \dots$, chúng ta đặt $f_k(x) = f(x)$. Khi đó, f liên tục trên I_k và $f_k(1/(k+1)) = f_{k+1}(1/(k+1))$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Do $(0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ nên, từ Kết quả 3.1.4), chúng ta nhận thấy rằng f liên tục trên $(0,1]$.

Mặt khác, f không liên tục tại 0 . Để nhận thấy điều này, kí hiệu $x_n = 1/(2n-1)$ và $y_n = 1/2n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $x_n \rightarrow 0$ và $y_n \rightarrow 0$, nhưng $f(x_n) = 1$, trong khi $f(y_n) = -1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, sao cho $f(x_n) \nrightarrow f(0)$ và $f(y_n) \nrightarrow f(0)$. Lập luận này trên thực tế chỉ ra rằng f không thể liên tục tại 0 bằng cách xác định lại giá trị của nó tại 0 .

Kế tiếp, chúng ta sẽ chứng minh rằng f có Tính chất giá trị trung gian trên khoảng $[0,1]$. Giả sử $[a,b]$ là một khoảng con bất kì của $[0,1]$. Nếu $a > 0$ thì f liên tục trên $[a,b]$ và do đó f nhận mọi giá trị nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ theo Định lý giá trị trung gian (Kết quả 3.2.4). Ngoài ra, nếu $a = 0$ và $b > 0$ thì sẽ tồn tại một số nguyên dương k sao cho $1/k < b$. Bây giờ, $a < 1/(k+1) < 1/k < b$ và f nhận mọi giá trị trong khoảng từ -1 đến 1 trên khoảng $[1/(k+1), 1/k]$. Điều này cho thấy rằng f có Tính chất giá trị trung gian trên $[0,1]$ mặc dù nó không liên tục trên $[0,1]$.

Nhận thấy rằng một phần chiều ngược lại của Định lý giá trị trung gian vẫn đúng, nghĩa là nếu một hàm đơn ánh xác định trên một khoảng có Tính chất giá trị trung gian thì nó phải liên tục. Chúng ta có thể thấy điều này bằng cách lưu ý rằng một hàm như vậy là đơn điệu nghiêm ngặt và tập giá trị của nó là một khoảng (Kết quả 1.3.3), và sau đó áp dụng Kết quả 3.2.3). Hơn nữa, Kết quả 3.3.11) cũng chỉ ra rằng mọi hàm đơn điệu có Tính chất giá trị trung gian trên một khoảng đều liên tục.

Tính liên tục đều

Chúng ta sẽ giới thiệu một khái niệm nói chung mạnh hơn nhiều khái niệm mới trình bày về tính liên tục của một hàm số. Nó sẽ rất hữu ích khi chúng ta xem xét các hàm “khả tích”.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta sẽ nói rằng f **liên tục đều** trên D nếu

$$(x_n), (y_n) \text{ là các dãy bất kì nào đó trong } D \text{ và } x_n - y_n \rightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0.$$

Kết quả sau đây thiết lập một mối liên hệ giữa tính liên tục và tính liên tục đều của một hàm số.

Kết quả 3.2.6.

Giả sử cho trước một tập $D \subseteq \mathbb{R}$.

Khi đó, mọi hàm số liên tục đều trên D đều liên tục trên D . Hơn nữa, nếu D là một tập đóng và bị chặn thì mọi hàm liên tục trên D đều liên tục đều trên D .

Chứng minh kết quả 3.2.6.

Giả sử cho trước một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Đầu tiên, giả sử f liên tục đều trên D . Nếu $c \in D$ và (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$ thì chúng ta đặt $y_n = c$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $x_n - y_n \rightarrow 0$ nên chúng ta sẽ có $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$, nghĩa là $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Như vậy, f liên tục tại c . Do điều này đúng với mọi $c \in D$ nên f liên tục trên D .

Bây giờ, giả sử D là một tập đóng và bị chặn, và f liên tục trên D . Giả sử f không liên tục đều trên D . Khi đó, tồn tại các dãy (x_n) và (y_n) trong D sao cho $x_n - y_n \rightarrow 0$, nhưng $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. Như vậy, tồn tại một số thực $\varepsilon > 0$ và các số nguyên dương $n_1 < n_2 < \dots$ sao cho $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Do D là một tập bị chặn nên dãy (x_{n_k}) là bị chặn. Từ Định lý Bolzano – Weierstrass, chúng ta nhận thấy rằng nó sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là $(x_{n_{k_j}})$. Chúng ta hãy kí hiệu các dãy $(x_{n_{k_j}})$ và $(y_{n_{k_j}})$ bởi $(\tilde{x}_j)$ và $(\tilde{y}_j)$ cho đơn giản. Giả sử $\tilde{x}_j \rightarrow c$. Khi đó, $c \in D$ bởi vì D là một tập đóng. Do $x_n - y_n \rightarrow 0$ nên chúng ta sẽ có $\tilde{x}_j - \tilde{y}_j \rightarrow 0$ và do đó $\tilde{y}_j \rightarrow 0$ cũng vậy. Do f liên tục tại c nên chúng ta sẽ có $f(\tilde{x}_j) \rightarrow f(c)$ và $f(\tilde{y}_j) \rightarrow f(c)$.

Như vậy,

$$f(\tilde{x}_j) - f(\tilde{y}_j) \rightarrow f(c) - f(c) = 0.$$

Nhưng đây lại là một điều mâu thuẫn, bởi vì $|f(\tilde{x}_j) - f(\tilde{y}_j)| \geq \varepsilon$ với mọi $j \in \mathbb{N}$. Như vậy, f liên tục đều trên D . □

Chúng ta nhận xét rằng tính liên tục của một hàm số trên một tập D là một khái niệm cục bộ, nghĩa là một hàm số là liên tục trên D nếu nó liên tục tại mọi điểm $c \in D$. Mặt khác, tính liên tục đều của một hàm trên tập D có xét đến hành vi của hàm trên toàn tập D . Theo nghĩa này, tính liên tục đều là một khái niệm toàn cục.

