

Phép tính giới hạn hàm nhiều biến

Trương Phước Nhân, 03/02/2023

Thông thường, một khóa học cơ bản về giải tích sẽ bao gồm việc nghiên cứu các hàm giá trị thực một biến, nghĩa là các hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó D là một tập con của tập các số thực $\mathbb{R}$. Chúng ta cũng sẽ giả định rằng đã học qua một khóa học cơ bản về giải tích và đã quen thuộc với các tính chất cơ bản của các số thực và các hàm một biến thực. Để có một tài liệu để sẵn sàng tham khảo, chúng ta có thể tham khảo bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”. Tuy nhiên, để tạo sự thuận tiện cho việc khảo sát, các dữ kiện liên quan từ phép tính trên các hàm một biến sẽ được nhắc lại bất cứ khi nào cần thiết.

Đối tượng cơ bản của các nghiên cứu của chúng ta sẽ là **không gian Euclidean n – chiều** $\mathbb{R}^n$ bao gồm các n – bộ số thực, cụ thể là,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

và các hàm giá trị thực xác định trên các tập con của $\mathbb{R}^n$.

Bất cứ khi nào chúng ta viết $\mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ luôn ngầm giả định $n \in \mathbb{N}$, nghĩa là n là một số nguyên dương. Các phần tử của $\mathbb{R}^n$ đôi khi còn được gọi là các **vector** trong n – không gian $\mathbb{R}^n$, khi $n > 1$. Ngược lại, các phần tử của $\mathbb{R}$ thường được gọi là các vô hướng. Giả sử cho trước một vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ trong $\mathbb{R}^n$ và $1 \leq i \leq n$, phần tử vô hướng x_i được gọi là **tọa độ thứ i của x** .

Các phép toán đại số xác định trên $\mathbb{R}$ có thể dễ dàng được mở rộng sang cho $\mathbb{R}^n$ theo các thành phần. Như vậy, chúng ta sẽ định nghĩa **tổng** của $x = (x_1, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, \dots, y_n)$ là $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Dễ dàng nhận thấy rằng phép cộng được định nghĩa theo cách này sẽ thỏa mãn các tính chất tương tự như trong $\mathbb{R}$. Đặc biệt, **vector không** $0 = (0, \dots, 0)$ đóng một vai trò tương tự như số 0 trong $\mathbb{R}$. Chúng ta cũng có thể xác định **tích** của $(x_1, \dots, x_n)$ và $(y_1, \dots, y_n)$ là $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$. Tuy nhiên, phép nhân thành phần này lại không hoạt động tốt cho lắm. Chẳng hạn, tích thành phần của các vector khác không $(1, 0)$ và $(0, 1)$ trong $\mathbb{R}^2$ lại là vector không $(0, 0)$ nên, do đó, các nghịch đảo của các vector khác không này không thể được xác định một cách đúng đắn. Trên thực tế, nói chung, chúng ta không có bất kì một khái niệm nào về một phép chia xác định một cách hợp lý trên $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, như chúng ta sẽ giải thích ngay sau đây, quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ chỉ có thể được mở rộng một phần cho $\mathbb{R}^n$, khi $n > 1$.

Với những lý do nêu ở trên, lý thuyết về các hàm nhiều biến có một sự khác biệt đáng kể so với lý thuyết về các hàm một biến. Tuy nhiên, một khi $n > 1$, chúng ta lại không có quá nhiều khác biệt giữa các giá trị nhỏ của n và các giá trị lớn hơn của n . Điều này đặc biệt đúng với các khía cạnh cơ bản của lý thuyết hàm nhiều biến mà chúng ta sẽ phát triển ở đây. Với quan điểm này và để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta hầu như sẽ chỉ giới hạn các khảo sát trong trường hợp $n = 2$. Trong trường hợp này, chúng ta có thể hình dung một cách hiệu quả không gian $\mathbb{R}^n$ như một mặt phẳng. Ngoài ra, đồ thị của các hàm giá trị thực hai biến có thể được xem như các mặt trong không gian 3 – chiều. Tổng quát hơn, một mặt trong không gian 4 – chiều cũng có thể được xem như một hàm ba biến. Với suy nghĩ này, thỉnh thoảng, chúng ta cũng sẽ ám chỉ đến $\mathbb{R}^4$ và các hàm giá trị thực ba biến.

1. Khái niệm về các vector và các hàm vector

Trong mục **1.1. Tính chất cơ bản của các vector thực** dưới đây, chúng ta sẽ thảo luận một số khái niệm cơ bản liên quan đến các vector trong $\mathbb{R}^n$ và một số loại tập con quan trọng trong $\mathbb{R}^n$. Kế tiếp, trong mục **1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó**, chúng ta sẽ phát triển một số khía cạnh cơ bản của các hàm giá trị thực hai biến.

1.1. Tính chất cơ bản của các vector thực

Chúng ta sẽ bắt đầu thảo luận về các sự kiện cơ bản liên quan đến các tính chất đại số, tính chất thứ tự, các loại tập con quan trọng, v.v... Trong những vấn đề này, chúng ta hầu như không thể đơn giản hóa vấn đề chỉ bằng cách giới hạn các khảo sát ở $\mathbb{R}^2$ nên, do đó, chúng ta sẽ phải làm trực tiếp với $\mathbb{R}^n$ với $n \in \mathbb{N}$ tùy ý.

Tính chất đại số

Chúng ta đã thảo luận qua khái niệm về phép toán cộng các điểm trong $\mathbb{R}^n$ và thực tế là việc tương ứng tương tự này của các tính chất đại số trong $\mathbb{R}$ vẫn được giữ nguyên trong $\mathbb{R}^n$. Nói một cách chính xác hơn, điều này có nghĩa là các tính chất sau đây đều được thỏa mãn.

$$A1. x + (y + z) = (x + y) + z \text{ với mọi } x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

$$A2. x + y = y + x \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$A3. x + 0 = x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$

$$A4. \text{ Với mọi } x \in \mathbb{R}^n, \text{ tồn tại } x' \in \mathbb{R}^n \text{ sao cho } x + x' = 0.$$

Lưu ý rằng mỗi một trong số những tính chất này đều là một hệ quả trực tiếp của các tính chất tương ứng của các số thực.

Những tính chất này có thể được sử dụng ngầm trong các phần tiếp theo. Như đã được chỉ ra từ trước đó, chúng ta không có một khái niệm đủ tốt về phép nhân các điểm trong $\mathbb{R}^n$ khi $n > 2$. Nhưng chúng ta lại có những khái niệm rất hữu ích về **phép nhân vô hướng** và **tích vô hướng** được định nghĩa ngay sau đây.

Giả sử cho trước một $c \in \mathbb{R}$ và một $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ định nghĩa

$$cx = (cx_1, \dots, cx_n).$$

Điều này thường được gọi là **phép nhân vô hướng của vector x với phần tử vô hướng c** . Về mặt hình học, tích vô hướng cx sẽ tương ứng với việc kéo dài hoặc co lại vector x theo $c > 1$ hoặc $0 < c < 1$, trong khi nếu $c < 0$ thì cx sẽ tương ứng với việc phản xạ x qua gốc tọa độ và tiếp tục kéo dài hoặc co nó lại.

Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, \dots, y_n)$ cho trước trong $\mathbb{R}^n$, **tích vô hướng** (hoặc **tích trong**) của **x và y** được định nghĩa là một số thực được kí hiệu bởi $x \cdot y$ và được xác định bởi

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tích vô hướng cho phép chúng ta nói về khái niệm “góc” giữa hai vector. Chúng ta sẽ giải thích điều này một cách chi tiết hơn ngay dưới đây.

Chúng ta cũng có một khái niệm tương tự về giá trị tuyệt đối của một số thực, được định nghĩa như sau. Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, **chuẩn** (hoặc **chiều dài**) của x được định nghĩa là một số thực không âm được kí hiệu bởi $|x|$ và được xác định bởi

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Về mặt hình học, chuẩn $|x|$ đại diện cho khoảng cách giữa x và gốc tọa độ $0 = (0, \dots, 0)$. Tổng quát hơn, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, chuẩn của hiệu của chúng, nghĩa là $|x - y|$, sẽ biểu thị khoảng cách giữa x và y . Một vector u trong $\mathbb{R}^n$ mà $|u| = 1$ sẽ được gọi là một **vector đơn vị** trong $\mathbb{R}^n$. Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}^2$, các vector $i = (1, 0)$ và $j = (0, 1)$ là các vector đơn vị.

Các tính chất cơ bản của phép nhân vô hướng, tích vô hướng và chuẩn được nêu trong mệnh đề sau. Chúng ta cũng có thể nhận xét rằng bất đẳng thức trong (iv) dưới đây là một dạng phát biểu khác của **Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz** đã được đưa ra trong Kết quả 1.2.4) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”. Nhưng phép chứng minh được đưa ra ở đây là khác hoàn toàn. Bất đẳng thức trong (v) được gọi là **Bất đẳng thức tam giác**.

Kết quả 1.1.1.

Với mọi $r, s \in \mathbb{R}$ và $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ cho trước, chúng ta sẽ có

- (i) $(rs)x = r(sx)$, $r(x + y) = rx + ry$ và $(r + s)x = rx + sx$,
- (ii) $x \cdot y = y \cdot x$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ và $r(x \cdot y) = (rx) \cdot y = x \cdot (ry)$,
- (iii) $|x| \geq 0$; hơn nữa, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (iv) $|x \cdot y| \leq |x||y|$,
- (v) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (vi) $|rx| = |r||x|$.

Chứng minh kết quả 1.1.1.

Các tính chất được liệt kê trong (i), (ii) và (iii) là hiển nhiên. Bất đẳng thức trong (iv) là hiển nhiên nếu $x = 0$. Giả sử $x \neq 0$. Kí hiệu $a = x \cdot x$, $b = x \cdot y$ và $c = y \cdot y$. Khi đó, từ (iii), $a > 0$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$ cho trước, xét $q(t) = at^2 + 2bt + c$. Theo quan điểm của (i) và (ii), chúng ta sẽ có $q(t) = (tx + y) \cdot (tx + y)$ và, do đó, từ (iii), $q(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Đặc biệt, bằng cách đặt $t = -b/a$ và nhân toàn bộ $q(t)$ với a , chúng ta sẽ thu được $ac - b^2 \geq 0$, nghĩa là $b^2 \leq ac$. Như vậy, $|b| \leq \sqrt{a}\sqrt{c}$, điều này cũng chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (iv).

Bất đẳng thức trong (v) được suy ra từ (ii) và (iv), bởi vì

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Đẳng thức trong (vi) là hiển nhiên. □

Từ khẳng định (iii) và (iv) của Kết quả 1.1.1), chúng ta nhận thấy rằng nếu $x, y \in \mathbb{R}^n$ là các vector khác 0 thì $(x \cdot y / |x||y|)$ sẽ nằm trong khoảng đóng $[-1, 1]$, nghĩa là tập con $\{r \in \mathbb{R} : -1 \leq r \leq 1\}$ của $\mathbb{R}$. Chúng ta định nghĩa **góc giữa x và y** là $\cos^{-1}(x \cdot y / |x||y|)$. Nói cách khác, góc giữa x và y là số thực $\theta \in [0, \pi]$ duy nhất sao cho $x \cdot y = |x||y|\cos\theta$

Tính chất thứ tự

Trên $\mathbb{R}$, tồn tại một quan hệ thứ tự tự nhiên $\leq$ cho phép chúng ta so sánh hai số thực bất kì. Trên thực tế, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ cho trước, chúng ta sẽ viết $a \leq b$ nếu $a = b$ hoặc nếu a nằm bên trái b trên đường thẳng thực. Như đã biết, quan hệ thứ tự này đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các hàm một biến. Trong $\mathbb{R}^n$, ý tưởng về một vector ở bên trái của một vector khác dường như không có ý nghĩa gì và việc đặt câu hỏi liệu có tồn tại một quan hệ thứ tự tương tự hay không là một điều rất tự nhiên. Để hiểu điều này một cách tốt hơn, trước tiên, chúng ta hãy đưa ra các định nghĩa chính xác về ý nghĩa của một quan hệ thứ tự.

Giả sử S là một tập hợp. Một **quan hệ** trên S được định nghĩa là một tập con R của $S \times S$; với $x, y \in S$, nếu cặp (x, y) nằm trong R thì chúng ta sẽ viết xRy và nói rằng x liên quan đến y theo quan hệ R . Một quan hệ $\leq$ trên S được gọi là một **thứ tự bộ phận** trên S nếu, với mọi $x, y, z \in S$, ba tính chất sau được thỏa mãn: (i) (**tính phản xạ**) $x \leq x$, (ii) (**tính bắc cầu**) nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$ và (iii) (**tính phản đối xứng**) nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$. Nếu $\leq$ là một thứ tự bộ phận trên S thì tập S cùng với quan hệ $\leq$ sẽ được gọi là một **tập sắp thứ tự bộ phận** (hoặc đơn giản chỉ là một **poset**). Nếu S là một poset thì, với mọi $x, y \in S$, thông thường chúng ta sẽ viết $x \geq y$ như một dạng tương đương của $y \leq x$. Một **thứ tự toàn phần** (hoặc đơn giản chỉ là một **thứ tự**) trên S được định nghĩa là một thứ tự bộ phận $\leq$ trên S sao cho $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ với mọi $x, y \in S$. Nếu $\leq$ là một thứ tự toàn phần trên S thì tập S cùng với quan hệ $\leq$ sẽ được gọi là một **tập sắp thứ tự toàn phần** (hoặc đơn giản chỉ là một **tập sắp thứ tự tuyến tính**).

Chẳng hạn, thứ tự tự nhiên trên $\mathbb{R}$ là một thứ tự toàn phần. Rõ ràng là một thứ tự toàn phần luôn là một thứ tự từng phần, nhưng chiều ngược lại không nhất thiết phải luôn đúng. Chẳng hạn, giả sử trên tập các số nguyên dương, chúng ta sẽ định nghĩa $m \leq n$ nếu $m|n$, nghĩa là nếu m chia hết n . Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\leq$ là một thứ tự bộ phận trên $\mathbb{N}$, nhưng không phải là một thứ tự toàn phần trên $\mathbb{N}$. Điều này làm cho thứ tự tự nhiên trên $\mathbb{R}$ trở nên đặc biệt hữu ích trong việc nghiên cứu các hàm một biến không chỉ vì nó là một thứ tự toàn phần mà còn vì nó có nhiều tính chất hữu ích. Đầu tiên, nó sẽ tương thích với các phép toán đại số, nghĩa là, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \text{ và } cx \leq cy \text{ nếu } c \geq 0, \text{ trong khi } cx \geq cy \text{ nếu } c \leq 0.$$

Hơn nữa, thứ tự tự nhiên trên $\mathbb{R}$ còn có **Tính chất Archimedean**, có thể phát biểu như sau:

“Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 0$, tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $kx \geq y$.”

(Tính chất Archimedean của $\mathbb{R}$ thường được phát biểu như sau: “Với mọi $x \in \mathbb{R}$ với $x > 0$ cho trước, tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $k > x$ ”. Công thức được đưa ra ở đây hơi khác một chút, nhưng rõ ràng là nó vẫn tương đương với dạng phát biểu gốc. Lợi thế của dạng phát biểu này nằm ở chỗ nó vẫn có ý nghĩa trong ngữ cảnh của $\mathbb{R}^n$.)

Cuối cùng, nhưng không kém phần quan trọng, thứ tự tự nhiên trên $\mathbb{R}$ có tính chất cận trên nhỏ nhất. Để giải thích điều này, trước tiên, chúng ta hãy lưu ý rằng nếu S là một poset thì một tập con D của S được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số $\alpha \in S$ sao cho $x \leq \alpha$ với mọi $x \in D$; bất kì một số α nào như vậy cũng được gọi là một **cận trên** của S . Nếu một tập con D của S bị chặn trên thì một phần tử M của S sẽ được gọi là một **cận trên nhỏ nhất** hoặc một **supremum** của D nếu M là một cận trên của S và $M \leq \alpha$ với mọi cận trên α của D . Rõ ràng là nếu $D \subseteq S$ và D có một cận trên nhỏ nhất M thì M là duy nhất và chúng ta sẽ kí hiệu nó bởi $\sup S$. Tương tự, một tập con D của một poset S sẽ được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số $\beta \in S$ sao cho $\beta \leq x$ với mọi $x \in D$; bất kì một số β nào như vậy cũng được gọi là một **cận dưới** của S . Nếu một tập con D của S bị chặn dưới thì một phần tử m của S sẽ được gọi là một **cận dưới lớn nhất** hoặc một **infimum** của D nếu m là một cận dưới của S và $\beta \leq m$ với mọi cận dưới β của D . Một lần nữa, rõ ràng là nếu $D \subseteq S$ và D có một cận dưới nhỏ nhất m thì m là duy nhất và chúng ta sẽ kí hiệu nó bởi $\inf S$.

Bây giờ, **tính chất cận trên nhỏ nhất** của một poset S có thể được phát biểu lại như sau: “Mọi tập con không rỗng bị chặn trên của S đều có một supremum trong S ”. Một sự thật khá quan trọng cần phải biết về các số thực là tập $\mathbb{R}$ cùng với thứ tự toàn phần tự nhiên của nó sẽ có tính chất cận trên nhỏ nhất. Trong trường hợp của $\mathbb{R}^n$, chúng ta có thể dễ dàng xác định một thứ tự toàn phần tự nhiên, còn được gọi là **thứ tự từ điển** (một thứ tự từ điển $\preceq$ trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau: với $x = (x_1, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, \dots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ viết $x \preceq y$ nếu $x = y$ hoặc tọa độ khác 0 đầu tiên trong $y - x$ là một số dương), tương thích với các phép toán đại số như phép cộng và phép nhân vô hướng, nhưng nó lại không thỏa mãn tính chất Archimedean cũng như tính chất cận trên nhỏ nhất. Tuy nhiên, chúng ta lại có một thứ tự bộ phận tự nhiên hơn trên $\mathbb{R}^n$, được mô tả ngay dưới đây, không chỉ tương thích với các phép toán đại số trên $\mathbb{R}^n$, mà còn thỏa mãn tính chất cận trên nhỏ nhất.

Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, \dots, y_n)$ cho trước trong $\mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ định nghĩa

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ với mọi } i = 1, \dots, n.$$

Rõ ràng, đây là một thứ tự bộ phận trên $\mathbb{R}^n$ và nó thường được gọi là **thứ tự tích** hay **thứ tự thành phần** trên $\mathbb{R}^n$. Nếu $n > 1$ thì thứ tự tích trên $\mathbb{R}^n$ sẽ không phải là một thứ tự toàn phần; chẳng hạn, nếu $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ và $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ thì cả $x \leq y$ và $y \leq x$ đều không đúng. Tuy nhiên, thứ tự tích lại có một số tính chất đặc biệt “đẹp” được liệt kê trong mệnh đề dưới đây.

Kết quả 1.1.2.

Giả sử $\leq$ là thứ tự tích trên $\mathbb{R}^n$.

Khi đó, với mọi $r, s \in \mathbb{R}$ và $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ có:

(i) Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ cho trước với $x \leq y$, chúng ta sẽ có $x + z \leq y + z$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$; hơn nữa, với mọi $c \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có $cx \leq cy$ nếu $c \geq 0$ và $cx \geq cy$ nếu $c \leq 0$.

(ii) Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, \dots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $x_i \geq 0$ và $x_i \neq 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$, tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $kx \geq y$.

(iii) Mọi tập con không rỗng bị chặn trên của $\mathbb{R}^n$ đều có một phần tử supremum trong $\mathbb{R}^n$. Tương tự, mọi tập con không rỗng bị chặn dưới của $\mathbb{R}^n$ đều có một phần tử infimum trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh kết quả 1.1.2.

Các tính chất được liệt kê trong (i) là hiển nhiên. Để chứng minh (ii), chúng ta sẽ sử dụng tính chất Archimedean trên $\mathbb{R}$ để tìm một số tự nhiên $k_i \in \mathbb{N}$ sao cho $k_i x_i \geq y_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Khi đó, $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ sẽ thỏa mãn $k_i x_i \geq y_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$ và, đặc biệt, $kx \geq y$. Cuối cùng, giả sử D là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, với $1 \leq i \leq n$, tập D_i gồm các tọa độ thứ i của các phần tử của D là một tập con không rỗng nào đó của $\mathbb{R}$. Nếu D bị chặn trên thì mỗi D_i cũng như vậy, và nếu $M_i = \sup D_i$ thì $M = (M_1, \dots, M_n)$ rõ ràng là phần tử supremum của D trong $\mathbb{R}^n$. Tương tự, nếu D bị chặn dưới thì mỗi D_i cũng như vậy, và nếu $m_i = \inf D_i$ thì $m = (m_1, \dots, m_n)$ rõ ràng là phần tử infimum của D trong $\mathbb{R}^n$.

□

Nhận xét rằng nếu D là một tập con không rỗng bị chặn của $\mathbb{R}^n$ thì, từ khẳng định (iii) của Kết quả 1.1.2), sẽ tồn tại phần tử supremum và infimum (đối với thứ tự tích) của D và rõ ràng chúng sẽ là duy nhất. Tuy nhiên, nếu $n > 1$ thì phần tử supremum và infimum có thể cách khá xa các phần tử của D . Chẳng hạn, nếu $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ và } x_2 = 1 - x_1\}$ thì $M = (1, 1)$ và $m = (0, 0)$ lần lượt là phần tử supremum và infimum của D , và chúng ta cũng sẽ có $|x - M| = |x - m| \geq 1/\sqrt{2}$ với mọi $x \in D$.

Các khoảng, các đĩa, các tập bị chặn

Chúng ta hãy bắt đầu bằng cách nhắc lại khái niệm tổng quát về một khoảng trong $\mathbb{R}$. Để đạt được điều này, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, kí hiệu $I_{a,b}$ là khoảng đóng giữa a và b . Nói cách khác, $I_{a,b} = [a, b]$ nếu $a \leq b$, trong khi $I_{a,b} = [b, a]$ nếu $b \leq a$; một cách tương đương, $I_{a,b} = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$. Một tập con I của $\mathbb{R}$ được gọi là một **khoảng** nếu $I_{a,b} \subseteq I$ với mọi $a, b \in I$. Rõ ràng và đơn giản để nhận thấy rằng một tập con của I là một khoảng khi và chỉ khi nó là một trong các loại khoảng quen thuộc, cụ thể là một khoảng mở hoặc một khoảng đóng hoặc một nửa khoảng mở hoặc một nửa khoảng vô hạn hoặc một khoảng vô hạn kép $\mathbb{R}$. (Kết quả 1.1.6) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”). Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để định nghĩa một khái niệm tương tự như vậy trong $\mathbb{R}^n$.

Với mọi $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$ cho trước trong $\mathbb{R}^n$, kí hiệu

$$I_{a,b} = I_{a_1,b_1} \times \dots \times I_{a_n,b_n}.$$

Một tập con I của $\mathbb{R}^n$ sẽ được gọi là một **n – khoảng** nếu $I_{a,b} \subseteq I$ với mọi $a, b \in I$. Chẳng hạn, nếu $I_1, \dots, I_n$ là các khoảng trong $\mathbb{R}$ thì $I_1 \times \dots \times I_n$ sẽ là một n – khoảng. Hóa ra mọi n – khoảng đều có dạng này.

Kết quả 1.1.3.

Giả sử $I \subseteq \mathbb{R}^n$ là một n – khoảng.

Khi đó, $I = I_1 \times \dots \times I_n$ với $I_1, \dots, I_n$ là các khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$.

Chứng minh kết quả 1.1.3.

Với mọi $1 \leq j \leq n$, kí hiệu I_j là tập tất cả các tọa độ thứ j có thể có của các phần tử của I , nghĩa là, kí hiệu

$$I_j = \{a \in \mathbb{R}: \text{tồn tại một } a = (a_1, \dots, a_n) \in I \text{ sao cho } a_j = a\}.$$

Giả sử $a, b \in I_j$. Khi đó, tồn tại các $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$ trong I sao cho $a_j = a$ và $b_j = b$. Bây giờ, nếu $x \in I_{a,b}$ thì $(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$ nằm trong $I_{a,b}$ và, nên, nó cũng sẽ nằm trong I ; do đó, $x \in I_j$. Điều này chứng tỏ rằng mỗi I_j đều là một khoảng.

Kế tiếp, rõ ràng là $I \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$. Điều chứng minh chiều bao hàm thức ngược lại, kí hiệu $x = (x_1, \dots, x_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$. Khi đó, tồn tại $a_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \in I$ sao cho $a_{j,j} = x_j$ với mọi $j = 1, \dots, n$. Bây giờ, kí hiệu $u_j = (x_1, \dots, x_j, a_{j,j+1}, \dots, a_{j,n})$ với mọi $j = 1, \dots, n$. Quan sát thấy rằng $u_1 = (x_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}) = a_1 \in I$. Do $a_2 = (a_{2,1}, x_2, a_{2,3}, \dots, a_{2,n})$ nên chúng ta nhận thấy rằng $u_2 = (x_1, x_2, a_{2,3}, \dots, a_{2,n}) \in I_{u_1, a_2} \subseteq I$. Kế tiếp, do $a_3 = (a_{3,1}, a_{3,2}, x_3, a_{3,4}, \dots, a_{3,n})$ nên chúng ta nhận thấy rằng $u_3 \in I_{u_2, a_3} \subseteq I$. Bằng cách tiếp tục thực hiện theo cách này, chúng ta nhận thấy rằng $u_j \in I_{u_{j-1}, a_j} \subseteq I$ với mọi $j = 2, \dots, n$. Đặc biệt, $x = u_n \in I$. Như vậy, $I = I_1 \times \dots \times I_n$. $\square$

Như một trường hợp đặc biệt của mệnh đề trên, chúng ta lưu ý rằng mọi 2 – khoảng trong $\mathbb{R}^2$ đều có dạng

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in I \text{ và } y \in J\},$$

trong đó I và J là các khoảng trong $\mathbb{R}$. Trên thực tế, điều này sẽ được ngầm sử dụng trong các phần tiếp theo.

Một n – khoảng có dạng $I_1 \times \dots \times I_n$, trong đó mỗi $I_1, \dots, I_n$ đều là một khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$, được gọi là một **siêu lập phương** trong $\mathbb{R}^n$. Nói cách khác, một siêu lập phương sẽ là một tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng $\{x \in \mathbb{R}^n: a \leq x \leq b\}$ với các $a, b \in \mathbb{R}^n$ nào đó. Lưu ý rằng một siêu lập phương sẽ không rỗng khi và chỉ khi $a \leq b$. Một siêu lập phương trong $\mathbb{R}^n$ sẽ được gọi là một **hình chữ nhật** khi $n = 2$ và là một **hình lập phương** khi $n = 3$.

