

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} : (x^2 - x + 1)$ với $x \neq 0$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3 \\ 3xy + y^2 = y - 3. \end{cases}$

2. Cho a, b, c là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau, có ít nhất một phương trình có nghiệm:

$$x^2 - 2ax + bc + 1 = 0, \quad x^2 - 2bx + ca + 1 = 0, \quad x^2 - 2cx + ab + 1 = 0.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2 - y^2 = 1$. Chứng minh $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 40.

2. Một giải cầu lông có n ($n \geq 2$) vận động viên tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai vận động viên bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận, không có kết quả hòa). Chứng minh rằng tổng các bình phương số trận thắng và tổng các bình phương số trận thua của các vận động viên là bằng nhau.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , AD là đường cao ($D \in BC$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AC và AB .

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Đường tròn đường kính AD cắt (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Chứng minh MD là phân giác của góc $\widehat{FMC}$.

c) Chứng minh đường thẳng MD , đường trung trực của BC và đường trung trực của EF đồng quy.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{64}{27}.$$

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - 3 : (x^2 - x + 1)$ với $x \neq 0$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3 \\ 3xy + y^2 = y - 3. \end{cases}$

2. Cho a, b, c là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau, có ít nhất một phương trình có nghiệm:

$$x^2 - 2ax + bc + 1 = 0; \quad x^2 - 2bx + ca + 1 = 0; \quad x^2 - 2cx + ab + 1 = 0.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2 - y^2 = 1$. Chứng minh $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 40.

2. Một giải cầu lông có n ($n \geq 2$) vận động viên tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai vận động viên bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận, không có kết quả hoà). Chứng minh rằng tổng các bình phương số trận thắng và tổng các bình phương số trận thua của các vận động viên là bằng nhau.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , AD là đường cao ($D \in BC$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AC và AB .

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Đường tròn đường kính AD cắt (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Chứng minh MD là phân giác của góc $\widehat{FMC}$.

c) Chứng minh đường thẳng MD , đường trung trực của BC và đường trung trực của EF đồng quy.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{64}{27}.$$

HẾT

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

LỜI GIẢI

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} : (x^2 - x + 1) \\ &= \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 1 + 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 2} : (x^2 - x + 1) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)^2} : (x^2 - x + 1) \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2(x^2 - x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)^2 - x^2}{x^2(x^2 - x + 1)} = \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1. \end{aligned}$$

b) $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn đkxd).

Vậy $\min A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -2$.

Câu 2.

1. Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta có:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x + y \Leftrightarrow (x + y)(x + 2y) - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 - 2y \end{cases}. \text{ Xét hai TH:}$$

TH₁: $x = -y$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

TH₂: $x = 1 - 2y$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3 \\ x = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 9y + 4 = 0 \\ x = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x; y) \in \left\{ (1; -1); \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) \right\}$.

2. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b > c$, khi đó $a - b \geq 1, b - c \geq 1, a - c \geq 2$, suy ra $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq 6$. (*)

Giả sử cả ba phương trình không có nghiệm. Từ đó dễ dàng suy ra được

$$a^2 - bc - 1 < 0, \quad b^2 - ca - 1 < 0, \quad c^2 - ab - 1 < 0.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca - 3 < 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 < 6 \text{ trái với } (*)$$

Vậy điều giả sử là sai, ta có đpcm.

Câu 3.

1. $2x^2 - y^2 = 1 \quad (*)$

Để dàng chứng minh được các tính chất sau:

Số chẵn khi bình phương chia 4 dư 0, số lẻ khi bình phương chia 4 dư 1.

Bình phương một số nguyên khi chia 5 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 4.

Để thấy y lẻ, suy ra $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Nếu x chẵn thì $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Khi đó $2x^2 - y^2 \equiv -1 \pmod{4}$ trái với (*). Do đó x lẻ. Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -(x-1)(x+1)$. Vì $(x-1)(x+1)$ là tích hai số nguyên chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8, thu được $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 8. (1)

Xét TH x hoặc y hoặc cả x^2 và y^2 có cùng số dư khi chia cho 5, khi đó $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 5.

Xét TH x và y không có số nào chia hết cho 5 và x^2 và y^2 chia 5 không cùng số dư, khi này x^2 và y^2 chia 5 dư 1 hoặc 4. Xét TH x^2 chia 5 dư 1, y^2 chia 5 dư 4 và TH x^2 chia 5 dư 4 hoặc y^2 chia 5 dư 1 đều không thoả mãn (*).