Cuối cùng, chúng ta sẽ đưa ra một điều kiện về tính liên tục đều của một hàm mà không cần quan tâm đến sự hội tụ của các dãy. Kết quả sau đây có thể được so sánh với điều kiện $\varepsilon - \delta$ cho tính liên tục được đưa ra trong Kết quả 3.1.5).

Kết quả 3.2.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số.

Khi đó, f là liên tục đều trên D khi và chỉ khi f thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ sau:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.2.7.

Giả sử f liên tục đều trên D . Giả sử tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\delta > 0$ cho trước, tồn tại các số x và y trong D sao cho $|x - y| < \delta$, nhưng $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Xét $\delta = 1/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ thu được các dãy (x_n) và (y_n) trong D sao cho $|x_n - y_n| < 1/n$, nhưng $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $x_n - y_n \rightarrow 0$, nhưng $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết f liên tục đều trên D .

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ là đúng. Giả sử (x_n) và (y_n) là các dãy bất kì trong D sao cho $x_n - y_n \rightarrow 0$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, bất cứ khi nào $x, y \in D$ và $|x - y| < \delta$. Do $x_n - y_n \rightarrow 0$ nên chúng ta có thể tìm được một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - y_n| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Nhưng khi đó $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. Như vậy, f liên tục đều trên D . □

3.3. Giới hạn của các hàm thực một biến

Trong mục 3.2. **Khái niệm về các dãy số**, chúng ta đã thấy giới hạn của một dãy có nghĩa là gì. Như chúng ta đã biết, dãy số là một hàm số có tập xác định là tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Bây giờ, chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm giới hạn của một hàm số tại một điểm thuộc $\mathbb{R}$ với điều kiện miền xác định của hàm số phải thỏa mãn một số điều kiện nào đó. Để định nghĩa khái niệm này cũng như để chứng minh một số tính chất cơ bản, chúng ta sẽ cần sử dụng đến khái niệm dãy và các tính chất cơ bản của chúng.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho D có chứa $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ với một số $r > 0$ nào đó, nghĩa là D có chứa một khoảng mở bao quanh c có thể ngoại trừ chính bản thân điểm c . Xét một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng có một **giới hạn của f khi x tiến đến c** nếu tồn tại một số thực l sao cho

(x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$ và $x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$.

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow c \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

Lưu ý rằng luôn tồn tại một dãy trong $D \setminus \{c\}$ hội tụ đến c .

Chẳng hạn,

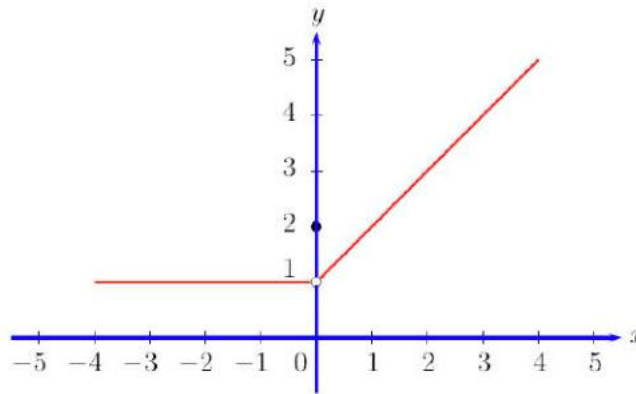
$$x_n = c - \frac{r}{n+1}$$

nằm trong $D \setminus \{c\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x_n \rightarrow c$.

Đặc biệt, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.1), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ là duy nhất bất cứ khi nào nó tồn tại.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm số có đồ thị như trong hình vẽ.



$$\text{Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm số } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 0, \\ 2 & \text{nếu } x = 0, \\ x + 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Nói một cách chính xác hơn, giả sử $D = \mathbb{R}$, $c = 0$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 0, \\ 2 & \text{nếu } x = 0, \\ x + 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Để nhận thấy điều này, kí hiệu (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{0\}$ sao cho $x_n \rightarrow 0$. Nếu $x_n < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f(x_n) - 1 = 1 - 1 = 0$, và nếu $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f(x_n) - 1 = (x_n + 1) - 1 = x_n$. Điều này chỉ rằng $f(x_n) \rightarrow 1$. Như vậy, $l = 1$ là giới hạn của f khi x tiến đến 0. Lưu ý rằng $f(0) = 2$.

(ii) Giả sử $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c = 0$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0, \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Nếu $x_n = (-1)^n/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì (x_n) là một dãy trong D và $x_n \rightarrow 0$, nhưng do $f(x_n) = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên dãy $(f(x_n))$ là phân kỳ. Như vậy, giới hạn của f khi x tiến đến 0 là không hiện hữu.

Điều này cũng có thể thấy được bằng cách đặt $y_n = 1/n$, $z_n = -1/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và quan sát thấy rằng $y_n \rightarrow 0$, $z_n \rightarrow 0$, trong khi $f(y_n) \rightarrow 1$, $f(z_n) \rightarrow -1$.

(iii) Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là một số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là một số vô tỉ.} \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $c \in \mathbb{R}$, không tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi x có xu hướng tiến đến c .

Để nhận thấy điều này, kí hiệu $c \in \mathbb{R}$ và xét

$$x_n = \frac{[nc] + 1}{n} \text{ và } y_n = \frac{[nc] + \sqrt{2}}{n}.$$

Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $c < x_n \leq c + (1/n)$ và $c < y_n \leq c + (\sqrt{2}/n)$, nên $x_n \rightarrow c$ và $y_n \rightarrow c$. Do mỗi x_n đều là một số hữu tỉ nên $f(x_n) = 1$ và do mỗi y_n đều là một số vô tỉ nên $f(y_n) = 0$. Do đó, $f(x_n) \rightarrow 1$, trong khi $f(y_n) \rightarrow 0$. Như vậy, không tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi x có xu hướng tiến đến c .