Trong các nghiên cứu cục bộ của một hàm một biến trong một lân cận gần một điểm $c \in \mathbb{R}$, nó sẽ thường rất hữu ích khi chúng ta xét các khoảng mở đối xứng quanh c , nghĩa là, các khoảng mở có dạng $(c - r, c + r)$, trong đó r là một số thực dương nào đó. Trong trường hợp của $\mathbb{R}^n$, vai trò tương ứng sẽ được thực hiện bởi các tập tròn giống như các hình đĩa mở hoặc các hình vuông mở khi $n = 2$

Các định nghĩa tổng quát hơn sẽ được đưa ra dưới đây. Những điều này sẽ có thể dễ theo dõi hơn nếu chúng ta để ý rằng khoảng mở đối xứng $(c - r, c + r)$ có thể được biểu diễn lại dưới dạng $\{x \in \mathbb{R}: |x - c| < r\}$.

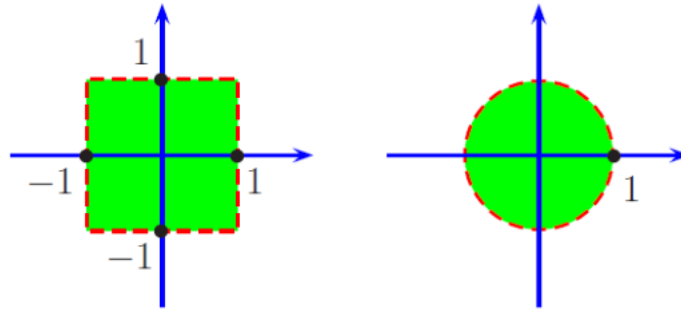
Với mọi $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ cho trước và với mọi $r > 0$, chúng ta định nghĩa

$$S_r(c) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: |x_i - c_i| < r \text{ với } i = 1, \dots, n\}$$

và

$$B_r(c) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x - c| < r\}.$$

Chẳng hạn, nếu $n = 2$ thì $S_r(c)$ trông giống như một hình vuông (không có biên) với “tâm” tại $c = (c_1, c_2)$ và mỗi cạnh đều có chiều dài $2r$, trong khi $B_r(c)$ trông giống như một hình đĩa (không có biên) với “tâm” tại $c = (c_1, c_2)$ và đường kính $2r$. Như vậy, khi $n = 2$, chúng ta sẽ gọi $S_r(c)$ là **hình vuông mở với tâm tại c và bán kính r** và $B_r(c)$ là **hình đĩa mở với tâm tại c và bán kính r** . Khi $n = 2$ và $c = (c_1, c_2)$, chúng ta sẽ thường viết $S_r(c_1, c_2)$ (hoặc $B_r(c_1, c_2)$) thay cho $S_r(c)$ (hoặc $B_r(c)$).



Hình vẽ minh họa hình vuông mở $S_1(0,0)$ và hình đĩa mở $B_1(0,0)$.

Một tập con D của $\mathbb{R}^n$ được gọi là **bị chặn** nếu nó bị chặn trên cũng như bị chặn dưới, nghĩa là, nếu tồn tại các $a, b \in \mathbb{R}^n$ sao cho $a \leq x \leq b$ với mọi $x \in D$. Một cách tương đương, D được gọi là **bị chặn** nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho $D \subseteq S_r(0)$. Chẳng hạn, nếu $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ thì D sẽ bị chặn, trong khi phần bù $\mathbb{R}^2 \setminus D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$ của nó lại không bị chặn.

Nếu một tập con D của $\mathbb{R}^n$ là khác rỗng và bị chặn thì chúng ta sẽ định nghĩa **đường kính của D** , kí hiệu bởi $diam(D)$, là số thực

$$diam(D) = \sup\{|x - y| : x, y \in D\}.$$

Nói một cách đại khái, đường kính của một tập không rỗng bị chặn chính là khoảng cách lớn nhất có thể có giữa hai điểm bất kì của nó. Chẳng hạn, nếu R là một hình chữ nhật với độ dài các cạnh a, b thì

$$diam(R) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Các đoạn thẳng và các đường

Giả sử $c, d \in \mathbb{R}^n$. **Đoạn thẳng nối giữa c và d** được định nghĩa là tập con $\{(1 - t)c + td : t \in [0, 1]\}$ của $\mathbb{R}^n$. Lưu ý rằng các đầu mút c và d sẽ lần lượt tương ứng với các giá trị tham số $t = 0$ và $t = 1$. Với mọi $D \subseteq \mathbb{R}^n$, chúng ta sẽ nói rằng đoạn thẳng nối giữa c và d là nằm trong D nếu $(1 - t)c + td \in D$ với mọi $t \in [0, 1]$.

Nếu $n = 1$ thì một đoạn thẳng về cơ bản sẽ là cách duy nhất để nối c và d . Nhưng nếu $n > 1$ thì chúng ta sẽ có nhiều khoảng trống hơn để di chuyển và các điểm c và d có thể được nối với nhau bởi nhiều đường khác nhau. Về mặt hình thức, một **đường** trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa là một n -bộ $(x_1, \dots, x_n)$ của các hàm liên tục $x_1, \dots, x_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$. Thông thường thì chúng ta đơn giản

sẽ chỉ nói rằng đường đi được xác định bởi $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Khi đó, chúng ta sẽ hiểu rằng $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ và $x_1, \dots, x_n$ là các hàm liên tục từ $[\alpha, \beta]$ đến $\mathbb{R}$.

Giả sử Γ là một đường trong $\mathbb{R}^n$ xác định bởi $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Các đầu mút $(x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$ và $(x_1(\beta), \dots, x_n(\beta))$ lần lượt được gọi là **điểm đầu** và **điểm cuối** của Γ . Nếu chúng ta kí hiệu $c = (x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$ và $d = (x_1(\beta), \dots, x_n(\beta))$ thì Γ sẽ được gọi là một đường từ c đến d (hoặc một đường nối giữa c và d). Với mọi $D \subseteq \mathbb{R}^n$ cho trước, chúng ta sẽ nói rằng đường Γ nằm trong D nếu $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D$ với mọi $t \in [\alpha, \beta]$.

Hai cách để chúng ta có thể nói các điểm trong $\mathbb{R}^n$ (bởi một đoạn thẳng hoặc bởi một đường) sẽ dẫn đến các định nghĩa sau.

Một tập con D của $\mathbb{R}^n$ sẽ được gọi là

1. **lồi** nếu đoạn thẳng nối giữa hai điểm bất kì của D đều nằm trong D ,
2. **liên thông (đường)** nếu hai điểm bất kì của D đều có thể được nối với nhau bởi một đường nào đó nằm trong D .

Chẳng hạn,

(i) Với mọi $r \in \mathbb{R}$ và $c \in \mathbb{R}^n$, các tập $S_r(c)$ và $B_r(c)$ là các tập lồi. Điều này có thể được suy ra từ cách định nghĩa của một đoạn thẳng và bất đẳng thức tam giác (khẳng định (v) của Kết quả 1.1.1).

(ii) Nếu $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi thì, với mọi $c = (c_1, \dots, c_n)$ và $d = (d_1, \dots, d_n)$ nằm trong D , đường tương ứng với đoạn thẳng nối giữa c và d , nghĩa là đường xác định bởi $((1-t)c_1 + td_1, \dots, (1-t)c_n + td_n)$, $t \in [0,1]$, nằm trong D . Do đó, D là liên thông đường. Như vậy, mọi tập lồi đều liên thông đường. Tuy nhiên, chiều ngược lại lại không đúng. Chẳng hạn, nếu $D = \mathbb{R}^2 \setminus S_1(0,0)$ là phần bù của hình vuông mở bán kính 1 với tâm tại gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^2$ thì D là liên thông đường, nhưng D lại không lồi.

(iii) Trên $\mathbb{R}$, khái niệm về một tập lồi và một tập liên thông đường là trùng nhau.

Thật vậy, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ thì

$$D \text{ là lồi} \Leftrightarrow D \text{ là liên thông đường} \Leftrightarrow D \text{ là một khoảng trong } \mathbb{R}.$$

Sự tương đương của ba khái niệm này xuất phát từ các định nghĩa và định lý giá trị trung gian trong $\mathbb{R}$, nghĩa là nếu $x: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục thì $x([\alpha, \beta])$ sẽ là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

(iv) Nếu I là một n – khoảng thì, từ Kết quả 1.1.3), chúng ta nhận thấy rằng I là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$; đặc biệt, từ khẳng định (ii) nêu ở trên, I sẽ là liên thông đường.

(v) Như thường lệ, kí hiệu $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ và xét $D = \mathbb{Q}^n = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n: r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}\}$. Khi đó, D không thể là liên thông đường. Thật vậy, nếu D là liên thông đường thì, bằng cách thu hẹp việc khảo sát ở một trong các tọa độ, chúng ta nhận thấy rằng $\mathbb{Q}$ là liên thông đường và do đó, từ khẳng định (iii) nêu ở trên, $\mathbb{Q}$ sẽ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Nhưng tất nhiên, $\mathbb{Q}$ không thể là một khoảng trong $\mathbb{R}$ bởi vì chúng ta đã biết rằng giữa hai số hữu tỉ bất kì luôn có một số vô tỉ (Kết quả 1.1.5) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”).

1.2. Hàm và các tính chất hình học của nó

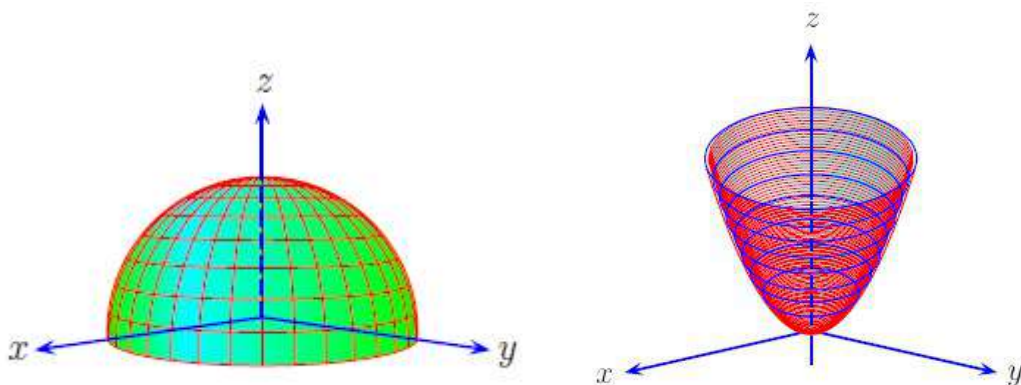
Trong mục phần này của bài viết, chúng ta sẽ giới hạn các khảo sát trên $\mathbb{R}^n$ với $n = 2$ và phát triển một số khái niệm cơ bản liên quan đến đối tượng trung tâm của các nghiên cứu của chúng ta, cụ thể là các hàm hai biến. Chúng ta sẽ đưa ra các ví dụ cơ bản về các hàm và lưu ý rằng có hai loại hàm chính: các hàm đại số và các hàm siêu việt. Nổi bật nhất trong số đó chính là các hàm đa thức và các hàm phân thức. Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một số tính chất hình học cơ bản của các hàm này. Hầu hết các tính chất này đều có liên quan mật thiết với các khái niệm như tính liên tục và tính khả vi. Điều cốt yếu ở đây là hiểu được bản chất bên trong và bản chất hình học của các tính chất này, và nhận ra rằng các khía cạnh cơ bản có thể được nghiên cứu mà không cần thiết phải viện đến tính liên tục và tính khả vi.

Các khái niệm cơ bản

Một hàm (giá trị thực) hai biến đơn giản chỉ là một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó D là một tập con của $\mathbb{R}^2$. Chẳng hạn, nếu $D = B_1(0,0)$ thì $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, với $(x, y) \in D$, sẽ xác định một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Hàm hợp của một hàm chẳng hạn như $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ có thể được hình thành theo ít nhất ba cách. Chẳng hạn, với mọi $E \subseteq \mathbb{R}$ cho trước sao cho $f(D) \subseteq E$ và một hàm $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta có thể tạo thành một hàm hợp $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Hơn nữa, với mọi $E \subseteq \mathbb{R}$ cho trước và các hàm $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $(x(t), y(t)) \in D$, chúng ta có thể tạo thành một hàm hợp $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$, với mọi $t \in E$. Tương tự, nếu $E \subseteq \mathbb{R}^2$ và $x, y: E \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ thì chúng ta cũng có thể tạo thành một hàm hợp $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, với mọi $(u, v) \in E$.

Tổng, tích và nhân vô hướng của các hàm giá trị thực hai biến lần lượt được xác định bởi phép tổng, phép tích và phép nhân vô hướng điểm. Như vậy, với mọi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ cho trước, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, chúng ta kí hiệu $f + g, fg, rf$ lần lượt là các hàm từ D đến $\mathbb{R}$ được xác định bởi $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$, $(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$, $(rf)(x, y) = rf(x, y)$, với mọi $(x, y) \in D$. Hơn nữa, nếu $g(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì thương f/g là hàm từ D đến $\mathbb{R}$ được xác định bởi $(f/g)(x, y) = f(x, y)/g(x, y)$, với mọi $(x, y) \in D$. Ngoài ra, nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì, với mọi $r \in \mathbb{R}$, lũy thừa bậc r f^r là hàm từ D đến $\mathbb{R}$ được xác định bởi $(f^r)(x, y) = f(x, y)^r$, với mọi $(x, y) \in D$. Thông thường, chúng ta sẽ viết $f \leq g$ khi $f(x, y) \leq g(x, y)$, với mọi $(x, y) \in D$.

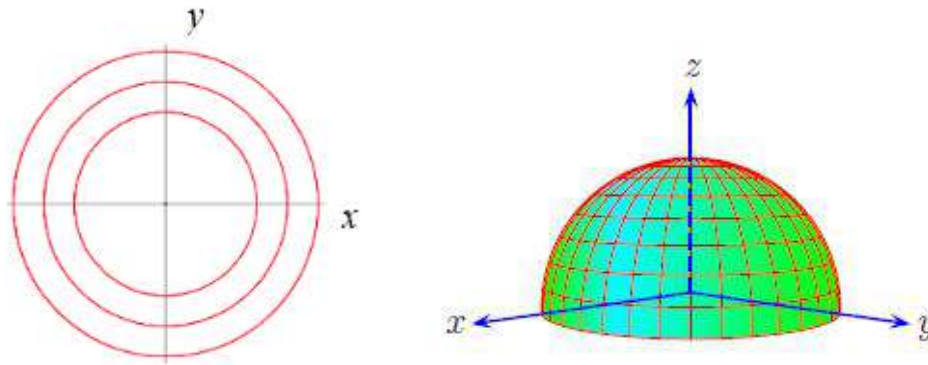
Với mọi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ cho trước và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, **đồ thị** của f được định nghĩa là tập con $\{(x, y, f(x, y)): (x, y) \in D\}$ của $\mathbb{R}^3$; nói cách khác, đồ thị của f là mặt trong $\mathbb{R}^3$ xác định bởi $z = f(x, y)$, với mọi $(x, y) \in D$. Chẳng hạn, đồ thị của $f: B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là một bán cầu trên, trong khi đồ thị của $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$ là một paraboloid.



Hình vẽ minh họa bán cầu trên $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và paraboloid $z = x^2 + y^2$.

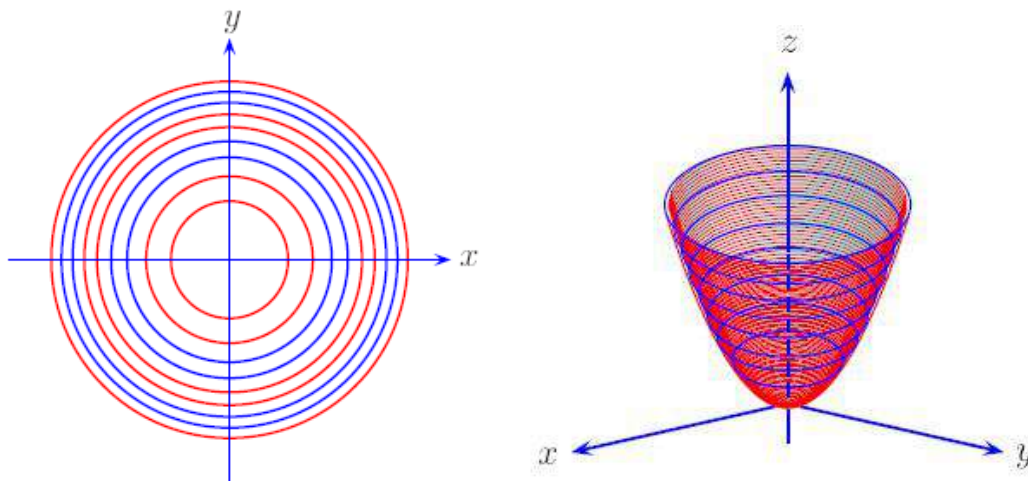
Nói chung, rất khó để có thể vẽ đồ thị của các hàm hai biến, nhưng chúng ta có thể hình dung phần nào đó về đồ thị bằng cách nhìn vào một số đường cong đặc biệt liên quan đến hàm này. Với $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, **đường đồng mức của f tương ứng với một số $c \in \mathbb{R}$ bất kì** là một đường cong trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = c$, $(x, y) \in D$, nghĩa là, tập con $\{(x, y) \in D: f(x, y) = c\}$ của $\mathbb{R}^2$; **đường mức của f tương ứng với một số $c \in \mathbb{R}$ bất kì** là một đường cong trong $\mathbb{R}^3$ thu được bằng cách lấy giao của mặt xác định bởi $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, với mặt phẳng nằm ngang xác định bởi $z = c$, nghĩa là, tập con $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D \text{ và } f(x, y) = c\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Chẳng hạn, nếu $f: B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, với mọi $(x, y) \in B_1(0,0)$, thì các đường đồng mức của f là các đường tròn đồng tâm với tâm tại gốc tọa độ và bán kính ≤ 1 , trong khi các đường mức của f là các đường tròn trên bán cầu trên thu được bằng cách lấy giao của nó với các mặt phẳng xác định bởi $z = c$ khi c thay đổi trên $[0,1]$.



Hình vẽ minh họa các đường đồng mức và các đường mức của hàm $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Các đường đồng mức của $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cũng là các đường tròn đồng tâm với tâm tại gốc tọa độ và bán kính bất kì; nhưng đối với các giá trị cách đều nhau của c , các đường đồng mức $f(x, y) = c$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, không được đặt đều đặn như trong trường hợp của nửa bán cầu.



Hình vẽ minh họa các đường đồng mức và các đường mức của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Bây giờ, chúng ta sẽ thảo luận về một số ví dụ cơ bản về các hàm hai biến. Cơ bản nhất trong số này là các hàm đa thức. Trước khi thảo luận về những điều này, trước tiên, chúng ta hãy nhắc lại một vài khái niệm cơ bản từ đại số.

Một **đa thức theo hai biến x và y** (với các hệ số thực) được định nghĩa là một tổng hữu hạn với các số hạng có dạng $cx^i y^j$, trong đó i, j là các số nguyên không âm và $c \in \mathbb{R}$; ở đây, c được gọi là **hệ số** của số hạng $cx^i y^j$ và $i + j$ được gọi là **tổng bậc** của nó, miễn là nó là một số hạng khác không, nghĩa là, $c \neq 0$. Hai đa thức được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có các số hạng khác không giống hệt nhau. **Đa thức không** được định nghĩa là một đa thức với tất cả các hệ số của nó đều bằng không. **Tổng bậc** (hoặc đơn giản chỉ là **bậc**) của một đa thức khác không là giá trị lớn nhất trong số các tổng bậc của các số hạng khác không của nó. Một đa thức khác không được gọi là **thuần nhất** nếu tất cả các số hạng khác không của nó đều có cùng tổng bậc. Chẳng hạn, $x^5 y + 2x^4 + y^2 + 1$ và $x^3 + x^2 y + 6xy^2$ lần lượt là các đa thức với tổng bậc bằng 6 và 3; cái sau là thuần nhất, trong khi cái trước thì không. Lưu ý rằng chúng ta cũng có thể tính giá trị của một đa thức tại các điểm của $\mathbb{R}^2$. Như vậy, nếu $p(x, y)$ là một đa thức theo các biến x và y thì, với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, bằng cách thay thế x bởi x_0 và y bởi y_0 trong $p(x, y)$, chúng ta sẽ thu được một số thực, kí hiệu bởi $p(x_0, y_0)$. Quan sát thấy rằng nếu $p(x, y)$ là một đa thức thuần nhất bậc d thì $p(\lambda x_0, \lambda y_0) = \lambda^d p(x_0, y_0)$, với mọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm. Nếu tồn tại một đa thức hai biến $p(x, y)$ sao cho $f(x_0, y_0) = p(x_0, y_0)$, với mọi $(x_0, y_0) \in D$, thì f sẽ được gọi là một **hàm đa thức xác định trên D** . Trong trường hợp $D = \mathbb{R}^2$ hoặc tổng quát hơn, khi $D = I \times J$, trong đó cả I và J đều là các khoảng có chứa nhiều hơn một điểm trong $\mathbb{R}$, đa thức $p(x, y)$ sẽ được xác định duy nhất bởi hàm f . Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta có thể nói về tổng bậc hoặc các hệ số của một hàm đa thức f . Chúng ta sẽ nói rằng f là một **hàm phân thức** trên D nếu tồn tại các đa thức hai biến $p(x, y)$ và $q(x, y)$ sao cho $q(x_0, y_0) \neq 0$, với mọi $(x_0, y_0) \in D$, và $f(x_0, y_0) = p(x_0, y_0)/q(x_0, y_0)$, với mọi $(x_0, y_0) \in D$. Các đa thức $p(x, y)$ và $q(x, y)$ không được xác định một cách duy nhất bởi hàm phân thức f ngay cả khi $D = \mathbb{R}^2$.

Chẳng hạn, $(x^3 - x^2 + x - 1)/(x^2 y^2 + 2x^2 + y^2 + 2)$ và $(xy^2 + x - y^2 + 1)/(y^4 + 3y^2 + 2)$ xác định cùng một hàm phân thức trên $\mathbb{R}^2$, nhưng tử số và mẫu số tương ứng lại không giống nhau.

Chúng ta sẽ nói rằng f là một **hàm đại số** xác định trên D nếu $z = f(x, y)$ thỏa mãn một phương trình có dạng

$$p_n(x, y)z^n + p_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \cdots + p_1(x, y)z + p_0(x, y) = 0, \text{ với mọi } (x, y) \in D,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $p_0(x, y), p_1(x, y), \dots, p_n(x, y)$ là các đa thức hai biến sao cho $p_n(x, y)$ là một đa thức khác không.

Chẳng hạn, hàm $f: B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, với mọi $(x, y) \in B_1(0,0)$, là một hàm đại số, bởi vì hàm $z = f(x, y)$ thỏa mãn phương trình $z^2 - (x^2 + y^2 - 1) = 0$, với mọi $(x, y) \in B_1(0,0)$.

Cuối cùng, nếu f không phải là một hàm đại số thì chúng ta sẽ nói f là một **hàm siêu việt**.

Chẳng hạn, nếu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x, y) = \sin(xy)$ là một hàm siêu việt bởi vì nếu $z = f(x, y)$ thỏa mãn một phương trình thuộc loại nêu ở trên thì, bằng cách thay thế y bởi một giá trị phù hợp, chúng ta nhận thấy rằng hàm (một biến) $\sin$ là đại số, nhưng chúng ta đã biết từ trước đó rằng hàm $\sin$ là siêu việt.

Một cách hữu ích khác để chúng ta có thể tạo ra các ví dụ về các hàm là kết hợp hoặc ghép các hàm đã biết lại với nhau.

Chẳng hạn, nếu I và J là các khoảng trong $\mathbb{R}$, $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm một biến thì $f, g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$ và $g(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ là các hàm hai biến xác định trên $I \times J$.

Nếu D_1 và D_2 là các tập con của $\mathbb{R}^2$, $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm hai biến sao cho $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, với mọi $(x, y) \in D_1 \cap D_2$, thì $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D_1, \\ f_2(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

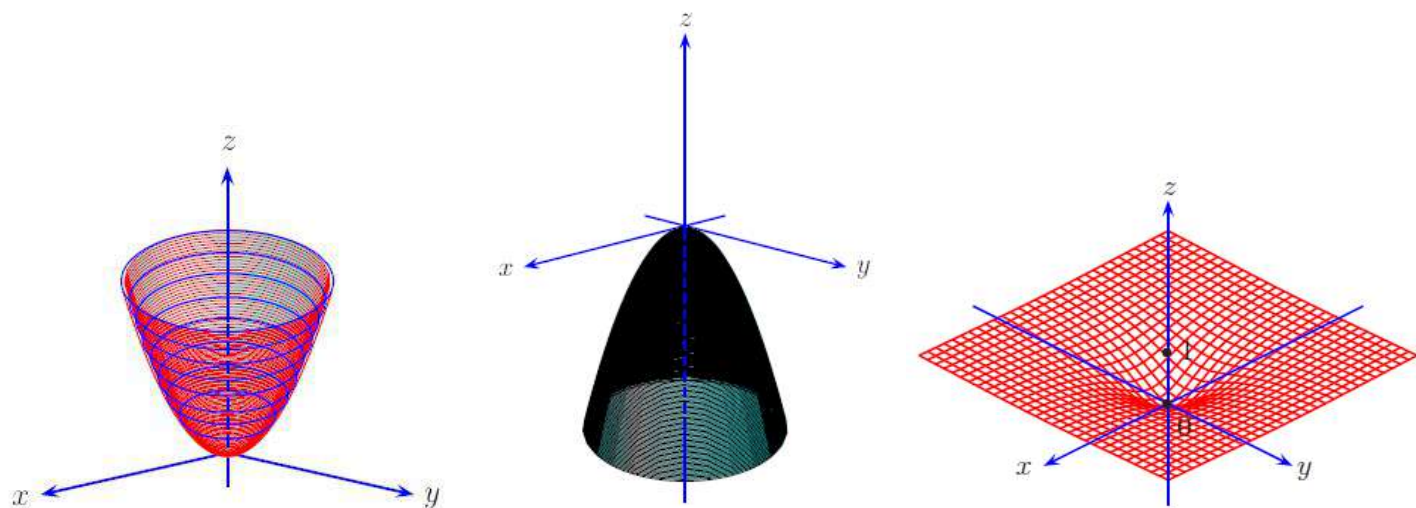
chỉ ra một hàm hai biến xác định trên $D_1 \cup D_2$, mà chúng ta thường gọi là hàm thu được bằng cách ghép f_1 và f_2 lại với nhau.

Các hàm bị chặn

Để nói về các hàm bị chặn, trên thực tế, chúng ta sẽ sử dụng các thuật ngữ áp dụng cho miền giá trị của một hàm cho trước. Các định nghĩa được đưa ra dưới đây tương tự như các khái niệm tương ứng trong trường hợp hàm một biến.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Chúng ta sẽ nói rằng f **bị chặn trên** trên D nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x, y) \leq \alpha$, với mọi $(x, y) \in D$; trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng f **đạt được cận trên của nó trên D** nếu tồn tại một $(x_0, y_0) \in D$ sao cho $\sup\{f(x, y): (x, y) \in D\} = f(x_0, y_0)$. Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng f **bị chặn dưới** trên D nếu tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x, y) \geq \beta$, với mọi $(x, y) \in D$; trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng f **đạt được cận dưới của nó trên D** nếu tồn tại một $(x_0, y_0) \in D$ sao cho $\inf\{f(x, y): (x, y) \in D\} = f(x_0, y_0)$. Cuối cùng, chúng ta sẽ nói rằng f **bị chặn** trên D nếu nó bị chặn trên trên D cũng như bị chặn dưới trên D ; trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng f **đạt được các cận của nó trên D** nếu nó đạt được cận trên của nó trên D cũng như đạt được cận dưới của nó trên D .