Thật vậy, nếu x^2 chia 5 dư 1, y^2 chia 5 dư 4 thì $2x^2 - y^2 \equiv 2.1 - 4 \equiv -2 \pmod{5}$ (ktm)

nếu x^2 chia 5 dư 4, y^2 chia 5 dư 1 thì $2x^2 - y^2 \equiv 2.4 - 1 \equiv 3 \pmod{5}$ (ktm)

Do vậy $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 5. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $xy(x^2 - y^2)$ chia hết cho 40.

Vậy ta có đpcm.

2. Kí hiệu x_i, y_i lần lượt là số trận thắng và thua của một vận động viên ($1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}^*$).

Mỗi người đều chơi n trận với n người khác và không có trận hoà, tổng số trận thắng của mọi người bằng tổng số trận thua do đó:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_n + y_n = n; \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

Xét

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2 &= (x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2) + \dots + (x_n^2 - y_n^2) \\ &= n(x_1 - y_1) + n(x_2 - y_2) + \dots + n(x_n - y_n) = n(x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n) = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2. \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

(đây là dạng tổng quát của câu 6 trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Tp.HCM năm học 2015 - 2016)

Ta có $\angle xAC = \angle ABC = \angle AEF$, thu được $Ax \parallel EF$.

Mà $Ax \perp AT$, $IX' \perp EF$ nên $IX' \parallel AT$.

Xét $\triangle ADT$ có I là trung điểm của AD , $IX' \parallel AT$ nên X' là trung điểm của DT . (2)

Từ (1) và (2) suy ra $X \equiv X'$, do đó đường thẳng MD , đường trung trực của BC và đường trung trực của EF đồng quy.

Cách 2 (Hình 2).

Từ câu **b)** dễ dàng chứng minh được $\angle FMC = 2\angle FED$.

Gọi O' là giao điểm của đường trung trực của BC và đường trung trực của EF . Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên suy ra được O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$. Cần chứng minh MD đi qua O' .

Thật vậy, xét tứ giác $FMCO'$ có

$$\begin{aligned}\angle FO'C &= \widehat{FEC} = 360^\circ - \widehat{FBC} = 360^\circ - 2\angle FEC = 360^\circ - 2\angle FED - 2\angle DEC \\ &= 180^\circ - \angle FMC \text{ (các cung xét ở đây đều thuộc } (O')).\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $FMCO'$ nội tiếp, dẫn đến $\angle FMO' = \angle FCO' = \angle O'FC = \angle O'MC$, thu được MO' là tia phân giác $\angle FMC$. Do đó $MO' \equiv MD$ hay MD đi qua O' .

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

Câu 5.*Cách 1.*

Ta sử dụng hai bất đẳng thức sau:

i. $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}$ (đây là BDT rất quen thuộc).**ii.** $(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$.Sử dụng đẳng thức $(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ và bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned}
(a + b)(b + c)(c + a) &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\
&= (a + b + c)(ab + bc + ca) - \sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \\
&\geq (a + b + c)(ab + bc + ca) - \frac{1}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca) \\
&= \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)
\end{aligned}$$

Vậy ta chứng minh được bất đẳng thức **ii.**Trở lại bài toán, theo giả thiết, áp dụng BDT **i.** và **ii.** ta có:

$$\begin{aligned}
(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) &= (a^2 + ab + bc + ca)(b^2 + ab + bc + ca)(c^2 + ab + bc + ca) \\
&= [(a + b)(b + c)(c + a)]^2 \geq \left[\frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca) \right]^2 \\
&\geq \left[\frac{8}{9} \cdot \sqrt{3(ab + bc + ca)}(ab + bc + ca) \right]^2 = \frac{64}{27}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

Cách 2. Từ giả thiết ta biến đổi về trái

$$\begin{aligned}
&(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \\
&= a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \\
&= a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca)^2 \\
&= a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
&= (a + b + c - abc)^2
\end{aligned}$$

Lại có $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = \sqrt{3}$,

$$abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} \leq \sqrt{\frac{1}{27}(ab + bc + ca)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Do đó } (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a + b + c - abc)^2 \geq \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right)^2 = \frac{64}{27}.$$

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

(by Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh, [trường THCS Nguyễn Trãi](#) * [Leonguyen - VMF](#))