Bây giờ, chúng ta sẽ liên hệ các khái niệm về tính liên tục và giới hạn.

Kết quả 3.3.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Xét một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó, f liên tục tại c khi và chỉ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng $f(c)$.

Chứng minh kết quả 3.3.1.

Giả sử f liên tục tại c . Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Từ tính liên tục của f tại c , chúng ta sẽ có $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Như vậy, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng $f(c)$.

Ngược lại, giả sử $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng $f(c)$. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow c$. Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n = c$ với mọi $n \geq n_0$ thì rõ ràng $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Ngược lại, tồn tại các số nguyên dương $n_1, n_2, \dots$ sao cho $n_1 < n_2 < \dots$ và $\{n \in \mathbb{N}: x_{n_k} \neq c\} = \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$. Bây giờ, (x_{n_k}) là một dãy trong $D \setminus \{c\}$ hội tụ đến c và do đó $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$. Do $f(x_n) = f(c)$ với mọi $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Như vậy, f liên tục tại c . $\square$

Chẳng hạn, hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 0, \\ 2 & \text{nếu } x = 0, \text{ không liên tục tại } 0 \text{ bởi vì} \\ x + 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ và $f(0) = 2$.

Mặt khác, nếu chúng ta xác định $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bởi

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ x + 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

thì, như trước đây, chúng ta sẽ có $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ và $g(0) = 1$. Như vậy, g liên tục tại 0.

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh một số kết quả hữu ích trong việc tính giới hạn của một số hàm số. Đầu tiên, chúng ta hãy xem xét các phép toán đại số trên $\mathbb{R}$ có liên quan như thế nào đến khái niệm giới hạn của các hàm một biến thực. Kết quả sau đây được gọi là **Quy tắc tính giới hạn cho các hàm số**.

Kết quả 3.3.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho D có chứa $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ với một số $r > 0$ nào đó, và $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm sao cho

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \text{ và } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = m.$$

Khi đó,

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = l + m,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow c} (rf)(x) = rl \text{ với mọi } r \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow c} (fg)(x) = lm,$$

(iv) nếu $l \neq 0$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $\delta \leq r$ và $f(x) \neq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$; hơn nữa, với hàm $1/f: \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x - c| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có

$$\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \frac{1}{l}.$$

Chứng minh kết quả 3.3.2.

Xét một dãy (x_n) bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$.

Khi đó,

$$f(x_n) \rightarrow l \text{ và } g(x_n) \rightarrow m.$$

Từ các khẳng định (i), (ii), (iii) của Kết quả 2.1.2), chúng ta sẽ có

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow l + m,$$

$$(rf)(x_n) = rf(x_n) \rightarrow rl \text{ với mọi } r \in \mathbb{R},$$

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow lm.$$

Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của các khẳng định (i), (ii) và (iii).

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (iv), giả sử $l \neq 0$. Nếu không tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $\delta \leq r$ và $f(x) \neq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$ thì chúng ta luôn có thể tìm được một dãy (c_n) trong $D \setminus \{c\}$ sao cho

$$|c_n - c| < \frac{r}{n} \text{ và } f(c_n) = 0 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Do $c_n \rightarrow c$ nên chúng ta sẽ có $f(c_n) \rightarrow l$. Nhưng điều này là không thể bởi vì $f(c_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong khi đó $l \neq 0$. Như vậy, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x) \neq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$ và hàm $1/f$ được xác định tại mọi điểm x như vậy. Hơn nữa, nếu (x_n) là một dãy bất kì trong $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - c| < \delta\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$ thì $f(x_n) \rightarrow l$ và do đó, từ khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.2), $1/f(x_n) \rightarrow 1/l$. □

Với các kí hiệu và giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách kết hợp các khẳng định (i) và (ii), chúng ta nhận thấy rằng $\lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = l - m$. Tương tự, bằng cách kết hợp các khẳng định (iii) và (iv), chúng ta nhận thấy rằng nếu $m \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow c} (f/g)(x) = l/m$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra cách mà quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ và phép toán lấy căn bậc k được bảo toàn qua phép lấy giới hạn.

Kết quả 3.3.3.

Giả sử D, c, f, g, l, m như trong Kết quả 3.3.2.

(i) Nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) \leq g(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } 0 < |x - c| < \delta,$$

thì $l \leq m$.

Ngược lại, nếu $l < m$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) < g(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } 0 < |x - c| < \delta,$$

Đặc biệt, nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$ thì $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \geq 0$ và ngược lại nếu $\lim_{x \rightarrow c} g(x) > 0$ thì sẽ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $g(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$.

(ii) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in D$ thì $l \geq 0$ và, với mọi $k \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ có

$$\lim_{x \rightarrow c} f^{1/k}(x) = l^{1/k}.$$

Chứng minh kết quả 3.3.3.

Xét một dãy (x_n) trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$.

(i) Giả sử tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$ và do đó $f(x_n) \leq g(x_n)$ với mọi $n \geq n_0$. Do $f(x_n) \rightarrow l$ và $g(x_n) \rightarrow m$ nên, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $l \leq m$.

Ngược lại, giả sử $l < m$. Nếu không tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$ thì chúng ta có thể tìm được một dãy (c_n) trong $D \setminus \{c\}$ sao cho

$$|c_n - c| < \frac{1}{n} \text{ và } f(c_n) \geq g(c_n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, $c_n \rightarrow c$ và như vậy

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} g(c_n) = m,$$

(điều này một lần nữa được suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 2.1.3).

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $l < m$. Như vậy, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$.