Chẳng hạn, hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = (x^2 + y^2)$ bị chặn dưới (nhưng không bị chặn trên) trên $\mathbb{R}^2$ và đạt được cận dưới của nó (là 0), trong khi hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ bị chặn trên (nhưng không bị chặn dưới) trên $\mathbb{R}^2$ và đạt được cận trên của nó (là 0). Hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = xy$ không bị chặn dưới cũng như không bị chặn trên trên $\mathbb{R}^2$. Như vậy, mỗi một hàm trong số ba hàm này sẽ không bị chặn trên $\mathbb{R}^2$. Mặt khác, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = (x^2 + y^2) / (x^2 + y^2 + 1)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ và nó đạt được cận dưới (là 0), nhưng không đạt được chặn trên (là 1).



Hình vẽ minh họa đồ thị của các hàm $f(x, y) = (x^2 + y^2)$, $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) / (x^2 + y^2 + 1).$$

Tính đơn điệu và tính song đơn điệu

Khái niệm thứ tự tích trên $\mathbb{R}^2$ cho phép chúng ta nói về tính đơn điệu của một hàm hai biến. Ngoài ra, chúng ta còn có một khái niệm liên quan nhưng hơi khác biệt đối với các hàm hai biến, được gọi là **tính song đơn điệu**, sẽ được thảo luận ngay sau đây.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Ngoài ra, kí hiệu I và J là các khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $I \times J \subseteq D$. Chúng ta sẽ nói rằng

1. f là **tăng đơn điệu** trên $I \times J$ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ trong $I \times J$, chúng ta có

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2),$$

2. f là **giảm đơn điệu** trên $I \times J$ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ trong $I \times J$, chúng ta có

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) \geq f(x_2, y_2),$$

3. f là **đơn điệu** trên $I \times J$ nếu f tăng đơn điệu trên $I \times J$ hoặc f giảm đơn điệu trên $I \times J$,

4. f là **song tăng đơn điệu** (hoặc **tăng song song**) trên $I \times J$ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ trong $I \times J$, chúng ta có

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2),$$

5. f là **song giảm đơn điệu** (hoặc **giảm song song**) trên $I \times J$ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ trong $I \times J$, chúng ta có

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) \geq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2),$$

6. f là **song đơn điệu** trên $I \times J$ nếu f song tăng đơn điệu trên $I \times J$ hoặc f song giảm đơn điệu trên $I \times J$.

Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng f tăng đơn điệu trên $I \times J$ khi và chỉ khi nó tăng đơn điệu theo từng biến trong số hai biến, nghĩa là, với mọi $x \in I$ cố định cho trước, hàm $y \mapsto f(x, y)$ từ J đến $\mathbb{R}$ là tăng trên J và, với mọi $y \in J$ cố định cho trước, hàm $x \mapsto f(x, y)$ từ I đến $\mathbb{R}$ là tăng trên I . Tương tự như vậy đối với các hàm giảm đơn điệu. Kết quả sau đây chỉ ra các điều kiện mà theo đó một hàm tăng theo biến x và một hàm tăng theo biến y có thể được cộng hoặc nhân lại với nhau để tạo ra một hàm hai biến đơn điệu hoặc song đơn điệu.

Kết quả 1.2.1.

Giả sử I, J là các khoảng khác rỗng trong $\mathbb{R}$. Với mọi hàm $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$, xét $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \phi(x) + \psi(y) \text{ và } g(x, y) = \phi(x)\psi(y), \text{ với mọi } (x, y) \in I \times J.$$

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau:

- (i) f tăng đơn điệu trên $I \times J$ khi và chỉ khi ϕ tăng trên I và ψ tăng trên J .
- (ii) Giả sử $\phi(x) \geq 0$ và $\psi(y) \geq 0$, với mọi $x \in I, y \in J$, và đồng thời $\phi(x_0) > 0$ với một $x_0 \in I$ nào đó và $\psi(y_0) > 0$ với một $y_0 \in J$ nào đó. Khi đó, g tăng đơn điệu trên $I \times J$ khi và chỉ khi ϕ tăng trên I và ψ tăng trên J .
- (iii) f luôn tăng song song cũng như giảm song song trên $I \times J$.
- (iv) Nếu ϕ đơn điệu trên I và ψ đơn điệu trên J thì g là song đơn điệu trên $I \times J$. Cụ thể hơn, nếu ϕ và ψ đều tăng hoặc cả hai đều giảm thì g tăng song song, trong khi nếu ϕ tăng và ψ giảm hoặc ngược lại thì g giảm song song.

Chứng minh kết quả 1.2.1.

Nhận thấy rằng các khẳng định (i) và (ii) đều là các hệ quả đơn giản có thể suy ra trực tiếp từ các định nghĩa. Tiếp theo, khẳng định (iii) có thể được suy ra bằng cách lưu ý rằng, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$, chúng ta luôn có $f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$. Cuối cùng, do đẳng thức $g(x_2, y_2) + g(x_1, y_1) - g(x_1, y_2) - g(x_2, y_1) = (\phi(x_2) - \phi(x_1))(\psi(y_2) - \psi(y_1))$ đúng với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ nên điều này cũng ngụ ý tính đúng đắn của các khẳng định nêu trong (iv). $\square$

Các kết quả tương tự với các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.2.1) cũng đúng cho các hàm đơn điệu giảm. Ngoài ra, chiều ngược lại của khẳng định (iii) cũng đúng. Mệnh đề trên cũng như mệnh đề dưới đây có thể được sử dụng để tạo ra một số ví dụ về các hàm đơn điệu và song đơn điệu.

Kết quả 1.2.2.

Giả sử I, J là các khoảng khác rỗng trong $\mathbb{R}$.

Khi đó, tập $I + J = \{x + y: x \in I \text{ và } y \in J\}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Ngoài ra, giả sử $\phi: I + J \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì và xét hàm $f: I + J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \phi(x + y), \text{ với mọi } (x, y) \in I \times J.$$

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau đây:

- (i) ϕ tăng trên $I + J \Rightarrow f$ tăng đơn điệu trên $I \times J$.
- (ii) ϕ giảm trên $I + J \Rightarrow f$ giảm đơn điệu trên $I \times J$.
- (iii) ϕ lồi trên $I + J \Rightarrow f$ tăng song song trên $I \times J$.
- (iv) ϕ lõm trên $I + J \Rightarrow f$ giảm song song trên $I \times J$.

Chứng minh kết quả 1.2.2.

Giả sử $x_1, x_2 \in I$ và $y_1, y_2 \in J$ sao cho $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ và xét một số thực $r \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 + y_1 < r < x_2 + y_2$. Khi đó, tồn tại một số thực $t \in \mathbb{R}$ với $0 < t < 1$ sao cho $r = t(x_1 + y_1) + (1 - t)(x_2 + y_2)$ (trên thực tế, chúng ta có thể chọn $t = (x_2 + y_2 - r)/(x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$). Do đó, nếu $x = tx_1 + (1 - t)x_2$ và $y = ty_1 + (1 - t)y_2$ thì $x \in I, y \in J$ và $r = x + y$. Như vậy, $I + J$ sẽ là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Nhận thấy rằng các khẳng định (i) và (ii) đều là các hệ quả đơn giản có thể suy ra trực tiếp từ các định nghĩa. Tiếp theo, giả sử ϕ lồi trên $I + J$. Xét bất kì $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ với $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ và $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

Quan sát thấy rằng

$$x_1 + y_2 = \lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) \text{ và } x_2 + y_1 = (1 - \lambda)(x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2),$$

trong đó $\lambda = (x_2 - x_1)/(x_2 - x_1 + y_2 - y_1)$.

Khi đó, $\phi(x_1 + y_2) \leq \lambda\phi(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2 + y_2)$ và $\phi(x_2 + y_1) \leq (1 - \lambda)\phi(x_1 + y_1) + \lambda\phi(x_2 + y_2)$. Do đó, $\phi(x_1 + y_2) + \phi(x_2 + y_1) \leq \phi(x_1 + y_1) + \phi(x_2 + y_2)$, nghĩa là, $f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$. Như vậy, f tăng song song trên $I \times J$. Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của khẳng định (iii). Phép chứng minh của khẳng định (iv) cũng được thực hiện theo cách tương tự. $\square$

Chẳng hạn,

- (i) Xét hàm $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + 1)(y + 1) & \text{nếu } x + y < 0, \\ (x + 2)(y + 2) & \text{nếu } x + y \geq 0. \end{cases}$$

Nếu chúng ta cô định một số $y_0 \in [-1, 1]$ và xét hàm $\phi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\phi(x) = \begin{cases} (y_0 + 1)(x + 1) & \text{nếu } -1 \leq x < -y_0, \\ (y_0 + 2)(x + 2) & \text{nếu } -y_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng ϕ tăng trên $[-1, 1]$.

Ngoài ra, nếu chúng ta cố định một số $x_0 \in [-1, 1]$ và xét hàm $\psi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\psi(y) = \begin{cases} (x_0 + 1)(y + 1) & \text{nếu } -1 \leq y < -x_0, \\ (x_0 + 2)(y + 2) & \text{nếu } -x_0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

thì chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng ψ tăng trên $[-1, 1]$.

Điều này chỉ ra rằng f tăng đơn điệu trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Tuy nhiên, f không phải song đơn điệu trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Để nhận thấy điều này, lưu ý rằng $(0, 0) \leq (1, 1)$ và $f(0, 1) + f(1, 0) = 6 + 6 < 4 + 9 = f(0, 0) + f(1, 1)$, trong khi $(-1, 0) \leq (0, 1)$ và $f(-1, 1) + f(0, 0) = 3 + 4 > 0 + 6 = f(-1, 0) + f(0, 1)$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = \cos x + \sin y$. Từ Kết quả 1.2.1), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng f là song đơn điệu, nhưng không đơn điệu.

(iii) Giả sử cho trước một số thực $p \in \mathbb{R}$ và hàm $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y)^p$. Xét hàm $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(t) = t^p$. Rõ ràng, ϕ khả vi hai lần và $\phi'(t) = pt^{p-1}$, trong khi $\phi''(t) = p(p-1)t^{p-2}$ với mọi $t \in (0, \infty)$. Điều này chỉ ra rằng ϕ giảm nếu $p \leq 0$, tăng nếu $p \geq 0$, lồi nếu $p \leq 0$ hoặc $p \geq 1$ và lõm nếu $0 \leq p \leq 1$. Như vậy, từ Kết quả 1.2.2), chúng ta nhận thấy rằng f giảm đơn điệu và tăng song song nếu $p \leq 0$, tăng đơn điệu và giảm song song nếu $0 \leq p \leq 1$, tăng đơn điệu và tăng song song nếu $p \geq 1$.

Các hàm có biến phân bị chặn

Nói chung, tổng của hai hàm đơn điệu không nhất thiết phải đơn điệu. Chẳng hạn, hàm $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x - y$ là tổng của các hàm đơn điệu $((x, y) \mapsto x$ và $(x, y) \mapsto -y)$, nhưng nó không tăng cũng như không giảm. Mặt khác, do một hàm đơn điệu trên một hình chữ nhật (đóng) sẽ bị chặn ($f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu $\Rightarrow$ giá trị của f nằm giữa $f(a, c)$ và $f(b, d)$) nên tổng của các hàm đơn điệu sẽ bị chặn. Trên thực tế, chúng sẽ thỏa mãn một tính chất mạnh hơn được định nghĩa dưới đây.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a \leq b, c \leq d$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Kí hiệu S_f là tập con của $\mathbb{R}$ gồm các tổng hữu hạn có dạng

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})|,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ là các điểm bất kì trên $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$(a, c) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_{n-1}, y_{n-1}) \leq (x_n, y_n) = (b, d).$$

Nếu tập S_f bị chặn trên thì f được gọi là có **biến phân bị chặn**. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ kí hiệu supremum của S_f bởi $V(f)$ và gọi nó là **tổng biến phân của f trên $[a, b] \times [c, d]$** .

Chúng ta sẽ trình bày ở dưới đây một số tính chất cơ bản của các hàm có biến phân bị chặn. Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng các khẳng định (ii) và (iii) của mệnh đề dưới đây có thể được sử dụng để tạo ra một

số ví dụ về các hàm có biến phân bị chặn. Như vậy, khi chúng ta xem xét một hình chữ nhật có dạng $[a, b] \times [c, d]$, chúng ta sẽ luôn ngầm giả định $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a \leq b, c \leq d$.

Kết quả 1.2.3.

Giả sử $f, g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ và $r \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

- (i) f có biến phân bị chặn $\Rightarrow f$ bị chặn.
- (ii) f đơn điệu $\Rightarrow f$ có biến phân bị chặn.
- (iii) f, g có biến phân bị chặn $\Rightarrow f + g, rf, fg$ đều có biến phân bị chặn.

Chứng minh kết quả 1.2.3.

(i) Giả sử f có biến phân bị chặn. Với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ cho trước, chúng ta sẽ có $(a, c) \leq (x, y) \leq (b, d)$ và, do đó, $|f(x, y) - f(a, c)| + |f(b, d) - f(x, y)| \leq V(f)$. Điều này chỉ ra rằng $2|f(x, y)| \leq |f(a, c)| + |f(b, d)| + V(f)$. Như vậy, f sẽ bị chặn.

(ii) Nếu f đơn điệu thì, với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ với $(a, c) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) = (b, d)$, chúng ta sẽ có

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| = \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})) \right|,$$

có thể được rút gọn về thành $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)|$; do đó, f có biến phân bị chặn và, hơn nữa, $V(f) = |f(b, d) - f(a, c)|$.

(iii) Giả sử f và g đều có biến phân bị chặn. Từ các tính chất cơ bản của giá trị tuyệt đối, chúng ta nhận thấy rằng $V(f + g) \leq V(f) + V(g)$ và $V(rf) = |r|V(f)$. Hơn nữa, nếu chúng ta kí hiệu $M(f) = \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ và $M(g) = \sup\{|g(x, y)| : (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ thì, bằng cách cộng trừ các đại lượng một cách thích hợp, chúng ta sẽ thu được $V(fg) \leq M(f)V(g) + M(g)V(f)$. Điều này chỉ ra tính đúng đắn của khẳng định (iii). $\square$

Từ các khẳng định (ii) và (iii) của Kết quả 1.2.3, chúng ta nhận thấy rằng tổng của các hàm đơn điệu sẽ có biến phân bị chặn. Chúng ta cũng sẽ sớm chứng minh rằng chiều ngược lại cũng đúng. Với mục đích này, chúng ta sẽ cần đến kết quả phụ sau đây.

Kết quả 1.2.4.

Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có biến phân bị chặn thì, với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, hàm thu hẹp $f|_{[a, x] \times [c, y]}$ sẽ có biến phân bị chặn và $V(f|_{[a, x] \times [c, y]}) + |f(b, d) - f(x, y)| \leq V(f)$.

Chứng minh kết quả 1.2.4.

Nhận thấy rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}$ cho trước và với mọi $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $(a, c) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) = (x, y)$, chúng ta sẽ có

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| + |f(b, d) - f(x, y)| \leq V(f).$$

Như vậy, $f|_{[a,x] \times [c,y]}$ có biến phân bị chặn và tổng biến phân của nó tối đa sẽ không vượt quá $V(f) - |f(b, d) - f(x, y)|$. $\square$

Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có biến phân bị chặn thì chúng ta sẽ định nghĩa **hàm tổng biến phân** tương ứng $v_f(x, y) = V(f|_{[a,x] \times [c,y]})$. Kết quả sau đây thường được gọi là **phép phân tích Jordan cho một hàm có biến phân bị chặn**.

Kết quả 1.2.5. (Jordan)

Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có biến phân bị chặn thì sẽ luôn tồn tại duy nhất các hàm $g, h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho g, h là các hàm tăng đơn điệu, $f = g - h$ và $v_f = g + h$.

Chứng minh kết quả 1.2.5.

Kí hiệu $g, h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $g = \frac{1}{2}(v_f + f)$ và $h = \frac{1}{2}(v_f - f)$. Rõ ràng, $f = g - h$ và $v_f = g + h$. Giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d]$ với $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$. Bằng cách áp dụng Kết quả 1.2.4) cho hàm thu hẹp $f|_{[a,x_2] \times [c,y_2]}$, chúng ta nhận thấy rằng $v_f(x_1, y_1) + |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq v_f(x_2, y_2)$ và, do đó,

$$g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1) = \frac{1}{2} [v_f(x_2, y_2) - v_f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)] \geq 0,$$

cũng như

$$h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1) = \frac{1}{2} [v_f(x_2, y_2) - v_f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)] \geq 0.$$

Như vậy, g và h là các hàm tăng đơn điệu. Tính duy nhất của g và h là hiển nhiên và được suy ra ngay từ các điều kiện $f = g - h$ và $v_f = g + h$. $\square$

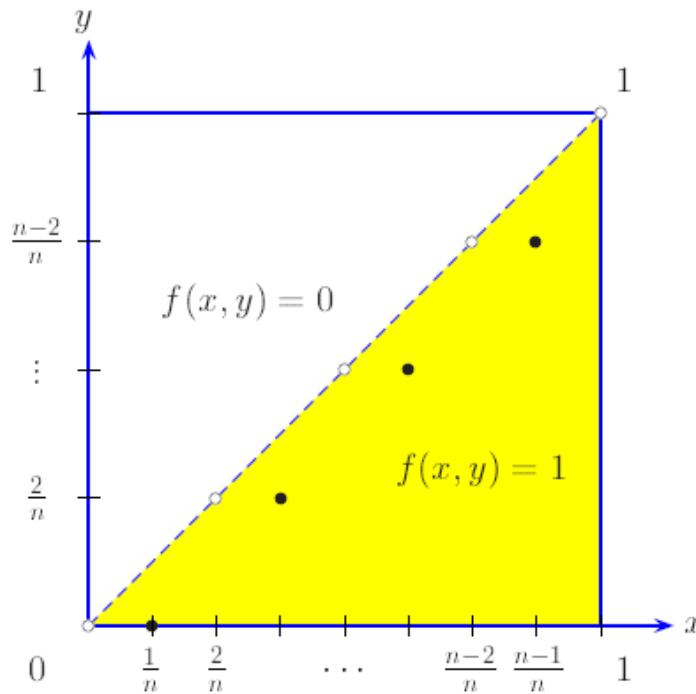
Như đã nhận xét từ trước đó, Kết quả 1.2.6) đưa ra cho chúng ta một đặc trưng cơ bản của các hàm có biến phân bị chặn. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng một hàm có biến phân bị chặn không nhất thiết phải đơn điệu, nghĩa là, chiều ngược lại của khẳng định (ii) của Kết quả 1.2.3) là không đúng. Bây giờ, chúng ta sẽ đưa ra một ví dụ để chứng tỏ rằng một hàm bị chặn không nhất thiết phải có biến phân bị chặn, nghĩa là, chiều ngược lại của khẳng định (i) của Kết quả 1.2.3) là không đúng. Ví dụ tương tự cho thấy rằng một hàm hai biến tăng đơn điệu theo một biến và giảm đơn điệu theo biến kia không nhất thiết phải có biến phân bị chặn.

Chẳng hạn, xét hàm $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq y, \\ 1 & \text{nếu } x > y. \end{cases}$$

Rõ ràng, f là một hàm bị chặn. Nhưng nếu chúng ta xét các điểm nằm trên đường chéo $y = x$ của hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$ thì chúng ta có thể nhận thấy rằng có quá nhiều thay đổi trong các giá trị của f . Chẳng hạn, nếu $n \in \mathbb{N}$ là một số chẵn và, với mọi $i = 1, \dots, n$, chúng ta sẽ kí hiệu $(x_i, y_i) = (i/n, i/n)$ nếu i là một số chẵn và $(x_i, y_i) = (i/n, (i-1)/n)$ nếu i là một số lẻ thì rõ ràng chúng ta sẽ có $(0,0) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) = (1,1)$ và

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| = |1 - 0| + |0 - 1| + \dots + |1 - 0| + |0 - 1| = n.$$



Hình vẽ minh họa hàm $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq y, \\ 1 & \text{nếu } x > y, \end{cases}$ và các điểm (x_i, y_i) của

hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$ nằm trên đường chéo $y = x$.

Điều này chỉ ra rằng f không thể có biến phân bị chặn trên $[0,1] \times [0,1]$.

Các hàm với song biến phân bị chặn

Giống như việc tổng của các hàm đơn điệu không nhất thiết phải đơn điệu, tổng của các hàm song đơn điệu cũng không nhất thiết phải là một hàm song đơn điệu. Theo đó, chúng ta sẽ đi đến dạng tương tự sau đây của một hàm có biến phân bị chặn.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a \leq b, c \leq d$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Kí hiệu T_f là tập tất cả các tổng kép hữu hạn có dạng

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)|,$$

trong đó $n, m \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$ là các điểm bất kì thuộc $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b \text{ và } c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{m-1} \leq y_m = d.$$

Nếu tập T_f bị chặn trên thì f sẽ được gọi là có **song biến phân bị chặn**. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ kí hiệu supremum của T_f bởi $W(f)$ và gọi nó là **tổng song biến phân của f trên $[a, b] \times [c, d]$** .

Các tính chất dưới đây về cơ bản là tương tự như Kết quả 1.2.3), chỉ khác là khẳng định (i) cần thêm một giả thiết bổ sung.

Kết quả 1.2.6.

Giả sử $f, g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ và $r \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

- (i) Nếu f có song biến phân bị chặn và, ngoài ra, f bị chặn trên hai cạnh kề nhau bất kì của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ thì f sẽ bị chặn.
- (ii) Nếu f là song đơn điệu thì f sẽ có song biến phân bị chặn.
- (iii) Nếu f và g là các hàm có song biến phân bị chặn thì $f + g$ và rf cũng vậy.

Chứng minh kết quả 1.2.6.

(i) Giả sử f có song biến phân bị chặn và f bị chặn trên hai cạnh $[a, b] \times \{c\}$ và $\{a\} \times [c, d]$. Với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, chúng ta sẽ có $a \leq x$ và $c \leq y$. Như vậy, $|f(x, y) + f(a, c) - f(x, c) - f(a, y)| \leq W(f)$ và, do đó, $|f(x, y)| \leq |f(a, c)| + |f(x, c)| + |f(a, y)| + W(f)$. Điều này chỉ ra rằng f là bị chặn. Lập luận tương tự cũng có thể được áp dụng nếu f bị chặn trên bất kì cạnh nào trong số hai cạnh kề nhau của $[a, b] \times [c, d]$.

(ii) Nếu f là song đơn điệu thì, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$ trong $\mathbb{R}^2$ với $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ và $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = d$, tổng kép

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)|,$$

sẽ bằng $|f(x_n, y_n) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_n) - f(x_n, y_0)|$; nên f có song biến phân bị chặn và, hơn nữa, $W(f) = |f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c)|$.

(iii) Giả sử f và g là các hàm có song biến phân bị chặn. Từ các tính chất cơ bản của giá trị tuyệt đối, chúng ta nhận thấy rằng $W(f + g) \leq W(f) + W(g)$ và $W(rf) = |r|W(f)$. Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của khẳng định (iii). $\square$

Từ các khẳng định (ii) và (iii) của Kết quả 1.2.6), chúng ta nhận thấy rằng tổng của các hàm song đơn điệu là có song biến phân bị chặn. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng chiều ngược lại của khẳng định trên cũng đúng. Với mục đích này, chúng ta sẽ cần đến kết quả phụ trợ sau, tương tự nhưng tinh tế hơn một chút so với Kết quả 1.2.4). Chúng ta sẽ sử dụng các kí hiệu và các thuật ngữ sau đây.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a \leq b, c \leq d$. Một họ $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$ gồm các điểm trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b \text{ và } c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = d$$

sẽ được gọi là một **họ các điểm lưới của $[a, b] \times [c, d]$** .

Nếu P là một họ các điểm lưới như vậy của $[a, b] \times [c, d]$ và $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì thì chúng ta sẽ xét tổng kép sau, kí hiệu bởi $W(P, f)$,

$$W(P, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)|.$$

Lưu ý rằng tổng song biến phân $W(f)$ của f chính là supremum của $W(P, f)$ khi P thay đổi trên tất cả các họ có thể có của các điểm lưới của $[a, b] \times [c, d]$.

Kết quả 1.2.7.

Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có song biến phân bị chặn thì, với mọi $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, mỗi một hàm trong số các hàm thu hẹp f_1, f_2, f_3, f_4 được xác định bởi

$$f_1 = f|_{[a,x] \times [c,y]}, f_2 = f|_{[a,x] \times [y,d]}, f_3 = f|_{[x,b] \times [c,y]}, f_4 = f|_{[x,b] \times [y,d]}$$

đều là một hàm có biên phân bị chặn và $W(f) = W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4)$.

Chứng minh kết quả 1.2.7.

Giả sử f là một hàm có song biến phân bị chặn và cố định một $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Đầu tiên, quan sát thấy rằng nếu P_1, P_2, P_3, P_4 lần lượt là các họ các điểm lưới nào đó của các hình chữ nhật $[a, x] \times [c, y]$, $[a, x] \times [y, d]$, $[x, b] \times [c, y]$, $[x, b] \times [y, d]$ thì, bằng cách đối chiếu các điểm lưới của P_1, P_2, P_3, P_4 , chúng ta sẽ thu được một họ P gồm các điểm lưới của $[a, b] \times [c, d]$ với $W(P, f) = W(P_1, f_1) + W(P_2, f_2) + W(P_3, f_3) + W(P_4, f_4)$. Đặc biệt, $0 \leq W(P_i, f_i) \leq W(P, f) \leq W(f)$, với $i = 1, 2, 3, 4$. Điều này chỉ ra rằng mỗi f_i đều có song biến phân bị chặn và $W(f_i) \leq W(f)$, với $i = 1, 2, 3, 4$. Hơn nữa, $W(P, f) \leq W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4)$.