(ii) Khẳng định (i) ngụ ý rằng $l \geq 0$. Giả sử $k \in \mathbb{N}$. Từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.3, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $(f(x_n))^{1/k} \rightarrow l^{1/k}$. Do (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$ nên chúng ta sẽ có $\lim_{x \rightarrow c} f^{1/k}(x) = l^{1/k}$. □

Với các kí hiệu và giả thiết như trong mệnh đề trên, bằng cách kết hợp các khẳng định (iii) và (iv) của Kết quả 3.3.2), chúng ta nhận thấy rằng nếu r là một số hữu tỉ dương bất kì và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in D$ thì $\lim_{x \rightarrow c} f^r(x) = l^r$, bởi vì $r = m/k$, trong đó $m, k \in \mathbb{N}$. Điều này, cùng với khẳng định (iv) của Kết quả 3.3.3), cho thấy rằng nếu $l > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow c} f^r(x) = l^r$ với mọi số hữu tỉ âm r .

Kết quả 3.3.4. (Định lí kẹp)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ đều được chứa trong D với một số $r > 0$ nào đó. Giả sử cho trước $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ với mọi } x \in D \text{ và } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l.$$

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$.

Chứng minh kết quả 3.3.4.

Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$. Khi đó, $f(x_n) \rightarrow l, g(x_n) \rightarrow l$ và $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, $h(x_n) \rightarrow l$ theo Định lí kẹp cho các dãy số. Điều này chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$. □

Chẳng hạn, xét hàm zigzag $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 2k(k+1)x - 2k - 1 & \text{nếu } \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ là một số lẻ,} \\ -2k(k+1)x + 2k + 1 & \text{nếu } \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ là một số chẵn.} \end{cases}$$

Giả sử $D = [-1,1]$ và định nghĩa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0,1], \\ f(-x) & \text{nếu } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Khi đó, $-1 \leq \tilde{f}(x) \leq 1$ với mọi $x \in D$. Giả sử $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = x\tilde{f}(x)$ và $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = |x|$. Do $-g(x) \leq h(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in D$ và $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-g)(x) = 0$ nên, từ Định lí kẹp, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Bây giờ, chúng ta hãy đưa ra một điều kiện cho sự tồn tại của giới hạn của một hàm một biến thực mà không cần quan tâm đến sự hội tụ của các dãy. Kết quả sau đây có thể được so sánh với Kết quả 3.1.5).

Kết quả 3.3.5.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ được chứa trong D với một số $r > 0$ nào đó và xét $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại một số $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ sau:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $x \in D$ và $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.3.5.

Giả sử tồn tại $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ và bằng l . Giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ không thỏa mãn. Điều này có nghĩa là tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, có $x \in D$ thỏa mãn

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ nhưng } |f(x) - l| \geq \varepsilon.$$

Bằng cách lấy $\delta = 1/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta nhận thấy rằng tồn tại một dãy (x_n) trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $|x_n - c| < 1/n$, nhưng $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, $x_n \rightarrow c$ và $f(x_n) \not\rightarrow l$. Điều này mâu thuẫn với giả định $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$.

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ thỏa mãn. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$x \in D \text{ và } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Do $x_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n) \rightarrow l$. Điều này suy ra rằng $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng l . $\square$

Kế tiếp, chúng ta sẽ xem xét một dạng tương tự của Điều kiện Cauchy cho sự hội tụ của một dãy (Kết quả 2.2.6).

Kết quả 3.3.6. (Điều kiện Cauchy cho giới hạn của các hàm)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ được chứa trong D với một số $r > 0$ và xét hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$x, y \in D, 0 < |x - c| < \delta \text{ và } 0 < |y - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Chứng minh kết quả 3.3.6.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng l . Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Từ Kết quả 3.3.5), tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$x \in D \text{ và } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như vậy, với mọi $x, y \in D$ thỏa mãn $0 < |x - c| < \delta$ và $0 < |y - c| < \delta$, chúng ta sẽ có

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ngược lại, giả sử điều kiện đưa ra trong tuyên bố của mệnh đề trên là đúng. Giả sử cho trước $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$x, y \in D, 0 < |x - c| < \delta \text{ và } 0 < |y - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Xét một dãy (x_n) bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Do đó, $(f(x_n))$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Từ Điều kiện Cauchy cho các dãy (Kết quả 2.2.6), tồn tại một số $l \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_n) \rightarrow l$. Như vậy, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_1 \geq n_0$ và $|f(x_{n_1}) - l| < \varepsilon$. Do $0 < |x_{n_1} - c| < \delta$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$x \in D \text{ và } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq |f(x) - f(x_{n_1})| + |f(x_{n_1}) - l| < 2\varepsilon.$$

Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên Kết quả 3.3.5) chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tồn tại và bằng l . □

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét các giới hạn một phía. Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Giả sử cho trước một $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c) \subseteq D$ với một số $r > 0$. Chúng ta sẽ nói rằng tồn tại **giới hạn bên trái của f** khi x có xu hướng tiến đến c (từ bên trái) nếu tồn tại một số thực l sao cho

$$(x_n) \text{ là một dãy bất kì nào đó trong } D, x_n < c \text{ và } x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l.$$

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow c^- \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ tồn tại thì nó sẽ là duy nhất.

Tương tự, nếu $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c, c + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó thì chúng ta có thể định nghĩa giới hạn bên phải của $f(x)$ khi x có xu hướng tiến đến c (từ bên phải) bằng cách thay thế điều kiện “ $x_n < c$ ” bởi điều kiện “ $x_n > c$ ” trong định nghĩa nêu ở trên.

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow c^+ \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l.$$

Các kết quả tương tự với Kết quả 3.3.2), 3.3.3), 3.3.4), 3.3.5) và 3.3.6) cũng đúng cho các giới hạn bên trái và các giới hạn bên phải. Chúng ta cũng có kết quả sau đây.

Kết quả 3.3.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ đều được chứa trong D với một số $r > 0$ nào đó và xét hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l.$$

Hơn nữa, nếu $c \in D$ thì

$$f \text{ liên tục tại } c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c).$$

Chứng minh kết quả 3.3.7.

Nếu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ thì rõ ràng $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$.

Ngược lại, giả sử $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$. Khi đó, $x_n < c$ hoặc $x_n > c$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n < c$ với mọi $n \geq n_1$ thì do $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ nên chúng ta nhận thấy rằng $f(x_n) \rightarrow l$. Ngoài ra, nếu tồn tại một số tự nhiên $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n > c$ với mọi $n \geq n_2$ thì do $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$ nên, một lần nữa, chúng ta cũng nhận thấy rằng $f(x_n) \rightarrow l$. Trong trường hợp còn lại, tồn tại các số nguyên dương $j_1 < j_2 < \dots$ và $m_1 < m_2 < \dots$ sao cho $x_{j_k} < c < x_{m_k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $\mathbb{N} = \{j_k: k = 1, 2, \dots\} \cup \{m_k: k = 1, 2, \dots\}$. Do $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ nên chúng ta sẽ có $f(x_{j_k}) \rightarrow l$. Ngoài ra, do $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$ nên chúng ta sẽ có $f(x_{m_k}) \rightarrow l$. Do mọi $n \in \mathbb{N}$ đều sẽ bằng j_k hoặc m_k với một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $f(x_n) \rightarrow l$. Như vậy, chúng ta có thể kết luận rằng $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$.

Khẳng định thứ hai của mệnh đề trên xuất phát từ sự tương đương đã được chứng minh ở trên và Kết quả 3.3.1). □

Kế tiếp, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và D có chứa một nửa khoảng vô hạn có dạng (a, ∞) , trong đó $a \in \mathbb{R}$. Xét một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng có một **giới hạn của f khi x tiến đến vô cùng** nếu tồn tại một số thực l sao cho

$$(x_n) \text{ là một dãy bất kì trong } D \setminus \{c\} \text{ và } x_n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l.$$

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow \infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

Do luôn tồn tại một dãy (x_n) trong D sao cho $x_n \rightarrow \infty$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ là duy nhất. Nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ có chứa một nửa khoảng vô hạn có dạng $(-\infty, a)$, trong đó $a \in \mathbb{R}$, thì chúng ta cũng có thể định nghĩa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ theo cách tương tự và viết

$$f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

Các kết quả tương tự với Kết quả 3.3.2), 3.3.3) và 3.3.4) cũng đúng với các giới hạn khi $x \rightarrow \infty$ hoặc khi $x \rightarrow -\infty$. Bây giờ, chúng ta sẽ đưa ra một dạng tương tự của Kết quả 3.3.5) cho những giới hạn như vậy.

Kết quả 3.3.8.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ sao cho (a, ∞) được chứa trong D với một số $a \in \mathbb{R}$ nào đó và giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số.

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại một $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ sau:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $x \in D$ và $x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.3.8.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tồn tại và bằng l . Giả sử điều kiện $\varepsilon - \alpha$ không được thỏa mãn. Điều này có nghĩa là tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, có $x \in D$ thỏa mãn

$$x \geq \alpha, \text{ nhưng } |f(x) - l| \geq \varepsilon.$$

Bằng cách chọn $\alpha = n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta luôn có thể tìm được một dãy (x_n) trong D sao cho $x_n \geq n$, nhưng $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, $x_n \rightarrow \infty$ và $f(x_n) \nrightarrow l$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$.

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ thỏa mãn. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong D sao cho $x_n \rightarrow \infty$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x \in D \text{ và } x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Do $x_n \rightarrow \infty$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \geq \alpha$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n) \rightarrow l$. Điều này chỉ ra rằng $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tồn tại và bằng l . $\square$

Nhận xét.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ sao cho (a, ∞) được chứa trong D với một số $a \in \mathbb{R}$ nào đó và xét các hàm $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$. Chúng ta cũng có thể so sánh bậc độ lớn của f và g khi $x \rightarrow \infty$ giống như cách mà chúng ta đã so sánh bậc độ lớn của các dãy (a_n) và (b_n) .

Nếu tồn tại một số $K > 0$ và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \leq K|g(x)|$ với mọi $x \geq \alpha$ thì chúng ta sẽ viết $f(x) = O(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$ và chúng ta sẽ nói rằng **$f(x)$ là một đại lượng vô cùng lớn của $g(x)$ khi x tiến đến vô cùng**. Đặc biệt, nếu $g(x) = 1$ với mọi x lớn thì $f(x) = O(1)$ khi $x \rightarrow \infty$ và điều này có nghĩa là f là một hàm bị chặn. Nói rộng ra, $f(x) = O(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu bậc độ lớn của f tối đa không vượt quá bậc độ lớn của g khi $x \rightarrow \infty$. Trong trường hợp f và g là các hàm tăng đơn điệu và $f(x) = O(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$, chúng ta sẽ nói rằng **tốc độ tăng trưởng của f tối đa không vượt quá tốc độ tăng trưởng của g khi $x \rightarrow \infty$** .

Chẳng hạn,

$$10[x] + 100 = O(x) \text{ và } \frac{10}{[x]} + \frac{100}{x\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$, nếu tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ với mọi $x \geq \alpha$ thì chúng ta sẽ viết $f(x) = o(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$ và chúng ta sẽ nói rằng **$f(x)$ là một đại lượng vô cùng bé của $g(x)$ khi x tiến đến vô cùng**. Nếu $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ lớn thì $f(x) = o(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$ và điều này có nghĩa là $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/g(x))$ tồn tại và bằng không. Đặc biệt, nếu $g(x) = 1$ với mọi x lớn thì $f(x) = o(1)$ khi $x \rightarrow \infty$ và điều này cũng có nghĩa là $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \infty$. Nói rộng ra, $f(x) = o(g(x))$ khi $x \rightarrow$

∞ nếu bậc độ lớn của f nhỏ hơn bậc độ lớn của g khi $x \rightarrow \infty$. Trong trường hợp f và g là các hàm đơn điệu tăng và $f(x) = o(g(x))$ khi $x \rightarrow \infty$, chúng ta sẽ nói rằng **tốc độ tăng trưởng của f nhỏ hơn tốc độ tăng trưởng của g khi $x \rightarrow \infty$** .