Kế tiếp, quan sát thấy rằng nếu Q là một họ các điểm lưới bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ và nếu P là một họ các điểm lưới thu được bằng cách nối (x, y) với Q thì $W(Q, f) \leq W(P, f)$. Khi đó, P có thể được coi như là một họ các điểm lưới của $[a, b] \times [c, d]$ thu được bằng cách đối chiếu các họ điểm lưới nhất định của các hình chữ nhật $[a, x] \times [c, y]$, $[a, x] \times [y, d]$, $[x, b] \times [c, y]$, $[x, b] \times [y, d]$ và, do đó,

$$W(Q, f) \leq W(P, f) \leq W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4).$$

Do Q là một họ các điểm lưới bất kì của $[a, b] \times [c, d]$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $W(f) \leq W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4)$. Mặt khác, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được các họ P_1, P_2, P_3, P_4 lần lượt là các họ điểm lưới của $[a, x] \times [c, y]$, $[a, x] \times [y, d]$, $[x, b] \times [c, y]$, $[x, b] \times [y, d]$ sao cho $W(f_i) - \frac{\varepsilon}{4} < W(P_i, f_i)$, với $i = 1, 2, 3, 4$. Như vậy, nếu kí hiệu P là một họ các điểm lưới của $[a, b] \times [c, d]$ thu được bằng cách đối chiếu P_1, P_2, P_3, P_4 thì chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4) - \varepsilon &< W(P_1, f_1) + W(P_2, f_2) + W(P_3, f_3) + W(P_4, f_4) \\ &= W(P, f) \\ &\leq W(f). \end{aligned}$$

Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên $W(f) = W(f_1) + W(f_2) + W(f_3) + W(f_4)$. □

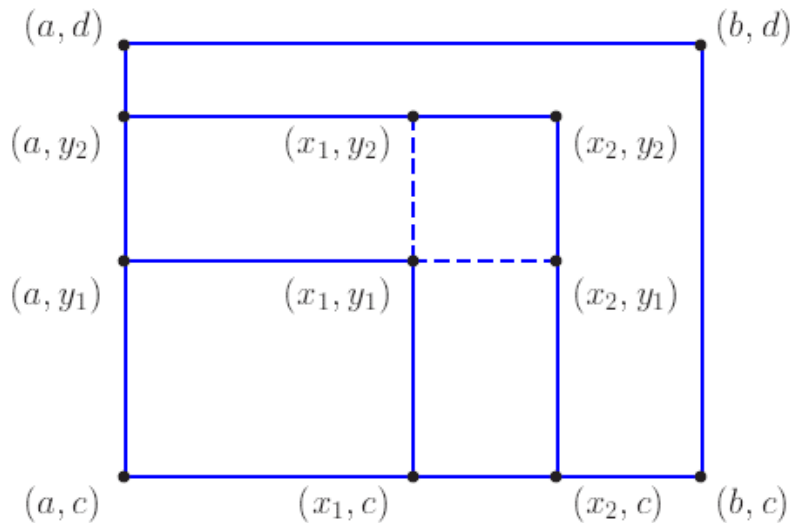
Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có song biên phân bị chặn thì chúng ta sẽ định nghĩa **hàm tổng song biên phân** $w_f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tương ứng bởi $w_f(x, y) = W(f|_{[a, x] \times [c, y]})$. Kết quả sau đây thường được gọi là **phép phân tích Jordan cho một hàm có song biên phân bị chặn**.

Kết quả 1.2.8.

Nếu $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm có song biên phân bị chặn thì sẽ luôn tồn tại duy nhất các hàm $g, h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho g, h là các hàm tăng song song, $f = g - h$ và $w_f = g + h$.

Chứng minh kết quả 1.2.8.

Kí hiệu $g, h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm xác định bởi $g = \frac{1}{2}(w_f + f)$ và $h = \frac{1}{2}(w_f - f)$. Rõ ràng, $f = g - h$ và $w_f = g + h$. Xét các điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ bất kì trong $[a, b] \times [c, d]$ với $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$. Khi đó, hình chữ nhật $R = [a, x_2] \times [c, y_2]$ sẽ có chứa bốn hình chữ nhật con $R_1 = [a, x_1] \times [c, y_1]$, $R_2 = [a, x_1] \times [y_1, y_2]$, $R_3 = [x_1, x_2] \times [c, y_1]$, $R_4 = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.



Hình vẽ minh họa các vị trí đặc trưng của các điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) trong phép chứng minh của

Kết quả 1.2.8) và các hình chữ nhật con tương ứng.

Bằng cách áp dụng Kết quả 1.2.7) cho $f|_R$ (nghĩa là cho hàm thu hẹp của f trên R), chúng ta nhận thấy rằng $w_f(x_2, y_2) = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$, trong đó $W_i = W(f|_{R_i})$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Hơn nữa, bằng cách áp dụng Kết quả 1.2.7) cho $f|_{[a, x_2] \times [c, y_1]}$ cũng như cho $f|_{[a, x_1] \times [c, y_2]}$, chúng ta cũng nhận thấy rằng $w_f(x_2, y_1) = W_1 + W_3$ và $w_f(x_1, y_2) = W_1 + W_2$.

Bây giờ, chúng ta hãy viết

$$g(x_2, y_2) + g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1) - g(x_1, y_2) = \frac{1}{2}(A + B)$$

và

$$h(x_2, y_2) + h(x_1, y_1) - h(x_2, y_1) - h(x_1, y_2) = \frac{1}{2}(A - B),$$

trong đó

$$A = w_f(x_2, y_2) + w_f(x_1, y_1) - w_f(x_2, y_1) - w_f(x_1, y_2)$$

và

$$B = f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2).$$

Do $A = (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + W_1 - (W_1 + W_3) - (W_1 + W_2) = W_4$ và $|B| \leq W_4$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng g và h đều là tăng song song. Tính duy nhất của g và h là hiển nhiên, bởi vì $f = g - h$ và $w_f = g + h$. □

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} (1/x) + (1/y) & \text{nếu } x \neq 0 \text{ và } y \neq 0, \\ 1/x & \text{nếu } x \neq 0 \text{ và } y = 0, \\ 1/y & \text{nếu } x = 0 \text{ và } y \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \text{ và } y = 0. \end{cases}$$

Khi đó, f sẽ có dạng $\phi(x) + \psi(y)$ và, do đó, f là song đơn điệu (điều này suy ra từ khẳng định (iii) của Kết quả 1.2.1). Đặc biệt, f là một hàm có song biến phân bị chặn. Nhưng rõ ràng là f sẽ không thể bị chặn trên bất kì một cạnh nào trong số bốn cạnh của $[0, 1] \times [0, 1]$. (Như một hệ quả tất yếu, f sẽ không thể có biến phân bị chặn trên $[0, 1] \times [0, 1]$.) Điều này chứng tỏ rằng giả thiết bổ sung nêu trong khẳng định (i) của Kết quả 1.2.6) về việc bị chặn trên hai cạnh kề nhau của hình chữ nhật là không thể bỏ được.

(ii) Xét các hàm $f, g: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/x & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \end{cases} \quad \text{và } g(x, y) = y.$$

Rõ ràng f và g là các hàm song đơn điệu trên $[0,1] \times [0,1]$; thật vậy, mỗi cái đều là một hàm có dạng $\phi(x) + \psi(y)$. Đặc biệt, f và g đều là các hàm có song biến phân bị chặn. Tuy nhiên, fg lại không thể là một hàm có song biến phân bị chặn. Thật vậy, nếu fg là một hàm có song biến phân bị chặn thì, bằng cách xét các điểm lưới có dạng $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_m)$, trong đó $m = 1, y_0 = 0, y_1 = 1$, chúng ta nhận thấy rằng f sẽ có biến phân bị chặn. Nhưng khi đó, từ khẳng định (i) của Kết quả 1.2.3), f sẽ phải bị chặn, vô lí. Như vậy, chúng ta sẽ không thể đưa các tích vào trong tuyên bố của khẳng định (iii) của Kết quả 1.2.6).

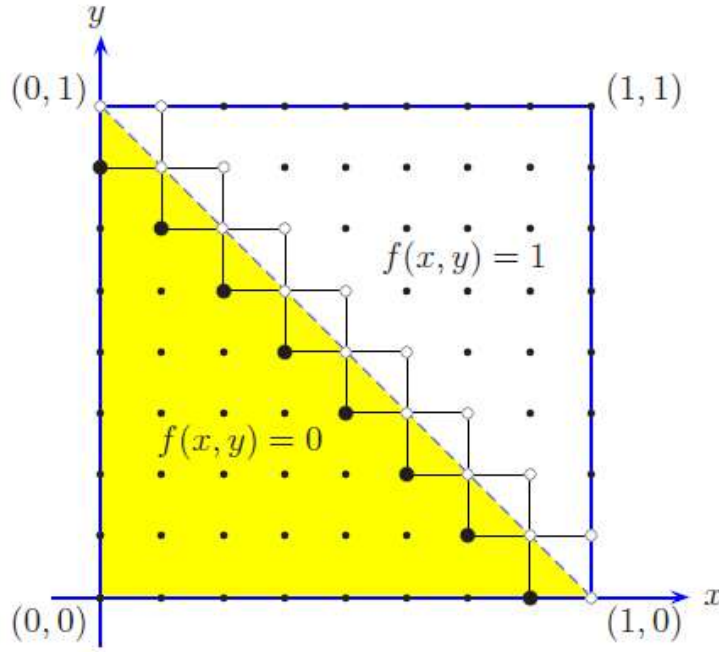
(iii) Xét hàm $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x + y \leq 1, \\ 1 & \text{nếu } x + y > 1. \end{cases}$$

Khi đó, f tăng đơn điệu trên $[0,1] \times [0,1]$. Thật vậy, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1] \times [0,1]$ cho trước với $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, chúng ta sẽ có $x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$ và, do đó, $x_1 + y_1 > 1$ ngụ ý rằng $x_2 + y_2 > 1$. Như vậy, $f(x_1, y_1) = 0 \leq f(x_2, y_2)$ hoặc $f(x_1, y_1) = 1$, trong trường hợp này $f(x_2, y_2) = 1$. Từ tính tăng đơn điệu của f , chúng ta dễ dàng suy ra rằng f có biến phân bị chặn trên $[0,1] \times [0,1]$. Nhưng nếu chúng ta xem xét các điểm của hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$ nằm trên đường chéo $y = 1 - x$ thì chúng ta có thể nhận thấy rằng có quá nhiều sự thay đổi trong các giá trị của f .

Chẳng hạn, nếu $n \in \mathbb{N}$ và chúng ta kí hiệu $x_i = i/n$ và $y_j = j/n$, với $0 \leq i, j \leq n$, thì

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| \\ & \geq \sum_{k=1}^n |f(x_k, y_{n-k+1}) + f(x_{k-1}, y_{n-k}) - f(x_k, y_{n-k}) - f(x_{k-1}, y_{n-k+1})| \\ & = \sum_{k=1}^n |1 + 0 - 0 - 0| \\ & = n. \end{aligned}$$



Hình vẽ minh họa hàm $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x + y \leq 1, \\ 1 & \text{nếu } x + y > 1, \end{cases}$ và các điểm (x_i, y_i) của

hình chữ nhật $[0, 1] \times [0, 1]$ nằm trên đường chéo $y = 1 - x$.

Điều này chỉ ra rằng f không thể có song biến phân bị chặn trên $[0, 1] \times [0, 1]$.

Nhận thấy rằng việc giới thiệu các khái niệm về tính song đơn điệu và song biến phân bị chặn nêu trong bài viết này cho các hàm hai biến cũng có thể được mở rộng lên thành tính n – fold đơn điệu và n – fold biến phân bị chặn của các hàm n biến. Để làm được điều này, sẽ rất hữu ích khi chúng ta xem xét toán tử sai phân Δ được định nghĩa như sau. Với mọi $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$ cho trước trong $\mathbb{R}^n$ với $a \leq b$, nghĩa là, $a_i \leq b_i$, với $i = 1, \dots, n$, và, với mọi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa

$$\Delta_a^b f = \sum_c k(c) f(c),$$

trong đó tổng được tính trên tất cả các bộ $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho $c_i \in \{a_i, b_i\}$, với $i = 1, \dots, n$, và, với mọi bộ c như vậy, chúng ta sẽ kí hiệu

$$k(c) = k_1 \dots k_n,$$

trong đó, $1 \leq i \leq n$, $k_i = \begin{cases} -1 & \text{nếu } c_i = b_i, \\ 1 & \text{nếu } c_i = a_i. \end{cases}$

Chẳng hạn, nếu $n = 1$ thì $\Delta_{a_1}^{b_1} f = f(b_1) - f(a_1)$, trong khi nếu $n = 2$ thì

$$\Delta_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} f = f(b_1, b_2) + f(a_1, a_2) - f(b_1, a_2) - f(a_1, b_2),$$

và nếu $n = 3$ thì

$$\Delta_{(a_1, a_2, a_3)}^{(b_1, b_2, b_3)} = f(b_1, b_2, b_3) + f(b_1, a_2, a_3) + f(a_1, b_2, a_3) + f(a_1, a_2, b_3) \\ - f(b_1, b_2, a_3) - f(a_1, b_2, b_3) - f(b_1, a_2, b_3) - f(a_1, a_2, a_3).$$

Khi đó, f sẽ được gọi là **n – fold đơn điệu tăng** nếu $\Delta_x^y f \geq 0$, với mọi $x, y \in [a, b]$ với $x \leq y$. Các khái niệm còn lại cũng có thể được định nghĩa theo cách tương tự.

Tính lồi và tính lõm

Các khái niệm về hàm lồi và hàm lõm đối với các hàm một biến thừa nhận một dạng tương tự đơn giản đối với các hàm nhiều biến, miễn là chúng ta thảo luận về tính lồi và tính lõm của một hàm trên các tập con lồi của tập xác định của nó.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Ngoài ra, giả sử A là một tập con lồi của D . Chúng ta sẽ nói rằng

1. f là **lồi trên A** nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ và $t \in (0, 1)$, chúng ta có

$$f((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \leq (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2),$$

2. f là **lõm trên A** nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ và $t \in (0, 1)$, chúng ta có

$$f((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \geq (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2).$$

Bằng cách lần lượt các bất đẳng thức $\leq$ và $\geq$ thành các bất đẳng thức nghiêm ngặt $<$ và $>$ tương ứng trong 1 và 2 ở trên, chúng ta sẽ thu được khái niệm về các **hàm lồi nghiêm ngặt** và các **hàm lõm nghiêm ngặt**.

Về mặt hình học, các hàm lồi là các hàm có đồ thị nằm dưới tam giác nằm trong mặt phẳng xác định bởi ba điểm trên đồ thị. Nói một cách chính xác hơn, nếu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là lồi và không phải là một đoạn thẳng trong $\mathbb{R}^2$ thì $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi trên D khi và chỉ khi, với mọi điểm không thẳng hàng $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, trong D và với mọi điểm (x, y) bất kì trong tam giác với P_1, P_2, P_3 là các đỉnh, chúng ta sẽ có $f(x, y) \leq g(x, y)$, trong đó $z = g(x, y)$ là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, với $i = 1, 2, 3$. Tương tự cho các hàm lõm.

Các điểm cực trị địa phương và các điểm yên ngựa

Các khái niệm về cực đại địa phương và cực tiểu địa phương đối với hàm một biến có thể dễ dàng mở rộng sang cho các hàm hai (hoặc nhiều) biến. Về mặt hình học, cực trị địa phương sẽ tương ứng với các đỉnh và các điểm giảm trên đồ thị. Hơn nữa, một hiện tượng mới và thú vị xuất hiện, đó là **điểm yên ngựa**. Để định nghĩa chính xác cái sau này, trước tiên chúng ta sẽ giới thiệu một số thuật ngữ liên quan đến các đường trong $\mathbb{R}^2$.

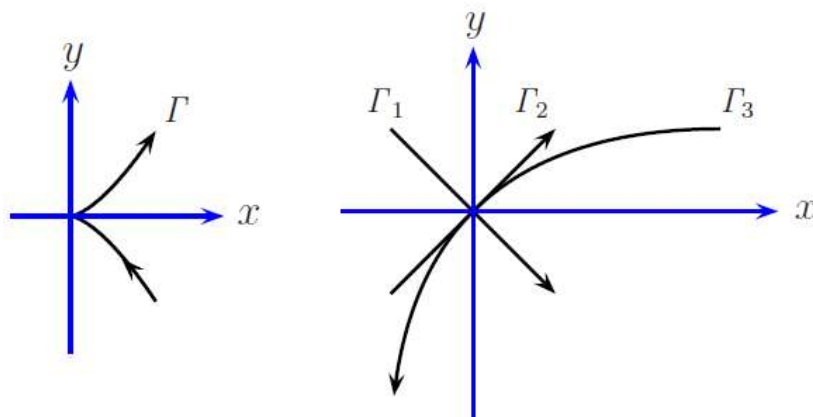
Giả sử Γ là một đường trong $\mathbb{R}^2$ cho bởi $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Đường Γ được gọi là **đi qua** một điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu tồn tại một số $t_0 \in (\alpha, \beta)$ sao cho $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Như trong các phép tính hàm một biến, chúng ta sẽ nói rằng **tiếp tuyến của Γ tại một điểm $(x(t_0), y(t_0))$, trong đó $t_0 \in (\alpha, \beta)$, là**

được xác định nếu x, y khả vi tại t_0 và $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ coi cặp $(x'(t_0), y'(t_0))$ là **vector tiếp tuyến của Γ tại $(x(t_0), y(t_0))$** . Nói chung, chúng ta sẽ nói rằng Γ là một **đường cong chính quy** nếu tiếp tuyến luôn xác định, nghĩa là, nếu các hàm x, y khả vi trên (α, β) và $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$, với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Giả sử Γ nằm trong D , nghĩa là, $(x(t), y(t)) \in D$ với mọi $t \in [\alpha, \beta]$, và Γ đi qua (x_0, y_0) , nghĩa là $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ với một số $t_0 \in (\alpha, \beta)$ nào đó. Với mọi $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ cho trước, hàm $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$ đôi khi còn được gọi là **hàm thu hẹp của f trên đường cong Γ** . Chúng ta sẽ nói rằng f có **cực đại địa phương tại (x_0, y_0) dọc theo Γ** nếu F có cực đại địa phương tại t_0 . Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng f có **cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0) dọc theo Γ** nếu F có cực tiểu địa phương tại t_0 .

Giả sử Γ_1 và Γ_2 lần lượt là các đường cong chính quy trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $(x_1(t), y_1(t)), t \in [\alpha_1, \beta_1]$ và bởi $(x_2(t), y_2(t)), t \in [\alpha_2, \beta_2]$. Ngoài ra, giả sử cả Γ_1 và Γ_2 đều đi qua cùng một điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho tồn tại các số $t_i \in (\alpha_i, \beta_i)$ với $(x(t_i), y(t_i)) = (x_0, y_0)$ với $i = 1, 2$. Khi đó, Γ_1 và Γ_2 được gọi là **cắt ngang qua nhau tại (x_0, y_0)** nếu các vector tiếp tuyến của chúng tại (x_0, y_0) đều được xác định và không phải là bội của nhau, nghĩa là, cả $(x'_1(t_1), y'_1(t_1))$ và $(x'_2(t_2), y'_2(t_2))$ đều khác $(0,0)$ và không tồn tại số $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $(x'_1(t_1), y'_1(t_1)) = \lambda (x'_2(t_2), y'_2(t_2))$.

Chẳng hạn, đường cong Γ xác định bởi $(t^2, t^3), t \in [-1, 1]$, không phải là một đường cong chính quy. Mặt khác, xét các đường cong $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ lần lượt được xác định bởi $(t, -t), (t, t), (2t + t^2, 2t - t^2)$, với $t \in [-1, 1]$, trong mỗi trường hợp. Mỗi một đường cong trong số các đường cong này đều là một đường cong chính quy và cùng đi qua gốc tọa độ $(0,0)$. Các vector tiếp tuyến của $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tại gốc tọa độ lần lượt là $(1, -1), (1, 1), (2, 2)$. Như vậy, Γ_1 và Γ_2 sẽ cắt ngang qua nhau tại $(0,0)$; đồng thời, Γ_1 và Γ_3 cũng cắt ngang qua nhau tại $(0,0)$, nhưng Γ_2 và Γ_3 lại không cắt ngang qua nhau tại $(0,0)$.



Hình vẽ minh họa đường cong không chính quy Γ và các đường cong chính quy $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; lưu ý rằng

Γ_1 và Γ_2 cũng như Γ_1 và Γ_3 cắt ngang qua nhau, nhưng Γ_2 và Γ_3 lại không như vậy.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Chúng ta sẽ nói rằng một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ có

1. một **cực đại địa phương tại (x_0, y_0)** nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$,
2. một **cực tiểu địa phương tại (x_0, y_0)** nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$,
3. một **điểm yên ngựa tại (x_0, y_0)** nếu tồn tại các đường cong chính quy Γ_1 và Γ_2 nằm trong D và cắt ngang qua nhau tại c .

Như trong trường hợp hàm một biến, chúng ta cũng có thể định nghĩa các phiên bản mạnh hơn của các khái niệm trên trong đó tính từ **nghiêm ngặt** được bổ sung thêm vào. Như vậy, hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ có **cực đại địa phương nghiêm ngặt tại (x_0, y_0) của D** nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ và $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Khái niệm về **cực tiểu địa phương nghiêm ngặt** cũng được định nghĩa theo cách tương tự. Hơn nữa, f sẽ được gọi là có một **điểm yên ngựa nghiêm ngặt tại (x_0, y_0)** nếu tồn tại các đường cong chính quy Γ_1 và Γ_2 nằm trong D và cắt ngang qua nhau tại (x_0, y_0) sao cho f có cực đại địa phương nghiêm ngặt tại (x_0, y_0) dọc theo Γ_1 , trong khi f có cực tiểu địa phương nghiêm ngặt tại (x_0, y_0) dọc theo Γ_2 .

Tính chất giá trị trung gian

Chúng ta hãy bắt đầu khảo sát bằng cách nhắc lại rằng, với các phép tính trên các hàm một biến, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ thì một hàm $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ được gọi là có **Tính chất giá trị trung gian** trên một khoảng $I \subseteq D$ nếu, với mọi $a, b \in I$ và với mọi số thực $r \in \mathbb{R}$ nằm giữa $\phi(a)$ và $\phi(b)$, tồn tại một số $c \in I_{a,b}$ sao cho $r = \phi(c)$. Khái niệm này có một dạng tương tự đơn giản sau đây đối với các hàm nhiều biến.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là có **Tính chất giá trị trung gian** trên một 2 – khoảng $I \times J \subseteq D$ nếu, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ và với số thực $r \in \mathbb{R}$ nằm giữa $f(x_1, y_1)$ và $f(x_2, y_2)$, tồn tại một $(x_0, y_0) \in I_{(x_1, y_1), (x_2, y_2)}$ sao cho $r = f(x_0, y_0)$.

Kết quả 1.2.9.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm.

Khi đó, với mọi 2 – khoảng $I \times J \subseteq D$,

f có tính chất giá trị trung gian trên $I \times J \Rightarrow f(I \times J)$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Chứng minh kết quả 1.2.9.

Giả sử $a, b \in f(I \times J)$. Khi đó, $a = f(x_1, y_1)$ và $b = f(x_2, y_2)$, với $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$. Nếu $r \in I_{a,b}$ thì, từ Tính chất giá trị trung gian của f trên $I \times J$, tồn tại một $(x_0, y_0) \in I_{(x_1, y_1), (x_2, y_2)}$ sao cho $f(x_0, y_0) = r$. Do $I_{(x_1, y_1), (x_2, y_2)} \subseteq I \times J$ nên chúng ta nhận thấy rằng $I_{a,b} \subseteq f(I \times J)$. Điều này chứng tỏ rằng $f(I \times J)$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. □

Đễ dàng nhận thấy rằng chiều ngược lại của Kết quả 1.2.9) là không đúng. Trên thực tế, trái ngược với các phép tính hàm một biến, chiều ngược lại là không đúng ngay cả đối với các hàm đơn điệu. Chẳng hạn, xét $I = J = [0,1]$ và $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = [x] + y$, trong đó $[x]$ biểu thị cho phần nguyên của x . Rõ ràng, f là đơn điệu cũng như song đơn điệu. Hơn nữa, $f(I \times J) = [0,2]$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Tuy nhiên, lưu ý rằng số thực $\frac{3}{4}$ nằm giữa $f(0,0) = 0$ và $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, nhưng $\frac{3}{4}$ không phải là một giá trị của f tại bất kì một điểm nào trên 2 – khoảng $I_{(0,0),\left(1,\frac{1}{2}\right)} = [0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Thật vậy, ảnh của 2 – khoảng này là $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$, không phải là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Như được chỉ ra trong ví dụ nêu ở trên, một sửa đổi đơn giản của Kết quả 1.2.9) sẽ mang lại một đặc trưng cơ bản cho tính chất giá trị trung gian.

Kết quả 1.2.10.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm.

Khi đó, với mọi 2 – khoảng $I \times J \subseteq D$,

f có tính chất giá trị trung gian trên $I \times J \Leftrightarrow f(E)$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$, với mọi 2 – khoảng $E \subseteq I \times J$.

Chứng minh kết quả 1.2.10.

Tính đúng đắn của chiều “ $\Rightarrow$ ” được suy ra trực tiếp từ Kết quả 1.2.9). Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times J$ và giả sử r là một số thực nằm giữa $f(x_1, y_1)$ và $f(x_2, y_2)$. Kí hiệu E là một 2 – khoảng $I_{(x_1, y_1), (x_2, y_2)}$ bất kì. Do $f(E)$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $r = f(x_0, y_0)$ với một $(x_0, y_0) \in E$ nào đó. Do $E \subseteq I \times J$ nên f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên $I \times J$. □

2. Khái niệm về các dãy điểm

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ giới thiệu các khái niệm cơ bản về tính liên tục và giới hạn của các hàm giá trị thực hai biến. Như trong bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”, các định nghĩa cũng như các phép chứng minh của các kết quả cơ bản đều sẽ được đưa ra bằng cách sử dụng các dãy. Trên thực tế, chúng ta có hai khả năng khái quát hóa khác nhau của các dãy thực có vẻ tự nhiên trong bối cảnh của các dãy hai biến. Đầu tiên, các hàm xác định trên $\mathbb{N}$ với các giá trị trong $\mathbb{R}^2$ và, thứ hai, các hàm xác định trên $\mathbb{N}^2$ với các giá trị trong $\mathbb{R}$. Như chúng ta sẽ thấy, để phát triển các khái niệm về tính liên tục và giới hạn của các hàm hai biến, chỉ cái thứ nhất là phù hợp và nó sẽ được nghiên cứu trong bài viết này. Các nghiên cứu về cái sau sẽ được trình bày trong bài viết “**Chuỗi kép và tích phân kép suy rộng**”.

Mục này của bài viết sẽ được tổ chức như sau. Các dãy trong $\mathbb{R}^2$ sẽ được giới thiệu trong mục **2.1. Tính hội tụ của các dãy** bên dưới và các tính chất cơ bản của chúng, bao gồm Định lí Bolzano – Weierstrass và Điều kiện Cauchy, cũng sẽ được rút ra từ các kết quả tương ứng của các dãy trong $\mathbb{R}$. Chúng ta cũng sẽ sử dụng khái niệm dãy để giới thiệu các khái niệm topo cơ bản của tập đóng và tập mở, điểm biên và điểm trong, cũng như bao đóng và phần trong của các tập con của $\mathbb{R}^2$. Mục **2.2. Các dãy con và các dãy Cauchy** đề cập đến khái niệm về tính liên tục và chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng các hàm liên tục

trên các tập con liên thông đường của $\mathbb{R}^2$ hoặc trên các tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sẽ có một số tính chất rất hay. Một kết quả quan trọng thường được gọi là Định lý hàm ẩn cũng sẽ được chứng minh trong phần này. Cuối cùng, trong mục **3.3. Giới hạn của các hàm thực hai biến**, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm về giới hạn của các hàm hai biến. Các định nghĩa sẽ được đưa ra bằng cách sử dụng các dãy, trong khi hầu hết các dãy, trong khi hầu hết các tính chất cơ bản sẽ được chứng minh bằng cách sử dụng một quan sát đơn giản cho rằng sự tồn tại giới hạn của một hàm tại một điểm sẽ tương đương với tính liên tục của hàm liên kết tại điểm đó.