Chẳng hạn,

$$10x + 100 = o(x\sqrt{x}) \text{ và } \frac{10}{[x]} + \frac{100}{x\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Giả sử tồn tại một số khác không $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau: “Với mọi số thực dương $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x) - l g(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \geq \alpha$.” Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết $f(x) \sim g(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ và chúng ta sẽ nói rằng $f(x)$ là tiệm cận với $g(x)$ khi x tiến đến ∞ . Nói rộng ra, $f(x) \sim g(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nếu $f(x)$ có cùng bậc độ lớn với $g(x)$ khi $x \rightarrow \infty$. Dễ dàng nhận thấy rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương xác định trên tập tất cả các hàm giá trị thực xác định trên D . Nếu $g(x) \neq 0$ với mọi x lớn thì $f(x) \sim g(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ nghĩa là $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/g(x))$ tồn tại và khác không. Nếu f và g là các hàm đơn điệu tăng và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \rightarrow \infty$ thì chúng ta cũng sẽ nói rằng f và g có cùng tốc độ tăng trưởng khi $x \rightarrow \infty$.

Chẳng hạn,

$$10x^2 + 100x + 1000 \sim x^2 \text{ và } \frac{10}{x^2} + \frac{100}{x^3} + \frac{1000}{x^4} \sim \frac{1}{x^2}.$$

Nếu $(-\infty, a)$ được chứa trong D với một số $a \in \mathbb{R}$ nào đó thì chúng ta sẽ có thể so sánh bậc độ lớn của f và g khi $x \rightarrow \infty$ hoặc nếu $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó thì chúng ta cũng có thể so sánh bậc độ lớn của f và g khi $x \rightarrow c$ theo cách tương tự.

Như chúng ta đã mô tả cho các dãy số, chúng ta cũng sẽ mô tả cách làm thế nào mà trong một số trường hợp ∞ hoặc $-\infty$ có thể được xem như là “giới hạn” của một hàm một biến thực. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ được chứa trong D với một số $r > 0$ nào đó. Chúng ta sẽ nói rằng **$f(x)$ có xu hướng tiến đến ∞ khi x tiến đến c** nếu

$$(x_n) \text{ là một dãy bất kì trong } D \text{ và } x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \infty.$$

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow c.$$

Chúng ta cũng sẽ đưa ra một dạng tương tự của Kết quả 3.3.5) đối với một hàm có xu hướng tiến đến vô cùng.

Kết quả 3.3.9.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ sao cho $(c - r, c)$ và $(c, c + r)$ được chứa trong D với một số $r > 0$ nào đó và giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm nào đó.

Khi đó, $f(x)$ sẽ tiến đến ∞ khi x có xu hướng tiến đến c khi và chỉ khi điều kiện $\alpha - \delta$ sau thỏa mãn:

“Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $x \in D$ và $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha$.”

Chứng minh kết quả 3.3.9.

Giả sử $f(x)$ có xu hướng tiến đến ∞ khi x có xu hướng tiến đến c . Giả sử điều kiện $\alpha - \delta$ là không đúng. Điều này có nghĩa là tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, tồn tại một số $x \in D$ thỏa mãn

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ nhưng } f(x) \leq \alpha.$$

Khi đó, tồn tại một dãy (x_n) trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $|x_n - c| < 1/n$, nhưng $f(x_n) \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, $x_n \rightarrow c$ và $f(x_n) \not\rightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với giả định $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow c$.

Ngược lại, giả sử điều kiện $\alpha - \delta$ thỏa mãn. Giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong $D \setminus \{c\}$ sao cho $x_n \rightarrow c$. Giả sử cho trước một số $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$x \in D \text{ và } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

Do $x_n \rightarrow c$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - c| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n) > \alpha$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n) \rightarrow \infty$. Điều này có nghĩa là $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow c$. $\square$

Theo cách tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa “ $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow c$ ” và một “điều kiện $\beta - \delta$ ” tương đương cũng có thể được hình thành theo cách tương tự. Ngoài ra, các giới hạn một bên (khi $x \rightarrow c^-$ hoặc khi $x \rightarrow c^+$) cũng được xử lý theo cách tương tự. Hơn nữa, chúng ta cũng có thể định nghĩa

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow \infty \text{ và } f(x) \rightarrow -\infty \text{ khi } x \rightarrow \infty$$

cũng như

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow -\infty \text{ và } f(x) \rightarrow -\infty \text{ khi } x \rightarrow -\infty$$

theo cách tương tự.

Nếu $f(x) \rightarrow \infty$ và $g(x) \rightarrow l$, trong đó $l \in \mathbb{R}$ hoặc $l = \infty$ hoặc $l = -\infty$, thì chúng ta cũng có thể thu được các kết quả tương tự liên quan đến sự tồn tại của “các giới hạn” $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ như đã làm trong Nhận xét 2) bên dưới Kết quả 2.1.7).

Các khái niệm giới hạn liên quan đến ∞ hoặc $-\infty$ rất hữu ích trong việc xem xét “các đường tiệm cận”. Nói một cách đại khái, một đường thẳng sẽ được coi là một **đường tiệm cận** của một đường cong nếu nó tiến lại gần đường cong đó một cách tùy ý. Việc phân loại các đường tiệm cận, tùy thuộc vào hệ số góc của chúng, được đưa ra bên dưới đây.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Chúng ta cũng sẽ mặc nhiên giả định D sẽ thỏa mãn một số điều kiện thích hợp cần thiết để có thể xác định giới hạn liên quan.