2.1. Tính hội tụ của các dãy

Một **dãy** trong $\mathbb{R}^2$ được định nghĩa là một hàm từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{R}^2$. Thông thường, một dãy trong $\mathbb{R}^2$ thường được kí hiệu bởi $((x_n, y_n))$, $((u_n, v_n))$, v.v... Giá trị của một dãy $((x_n, y_n))$ tại $n \in \mathbb{N}$ được cho bởi phần tử (x_n, y_n) của $\mathbb{R}^2$ và phần tử này thường được gọi là **số hạng thứ n của dãy đó**. Trong trường hợp các số hạng của một dãy $((x_n, y_n))$ nằm trong một tập con D của $\mathbb{R}^2$, chúng ta sẽ nói rằng $((x_n, y_n))$ là một dãy trong D .

Các khái niệm về giới hạn và hội tụ có thể được mở rộng dễ dàng từ bối cảnh các dãy trong $\mathbb{R}$ thành các dãy trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy trong $\mathbb{R}^2$. Chúng ta sẽ nói rằng $((x_n, y_n))$ là **bị chặn** nếu tồn tại một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $|x_n| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy $((x_n, y_n))$ được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại một $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn điều kiện sau: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \in S_\varepsilon(x_0, y_0)$ với mọi $n \geq n_0$, nghĩa là,

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \text{ và } |y_n - y_0| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng $((x_n, y_n))$ **hội tụ** đến (x_0, y_0) hoặc (x_0, y_0) là một **giới hạn** của $((x_n, y_n))$ và viết $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Nếu $((x_n, y_n))$ không hội tụ về (x_0, y_0) thì chúng ta sẽ viết $(x_n, y_n) \nrightarrow (x_0, y_0)$; nếu $((x_n, y_n))$ không hội tụ thì nó sẽ được gọi là **phân kỳ**.

Nhận thấy rằng một dãy $((x_n, y_n))$ trong $\mathbb{R}^2$ sẽ làm phát sinh hai dãy (x_n) và (y_n) trong $\mathbb{R}$, và ngược lại. Hóa ra các tính chất của $((x_n, y_n))$ hoàn toàn có thể được hiểu theo các tính chất của các dãy (x_n) và (y_n) trong $\mathbb{R}$.

Kết quả 2.1.1.

Với mọi dãy $((x_n, y_n))$ trong $\mathbb{R}^2$, chúng ta sẽ có các khẳng định sau:

- (i) Nếu $((x_n, y_n))$ hội tụ thì nó sẽ có một giới hạn duy nhất.
- (ii) $((x_n, y_n))$ bị chặn $\Leftrightarrow$ cả (x_n) và (y_n) đều bị chặn.
- (iii) $((x_n, y_n))$ hội tụ $\Leftrightarrow$ cả (x_n) và (y_n) đều hội tụ. Trên thực tế, với $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, chúng ta sẽ có

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0 \text{ và } y_n \rightarrow y_0.$$

Chứng minh kết quả 2.1.1.

Mỗi khẳng định (i), (ii), (iii) đều có thể được suy ra trực tiếp từ các định nghĩa. □

Như đã lưu ý từ trước trong khẳng định (i) của Kết quả 2.1.1), nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}^2$ thì nó sẽ có một giới hạn duy nhất trong $\mathbb{R}^2$. Giới hạn của $((x_n, y_n))$ đôi khi còn được viết là $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$.

Chẳng hạn,

(i) Nếu $((x_n, y_n))$ là một **dãy hằng** trong $\mathbb{R}^2$, nghĩa là, tồn tại một $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì rõ ràng $((x_n, y_n))$ là hội tụ và $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.

(ii) Nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $(x_n, y_n) = (1/n, -1/n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì rõ ràng $((x_n, y_n))$ là hội tụ và $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$.

(iii) Dãy $((x_n, y_n))$ trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $(x_n, y_n) = (1/n, (-1)^n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, là phân kì, bởi vì dãy $((-1)^n)$ là phân kì trong $\mathbb{R}$.

Các tính chất cơ bản của các dãy trong $\mathbb{R}^2$ có thể dễ dàng suy ra từ các tính chất tương ứng của các dãy trong $\mathbb{R}$. Để dễ tham khảo, chúng ta sẽ nhắc lại các kết quả liên quan đến các dãy trong $\mathbb{R}$. Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo phép chứng minh của các Kết quả 2.1.2), 2.1.3), 2.1.4) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”.

Kết quả 1.

Giả sử (a_n) và (b_n) là các dãy trong $\mathbb{R}$ và giả sử $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Khi đó,

(i) Nếu $a_n \rightarrow a$ và $b_n \rightarrow b$ thì $a_n + b_n \rightarrow a + b$ và $a_n b_n \rightarrow ab$.

(ii) Nếu $a_n \rightarrow a$ thì, với mọi $r \in \mathbb{R}$, chúng ta sẽ có $ra_n \rightarrow ra$.

(iii) Nếu $a \neq 0$ và $a_n \neq 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $(1/a_n) \rightarrow (1/a)$.

(iv) Giả sử $a_n \rightarrow a$. Nếu tồn tại một số tự nhiên $l \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \geq \alpha$, với mọi $n \geq l$, thì $a \geq \alpha$. Tương tự, nếu tồn tại một số $m \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \leq \beta$, với mọi $n \geq m$, thì $a \leq \beta$.

(v) Nếu $a_n \rightarrow a$ và $a_n \geq 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

(vi) (**Định lí kẹp trong $\mathbb{R}$**) Nếu (b_n) và (c_n) là các dãy sao cho $b_n \rightarrow a$, $c_n \rightarrow a$ và nếu tồn tại một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ sao cho $b_n \leq a_n \leq c_n$, với mọi $n \geq m$, thì $a_n \rightarrow a$.

Một vài sự kiện trong số này sẽ mang lại kết quả là các tổng, các tích vô hướng và các bội vô hướng của các dãy trong $\mathbb{R}^2$ sẽ lần lượt hội tụ thành các tổng, các tích vô hướng và các bội vô hướng của các giới hạn tương ứng.

Kết quả 2.1.2.

Giả sử $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ là các dãy trong $\mathbb{R}^2$, và $(x_0, y_0), (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Nếu $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ và $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$ thì $(x_n, y_n) + (u_n, v_n) \rightarrow (x_0, y_0) + (u_0, v_0)$ và

$$(x_n, y_n) \cdot (u_n, v_n) \rightarrow (x_0, y_0) \cdot (u_0, v_0).$$

(ii) Nếu $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ thì, với mọi $r \in \mathbb{R}$, $r(x_n, y_n) \rightarrow r(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 2.1.2.

Tính đúng đắn của khẳng định trên là hệ quả ngay tức thì của khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.1) cùng với các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1). $\square$

2.2. Các dãy con và các dãy Cauchy

Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy nào đó trong $\mathbb{R}^2$. Nếu $n_1, n_2, \dots$ là các số nguyên dương sao cho $n_k < n_{k+1}$, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, thì dãy $((x_{n_k}, y_{n_k}))$, với các số hạng là $(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \dots$, sẽ được gọi là một **dãy con** của $((x_n, y_n))$. Một dãy $((x_n, y_n))$ sẽ được gọi là **Cauchy** nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - x_m| < \varepsilon$ và $|y_n - y_m| < \varepsilon$, với mọi $n, m \geq n_0$. Rõ ràng $((x_n, y_n))$ là Cauchy khi và chỉ khi cả (x_n) và (y_n) đều là các dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

Chúng ta hãy nhớ lại các sự kiện cơ bản sau đây về các dãy trong $\mathbb{R}$. Đối với các phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo phép chứng minh của các Kết quả 2.2.2), 2.2.3), 2.2.4), 2.2.5), 2.2.6) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”.

Kết quả 2.

Giả sử (a_n) là một dãy trong $\mathbb{R}$.

Khi đó, chúng ta sẽ có các khẳng định sau:

(i) (a_n) hội tụ $\Rightarrow (a_n)$ bị chặn.

(ii) **(Định lý Bolzano – Weierstrass trong $\mathbb{R}$)** Nếu (a_n) là một dãy bị chặn thì (a_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ.

(iii) (a_n) hội tụ $\Leftrightarrow (a_n)$ bị chặn và mọi dãy con hội tụ của (a_n) đều có cùng giới hạn.

(iv) **(Điều kiện Cauchy trong $\mathbb{R}$)** (a_n) là Cauchy $\Leftrightarrow (a_n)$ hội tụ.

Những sự thật này sẽ lần lượt dẫn đến các kết quả sau.

Kết quả 2.1.3.

Với mọi dãy $((x_n, y_n))$ cho trước trong $\mathbb{R}^2$, chúng ta sẽ có các khẳng định sau:

(i) $((x_n, y_n))$ hội tụ $\Rightarrow ((x_n, y_n))$ bị chặn.

(ii) **(Định lý Bolzano – Weierstrass trong $\mathbb{R}^2$)** Nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy bị chặn thì $((x_n, y_n))$ sẽ có chứa một dãy con hội tụ.

(iii) $((x_n, y_n))$ hội tụ $\Leftrightarrow ((x_n, y_n))$ bị chặn và mọi dãy con hội tụ của $((x_n, y_n))$ đều có cùng giới hạn

(iv) (Điều kiện Cauchy trong $\mathbb{R}^2$) $((x_n, y_n))$ là Cauchy $\Leftrightarrow ((x_n, y_n))$ hội tụ.

Chứng minh kết quả 2.1.3.

Rõ ràng, khẳng định (i) là hệ quả trực tiếp của khẳng định (ii) và (iii) của Kết quả 2.1.1) và khẳng định (i) của Kết quả 2). Để chứng minh khẳng định (ii), giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bị chặn. Khi đó, (x_n) là một dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ và do đó, từ khẳng định (ii) của Kết quả 2), (x_n) sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là (x_{n_k}) . Bây giờ, (y_n) là một dãy bị chặn trong $\mathbb{R}$ và, do đó, (y_{n_k}) cũng vậy. Do đó, từ khẳng định (ii) của Kết quả 2), (y_{n_k}) có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là $(y_{n_{k_j}})$. Rõ ràng, $((x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}))$ là một dãy con hội tụ của $((x_n, y_n))$. Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (ii). Kế tiếp, nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy hội tụ thì rõ ràng nó là bị chặn và mọi dãy con hội tụ của $((x_n, y_n))$ đều có cùng giới hạn. Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bị chặn. Từ khẳng định (ii), $((x_n, y_n))$ sẽ có chứa một dãy con hội tụ. Giả sử (x_0, y_0) là giới hạn của mọi dãy con hội tụ của $((x_n, y_n))$. Nếu $(x_n, y_n) \not\rightarrow (x_0, y_0)$ thì sẽ tồn tại một số $\varepsilon > 0$ và các số nguyên dương $n_1 < n_2 < \dots$ sao cho $\max\{|x_{n_k} - x_0|, |y_{n_k} - y_0|\} \geq \varepsilon$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Bây giờ, $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ là bị chặn và do đó, từ khẳng định (ii), nó sẽ có chứa một dãy con hội tụ. Hơn nữa, dãy con này phải hội tụ về (x_0, y_0) . Điều mâu thuẫn này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (iii). Cuối cùng, tính đúng đắn của khẳng định (iv) được suy ra từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.1), khẳng định (iv) của Kết quả 2) và quan sát trước đó của chúng ta rằng $((x_n, y_n))$ là Cauchy khi và chỉ khi cả (x_n) và (y_n) đều là các dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. $\square$

Kết quả trong khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.3) đôi khi còn được gọi là **Tính đầy đủ Cauchy của $\mathbb{R}^2$** . Một kết quả tương tự cũng đúng cho $\mathbb{R}^n$.

2.3. Bao đóng, biên và phần trong

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Chúng ta sẽ nói rằng D là **đóng** nếu mọi dãy hội tụ trong D đều hội tụ tới một điểm của D . Tập tất cả các điểm trong $\mathbb{R}^2$ là giới hạn của các dãy hội tụ trong D sẽ được gọi là **bao đóng** của D và kí hiệu là $\bar{D}$. Rõ ràng D là đóng khi và chỉ khi $\bar{D} = D$. Một điểm của $\mathbb{R}^2$ sẽ được gọi là một **điểm biên** của D nếu có một dãy trong D hội tụ về nó cũng như có một dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus D$ hội tụ về nó. Tập tất cả các điểm biên của D trong $\mathbb{R}^2$ sẽ được gọi là **biên** của D (trong $\mathbb{R}^2$) và kí hiệu là ∂D . Dễ dàng nhận thấy rằng $\partial D = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, nghĩa là, biên của một tập sẽ trùng với biên của phần bù của nó. Một mối quan hệ quan trọng giữa bao đóng và biên được mô tả dưới đây.

Kết quả 2.3.1.

Với mọi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ cho trước, chúng ta sẽ có $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Chứng minh kết quả 2.3.1.

Giả sử $(x, y) \in \bar{D}$. Khi đó, tồn tại một dãy trong D hội tụ tới (x, y) . Hơn nữa, nếu $(x, y) \notin D$ thì dãy hằng $((x_n, y_n))$ xác định bởi $(x_n, y_n) = (x, y)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, xác định một dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus D$ hội tụ tới (x, y) và do đó, trong trường hợp này, $(x, y) \in \partial D$. Điều này chỉ ra rằng $\bar{D} \subseteq D \cup \partial D$. Mặt khác, nếu

$(x, y) \in D \cup \partial D$ thì rõ ràng rằng, bằng cách sử dụng một dãy hằng hoặc định nghĩa của ∂D , $(x, y) \in \bar{D}$ và, do đó, $D \cup \partial D \subseteq \bar{D}$. □

Kết quả 2.3.2.

Giả sử D là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^2$ sao cho $D \neq \mathbb{R}^2$.

Khi đó, ∂D là một tập khác rỗng.

Chứng minh kết quả 2.3.2.

Do D khác rỗng nên tồn tại một $(x_0, y_0) \in D$, và do $D \neq \mathbb{R}^2$ nên tồn tại một $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Xét đoạn thẳng nối giữa hai điểm này, nghĩa là, xét $L = \{t \in [0, 1]: (1 - t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \in D\}$. Khi đó, L là một tập con khác rỗng bị chặn trên bởi 1 của $\mathbb{R}$. Kí hiệu $t^* = \sup L$ và $(x^*, y^*) = (1 - t^*)(x_0, y_0) + t^*(x_1, y_1)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng (x^*, y^*) là một điểm biên của D . Để nhận thấy điều này, giả sử (t_n) là một dãy trong L sao cho $t_n \rightarrow t^*$. Kí hiệu $(x_n, y_n) = (1 - t_n)(x_0, y_0) + t_n(x_1, y_1)$, với $n \in \mathbb{N}$. Rõ ràng $((x_n, y_n))$ là một dãy trong D hội tụ tới (x^*, y^*) . Hơn nữa, nếu $t^* < 1$ thì chúng ta có thể tìm được một số thực $s_n \in \mathbb{R}$, với $n \in \mathbb{N}$, sao cho $s_n \rightarrow t^*$ và $t^* < s_n \leq 1$ và chúng ta sẽ kí hiệu $(u_n, v_n) = (1 - s_n)$

$(x_0, y_0) + s_n(x_1, y_1)$, với $n \in \mathbb{N}$; ngược lại, nếu $t^* = 1$ thì chúng ta sẽ kí hiệu $(u_n, v_n) = (x_1, y_1)$, với $n \in \mathbb{N}$. Trong mọi trường hợp, chúng ta đều nhận thấy rằng $((u_n, v_n))$ là một dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus D$ hội tụ tới (x^*, y^*) . Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định nêu ở trên. □

Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}^2$ và giả sử (x_0, y_0) là một điểm bất kì của $\mathbb{R}^2$. Chúng ta sẽ nói rằng (x_0, y_0) là một **điểm trong** của D nếu $(x_0, y_0) \in D$ và (x_0, y_0) không phải là một điểm biên của D . Dễ dàng nhận thấy rằng (x_0, y_0) là một điểm trong của D khi và chỉ khi tồn tại một số $r > 0$ sao cho $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$. **Phần trong** của D được định nghĩa là tập tất cả các điểm trong của D . Rõ ràng, phần trong của D là một tập con của D . Chúng ta sẽ nói rằng D là **mở** nếu mọi điểm của D đều là một điểm trong của D . Mệnh đề sau đây chỉ ra mối liên hệ giữa các khái niệm về một tập mở và một tập đóng.

Kết quả 2.3.3.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Khi đó, D là đóng khi và chỉ khi $\mathbb{R}^2 \setminus D$ là mở.

Chứng minh kết quả 2.3.3.

Đầu tiên, giả sử D là một tập đóng. Giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Nếu (x_0, y_0) không phải là một điểm trong của $\mathbb{R}^2 \setminus D$ thì tồn tại một dãy $((x_n, y_n))$ trong phần bù của $\mathbb{R}^2 \setminus D$, nghĩa là, trong D , sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ và, do đó, $(x_0, y_0) \in \bar{D} = D$. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $\mathbb{R}^2 \setminus D$ là một tập mở. Ngược lại, giả sử $\mathbb{R}^2 \setminus D$ là một tập mở. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ với một số $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nào đó. Khi đó, (x_0, y_0) không thể là một điểm trong của $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Nhưng do $\mathbb{R}^2 \setminus D$ là mở nên điều này chỉ ra rằng $(x_0, y_0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus D$, nghĩa là, $(x_0, y_0) \in D$. Điều này chỉ ra rằng D là đóng. □

Chẳng hạn, giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha > 0$ và $\beta > 0$. Xét các tập $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq \alpha \text{ và } |y| \leq \beta\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < \alpha \text{ và } |y| \leq \beta\}$, $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq \alpha \text{ và } |y| < \beta\}$ và $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < \alpha \text{ và } |y| < \beta\}$. Từ quan điểm của khẳng định (iv) của Kết quả 1), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng D_1 đóng, D_4 mở, trong khi D_2 và D_3 không đóng cũng không mở. Hơn nữa, với mỗi $i = 1, 2, 3, 4$, bao đóng của các D_i là D_1 , phần trong của các D_i là D_4 và biên của các D_i là tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| = \alpha \text{ và } |y| = \beta\}$.

Nhận thấy rằng các khái niệm được thảo luận trong phần này của bài viết liên quan đến các dãy trong $\mathbb{R}^2$, tập đóng, tập mở, bao đóng, biên, phần trong, điểm biên, điểm trong cũng thừa nhận một dạng mở rộng đơn giản cho $\mathbb{R}^3$ và, tổng quát hơn, cho $\mathbb{R}^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Để tránh gây xung đột trong cách kí hiệu, chúng ta có thể biểu thị một dãy trong bởi (x_k) , trong đó tham số k chạy trên $\mathbb{N}$ và $x_k \in \mathbb{R}^n$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$. Có thể sẽ rất hữu ích khi chúng ta xây dựng các dạng tương tự chính xác cho các khái niệm và các kết quả trong phần này của bài viết cho $\mathbb{R}^n$ và viết ra các phép chứng minh cho các kết quả tương tự trong trường hợp tổng quát. Đây cũng có thể coi là một cơ hội tốt để xem lại các kết quả đã đạt được trong phần này của bài viết.

3. Tính liên tục của hàm hai biến

3.1. Tính liên tục của các hàm hai biến

Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}^2$ và giả sử (x_0, y_0) là một điểm bất kì trong D . Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là **liên tục tại (x_0, y_0)** nếu, với mọi dãy $((x_n, y_n))$ trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, chúng ta đều có $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Nếu f không liên tục tại (x_0, y_0) thì chúng ta sẽ nói rằng f **gián đoạn tại (x_0, y_0)** . Khi f liên tục tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, chúng ta sẽ nói rằng f **liên tục trên D** .

Chẳng hạn,

(i) Nếu D là một tập con bất kì của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm hằng xác định trên D , nghĩa là, nếu tồn tại một số thực $c \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x, y) = c$, với mọi $(x, y) \in D$, thì rõ ràng f sẽ liên tục trên D .

(ii) Nếu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm chuẩn xác định bởi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, thì f sẽ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Để nhận thấy điều này, giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là một điểm bất kì và giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy nào đó trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.

(iii) Xét các hàm tọa độ $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $p_1(x, y) = x$ và $p_2(x, y) = y$, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.1), chúng ta nhận thấy rằng p_1 và p_2 đều là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

(iv) Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và cố định một điểm $(x_0, y_0) \in D$.

Xét

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}: (x, y_0) \in D\} \text{ và } D_2 = \{y \in \mathbb{R}: (x_0, y) \in D\}.$$

Lưu ý rằng tập D_1 phụ thuộc vào y_0 , trong khi D_2 phụ thuộc vào x_0 .

Với mọi hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ cho trước, kí hiệu $\phi: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm một biến xác định bởi

$$\phi(x) = f(x, y_0) \text{ với } x \in D_1 \text{ và } \psi(y) = f(x_0, y) \text{ với } y \in D_2.$$

Các hàm này đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các hàm hai biến f xung quanh một điểm (x_0, y_0) . Nếu f liên tục tại (x_0, y_0) thì ϕ liên tục tại x_0 và ψ liên tục tại y_0 . Để nhận thấy điều này, kí hiệu (x_n) là một dãy trong D_1 sao cho $x_n \rightarrow x_0$. Khi đó, $(x_n, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$ và, do đó, $f(x_n, y_0) \rightarrow f(x_0, y_0)$, nghĩa là, $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x_0)$. Như vậy, ϕ liên tục tại x_0 . Tương tự, ψ liên tục tại y_0 .

Chúng ta nhắc lại rằng dấu của một hàm liên tục một biến sẽ được bảo toàn trong một lân cận của điểm đó. Nói một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ có khẳng định sau. Đối với phép chứng minh, chúng ta có thể tham khảo phép chứng minh của Kết quả 3.1.1) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”.

Kết quả 3.

Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}, c \in E$ và $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục tại c .

Khi đó, nếu $\phi(c) > 0$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $\phi(x) > 0$ với mọi $x \in E \cap (c - \delta, c + \delta)$. Tương tự, nếu $\phi(c) < 0$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $\phi(x) < 0$ với mọi $x \in E \cap (c - \delta, c + \delta)$.

Một kết quả tương tự cũng đúng cho các hàm hai biến.

Kết quả 3.1.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục tại (x_0, y_0) .

Khi đó, nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$. Tương tự, nếu $f(x_0, y_0) < 0$ thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) < 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 3.1.1.

Đầu tiên, giả sử $f(x_0, y_0) > 0$. Nếu không tồn tại bất kì một số $\delta > 0$ nào với tính chất mong muốn thì, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta đều có thể tìm được một $(x_n, y_n) \in D \cap S_{1/n}(x_0, y_0)$ sao cho $f(x_n, y_n) \leq 0$. Bây giờ, $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ và do f liên tục tại (x_0, y_0) nên chúng ta sẽ có $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Như vậy, từ khẳng định (iv) của Kết quả 1), $f(x_0, y_0) \leq 0$, mâu thuẫn. Phép chứng minh cho trường hợp $f(x_0, y_0) < 0$ cũng được thực hiện theo cách tương tự. □

Kết quả 3.1.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in D, r \in \mathbb{R}$ và $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục tại (x_0, y_0) .

Khi đó, $f + g, rf, fg$ đều là các hàm liên tục tại (x_0, y_0) . Trong trường hợp $f(x_0, y_0) \neq 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$, nên hàm $1/f: D \cap S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Trong trường hợp $f(x_0, y_0) \geq 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$, nên hàm $f^{1/k}: D \cap S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh kết quả 3.1.2.

Tính liên tục của $f + g, rf, rf$ tại (x_0, y_0) có thể được suy ra dễ dàng từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1). Trong trường hợp $f(x_0, y_0) \neq 0$, chúng ta sẽ có $f(x_0, y_0) > 0$ hoặc $f(x_0, y_0) < 0$. Như vậy, từ Kết quả 3.1.1), tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$. Bây giờ, từ khẳng định (iii) của Kết quả 1), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng hàm $1/f : D \cap S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Cuối cùng, khẳng định về tính liên tục của $f^{1/k}$ tại (x_0, y_0) là hệ quả trực tiếp của khẳng định (v) của Kết quả 1). $\square$

Như trong trường hợp hàm một biến, chúng ta cũng có thể dễ dàng suy ra từ Kết quả 3.1.2) như sau. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó, hiệu $f - g$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Ngoài ra, nếu $g(x_0, y_0) \neq 0$ thì thương f/g sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Hơn nữa, nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ thì, với mọi số hữu tỉ dương r , hàm f^r sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Tương tự, nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì, với mọi số hữu tỉ âm r , hàm f^r sẽ liên tục tại (x_0, y_0) .

Hợp của các hàm liên tục

Bây giờ, chúng ta sẽ chỉ ra rằng hợp của các hàm liên tục cũng sẽ là một hàm liên tục. Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng, đối với các hàm hai biến, có thể có ba loại hợp. Như vậy, kết quả sau đây sẽ được phát biểu thành ba phần.

Kết quả 3.1.3.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in D$ và $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục tại (x_0, y_0) .

(i) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}$ sao cho $f(D) \subseteq E$. Khi đó, nếu $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục tại $f(x_0, y_0)$ thì $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ là một hàm liên tục tại (x_0, y_0) .

(ii) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}, t_0 \in E$ và $x, y : E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm sao cho $(x(t), y(t)) \in D$ với mọi $t \in E$ và $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Khi đó, nếu x, y là các hàm liên tục tại t_0 thì hàm $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$ sẽ là một hàm liên tục tại t_0 .

(iii) Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}^2, (u_0, v_0) \in E$ và $x, y : E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm sao cho $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ với mọi $(u, v) \in E$ và $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = (x_0, y_0)$. Khi đó, nếu x, y là các hàm liên tục tại (u_0, v_0) thì hàm $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ sẽ là một hàm liên tục tại (u_0, v_0) .

Chứng minh kết quả 3.1.3.

(i) Giả sử E, g thỏa mãn các giả thiết nêu trong (i). Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Từ tính liên tục của f tại (x_0, y_0) , chúng ta dễ dàng thu được $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Bây giờ, $(f(x_n, y_n))$ là một dãy trong $f(D)$ và, do đó, do tính liên tục của g tại $f(x_0, y_0)$ nên chúng ta sẽ có được $g(f(x_n, y_n)) \rightarrow g(f(x_0, y_0))$. Như vậy, $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ liên tục tại (x_0, y_0) .

(ii) Giả sử E, t_0 , các hàm x, y thỏa mãn các giả thiết nêu trong (ii) và hàm F được định nghĩa như trong (ii). Giả sử (t_n) là một dãy trong E sao cho $t_n \rightarrow t_0$. Từ tính liên tục của x và y tại t_0 , chúng ta sẽ thu được $x(t_n) \rightarrow x(t_0)$ và $y(t_n) \rightarrow y(t_0)$. Do đó, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.1), $(x(t_n), y(t_n))$

là một dãy trong D hội tụ về (x_0, y_0) . Như vậy, từ tính liên tục của f tại (x_0, y_0) , chúng ta sẽ có $f(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow f(x_0, y_0)$, nghĩa là, $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$. Điều này chỉ ra rằng F sẽ liên tục tại t_0 .

(iii) Giả sử $E, (u_0, v_0)$, các hàm x, y thỏa mãn các giả thiết nêu trong (iii) và hàm F được định nghĩa như trong (iii). Giả sử (u_n, v_n) là một dãy trong E sao cho $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$. Từ tính liên tục của x và y tại (u_0, v_0) , chúng ta sẽ thu được $x(u_n, v_n) \rightarrow x(u_0, v_0)$ và $y(u_n, v_n) \rightarrow y(u_0, v_0)$. Do đó, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.1.1, $(x(u_n, v_n), y(u_n, v_n))$ là một dãy trong D hội tụ về (x_0, y_0) . Như vậy, từ tính liên tục của f tại (x_0, y_0) , chúng ta sẽ có $f(x(u_n, v_n), y(u_n, v_n)) \rightarrow f(x_0, y_0)$, nghĩa là, $F(u_n, v_n) \rightarrow F(u_0, v_0)$. Điều này chỉ ra rằng F sẽ liên tục tại (u_0, v_0) . $\square$

Glép nối các hàm liên tục trên các tập con chồng nhau

Một cách hiệu quả để chúng ta có thể xây dựng các hàm liên tục một biến là glép hai hàm liên tục xác định trên các tập con chồng nhau cắt nhau tại một điểm duy nhất, miễn là các giá trị của chúng bằng nhau tại điểm giao nhau chung. Bây giờ, chúng ta sẽ thu được một kết quả tương tự đối với các hàm hai biến. Một tuyên bố chính xác của khẳng định này sẽ được đưa ra dưới đây.

Kết quả 3.1.4.

Giả sử D_1 và D_2 là các tập con của $\mathbb{R}^2$, $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục sao cho $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D_1 \cap D_2$. Kí hiệu $D = D_1 \cup D_2$. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D_1, \\ f_2(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Khi đó, nếu D_i đóng trong D , nghĩa là, $\bar{D}_i \cap D = D_i$, với $i = 1, 2$, thì f là liên tục.

Chứng minh kết quả 3.1.4.

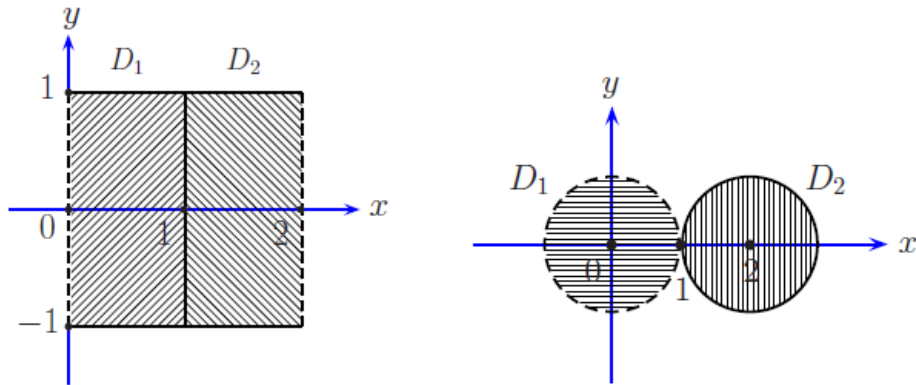
Do f_1 và f_2 đồng nhất trên $D_1 \cap D_2$ nên f rõ ràng sẽ được xác định một cách đúng đắn. Bây giờ, giả sử mỗi D_i đều đóng trong D với $i = 1, 2$. Cố định $(x_0, y_0) \in D$. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Trong trường hợp có một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \in D_1$ với mọi $n \geq n_1$, chúng ta sẽ có $(x_0, y_0) \in D_1$, bởi vì D_1 đóng trong D ; hơn nữa, từ tính liên tục của f_1 trên D_1 , chúng ta sẽ thu được $f(x_n, y_n) = f_1(x_n, y_n) \rightarrow f_1(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$. Tương tự, trong trường hợp có một số tự nhiên $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \in D_2$ với mọi $n \geq n_2$, chúng ta sẽ có $(x_0, y_0) \in D_2$ và $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$.

Trong trường hợp còn lại, tồn tại hai dãy con $((x_{l_k}, y_{l_k}))$ và $((x_{m_k}, y_{m_k}))$ của $((x_n, y_n))$ sao cho $(x_{l_k}, y_{l_k}) \in D_1$ và $(x_{m_k}, y_{m_k}) \in D_2$, với mọi $k \in \mathbb{N}$, và, hơn nữa, $\mathbb{N} = \{l_1, l_2, \dots\} \cup \{m_1, m_2, \dots\}$. Rõ ràng, $(x_{l_k}, y_{l_k}) \rightarrow (x_0, y_0)$ và $(x_{m_k}, y_{m_k}) \rightarrow (x_0, y_0)$. Bây giờ, do mỗi D_i đều đóng trong D nên chúng ta sẽ có $(x_0, y_0) \in D_1 \cap D_2$; hơn nữa, do mỗi f_i đều liên tục tại (x_0, y_0) nên chúng ta cũng sẽ có $f(x_{l_k}, y_{l_k}) = f_1(x_{l_k}, y_{l_k}) \rightarrow f_1(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ và $f(x_{m_k}, y_{m_k}) = f_2(x_{m_k}, y_{m_k}) \rightarrow f_2(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$. Do $\mathbb{N} = \{l_1, l_2, \dots\} \cup \{m_1, m_2, \dots\}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Điều này chứng tỏ rằng f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . $\square$

Chẳng hạn,

(i) Xét các nửa hình chữ nhật mở $D_1 = (0,1] \times [-1,1]$ và $D_2 = [1,2) \times [-1,1]$. Lưu ý rằng cả D_1 và D_2 đều không đóng trong $\mathbb{R}^2$, nhưng mỗi D_i đều đóng trong $D = D_1 \cup D_2$ với $i = 1,2$. Như vậy, các giả thiết nêu trong Kết quả 3.1.4) đều được thỏa mãn và các hàm liên tục trên D_1 và D_2 đồng nhất trên $D_1 \cap D_2 = \{1\} \times [-1,1]$ được mở rộng thành một hàm liên tục trên D .

(ii) Giả sử D_1 là đĩa mở $B_1(0,0)$ và D_2 là đĩa đóng $B_2(2,0)$, nghĩa là, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$ và $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$. Xét các hàm $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ và $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f_1(x,y) = 0$ với mọi $(x,y) \in D_1$ và $f_1(x,y) = 1$ với mọi $(x,y) \in D_2$. Rõ ràng, f_1 và f_2 là liên tục. Hơn nữa, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ và, do đó, hàm $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ như đã nêu trong Kết quả 3.1.4) sẽ được xác định một cách rõ ràng. Nhưng f lại không liên tục tại $(1,0)$, bởi vì $(x_n, y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}, 0\right) \rightarrow (1,0)$, ngược lại $f(x_n, y_n) = f_1(x_n, y_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, do đó, $f(x_n, y_n) \nrightarrow 1 = f(1,0)$. Điều này cho thấy rằng chúng ta không thể loại bỏ giả thiết $\overline{D_i} \cap D = D_i$ với $i = 1,2$ trong Kết quả 3.1.4).



Hình vẽ minh họa các điều kiện $\overline{D_1} \cap D = D_1$ và $\overline{D_2} \cap D = D_2$ trong Kết quả 3.1.4)

được thỏa mãn trong (i) và bị vi phạm trong (ii).

Một lập luận quy nạp đơn giản cho thấy rằng kết quả trong Kết quả 3.1.4) có thể được mở rộng để ghép các hàm liên tục lại với nhau không chỉ trên hai tập chồng lên nhau, mà còn trên bất kì một số lượng hữu hạn tập nào, miễn là chúng đồng nhất trên tất cả các giao điểm theo cặp và mỗi tập đều đóng trong hợp của tất cả các tập. Với mục đích này, chúng ta chỉ cần ghi lại trường hợp đặc biệt sau đây của việc chia một tập thành bốn góc phần tư tại một điểm cho trước là đủ.

Kết quả 3.1.5.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Với mọi $(x_0, y_0) \in D$ cho trước, kí hiệu $D_1 = \{(x,y) \in D: x \geq x_0 \text{ và } y \geq y_0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D: x \leq x_0 \text{ và } y \geq y_0\}$, $D_3 = \{(x,y) \in D: x \leq x_0 \text{ và } y \leq y_0\}$, $D_4 = \{(x,y) \in D: x \geq x_0 \text{ và } y \leq y_0\}$ và $f_i = f|_{D_i}$ với mỗi $i = 1, \dots, 4$.

Khi đó, f liên tục khi và chỉ khi f_i liên tục với mỗi $i = 1, \dots, 4$.

Chứng minh kết quả 3.1.5.

Nhận thấy rằng nếu f liên tục thì rõ ràng f_i liên tục với mỗi $i = 1, \dots, 4$. Để chứng minh chiều ngược lại, xét $E_1 = D_1 \cup D_2$ và $E_2 = D_3 \cup D_4$ và cũng như $g_i = f|_{E_i}$ với $i = 1, 2$. Bằng cách sử dụng Kết quả 3.1.4), chúng ta nhận thấy rằng tính liên tục của f_1 và f_2 sẽ kéo theo tính liên tục của g_1 , trong khi tính liên tục của f_3 và f_4 sẽ kéo theo tính liên tục của g_2 . Hơn nữa, bằng cách sử dụng lại Kết quả 3.1.4), chúng ta cũng nhận thấy rằng tính liên tục của g_1 và g_2 sẽ kéo theo tính liên tục của f . $\square$

Đặc trưng của tính liên tục

Chúng ta đã chọn cách xác định tính liên tục của một hàm tại một điểm bằng cách sử dụng các dãy. Chúng ta cũng có thể có các định nghĩa thay thế, như được thể hiện qua kết quả bên dưới đây.

Kết quả 3.1.6.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, các khẳng định sau đây sẽ tương đương với nhau.

- (i) f liên tục tại (x_0, y_0) , nghĩa là, với mọi dãy $((x_n, y_n))$ trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, chúng ta đều có $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$.
- (ii) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$.
- (iii) Với mọi tập con mở V của $\mathbb{R}$ có chứa $f(x_0, y_0)$, tồn tại một tập con mở U của $\mathbb{R}^2$ có chứa (x_0, y_0) sao cho $f(U \cap D) \subseteq V$, nghĩa là, $f(x, y) \in V$ với mọi $(x, y) \in U \cap D$.

Chứng minh kết quả 3.1.6.

Giả sử (i) đúng. Nếu (ii) không được thỏa mãn thì tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, tồn tại một (x, y) trong $D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ với tính chất $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \geq \varepsilon$. Do đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một (x_n, y_n) trong $D \cap S_{1/n}(x_0, y_0)$ sao cho $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| \geq \varepsilon$. Nhưng khi đó $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ và $f(x_n, y_n) \not\rightarrow f(x_0, y_0)$. Điều này mâu thuẫn với (i). Như vậy, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Kế tiếp, giả sử (ii) đúng. Giả sử V là một tập mở của $\mathbb{R}$ có chứa $f(x_0, y_0)$. Khi đó, tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho $(f(x_0, y_0) - \varepsilon, f(x_0, y_0) + \varepsilon) \subseteq V$. Từ (ii), chúng ta có thể tìm được một số $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$. Do đó, nếu chúng ta kí hiệu $U = S_\delta(x_0, y_0)$ thì U sẽ là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ có chứa (x_0, y_0) sao cho $f(U \cap D) \subseteq V$. Như vậy, (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Cuối cùng, giả sử (iii) đúng. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, coi V là khoảng mở $(f(x_0, y_0) - \varepsilon, f(x_0, y_0) + \varepsilon)$ trong $\mathbb{R}$. Từ (iii), tồn tại một tập con mở U của $\mathbb{R}^2$ có chứa (x_0, y_0) sao cho $f(U \cap D) \subseteq V$. Do U là mở nên tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $S_\delta(x_0, y_0) \subseteq U$. Hơn nữa, do $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ nên tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \in S_\delta(x_0, y_0)$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n, y_n)$ nằm trong $(f(x_0, y_0) - \varepsilon, f(x_0, y_0) + \varepsilon)$, nghĩa là, $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$ và, do đó, (iii) $\Rightarrow$ (i).

Điều này cũng chứng tỏ tính tương đương của (i), (ii) và (iii). □

Kết quả 3.1.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, f sẽ liên tục trên D nếu và chỉ nếu, với mọi tập con mở V của $\mathbb{R}$, tập $f^{-1}(V) = \{(x, y) \in D: f(x, y) \in V\}$ là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh kết quả 3.1.7.

Tính đúng đắn của khẳng định trên có thể được suy ra trực tiếp từ Kết quả 3.1.6). □

Chẳng hạn, rõ ràng, các khoảng $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ và tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ là các tập con mở của $\mathbb{R}$. Như vậy, như một hệ quả của Kết quả 3.1.7), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục thì mỗi một trong các tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) > 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) < 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) \neq 0\}$ đều là mở trong $\mathbb{R}^2$.

3.2. Tính chất cơ bản của các hàm liên tục hai biến

Tính liên tục và tính bị chặn

Một hàm bị chặn sẽ không nhất thiết phải liên tục.

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu cả } x \text{ và } y \text{ đều là các số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Rõ ràng, f là bị chặn nhưng f không liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}^2$. Ngoài ra, một hàm liên tục cũng không cần phải bị chặn.

Chẳng hạn, các hàm $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ và $h: (0,1) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x, y) = x + y \text{ và } h(x, y) = 1/(x + y)$$

đều liên tục nhưng cả g và h đều không phải là một hàm bị chặn.

Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng tập xác định của g là đóng nhưng không bị chặn, trong khi tập xác định của h bị chặn, nhưng không đóng. Kết quả sau đây cho thấy rằng tình huống sẽ tốt hơn nếu tập xác định là đóng cũng như bị chặn.

Kết quả 3.2.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ đóng và bị chặn và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Khi đó, f sẽ bị chặn, nghĩa là, $f(D) = \{f(x, y): (x, y) \in D\}$ là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}$. Ngoài ra, $f(D)$ là một tập con đóng của $\mathbb{R}$. Hơn nữa, như một hệ quả, nếu D khác rỗng thì f sẽ đạt được các chặn của nó, nghĩa là, tồn tại các $(a, b), (c, d) \in D$ sao cho $f(a, b) = \sup f(D)$ và $f(c, d) = \inf f(D)$.

Chứng minh kết quả 3.2.1.

Giả sử f không bị chặn trên. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một $(x_n, y_n) \in D$ sao cho $f(x_n, y_n) > n$. Do D bị chặn nên, từ Định lý Bolzano – Weierstrass (khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.3), dãy $((x_n, y_n))$ sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là $((x_{n_k}, y_{n_k}))$. Giả sử $(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x_0, y_0)$. Khi đó, $(x_0, y_0) \in D$, bởi vì D đóng, và $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(x_0, y_0)$, bởi vì f liên tục. Mặt khác, $f(x_{n_k}, y_{n_k}) > n_k$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$, và $n_k \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng f sẽ bị chặn trên. Tương tự, chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng f bị chặn dưới. Do đó, $f(D)$ bị chặn. Kế tiếp, giả sử (z_n) là một dãy nào đó trong $f(D)$ sao cho $z_n \rightarrow r$ với một số $r \in \mathbb{R}$ nào đó. Kí hiệu $z_n = f(x_n, y_n)$, trong đó $(x_n, y_n) \in D$ với $n \in \mathbb{N}$. Như đã nói trước đây, dãy $((x_n, y_n))$ sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là $((x_{n_k}, y_{n_k}))$, hội tụ về một điểm (x_0, y_0) nào đó của D . Do f liên tục tại (x_0, y_0) , $z_{n_k} = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(x_0, y_0)$ và, do đó, $r = f(x_0, y_0)$ nên điều này cũng cho thấy rằng $r \in f(D)$. Như vậy, $f(D)$ đóng. Cuối cùng, nếu D khác rỗng thì $f(D)$ là một tập con khác không bị chặn của $\mathbb{R}$ và, do đó, $M = \sup f(D)$ và $m = \inf f(D)$ đều được xác định một cách rõ ràng. Từ định nghĩa của supremum và infimum, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta luôn có thể tìm được các $(a_n, b_n), (c_n, d_n) \in D$ sao cho $M - \frac{1}{n} < f(a_n, b_n) \leq M$ và $m \leq f(c_n, d_n) < m + \frac{1}{n}$. Do đó, $f(a_n, b_n) \rightarrow M$ và $f(c_n, d_n) \rightarrow m$. Do $f(D)$ đóng nên $M, m \in f(D)$, nghĩa là, $f(a, b) = \sup f(D)$ và $f(c, d) = \inf f(D)$ với các $(a, b), (c, d) \in D$ nào đó. $\square$

Nhận xét rằng các tập con của $\mathbb{R}^2$ (và tổng quát hơn, của $\mathbb{R}^n$) vừa đóng vừa bị chặn thường được gọi là các tập compact. Như vậy, mệnh đề trên chỉ ra rằng ảnh liên tục của một tập compact cũng compact.

Tính liên tục và tính đơn điệu

Đối với các hàm một biến, không có bất kì một mối quan hệ trực tiếp nào giữa tính liên tục và tính đơn điệu. Thật vậy, chúng ta chỉ cần xét hàm phần nguyên $x \mapsto [x]$ và hàm giá trị tuyệt đối $x \mapsto |x|$ để có thể kết luận rằng một hàm đơn điệu không cần phải liên tục cũng như một hàm liên tục không nhất thiết phải đơn điệu. Đối với các hàm hai biến, một tình huống tương tự cũng xuất hiện. Trên thực tế, bằng cách sử dụng thứ tự tích trên $\mathbb{R}^2$, chúng ta đã giới thiệu trong mục **1. Khái niệm về các vector và các hàm vector** hai khái niệm hoàn toàn khác nhau: tính đơn điệu và tính song đơn điệu. Chúng ta sẽ chỉ ra ở dưới đây rằng cả hai điều này đều không ngụ ý hoặc được ngụ ý bởi tính liên tục.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = xy$. Rõ ràng, f liên tục nhưng không đơn điệu trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Tuy nhiên, lưu ý rằng f sẽ tăng song song trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$, bởi vì chúng ta sẽ có $x_2 y_2 + x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Xét hàm $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y)^3$. Rõ ràng, f liên tục. Tuy nhiên, f không thể là song đơn điệu trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Để nhận thấy điều này, chúng ta quan sát rằng $(x_1, y_1) = (0, 0)$ và $(x_2, y_2) = (1, 1)$ là các điểm thuộc $[-1, 1] \times [-1, 1]$ thỏa mãn $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ và

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) = 0 + 8 - 1 - 1 = 6 > 0,$$

trong khi $(u_1, v_1) = (-1, -1)$ và $(u_2, v_2) = (0, 0)$ là các điểm thuộc $[-1, 1] \times [-1, 1]$ thỏa mãn $(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2)$ và

$$f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2) - f(u_1, v_2) - f(u_2, v_1) = -8 + 0 + 1 + 1 = -6 < 0.$$

(iii) Xét hàm $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \text{ và } y > 0, \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng f tăng đơn điệu cũng như tăng song song nhưng không liên tục trên $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Tính liên tục, biến phân bị chặn và song biến phân bị chặn

Nói chung, một hàm có biến phân bị chặn không nhất thiết phải liên tục. Tương tự như vậy đối với một hàm có song biến phân bị chặn. Chúng ta đã thấy trước đó rằng một hàm liên tục không nhất thiết phải đơn điệu hoặc song đơn điệu. Ví dụ sau đây cho thấy rằng nó thậm chí còn không cần phải có biến phân bị chặn hoặc song biến phân bị chặn.

Chẳng hạn, xét hàm $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cos(\pi/2x) & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, f liên tục trên $(0, 1] \times [0, 1]$. Hơn nữa, do $|f(x, y)| \leq |xy|$ với mọi $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng f liên tục tại $(0, y)$ với mỗi $y \in [0, 1]$.

Như vậy, f liên tục trên $[0, 1] \times [0, 1]$.

Kế tiếp, với mọi số nguyên dương chẵn n cho trước, tạm giả sử $n = 2k$ với một $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nếu chúng ta xét các điểm

$$x_0 = y_0 = 0 \text{ và } x_i = \frac{1}{n+1-i}, y_i = 1 \text{ với } i = 1, \dots, n,$$

thì chúng ta sẽ có $(0, 0) = (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) = (1, 1)$ và, hơn nữa, $f(x_i, y_i) = 0$ nếu i là một số chẵn và $f(x_i, y_i) = \pm x_i$ nếu i là một số lẻ.

Như vậy,

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Do tập $\{\sum_{i=1}^k (1/i) : k \in \mathbb{N}\}$ không bị chặn trên nên f sẽ không thể có biến phân bị chặn trên $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ngoài ra, nếu chúng ta kí hiệu $n = 2k$ và $x_0, x_1, \dots, x_n$ như trên, nhưng chọn $m = 0, y_0 = 0, y_1 = 1$, thì $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1$ và $0 = y_0 \leq y_1 = 1$ và, hơn nữa, với mọi $i \geq 0$, chúng ta sẽ có $f(x_i, 0)$

$= 0$, trong khi $f(x_i, 1) = 0$ nếu i là một số chẵn và $f(x_i, 1) = \pm x_i$ nếu i là một số lẻ và, do đó,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}.$$

Như vậy, f không thể có biến phân bị chặn trên $[0,1] \times [0,1]$.

Nhận thấy rằng chúng ta cũng có thể thu được một phiên bản tinh chỉnh hơn của phân tích Jordan (Kết quả 1.2.5) và 1.2.8) cho các hàm liên tục. Cụ thể, một hàm liên tục có biến phân bị chặn luôn có thể xem như là hiệu của các hàm đơn điệu liên tục, trong khi một hàm liên tục có song biến phân bị chặn luôn có thể xem như là hiệu của các hàm song đơn điệu liên tục.

Tính liên tục và tính lồi

Nói chung, một hàm liên tục không nhất thiết phải lồi cũng như lõm. Chẳng hạn, xét $D = [-1,1] \times [-1,1]$ và hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^3 + y^3$. Rõ ràng, f liên tục. Nhưng f không lồi cũng như không lõm. Để nhận thấy điều này, quan sát thấy rằng $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1, -1) + \frac{1}{2}(0,0)$ và $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(0,0)$, nhưng $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} > -1 = \frac{1}{2}f(-1, -1) + \frac{1}{2}f(0,0)$ và $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < 1 = \frac{1}{2}f(1,1) + \frac{1}{2}f(0,0)$. Hơn nữa, một hàm lồi không nhất thiết phải liên tục.

Chẳng hạn, nếu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ là đĩa đơn vị đóng và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một biến thể của hàm chuẩn được định nghĩa như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 < 1, \\ 2 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

thì f lồi trên D nhưng không liên tục trên D .

Ở đây, tính liên tục của f không được thỏa mãn tại các điểm biên của D . Thật vậy, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một hàm lồi sẽ luôn liên tục tại các điểm trong của tập xác định của nó. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh một vài kết quả phụ, chúng cũng có thể được quan tâm một cách độc lập.

Kết quả 3.2.2.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và $c < d$.

Khi đó, mọi hàm lồi giá trị thực xác định trên hình chữ nhật đóng $[a, b] \times [c, d]$ trong $\mathbb{R}^2$ đều bị chặn.

Chứng minh kết quả 3.2.2.

Kí hiệu $D = [a, b] \times [c, d]$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi bất kì và $M = \max\{f(a, c), f(a, d), f(b, c),$

$f(b, d)\}$. Giả sử $(x, y) \in D$. Khi đó, tồn tại một số s trong $[0,1]$ sao cho $x = (1-s)a + sb$. Bằng cách sử dụng tính lồi của f trên D , chúng ta nhận thấy rằng $f(x, y) \leq (1-s)f(a, y) + sf(b, y)$. Ngoài ra, tồn tại một số $t \in [0,1]$ sao cho $y = (1-t)c + td$. Một lần nữa, bằng cách sử dụng tính lồi của f trên D , chúng ta sẽ thu được

$$\begin{aligned}
f(x, y) &\leq (1-s)[(1-t)f(a, c) + tf(a, d)] + s[(1-t)f(b, c) + tf(b, d)] \\
&\leq (1-s)[(1-t)M + tM] + s[(1-t)M + tM] \\
&= M.
\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng M là một cận trên của f .

Kế tiếp, xét tâm điểm $(p, q) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$ của D và $(u, v) = (a+b-x, c+d-y)$. Rõ ràng, $(u, v) \in D$ và $(p, q) = \frac{1}{2}(x, y) + \frac{1}{2}(u, v)$. Như vậy, bằng cách sử dụng tính lồi của f , chúng ta sẽ thu được $f(p, q) \leq \frac{1}{2}f(x, y) + \frac{1}{2}f(u, v) \leq \frac{1}{2}f(x, y) + M$, nghĩa là, $f(x, y) \geq m$, trong đó $m = 2(f(p, q) - M)$.

Điều này chỉ ra rằng m là một cận dưới của f . □

Kết quả 3.2.3.

Giả sử D là một tập lồi và mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi bất kì. Ngoài ra, kí hiệu $[a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật đóng được chứa trong D , trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và $c < d$.

Khi đó, tồn tại một số $K \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x, y) - f(u, v)| \leq K(|x - u| + |y - v|) \text{ với mọi } (x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d].$$

Chứng minh kết quả 3.2.3.