1. Một đường thẳng xác định bởi $y = b$, trong đó $b \in \mathbb{R}$, được gọi là một **đường tiệm cận ngang** của đường cong $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = 0.$$

2. Một đường thẳng xác định bởi $y = ax + b$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$, được gọi là một **đường tiệm cận xiên** của đường cong $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

3. Một đường thẳng xác định bởi $x = c$, trong đó $c \in \mathbb{R}$, được gọi là một **đường tiệm cận đứng** của đường cong $y = f(x)$ nếu một hoặc nhiều điều sau đây thỏa mãn:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow c^-, f(x) \rightarrow -\infty \text{ khi } x \rightarrow c^+, \\ f(x) &\rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow c^+, f(x) \rightarrow -\infty \text{ khi } x \rightarrow c^-. \end{aligned}$$

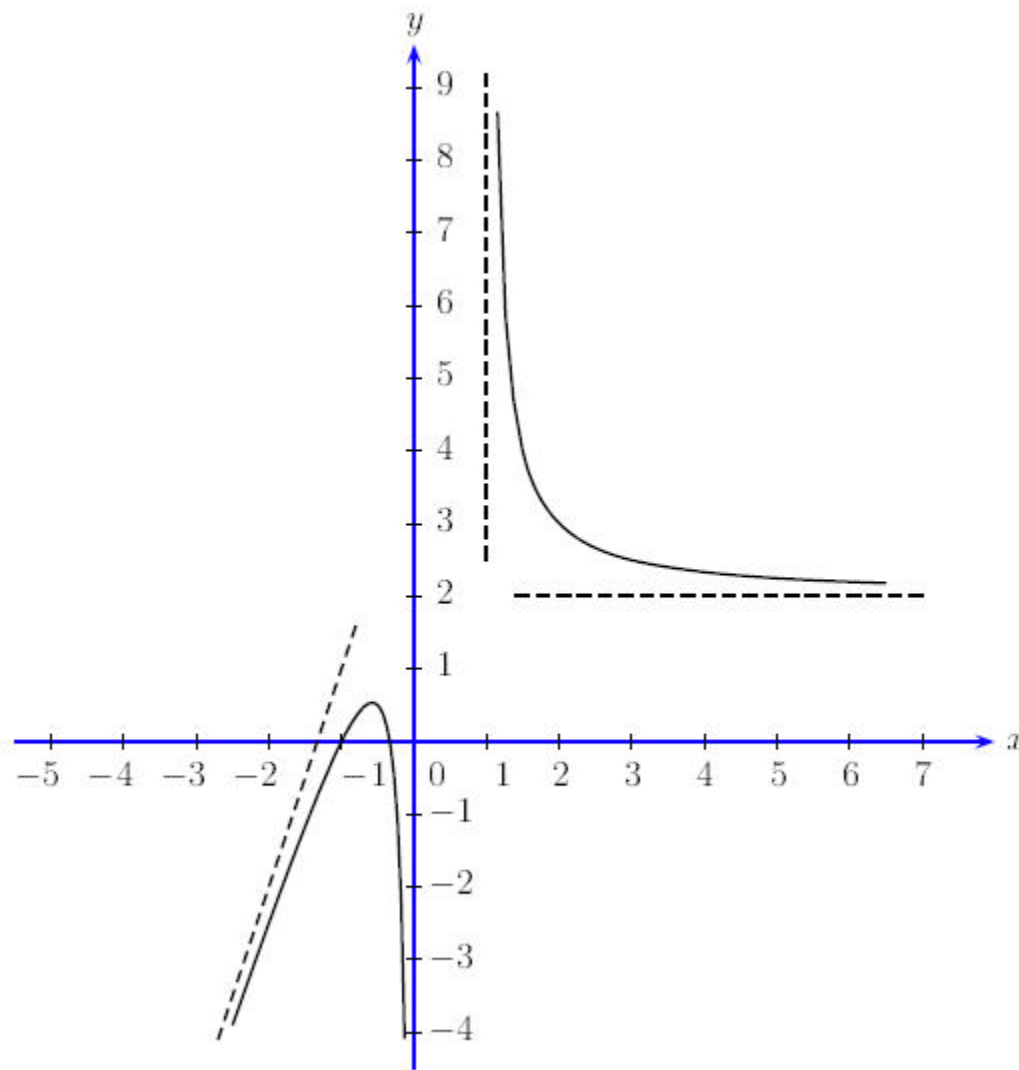
Chẳng hạn,

(i) Giả sử $D = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ và xác định $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1, \\ \frac{3x^2+4x+1}{x} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Với $x > 1$, chúng ta sẽ có $f(x) = 2 + 1/(x-1)$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2) = 0$. Do đó, đường thẳng xác định bởi $y = 2$ là một tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$. Hơn nữa, $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow 1^+$. Như vậy, đường thẳng xác định bởi $x = 1$ là một đường tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$.

Với $x < 0$, chúng ta sẽ có $f(x) = 3x + 4 + 1/x$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x - 4) = 0$. Do đó, đường thẳng xác định bởi $y = 3x + 4$ là một tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$. Hơn nữa, $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow 0^-$. Như vậy, đường thẳng xác định bởi $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm $(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1, \\ \frac{3x^2+4x+1}{x} & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$ với đường tiệm cận ngang, tiệm cận xiên, tiệm cận đứng của nó.

(ii) Giả sử P và Q là các hàm đa thức khác 0 không có nghiệm thực chung. Xét $D = \mathbb{R} \setminus E$, trong đó E là tập tất cả các nghiệm thực của hàm đa thức Q . Giả sử $f(x) = P(x)/Q(x)$ với mọi $x \in D$.

Nếu bậc của P bằng với bậc của Q thì

$$f(x) = b + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ với mọi } x \in D,$$

trong đó $b \in \mathbb{R}$ và R là một hàm đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của Q . Do $R(x)/Q(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \infty$ cũng như $x \rightarrow -\infty$ nên chúng ta cũng nhận thấy rằng đường thẳng xác định bởi $y = b$ là một tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$.

Nếu bậc của P lớn hơn bậc của Q 1 đơn vị thì

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ với mọi } x \in D,$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ và R là một hàm đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của Q . Một lần nữa, do $R(x)/Q(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \infty$ cũng như $x \rightarrow -\infty$ nên chúng ta nhận thấy rằng đường thẳng xác định bởi $y = ax + b$ là một tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$.