Do D mở nên tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $[a - \delta, b + \delta] \times [c - \delta, d + \delta] \subseteq D$. Từ Kết quả 3.2.1), tồn tại các số $m, M \in \mathbb{R}$ sao cho $m \leq f(z, w) \leq M$ với mọi $(z, w) \in [a - \delta, b + \delta] \times [c - \delta, d + \delta]$. Bây giờ, cố định các điểm $(x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$. Trường hợp $(x, y) = (u, v)$ là hiển nhiên và, do đó, chúng ta sẽ giả sử $(x, y) \neq (u, v)$. Khi đó, $l = |x - u| + |y - v| > 0$ và chúng ta có thể xét $z = u + \frac{\delta}{l}(u - x)$ và $w = v + \frac{\delta}{l}(v - y)$. Do $|u - x| \leq l$, nghĩa là, $-l \leq u - x \leq l$ nên chúng ta sẽ có $u - \delta \leq z \leq u + \delta$ và, do đó, $z \in [a - \delta, b + \delta]$. Tương tự, $w \in [c - \delta, d + \delta]$. Đặc biệt, $(z, w) \in D$. Ngoài ra, chúng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng

$$u = \frac{l}{l + \delta}x + \frac{\delta}{l + \delta}z \quad \text{và} \quad v = \frac{l}{l + \delta}y + \frac{\delta}{l + \delta}w.$$

Như vậy, $(u, v) = (1 - t)(x, y) + t(z, w)$, trong đó $t = l/(l + \delta)$. Do $0 < t < 1$ nên, bằng cách sử dụng tính lồi của f trên D , chúng ta sẽ thu được $f(u, v) \leq (1 - t)f(x, y) + tf(z, w)$. Ngoài ra, do $0 < t < l/\delta$ nên chúng ta nhận thấy rằng

$$f(u, v) - f(x, y) \leq t[f(u, v) - f(x, y)] \leq \frac{l}{\delta}[M - m] = K(|x - u| + |y - v|),$$

trong đó $K = (M - m)/\delta$.

Tương tự, $f(x, y) - f(u, v) \leq K(|x - u| + |y - v|)$.

Điều này chứng tỏ tính đúng đắn của bất đẳng thức mong muốn đối với $|f(x, y) - f(u, v)|$. □

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh rằng một hàm lồi sẽ liên tục tại mọi điểm trong của tập xác định của nó. Đây là hệ quả trực tiếp của kết quả trên.

Kết quả 3.2.4.

Giả sử D là một tập con lồi của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi bất kì.

Khi đó, f sẽ liên tục tại mọi điểm trong của D . Đặc biệt, nếu D cũng mở trong $\mathbb{R}^2$ thì f sẽ liên tục trên D .

Chứng minh kết quả 3.2.4.

Giả sử (x_0, y_0) là một điểm trong của D . Khi đó, tồn tại một số $r > 0$ sao cho $R = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$ được chứa trong D . Từ Kết quả 3.2.3), tồn tại một số $K \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq K(|x - x_0| + |y - y_0|)$ với mọi $(x, y) \in R$. Điều này ngụ ý rằng nếu (x_n, y_n) là một dãy trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ thì $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Như vậy, f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . $\square$

Tính liên tục và tính chất giá trị trung gian

Một kết quả có tầm quan trọng cơ bản trong các phép tính hàm một biến là các hàm liên tục đều có tính chất giá trị trung gian. Để dễ tham khảo, chúng ta sẽ nêu lại kết quả này dưới đây (Kết quả 3.2.4) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”).

Kết quả 4. (Định lý giá trị trung gian)

Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}$ và $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Khi đó, ϕ sẽ có tính chất giá trị trung gian trên mọi khoảng $I \subseteq D$, nghĩa là, nếu $a, b \in I$ với $a < b$ và $r \in \mathbb{R}$ là một số nằm giữa $\phi(a)$ và $\phi(b)$ thì sẽ tồn tại một số $c \in [a, b]$ sao cho $\phi(c) = r$. Đặc biệt, $\phi(I)$ sẽ là một khoảng nào đó nằm trong $\mathbb{R}$.

Kết quả sau đây có thể được xem như một dạng tương tự của Kết quả 3.2.4) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**” đối với các hàm liên tục giá trị thực hai biến.

Kết quả 3.2.5. (Định lý giá trị trung gian cho hàm hai biến)

Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục bất kì.

Khi đó, $f(E)$ sẽ là một khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$ với mọi tập con liên thông đường E của D .

Chứng minh kết quả 3.2.5.

Giả sử $E \subseteq D$ là một tập liên thông đường bất kì. Giả sử $z_1, z_2 \in f(E)$ và r là một số thực bất kì nằm giữa z_1 và z_2 . Khi đó, $z_1 = f(x_1, y_1)$ và $z_2 = f(x_2, y_2)$ với các $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$ nào đó. Do E là liên thông đường nên sẽ có một đường Γ nối (x_1, y_1) với (x_2, y_2) nằm trong E . Giả sử $x, y: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục sao cho Γ xác định bởi $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$. Xét hàm $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(t) = f(x(t), y(t))$. Từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.1.6), F liên tục và, từ Kết quả 4), F có tính chất giá trị trung gian trên $[\alpha, \beta]$. Như vậy, $r = F(t_0)$ với một số $t_0 \in [\alpha, \beta]$ và, do đó, $r \in f(E)$. Điều này chứng tỏ

rằng $f(E)$ là một khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$. Cuối cùng, mọi 2 – khoảng đều là một tập liên thông đường và, do đó, từ Kết quả 1.2.10), chúng ta nhận thấy rằng f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên mọi 2 – khoảng trong D . $\square$

Ví dụ sau đây cho thấy rằng chiều ngược lại của kết quả trên là không đúng, nghĩa là tính chất giá trị trung gian không bao hàm tính liên tục.

Chẳng hạn, xét hàm $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(1/y) & \text{nếu } y \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } y = 0. \end{cases}$$

Khi đó, f không liên tục trên $[0,1] \times [0,1]$, bởi vì, chẳng hạn, $(0, 1/n\pi) \rightarrow (0,0)$, nhưng $f(0, 1/n\pi) = (-1)^n \not\rightarrow f(0,0) = 0$. Tuy nhiên, lưu ý rằng f sẽ liên tục trên $[0,1] \times (0,1]$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng f có tính chất giá trị trung gian trên $[0,1] \times [0,1]$. Giả sử $r \in \mathbb{R}$ là một giá trị trung gian của f , nghĩa là, r nằm giữa $f(x_1, y_1)$ và $f(x_2, y_2)$ với các $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0,1] \times [0,1]$ nào đó. Nếu $y_1 > 0$ và $y_2 > 0$ thì, từ tính liên tục của f trên $[0,1] \times (0,1]$ và Kết quả 3.2.5), chúng ta nhận thấy rằng $r = f(x, y)$ với một $(x, y) \in I_{(x_1, y_1), (x_2, y_2)}$. Nếu $y_1 = y_2 = 0$ thì $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = 0$ và không có gì để phải chứng minh nữa cả. Do đó, không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $y_1 = 0$ và $y_2 > 0$. Chọn ra một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho $(1/k\pi) < y_2$. Bây giờ, $y_1 < (1/(k+2)\pi) < (1/k\pi) < y_2$ và, do đó, $\cos(1/y)$ sẽ thừa nhận mọi giá trị trong khoảng từ -1 đến 1 khi y thay đổi từ y_1 đến y_2 . Điều này chỉ ra rằng $r = f(x_1, y)$ với một số $y \in [y_1, y_2]$ nào đó. Như vậy, f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên $[0,1] \times [0,1]$.

Kết quả 3.2.6.

Giả sử D là một tập con khác rỗng, liên thông đường, đóng và bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục bất kì.

Khi đó, tập giá trị $f(D)$ của f sẽ là một khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$.

Chứng minh kết quả 3.2.6.

Đầu tiên, lưu ý rằng do D khác rỗng nên $f(D)$ cũng vậy. Từ Kết quả 3.2.1), $f(D)$ sẽ bị chặn và, hơn nữa, nếu $m = \inf f(D)$ và $M = \sup f(D)$ thì $f(D) \subseteq [m, M]$ và $m, M \in f(D)$. Hơn nữa, từ Kết quả 3.2.5), $f(D)$ sẽ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Điều này chỉ ra rằng $f(D) = [m, M]$. $\square$

Tính liên tục đều

Khái niệm về tính liên tục đều của các hàm một biến có thể được mở rộng một cách dễ dàng cho các hàm hai biến. Giả sử D là một tập con của $\mathbb{R}^2$. Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sẽ được gọi là **liên tục đều** trên D nếu, với mọi dãy $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ trong D sao cho $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0$, chúng ta có $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| \rightarrow 0$.

Đặc biệt, nếu một trong hai dãy nêu trên là một dãy hằng thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng một hàm liên tục đều cũng sẽ liên tục. Như trong trường hợp hàm một biến, chiều ngược lại của khẳng định trên cũng đúng nếu tập xác định của nó là đóng và bị chặn.

Kết quả 3.2.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập đóng và bị chặn.

Khi đó, mọi hàm liên tục trên D đều liên tục đều trên D .

Chứng minh kết quả 3.2.7.

Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục nhưng không liên tục đều trên D . Khi đó, tồn tại các dãy $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ trong D sao cho $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0$, nhưng $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| \not\rightarrow 0$. Cái sau ngụ ý rằng tồn tại một số thực dương $\varepsilon > 0$ và các số nguyên dương $n_1 < n_2 < \dots$ sao cho $|f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(u_{n_k}, v_{n_k})| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Bây giờ, từ Định lý Bolzano – Weierstrass (khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.3), $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ sẽ có chứa một dãy con hội tụ, tạm giả sử là $((x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}))$. Nếu $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow (x_0, y_0)$ thì $(u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}}) \rightarrow (x_0, y_0)$, bởi vì $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0$. Do f liên tục trên D nên chúng ta nhận thấy rằng $|f(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) - f(u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}})| \rightarrow |f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = 0$. Nhưng đây lại là một điều mâu thuẫn, bởi vì $|f(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) - f(u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}})| \geq \varepsilon$ với mọi $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Một tiêu chí cho tính liên tục đều của một hàm hai biến không liên quan đến sự hội tụ của các dãy có thể được đưa ra như sau.

Kết quả 3.2.8.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Xét một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Khi đó, f sẽ liên tục đều trên D khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ sau đây:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y), (u, v) \in D \text{ và } |(x, y) - (u, v)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon.”$$

Chứng minh kết quả 3.2.8.

Giả sử f liên tục đều trên D . Giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ không được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, chúng ta luôn có thể tìm được $(x, y), (u, v) \in D$ sao cho $|(x, y) - (u, v)| < \delta$, nhưng $|f(x, y) - f(u, v)| \geq \varepsilon$. Xét $\delta = 1/n$ với $n \in \mathbb{N}$, chúng ta sẽ thu được các dãy $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ trong D sao cho $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| \geq \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0$, nhưng $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| \not\rightarrow 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết f liên tục đều trên D .

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - \delta$ được thỏa mãn. Giả sử $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ là các dãy bất kỳ trong D sao cho $|(x_n, y_n) - (u_n, v_n)| \rightarrow 0$. Giả sử cho trước một số thực dương $\varepsilon > 0$. Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho nếu $(x, y), (u, v) \in D$ thỏa mãn $|(x, y) - (u, v)| < \delta$ thì $|f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon$. Bây giờ, với số $\delta > 0$ này, chúng ta luôn có thể tìm được một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|(x_n, y_n) -$

$(u_n, v_n)| < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $|f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)| \rightarrow 0$. Điều này chứng tỏ tính liên tục đều của f trên D . $\square$

Định lí hàm ẩn

Khi nghiên cứu các hàm một biến, chúng ta thường xem xét *các đường cong được xác định ngầm*, nghĩa là, các đường cong được cho bởi các phương trình có dạng $f(x, y) = 0$, với $(x, y) \in D$, trong đó $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực hai biến bất kì. Về mặt kinh nghiệm, một phương trình như vậy sẽ xác định một trong các biến như là một hàm của biến kia; chẳng hạn, nó có thể định nghĩa y như là một hàm của x . Nói cách khác, từ phương trình $f(x, y) = 0$, chúng ta có thể giải y theo x . Trên thực tế, điều này thường được ngầm giả định khi chúng ta thực hiện việc lấy vi phân hàm ẩn trong các phép tính hàm một biến. Kết quả sau đây khẳng định rằng chúng ta có thể giải phương trình $f(x, y) = 0$ một cách cục bộ, nghĩa là, giải phương trình $f(x, y) = 0$ xung quanh một điểm (x_0, y_0) thỏa mãn $f(x_0, y_0) = 0$, với điều kiện là f liên tục theo mỗi biến và là một hàm tăng nghiêm ngặt hoặc là một hàm giảm nghiêm ngặt của y , đối với mỗi x cố định. Hơn nữa, nghiệm $y = \eta(x)$ là duy nhất và nó còn là một hàm liên tục theo x .

Kết quả 3.2.9. (Định lí hàm ẩn)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) là một điểm trong của D và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm thỏa mãn $f(x_0, y_0) = 0$. Giả sử tồn tại một số $r > 0$ với $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn.

(a) Với mọi $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ cho trước, hàm $\psi: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(y) = f(x, y)$ là liên tục. Ngoài ra, với mọi $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$ cho trước, hàm $\phi: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(x) = f(x, y)$ là liên tục.

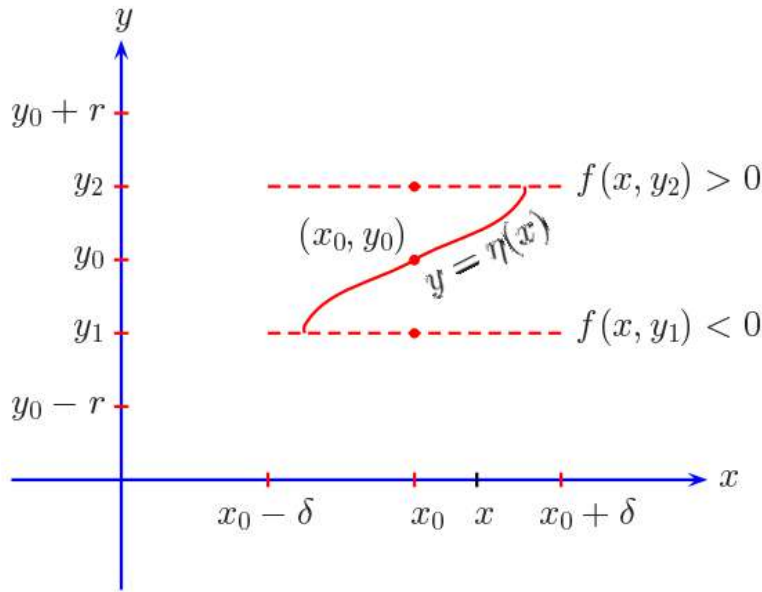
(b) Với mọi $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ cho trước, hàm $\psi: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(y) = f(x, y)$ là đơn điệu nghiêm ngặt.

Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\eta: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\eta(x_0) = y_0$ sao cho $(x, \eta(x)) \in S_r(x_0, y_0)$ và $f(x, \eta(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Chứng minh kết quả 3.2.9.

Theo quan điểm của (b), trước tiên, chúng ta hãy giả sử rằng hàm $\psi_0: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi_0(y) = f(x_0, y)$ là tăng nghiêm ngặt trên $(y_0 - r, y_0 + r)$.

Chọn ra các số $y_1 \in (y_0 - r, y_0)$ và $y_2 \in (y_0, y_0 + r)$ bất kì. Do $f(x_0, y_0) = 0$ và hàm ψ_0 tăng nghiêm ngặt trên $(y_0 - r, y_0 + r)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $f(x_0, y_1) < 0$ và $f(x_0, y_2) > 0$. Từ tính liên tục, dấu của f sẽ được bảo toàn trên các đoạn nhỏ nằm ngang của các đường thẳng $y = y_1$ và $y = y_2$. Nói một cách chính xác hơn, bằng cách sử dụng (a), chúng ta nhận thấy rằng hàm xác định bởi $x \mapsto f(x, y_1)$ là liên tục trên $(x_0 - r, x_0 + r)$ và, do đó, từ Kết quả 3), tồn tại một số δ_1 với $\delta_1 \leq r$ sao cho $f(x, y_1) < 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Tương tự, tồn tại một số δ_2 với $\delta_2 \leq r$ sao cho $f(x, y_2) > 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$.



Hình vẽ minh họa phép chứng minh của Định lí hàm ẩn.

Kí hiệu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Khi đó,

$$f(x, y_1) < 0 < f(x, y_2) \text{ với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Do đó, với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cho trước, hàm $\psi: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(y) = f(x, y)$ sẽ thỏa mãn $\psi(y_1) < 0 < \psi(y_2)$. Ngoài ra, theo (a), ψ là liên tục. Như vậy, từ tính chất giá trị trung gian của ψ , tồn tại một số $y \in (y_1, y_2)$ sao cho $\psi(y) = 0$, nghĩa là, $f(x, y) = 0$. Hơn nữa, do $\psi(y_1) < \psi(y_2)$ nên, từ (b), điều này suy ra rằng ψ tăng nghiêm ngặt trên $(y_0 - r, y_0 + r)$ và, do đó, y được xác định duy nhất bởi x . Do đó, nếu chúng ta viết $y = \eta(x)$ thì chúng ta sẽ thu được một hàm duy nhất $\eta: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\eta(x) \in (y_1, y_2)$ và $f(x, \eta(x)) = 0$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Đặc biệt, do $f(x_0, y_0) = 0$ và $y_0 \in (y_1, y_2)$ nên chúng ta sẽ có $\eta(x_0) = y_0$.

Để chứng minh tính liên tục của η , cố định một số $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và giả sử (x_n) là một dãy bất kì trong $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sao cho $x_n \rightarrow x^*$. Chúng ta đã thấy ở trên rằng, với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, hàm $\psi: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(y) = f(x, y)$ là tăng nghiêm ngặt. Cố định các số $y_1, y_2 \in (y_0 - r, y_0 + r)$ như trên sao cho $y_1 < \eta(x) < y_2$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Giả sử cho trước một số $\varepsilon > 0$ và giả sử ε đủ nhỏ sao cho $y_1 < \eta(x^*) - \varepsilon < \eta(x^*) + \varepsilon < y_2$, nghĩa là, $0 < \varepsilon < \min\{\eta(x^*) - y_1, y_2 - \eta(x^*)\}$. Bằng cách sử dụng (a) và (b), chúng ta nhận thấy rằng

$$f(x_n, \eta(x^*) - \varepsilon) \rightarrow f(x^*, \eta(x^*) - \varepsilon) \text{ và } f(x^*, \eta(x^*) - \varepsilon) < f(x^*, \eta(x^*)) = 0.$$

Do đó, tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_n, \eta(x^*) - \varepsilon) < 0$ với mọi $n \geq n_1$. Tương tự, $f(x_n, \eta(x^*) + \varepsilon) \rightarrow f(x^*, \eta(x^*) + \varepsilon) > f(x^*, \eta(x^*)) = 0$ và, do đó, tồn tại một số tự nhiên $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_n, \eta(x^*) + \varepsilon) > 0$ với mọi $n \geq n_2$. Kí hiệu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó, $f(x_n, \eta(x^*) - \varepsilon) < 0 < f(x^*, \eta(x^*) + \varepsilon)$ với mọi $n \geq n_0$. Nhưng do $f(x_n, \eta(x_n)) = 0$ nên, từ (b), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\eta(x^*) - \varepsilon < \eta(x_n) < \eta(x^*) + \varepsilon$, nghĩa là, $|\eta(x_n) - \eta(x^*)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $\eta(x_n) \rightarrow \eta(x^*)$. Điều này chỉ ra rằng η liên tục trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Trường hợp $\psi_0: (y_0 - r, y_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi_0(y) = f(x_0, y)$ giảm nghiêm ngặt trên $(y_0 - r, y_0 + r)$ cũng được chứng minh tương tự. Ngoài ra, nó cũng có thể xuất phát từ việc áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên cho $-f$. $\square$

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Khi đó, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = 0\}$ là đường tròn đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Nếu $(x_0, y_0) \in C$ và $y_0 \neq 0$ thì chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng các giả thiết của Định lý hàm ẩn đều được thỏa mãn và “nghiêm” được cho bởi $\eta(x) = \sqrt{1 - x^2}$ hoặc bởi $\eta(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ tùy theo $y_0 > 0$ hoặc $y_0 < 0$.

Chúng ta cũng có một dạng tương tự đơn giản của Định lý hàm ẩn để giải $f(x, y) = 0$ với x theo y . Trong tình huống này, điều kiện (a) trong Kết quả 3.2.9) vẫn được giữ nguyên, trong khi (b) sẽ được thay thế bởi điều kiện: “Với mọi $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$, hàm $\phi: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(x) = f(x, y)$ là đơn điệu nghiêm ngặt”. Kết luận là sẽ có một số $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\xi(y_0) = x_0$ sao cho $(\xi(y), y) \in S_r(x_0, y_0)$ và $f(\xi(y), y) = 0$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Điều này có thể được chứng minh theo cách tương tự như khi chứng minh Kết quả 3.2.9). Ngoài ra, nó cũng có thể xuất phát từ việc áp dụng Kết quả 3.2.9) cho hàm $(x, y) \mapsto f(y, x)$ và điểm (y_0, x_0) . $\square$

Một hệ quả quan trọng của Định lý hàm ẩn là một hàm giá trị thực liên tục một biến đơn điệu nghiêm ngặt trên một khoảng xung quanh một điểm sẽ luôn thừa nhận một hàm nghịch đảo liên tục (và cũng đơn điệu nghiêm ngặt), cục bộ. Một tuyên bố chính xác hơn sẽ xuất hiện dưới đây. Kết quả này có thể được xem như là một trường hợp đặc biệt của cái gọi là **Định lý hàm ngược**.

Kết quả 3.2.10. (Định lý hàm ngược)

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và $x_0 \in I$. Giả sử $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt trên $I_1 = (x_0 - r, x_0 + r) \cap I$ với một số $r > 0$. Kí hiệu $y_0 = f(x_0)$, $J = f(I)$, $J_1 = f(I_1)$.

Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\xi(y_0) = x_0$ và $f(\xi(y)) = y$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J$. Đặc biệt, $f^{-1}: J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại y_0 .

Chứng minh kết quả 3.2.10.

Đầu tiên, chúng ta xét trường hợp x_0 là một điểm trong của I . Khi đó, chúng ta có thể chọn một số $r > 0$ sao cho $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ và, do đó, $I_1 = (x_0 - r, x_0 + r)$. Xét hàm $h: S_r(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x, y) = f(x) - y$. Khi đó, h liên tục, $h(x_0, y_0) = 0$ và, với mọi $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$, hàm từ I_1 đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto h(x, y)$ là đơn điệu nghiêm ngặt. Do đó, từ Định lý hàm ẩn (Kết quả 3.2.9), tồn tại một số $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\xi: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\xi(y_0) = x_0$ sao cho $(\xi(y), y) \in S_r(x_0, y_0)$ và $h(\xi(y), y) = 0$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Như vậy, $f(\xi(y)) = y$ với mọi $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J$ và, đặc biệt, $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq J$. Do f liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt trên $I_1 = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng y_0 là một điểm trong của $J_1 = f(I_1)$ và $f^{-1} = \xi$ trên J_1 . Do đó, $f^{-1}: J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại y_0 .

Trong trường hợp x_0 là một đầu mút của I , chúng ta có thể mở rộng f thành một hàm liên tục, đơn điệu nghiêm ngặt f^* mới trên một khoảng I^* lớn hơn sao cho x_0 là một điểm trong của I^* . Chẳng hạn, nếu

f tăng nghiêm ngặt và $I = [x_0, b)$ thì chúng ta có thể chọn $I^* = [x_0 - 1, b)$ và $f^*(x) = f(x)$ nếu $x \in [x_0, b)$ và $f^*(x) = (x - x_0) + y_0$ nếu $x \in [x_0 - 1, x_0)$. Bằng cách áp dụng các lập luận trước đó cho f^* , chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn. $\square$

Như một hệ quả trực tiếp của Kết quả 3.2.10), chúng ta thu được một cách chứng minh khác cho Định lý nghịch đảo liên tục đối với các hàm một biến (Kết quả 3.2.5) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”), khẳng định rằng một hàm liên tục một – một xác định trên một khoảng sẽ luôn có hàm nghịch đảo liên tục. Để đạt được mục đích này, chúng ta sẽ sử dụng dữ kiện sau đây, từ lý thuyết hàm một biến, nó hoàn toàn cơ bản theo nghĩa là cả mệnh đề lẫn phép chứng minh đều không liên quan gì đến các khái niệm về tính liên tục hoặc giới hạn. Để có một phép chứng minh về thực tế này và cũng như một số kết quả liên quan, chúng ta có thể tham khảo Kết quả 3.2.5) của bài viết “**Phép tính giới hạn hàm một biến**”.

Kết quả 5.

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Khi đó, nếu $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một đơn ánh và có tính chất giá trị trung gian trên I thì f sẽ đơn điệu nghiêm ngặt trên I .

Kết quả 3.2.11.

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục một – một.

Khi đó, hàm ngược $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục.

Chứng minh kết quả 3.2.11.

Từ khẳng định (i) của Kết quả 4), f sẽ có tính chất giá trị trung gian trên I . Do đó, từ Kết quả 5), f đơn điệu nghiêm ngặt trên I . Như vậy, từ Kết quả 3.2.10), f^{-1} sẽ liên tục. $\square$

Khái niệm về tính liên tục cũng có thể được mở rộng cho các hàm ba biến trở lên theo cách hoàn toàn tương tự. Hầu hết các kết quả mở rộng cho trường hợp này đều có thể thực hiện một cách đơn giản. Một kết quả mà việc mở rộng cho các hàm ba biến có thể không có ngay lập tức đó là Định lý hàm ẩn (Kết quả 3.2.9). Nhắc lại rằng điều này có thể được phát biểu lại đại khái bằng cách nói rằng nếu xung quanh một điểm, $f(x, y)$ liên tục theo x cũng như liên tục theo y và đơn điệu nghiêm ngặt theo y thì chúng ta hoàn toàn có thể giải phương trình $f(x, y) = 0$ đối với y theo x xung quanh điểm đó. Nó chỉ ra rằng, đối với các hàm ba biến, để giải phương trình $f(x, y, z) = 0$ đối với z theo x và y xung quanh một điểm, điều chúng ta cần ở đây ngoài tính đơn điệu nghiêm ngặt của z không chỉ là tính liên tục của từng biến trong số ba biến, mà còn là tính liên tục của biến z và tính liên tục (hai biến) của x và y . Trên thực tế, cách phát biểu cũng như chứng minh của Kết quả 3.2.9) có thể dễ dàng được thay thế bởi hai (hoặc nhiều hơn) biến. Để tiện tham khảo, chúng ta sẽ ghi lại dưới đây một nhận định chính xác về kết quả này.

Kết quả 3.2.12. (Định lí hàm ẩn cho các hàm ba biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in D$ và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm sao cho $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Giả sử tồn tại một số $r > 0$ với $S_r(x_0, y_0, z_0) \subseteq D$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mọi $(x, y) \in S_r(x_0, y_0)$ cho trước, hàm $\psi: (z_0 - r, z_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(z) = f(x, y, z)$ là liên tục. Ngoài ra, với mọi $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$ cho trước, hàm $\phi: S_r(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(x, y) = f(x, y, z)$ là liên tục.

(b) Với mọi $(x, y) \in S_r(x_0, y_0)$ cho trước, hàm $\psi: (z_0 - r, z_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\psi(z) = f(x, y, z)$ là đơn điệu nghiêm ngặt.

Khi đó, tồn tại một số $\delta > 0$ và một hàm liên tục duy nhất $\zeta: S_\delta(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ với $\zeta(x_0, y_0) = z_0$ sao cho $(x, y, \zeta(x, y)) \in S_r(x_0, y_0, z_0)$ và $f(x, y, \zeta(x, y)) = 0$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 3.2.12.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như khi chứng minh Kết quả 3.2.9) nếu chúng ta thay đổi các kí hiệu một cách thích hợp. □

3.3. Giới hạn của các hàm thực hai biến

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Giả sử tồn tại một hình vuông mở với bán kính dương và tâm tại (x_0, y_0) , ngoại trừ có thể là tâm, chứa trong D , nghĩa là, $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì cho trước. Chúng ta sẽ nói rằng tồn tại một **giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0)** nếu tồn tại một số thực l sao cho, bất cứ khi nào một dãy (x_n, y_n) trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ tới (x_0, y_0) , chúng ta sẽ luôn có $f(x_n, y_n) \rightarrow l$. Khi đó, chúng ta sẽ viết $f(x, y) \rightarrow l$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Chúng ta có thể lưu ý rằng luôn tồn tại các dãy trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ tới (x_0, y_0) .

Chẳng hạn,

$$(x_n, y_n) = \left(x_0 - \frac{r}{n+1}, y_0 - \frac{r}{n+1}\right)$$

nằm trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Bằng cách sử dụng điều này và thực tế là giới hạn của một dãy trong $\mathbb{R}^2$ là duy nhất (khẳng định (i) của Kết quả 2.1.1), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu tồn tại một giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) thì nó là duy nhất. Với quan điểm này, nếu $f(x, y) \rightarrow l$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ thì chúng ta có thể coi l như là giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) và viết

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l.$$

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 1$ và $f(x, y) = \sin(xy)$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Khi đó, giới hạn của f khi (x, y) tiến đến $(0,0)$ tồn tại và bằng 0. Thật vậy, nếu (x_n, y_n) là một dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ thì $x_n y_n \rightarrow 0$ và, từ tính liên tục của hàm sin, $\sin(x_n y_n) \rightarrow \sin 0 = 0$, nghĩa là, $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

(ii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{nếu } x \neq y, \\ 1 & \text{nếu } x = y. \end{cases}$$

Khi đó, giới hạn của f khi (x, y) tiến đến $(0, 0)$ là không tồn tại. Chúng ta có thể thấy điều này bằng cách xét hai dãy tiến đến $(0, 0)$ theo hai hướng khác nhau, một dọc theo đường thẳng $y = x$ và một ở xa đường này. Chẳng hạn, nếu $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ và $(u_n, v_n) = (-1/n, 1/n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ là các dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ hội tụ đến $(0, 0)$, nhưng $f(x_n, y_n) \rightarrow 1$ và $f(u_n, v_n) \rightarrow 0$.

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$. Khi đó, giới hạn của f khi (x, y) tiến đến $(0, 0)$ là không tồn tại. Chúng ta có thể thấy điều này bằng cách xét hai dãy tiến đến $(0, 0)$ theo hai hướng khác nhau, dọc theo các đường thẳng khác nhau qua gốc tọa độ. Chẳng hạn, nếu $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ và $(u_n, v_n) = (1/n, 1/2n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $((x_n, y_n))$ và $((u_n, v_n))$ là các dãy trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ hội tụ đến $(0, 0)$, nhưng $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2}$ và $f(u_n, v_n) \rightarrow \frac{2}{5}$.

Giới hạn và tính liên tục

Các khái niệm về tính liên tục và giới hạn có liên quan với nhau theo cách tương tự như trong trường hợp hàm một biến.

Kết quả 3.3.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là một điểm trong của D , nghĩa là, $S_r(x_0, y_0) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng $f(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 3.3.1.

Giả sử f liên tục tại (x_0, y_0) . Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Từ tính liên tục của f tại (x_0, y_0) , chúng ta nhận thấy rằng $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Điều này chỉ ra rằng giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng $f(x_0, y_0)$.

Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng $f(x_0, y_0)$. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong D sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Nếu tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ với mọi $n \geq n_0$ thì rõ ràng là $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Ngược lại, tồn tại các số nguyên dương $n_1, n_2, \dots$ sao cho $n_1 < n_2 < \dots$ và $\{n \in \mathbb{N}: (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)\} = \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$. Bây giờ, $((x_n, y_n))$ là một dãy trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ đến (x_0, y_0) và, do đó, $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Do $f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$ với mọi $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$ nên điều này chỉ ra rằng $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$. Như vậy, f liên tục tại (x_0, y_0) . □

Như một hệ quả, chúng ta sẽ thu được một đặc trưng hữu ích cho sự tồn tại giới hạn của một hàm theo tính liên tục của hàm liên kết của nó.

Kết quả 3.3.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó. Với một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ và một số thực $l \in \mathbb{R}$ nào đó, kí hiệu $F: D \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm được xác định bởi

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}, \\ l & \text{nếu } (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Khi đó,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \text{ tồn tại và bằng } l \Leftrightarrow F \text{ liên tục tại } (x_0, y_0).$$

Chứng minh kết quả 3.3.2.

Do $f(x, y) = F(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ nên rõ ràng là $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x, y)$ tồn tại và, trong trường hợp này, hai giới hạn này sẽ bằng nhau. Ngoài ra, do (x_0, y_0) là một điểm trong của $D \cup \{(x_0, y_0)\}$ và $F(x_0, y_0) = l$ nên kết quả mong muốn của chúng ta có thể được suy ra bằng cách áp dụng Kết quả 3.3.1) cho hàm F . $\square$

Từ Kết quả 3.3.2), các tính chất cơ bản của các giới hạn của các hàm thực hai biến đều có thể được suy ra từ tính chất tương ứng của các hàm liên tục.

Kết quả 3.3.3.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_t(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $t > 0$ nào đó. Giả sử $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ và $l, m \in \mathbb{R}$ là các số thực sao cho

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l \text{ và } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = m.$$

Khi đó, với mọi $r \in \mathbb{R}$, các giới hạn của $f + g, rf, fg$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) đều tồn tại và lần lượt bằng $l + m, rl, lm$. Hơn nữa, nếu $l \neq 0$ thì sẽ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) \neq 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ và giới hạn của $1/f: D \cap S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng $1/l$.

Chứng minh kết quả 3.3.3.

Giả sử $F, G: D \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm được xác định bởi $F(x, y) = f(x, y)$ và $G(x, y) = g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Kí hiệu $F(x_0, y_0) = l$ và $G(x_0, y_0) = m$. Từ Kết quả 3.3.2), F và G sẽ liên tục tại (x_0, y_0) . Như vậy, khẳng định liên quan đến các giới hạn của $f + g, rf, fg$ sẽ tuân theo Kết quả 3.1.2) và 3.3.2). Nếu $l \neq 0$ thì sự tồn tại mong muốn của δ và giới hạn của $1/f$ sẽ tuân theo Kết quả 3.1.1), 3.1.2) và 3.3.2). $\square$

Như trong trường hợp hàm một biến, nếu chúng ta có một số bất đẳng thức nhất định giữa các giá trị của các hàm thực hai biến thì điều tương tự cũng sẽ xảy ra khi chúng ta chuyển sang các giới hạn, miễn là các giới hạn này tồn tại. Nhưng tất nhiên, bất đẳng thức nghiêm ngặt như $<$ có thể được thay đổi thành bất đẳng thức yếu hơn chẳng hạn như $\leq$ khi chúng ta vượt qua giới hạn. Mặt khác, bất đẳng thức nghiêm ngặt trên các giới hạn sẽ sinh ra bất đẳng thức nghiêm ngặt trên các giá trị của các hàm tương ứng xung quanh điểm mà giới hạn được lấy. Hơn nữa, đối với các hàm không âm, việc lấy căn vẫn sẽ được bảo toàn bằng cách vượt qua các giới hạn.

Kết quả 3.3.4.

Giả sử $D, (x_0, y_0), r, f, g, l, m$ như trong Kết quả 3.3.4).

(i) Nếu tồn tại một số $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f(x, y) \leq g(x, y)$ với mọi (x, y) nằm trong $S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ thì $l \leq m$. Ngược lại, nếu $l < m$ thì sẽ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $\delta \leq r$ và $f(x, y) < g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

(ii) Nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì $l \geq 0$ và, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, giới hạn của $f^{1/k}: D \rightarrow \mathbb{R}$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng $l^{1/k}$.

(iii) (**Định lý kẹp**) Nếu $l = m$ và tồn tại một hàm $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x, y) \leq h(x, y) \leq g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$ thì giới hạn của h khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và bằng l .

Chứng minh kết quả 3.3.4.

Xét hàm $H: D \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $H(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ và $H(x_0, y_0) = m - l$. Từ Kết quả 3.3.2) và Kết quả 3.3.3), H liên tục tại (x_0, y_0) . Nếu $l > m$ thì $H(x_0, y_0) < 0$ và, do đó, từ Kết quả 3.1.1), tồn tại một số $\eta > 0$ sao cho $H(x, y) < 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\eta(x_0, y_0)$, nghĩa là, $f(x, y) > g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\eta(x_0, y_0)$. Điều này mâu thuẫn với các giả thiết trên f và g . Như vậy, $l \leq m$. Ngược lại, giả sử $l < m$. Khi đó, $H(x_0, y_0) > 0$ và, do đó, từ Kết quả 3.1.1), tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $H(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ và, do đó, $f(x, y) < g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$. Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (i). Kế tiếp, nếu $f(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$ thì, từ (i), chúng ta sẽ thu được $l \geq 0$. Hơn nữa, với mọi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, khẳng định về giới hạn của $f^{1/k}$ xuất phát từ Kết quả 3.1.2) và Kết quả 3.3.2). Cuối cùng, (iii) là hệ quả trực tiếp của khẳng định (vi) của Kết quả 1). $\square$

Như trong trường hợp hàm một biến, điều kiện cho sự tồn tại giới hạn của một hàm thực hai biến không phụ thuộc sự hội tụ của các dãy có thể được xác định như sau.

Kết quả 3.3.5.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại khi và chỉ khi tồn tại một số thực $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - \delta$ sau đây:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ và $(x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.3.5.

Với mọi $l \in \mathbb{R}$ cho trước, kí hiệu $F: D \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên kết với f và l như trong Kết quả 3.3.2). Bằng cách sử dụng sự tương đương của các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 3.1.6) cùng với Kết quả 3.3.2), chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn. $\square$

Đặc trưng trên mang lại sự tương tự sau đây của Điều kiện Cauchy cho các dãy trong $\mathbb{R}^2$ (khẳng định (iv) của Kết quả 2.1.3).

Kết quả 3.3.6. (Điều kiện Cauchy cho giới hạn của các hàm hai biến)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ tồn tại khi và chỉ khi, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y), (u, v) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon.$$

Chứng minh kết quả 3.3.6.

Giả sử $l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ tồn tại. Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Từ Kết quả 3.3.5), tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(x, y) - l| < \varepsilon/2$ với mọi (x, y) trong $D \cap S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Như vậy, với $(x, y), (u, v) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$, chúng ta sẽ có $|f(x, y) - f(u, v)| \leq |f(x, y) - l| + |l - f(u, v)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Chiều ngược lại của khẳng định trên được suy ra một cách dễ dàng theo Điều kiện Cauchy cho các giới hạn của các dãy trong $\mathbb{R}$ (khẳng định (iv) của Kết quả 2). $\square$

Giới hạn một phần tư

Một dạng tương tự của khái niệm giới hạn trái hoặc phải đối với các hàm một biến được cho bởi các giới hạn từ bất kì một trong bốn góc phần tư đối với các hàm hai biến. Chúng có thể được định nghĩa lại như sau.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x_0, x_0 + r) \times (y_0, y_0 + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Với mọi hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ cho trước, chúng ta sẽ nói rằng tồn tại một **giới hạn của f từ góc phần tư thứ nhất khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0)** nếu tồn tại một số thực l sao cho, bất cứ khi nào $((x_n, y_n))$ là một dãy trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ thỏa mãn $(x_n, y_n) \geq (x_0, y_0)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, chúng ta sẽ có $f(x_n, y_n) \rightarrow l$. Dễ dàng nhận thấy rằng nếu tồn tại một giới hạn như vậy thì nó là duy nhất. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết

$$f(x, y) \rightarrow l \text{ khi } (x, y) \rightarrow (x_0^+, y_0^+) \text{ hoặc } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^+, y_0^+)} f(x, y) = l.$$

Tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa giới hạn của f từ góc phần tư thứ hai, thứ ba và thứ tư. Sau đó, rõ ràng các kí hiệu tương tự cũng được sử dụng.

Nhận xét rằng, đối với các giới hạn từ một góc phần tư, Kết quả 3.3.2) thừa nhận một dạng tương tự đơn giản. Nói một cách chính xác, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $(x_0, x_0 + r) \times (y_0, y_0 + r) \subseteq D$ với một số $r > 0$ nào đó. Xét $D_1 = \{(x, y) \in D: x \geq x_0 \text{ và } y \geq y_0\}$ và $F_1: D_1 \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D_1 \setminus \{(x_0, y_0)\}, \\ l & \text{nếu } (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Khi đó,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^+, y_0^+)} f(x, y) \text{ tồn tại và bằng } l \Leftrightarrow F_1 \text{ liên tục tại } (x_0, y_0).$$

Điều này có thể được chứng minh bằng các lập luận tương tự như trong Kết quả 3.3.2). Ngoài ra, chúng ta cũng có thể dễ dàng thu được các kết quả tương tự cho các giới hạn từ góc phần tư thứ hai, thứ ba và thứ tư.

Kết quả 3.3.7.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó. Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm và $l \in \mathbb{R}$ là một số thực bất kì.

Khi đó, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$ khi và chỉ khi $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^+, y_0^+)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^-, y_0^+)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^-, y_0^-)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0^+, y_0^-)} f(x, y)$ tồn tại và đều bằng l . Ngoài ra, nếu $(x_0, y_0) \in D$ thì f sẽ liên tục tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi giới hạn của f từ mỗi một trong bốn góc phần tư khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và tất cả chúng đều bằng $f(x_0, y_0)$.

Chứng minh kết quả 3.3.7.

Nhận thấy rằng nếu $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$ thì rõ ràng giới hạn của f từ mỗi một trong bốn góc phần tư khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và tất cả chúng đều bằng l . Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử giới hạn của f từ mỗi một trong bốn góc phần tư khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0) tồn tại và tất cả chúng đều bằng l . Xét hàm $F: D \cup \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x_0, y_0) = l$ và $F(x, y) = f(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Giả sử $D_1 = \{(x, y) \in D: x \geq x_0 \text{ và } y \geq y_0\}$, $D_2 = \{(x, y) \in D: x \leq x_0 \text{ và } y \geq y_0\}$, $D_3 = \{(x, y) \in D: x \leq x_0 \text{ và } y \leq y_0\}$, $D_4 = \{(x, y) \in D: x \geq x_0 \text{ và } y \leq y_0\}$. Ngoài ra, kí hiệu $\tilde{D}_i = D_i \cup \{(x_0, y_0)\}$ và $F_i = F|_{\tilde{D}_i}$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Theo nhận xét nêu ở trên, chúng ta nhận thấy rằng F_i liên tục tại (x_0, y_0) và, do đó, từ Kết quả 3.3.2), $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$.

Trong trường hợp $(x_0, y_0) \in D$, khẳng định về tính liên tục của f tại (x_0, y_0) cũng suy ra điều đã chứng minh ở trên và Kết quả 3.3.1). □

Giới hạn khi tiến đến vô cực

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa một tích của các nửa khoảng mở vô hạn có dạng $(a, \infty) \times (c, \infty)$, trong đó $a, c \in \mathbb{R}$. Với mọi hàm $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ cho trước, chúng ta sẽ nói rằng tồn tại một **giới hạn của f khi (x, y) tiến đến (∞, ∞)** nếu tồn tại một số thực l thỏa mãn tính chất sau:

$((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong D với $x_n \rightarrow \infty$ và $y_n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n, y_n) \rightarrow l$.

Trong trường hợp này, số thực l là duy nhất và đôi khi nó được kí hiệu là $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y)$. Tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa giới hạn của f khi $(x, y) \rightarrow (-\infty, \infty)$ hoặc khi $(x, y) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ hoặc khi $(x, y) \rightarrow (\infty, -\infty)$, tất nhiên với điều kiện là tập xác định D của f có chứa một tích của các nửa khoảng mở vô hạn có dạng $(-\infty, b) \times (c, \infty)$, $(-\infty, b) \times (-\infty, d)$, $(a, \infty) \times (-\infty, d)$, đối với các số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nào đó, tùy từng trường hợp. Chúng ta cũng có thể đưa ra một định nghĩa thay thế tương tự với đặc trưng $\varepsilon - \delta$ (Kết quả 3.3.5) cho các giới hạn như vậy. Như vậy, chúng ta chỉ cần xét trường hợp giới hạn khi $(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)$. Chúng ta sẽ để lại ở dưới đây một công thức của tuyên bố và các phép chứng minh trong ba trường hợp còn lại sẽ được xem như một bài tập nhỏ.

Kết quả 3.3.8.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sao cho $D \supseteq (a, \infty) \times (c, \infty)$ với các số $a, c \in \mathbb{R}$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại một số thực $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\varepsilon - (\alpha, \beta)$ sau đây:

“Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $(x, y) \in D$ với $(x, y) \geq (\alpha, \beta) \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$.”

Chứng minh kết quả 3.3.8.

Giả sử $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y)$ tồn tại và bằng với một số thực l nào đó. Giả sử điều kiện $\varepsilon - (\alpha, \beta)$ không được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, chúng ta luôn tìm được một $(x, y) \in D$ với $(x, y) \geq (\alpha, \beta)$, nhưng $|f(x, y) - l| \geq \varepsilon$. Bằng cách chọn $(\alpha, \beta) = (n, n)$ khi n thay đổi trên $\mathbb{N}$, chúng ta sẽ thu được một dãy $((x_n, y_n))$ trong D sao cho $x_n \rightarrow \infty$ và $y_n \rightarrow \infty$, nhưng $f(x_n, y_n) \nrightarrow l$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y) = l$.

Ngược lại, giả sử điều kiện $\varepsilon - (\alpha, \beta)$ được thỏa mãn. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy trong D sao cho $x_n \rightarrow \infty$ và $y_n \rightarrow \infty$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được các số thực $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\alpha > a$ và $\beta > c$. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \geq (\alpha, \beta)$ với mọi $n \geq n_0$ và, do đó, $|f(x_n, y_n) - l| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x_n, y_n) \rightarrow l$, nên $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y) = l$. $\square$

Như trong trường hợp hàm một biến, trong một số trường hợp ∞ hoặc $-\infty$ có thể được coi như là một “giới hạn” của một hàm hai biến. Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì. Chúng ta sẽ nói rằng **$f(x, y)$ tiến đến ∞ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0)** nếu, với mọi dãy $((x_n, y_n))$ trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ đến (x_0, y_0) , chúng ta đều có $f(x_n, y_n) \rightarrow \infty$.

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x, y) \rightarrow \infty \text{ khi } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng **$f(x, y)$ tiến đến $-\infty$ khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0)** nếu, với mọi dãy $((x_n, y_n))$ trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ đến (x_0, y_0) , chúng ta đều có $f(x_n, y_n) \rightarrow -\infty$.

Khi đó, chúng ta sẽ viết

$$f(x, y) \rightarrow -\infty \text{ khi } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Chẳng hạn,

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \text{ khi } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ và } -\frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow -\infty \text{ khi } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Bây giờ, chúng ta sẽ đưa ra một dạng tương tự của Kết quả 3.3.5) cho một hàm thực hai biến tiến đến ∞ hoặc $-\infty$.

Kết quả 3.3.9.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho D có chứa $S_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ với một số $r > 0$ nào đó và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bất kì.

Khi đó, $f(x, y) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ khi và chỉ khi điều kiện $\alpha - \delta$ sau đây được thỏa mãn:

“Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0) \text{ và } (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y) > \alpha.”$$

Tương tự, $f(x, y) \rightarrow -\infty$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ khi và chỉ khi điều kiện $\beta - \delta$ sau đây được thỏa mãn:

“Với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0) \text{ và } (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y) < \beta.”$$

Chứng minh kết quả 3.3.9.

Giả sử $f(x, y) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Nếu điều kiện $\alpha - \delta$ không được thỏa mãn thì sẽ tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi $\delta > 0$, tồn tại một $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ và $f(x, y) \leq \alpha$. Bằng cách chọn $\delta = 1/n$ khi n thay đổi trên $\mathbb{N}$, chúng ta sẽ thu được một dãy $((x_n, y_n))$ trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, nhưng $f(x_n, y_n) \nrightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Ngược lại, giả sử điều kiện $\alpha - \delta$ được thỏa mãn. Giả sử $((x_n, y_n))$ là một dãy trong $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ và $\alpha > 0$ là một số thực cho trước. Khi đó, tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $f(x, y) > \alpha$ với mọi $(x, y) \in D \cap S_\delta(x_0, y_0)$ với $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Hơn nữa, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(x_n, y_n) \in S_\delta(x_0, y_0)$ với $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n, y_n) > \alpha$ với $n \geq n_0$. Như vậy, $f(x, y) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Tính tương đương của điều kiện $f(x, y) \rightarrow -\infty$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ với điều kiện $\beta - \delta$ cũng sẽ được chứng minh theo cách tương tự. $\square$

Nhắc lại rằng chúng ta đã định nghĩa khái niệm về một hàm hai biến tăng đơn điệu bằng cách sử dụng thứ tự tích trên $\mathbb{R}^2$. Dưới đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng, đối với các hàm như vậy, sự tồn tại của giới hạn từ góc phần tư thứ nhất hoặc thứ ba sẽ tương đương với tính bị chặn.

Kết quả 3.3.10.

Giả sử $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ với $a < b$ và $c < d$ sao cho $a, c \in \mathbb{R}$ hoặc $a = c = -\infty$, và $b, d \in \mathbb{R}$ hoặc $b = d = \infty$. Giả sử $f: (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu tăng.

Khi đó,

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y)$ tồn tại khi và chỉ khi f bị chặn trên; trong trường hợp này, $\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y) = \sup\{f(x, y): (x, y) \in (a, b) \times (c, d)\}$. Nếu f không bị chặn trên thì $f(x, y) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (b^-, d^-)$.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a^+, c^+)} f(x, y)$ tồn tại khi và chỉ khi f bị chặn dưới; trong trường hợp này, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a^+, c^+)} f(x, y) = \inf\{f(x, y): (x, y) \in (a, b) \times (c, d)\}$. Nếu f không bị chặn dưới thì $f(x, y) \rightarrow -\infty$ khi $(x, y) \rightarrow (a^+, c^+)$.

Chứng minh kết quả 3.3.10.

(i) Giả sử f bị chặn trên. Kí hiệu $M = \sup\{f(x, y): (x, y) \in (a, b) \times (c, d)\}$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một $(b_0, d_0) \in (a, b) \times (c, d)$ sao cho $M - \varepsilon < f(b_0, d_0) \leq M$. Bây giờ, nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong $(a, b) \times (c, d)$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (b, d)$ thì sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(b_0, d_0) \leq (x_n, y_n)$ với $n \geq n_0$. Do f đơn điệu tăng nên chúng ta sẽ có $M - \varepsilon < f(x_n, y_n) \leq M$ với $n \geq n_0$. Điều này chỉ ra rằng $\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y)$ tồn tại và bằng M .

Mặt khác, giả sử f không bị chặn trên. Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó, tồn tại một $(b_0, d_0) \in (a, b) \times (c, d)$ sao cho $f(b_0, d_0) > \alpha$. Do f đơn điệu tăng nên chúng ta nhận thấy rằng $f(x, y) > \alpha$ với mọi $(x, y) \in (b_0, b) \times (d_0, d)$. Bây giờ, nếu $((x_n, y_n))$ là một dãy bất kì trong $(a, b) \times (c, d)$ sao cho $(x_n, y_n) \rightarrow (b, d)$ thì sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(b_0, d_0) \leq (x_n, y_n)$ với $n \geq n_0$ và, do đó, $f(x_n, y_n) > \alpha$ với $n \geq n_0$. Do đó, $f(x_n, y_n) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (b^-, d^-)$. Như vậy, $f(x, y) \rightarrow \infty$ khi $(x, y) \rightarrow (b^-, d^-)$. Điều này chứng minh tính đúng đắn của (i).

(ii) Phép chứng minh của phần này được thực hiện tương tự như khẳng định (i) nêu ở trên. □

Một kết quả tương tự như kết quả nêu ở trên cũng đúng đối với các hàm đơn điệu giảm. Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu $f: (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu thì

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (b^-, d^-)} f(x, y) \text{ và } \lim_{(x,y) \rightarrow (a^+, c^+)} f(x, y) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow f \text{ bị chặn.}$$

Tuy nhiên, đối với một hàm đơn điệu bị chặn, các giới hạn dọc theo hai góc phần tư còn lại có thể sẽ không tồn tại.

Chẳng hạn, xét hàm $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+2)(y+2) & \text{nếu } x+y \geq 0, \\ (x+1)(y+1) & \text{nếu } x+y < 0. \end{cases}$$

Chúng ta hãy lưu ý rằng f là tăng đơn điệu. Ngoài ra, rõ ràng là f bị chặn và, do đó, các giới hạn của f từ góc phần tư thứ nhất và thứ ba khi (x, y) tiến đến $(0,0)$ tồn tại. Nhưng các giới hạn của f từ góc phần tư thứ hai và thứ tư khi (x, y) tiến đến $(0,0)$ không tồn tại.

Để nhận thấy điều này, xét các dãy trong $\mathbb{R}^2$ xác định bởi $(x_n, y_n) = \left(-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ và $(x'_n, y'_n) = \left(-\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ với $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó,

$$(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ và } (x'_n, y'_n) \rightarrow 0, \text{ nhưng } f(x_n, y_n) \rightarrow 4 \text{ và } f(x'_n, y'_n) \rightarrow 1.$$

Tương tự, nếu $(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ và $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}\right)$ với $n \in \mathbb{N}$ thì

$$(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ và } (x'_n, y'_n) \rightarrow 0, \text{ nhưng } f(x_n, y_n) \rightarrow 4 \text{ và } f(x'_n, y'_n) \rightarrow 1.$$

Như vậy, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^-, 0^+)} f(x, y)$ và $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^-)} f(x, y)$ tồn tại.

Nhận xét rằng khái niệm về giới hạn của một hàm thực hai biến cũng thừa nhận một dạng mở rộng đơn giản cho các hàm thực ba biến trở lên. Hơn nữa, các dạng tương tự của tất cả các kết quả trong mục **3.3**.

Giới hạn của các hàm thực hai biến có liên quan đến các giới hạn có thể được xây dựng và chứng minh một cách dễ dàng trong trường hợp này.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, A course in Multivariable Calculus and Analysis, ????
- [2]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 2 – GIẢI TÍCH 2, ???/???/???
- [3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập II, ???/???/???
- [4]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm một biến, 10/01/2023