Giả sử $c \in E$, nghĩa là $c \in \mathbb{R}$ và $Q(c) = 0$. Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $f(x) \rightarrow \infty$ hoặc $f(x) \rightarrow -\infty$ (tùy thuộc vào dấu của các hệ số bậc nhất của các hàm đa thức P và Q) khi $x \rightarrow c^-$ cũng như $x \rightarrow c^+$. Như vậy, đường thẳng xác định bởi $x = c$ là một tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$.

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét giới hạn của các hàm đơn điệu. Chúng ta có thể so sánh các kết quả cho dưới đây với các kết quả tương ứng về giới hạn của các dãy đơn điệu.

Kết quả 3.3.10.

Giả sử $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu tăng.

Khi đó,

(i) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi f bị chặn trên; trong trường hợp này, chúng ta sẽ có

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup\{f(x): x \in (a, b)\}.$$

Nếu f không bị chặn trên thì $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow b^-$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi f bị chặn dưới; trong trường hợp này, chúng ta sẽ có

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x): x \in (a, b)\}.$$

Nếu f không bị chặn dưới thì $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow a^+$.

Ở đây, $a \in \mathbb{R}$ hoặc $a = -\infty$, và $b \in \mathbb{R}$ hoặc $b = \infty$.

Chứng minh kết quả 3.3.10.

Xét một dãy (b_n) trong (a, b) sao cho $b_n \rightarrow b$.

(i) Giả sử f bị chặn trên và kí hiệu $M = \sup\{f(x): x \in (a, b)\}$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho $M - \varepsilon < f(c)$. Bây giờ, do f là đơn điệu tăng nên chúng ta sẽ có $M - \varepsilon < f(x)$ với mọi $x \in (c, b)$. Hơn nữa, do $b_n \rightarrow b$ và $c < b$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $c < b_n$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $M - \varepsilon < f(b_n)$ với mọi $n \geq n_0$. Mặt khác, $f(b_n) \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, $f(b_n) \rightarrow M$ khi $b_n \rightarrow b$. Do (b_n) là một dãy tùy ý sao cho $b_n \rightarrow b$ nên chúng ta sẽ có $f(x) \rightarrow M$ khi $x \rightarrow b$.

Bây giờ, giả sử f không bị chặn trên. Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó, tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho $\alpha < f(c)$. Một lần nữa, do f là đơn điệu tăng nên $\alpha < f(x)$ với mọi $x \in (c, b)$. Do $b_n \rightarrow b$ và $c < b$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $c < b_n$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $\alpha < f(b_n)$ với mọi $n \geq n_0$. Điều này cho thấy rằng $f(b_n) \rightarrow \infty$ khi $b_n \rightarrow b$. Do (b_n) là một dãy tùy ý sao cho $b_n \rightarrow b$ nên chúng ta sẽ có $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow b$.

(ii) Phép chứng minh cho khẳng định (ii) này tương tự như khẳng định (i) nêu ở trên. □

Bây giờ, chúng ta sẽ sử dụng Kết quả 3.3.10) để chứng minh chiều ngược lại của Định lý giá trị trung gian (Kết quả 3.2.4) đối với các hàm đơn điệu.

Kết quả 3.3.11.

Giả sử I là một khoảng và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu trên I .

Khi đó, nếu f có tính chất giá trị trung gian trên I thì f là liên tục trên I .

Chứng minh kết quả 3.3.11.

Đầu tiên, giả sử f đơn điệu tăng trên I và f có tính chất giá trị trung gian trên I . Xét $c \in I$.

Giả sử c không phải là đầu mút bên trái cũng như không phải là đầu mút bên phải của khoảng I . Khi đó, tồn tại các số $c_1, c_2 \in I$ sao cho $c_1 < c < c_2$. Lúc này, hàm số f bị chặn trên trên khoảng (c_1, c) và nó bị chặn dưới trên khoảng (c, c_2) bởi $f(c)$. Như vậy, từ Kết quả 3.3.10), $f(x) \rightarrow l_1$ khi $x \rightarrow c^-$ và $f(x) \rightarrow l_2$ khi $x \rightarrow c^+$, trong đó

$$l_1 = \sup\{f(x): c_1 < x < c\} \text{ và } l_2 = \inf\{f(x): c < x < c_2\}.$$

Rõ ràng, $l_1 \leq f(c) \leq l_2$. Trên thực tế, do f có tính chất giá trị trung gian trên I nên chúng ta sẽ có $l_1 = f(c) = l_2$. Như vậy, từ Kết quả 3.3.7), f liên tục tại c .

Nếu c là đầu mút bên trái của khoảng I thì lập luận nêu trên cho thấy rằng $f(x) \rightarrow l_2$ khi $x \rightarrow c^+$ và $l_2 = f(c)$, trong khi nếu c là đầu mút bên phải của khoảng I thì chúng ta cũng sẽ có $f(x) \rightarrow l_1$ khi $x \rightarrow c^-$ và $l_1 = f(c)$.

Như vậy, trong mọi trường hợp, f liên tục tại c . Do c là một điểm tùy ý nằm trong I nên chúng ta nhận thấy rằng f liên tục trên I .

Nếu f đơn điệu giảm trên I và f có tính chất giá trị trung gian trên I thì $-f$ là đơn điệu tăng trên I và $-f$ cũng có tính chất giá trị trung gian trên I . Như vậy, bằng tất cả những gì chúng ta đã chứng minh ở trên, $-f$ sẽ liên tục trên I , nghĩa là f liên tục trên I . □

Chúng ta sẽ kết thúc lại phần này của bài viết bằng cách nhận xét rằng Kết quả 3.3.7) về các giới hạn trái và giới hạn phải có thể được sử dụng để chỉ ra rằng nếu một hàm lồi hoặc lõm trên một khoảng thì nó sẽ liên tục tại mọi điểm của khoảng đó ngoại trừ các đầu mút của nó.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V.Limaye, A course in calculus and real analysis, ???/??/????.
- [2]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 1 – GIẢI TÍCH 1, ???/??/????
- [3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập 1, ???/??/????