Chuỗi kép vô hạn và Tích phân kép suy rộng

Trương Phước Nhân, 01/07/2023

Trong bài viết này, chúng ta sẽ phát triển lý thuyết về các dãy kép, các chuỗi kép và các tích phân kép suy rộng. Cách xử lý của chúng ta sẽ tương tự như cách xử lý các dãy, các chuỗi và các tích phân suy rộng của các hàm một biến đã được đưa ra trong bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**".

Trong phần mở đầu của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm hai biến**", chúng ta đã từng nói rằng khái niệm về các dãy trong $\mathbb{R}$, nghĩa là, các hàm từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{R}$, thừa nhận hai dạng khái quát hóa trong bối cảnh hai biến: cặp các dãy và dãy kép, nghĩa là, các hàm từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{R}^2$ và các hàm từ $\mathbb{N}^2$ đến $\mathbb{R}$. Cái trước đã được thảo luận trong bài viết "**Phép tính giới hạn hàm hai biến**" và bây giờ chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu cái sau. Như vậy, trong mục **1. Khái niệm dãy kép** dưới đây, chúng ta sẽ phác thảo lý thuyết về các dãy kép và các khái niệm liên quan như sự hội tụ, giới hạn, tính đơn điệu, v.v… Các chuỗi kép và sự hội tụ của chúng sẽ được thảo luận trong mục **2. Khái niệm chuỗi kép vô hạn**. Các phép thử khác nhau để xác định sự hội tụ hoặc phân kỳ của một chuỗi kép sẽ được đưa ra trong mục **3. Các phép thử hội tụ cho các chuỗi kép**. Trong mục **4. Chuỗi lũy thừa kép**, các chuỗi lũy thừa kép sẽ được coi như là một trường hợp đặc biệt của các chuỗi kép, còn chuỗi Taylor kép của các hàm khả vi vô hạn sẽ được coi như là một trường hợp đặc biệt của các chuỗi lũy thừa kép. Sau đó, trong mục **5. Khái niệm tích phân kép suy rộng**, chúng ta sẽ chuyển sang một dạng tương tự "liên tục" của các chuỗi kép, cụ thể là các tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên một tập có dạng $[a,\infty)\times[c,\infty)$, trong đó $a,c\in\mathbb{R}$. Các phép thử về sự hội tụ của một tích phân kép suy rộng sẽ được đưa ra trong mục **6. Các phép thử hội tụ cho các tích phân kép suy rộng**. Cuối cùng, trong mục **7. Các loại tích phân kép suy rộng**, phép tính tích phân kép sẽ được mở rộng lên cho các hàm xác định trên một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và cho các hàm không bị chặn xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$.

1. Khái niệm dãy kép

Mục này của bài viết sẽ nói về các dãy kép nhằm mục đích chuẩn bị cho các mục tiếp theo nói về các chuỗi kép.

Một ***dãy kép*** (trong $\mathbb{R}$) là một hàm giá trị thực với tập xác định là tập $\mathbb{N}^2=\{(m,n): m,n\in\mathbb{N}\}$ gồm các cặp số nguyên dương. Chúng ta sẽ biểu thị các dãy kép bởi $(a_{m,n}),(b_{m,n})$, v.v… hoặc bởi $(A_{m,n}),(B_{m,n})$,v.v… Giá trị của dãy kép $(a_{m,n})$ tại $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ là $a_{m,n}$ và được gọi là ***số hạng thứ*** $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ của dãy kép này.

Chúng ta cũng sẽ sử dụng các tính chất "bị chặn trên", "bị chặn dưới" và "bị chặn" cho một dãy kép giống như cái cách chúng ta sử dụng chúng cho một hàm hai biến. Chúng ta cũng sẽ sử dụng thứ tự thành phần trên $\mathbb{N}^2$ xác định bởi

$$(m_1,n_1)\le(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1\le m_2 \text{ va } n_1\le n_2$$

với (m_1,n_1) và (m_2,n_2) trong $\mathbb{N}^2$.

Chúng ta sẽ nói rằng một dãy kép $(a_{m,n})$ là ***hội tụ*** nếu tồn tại một số thực $a\in\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau:

"Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại một $(m_0,n_0)\in\mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{m,n}-a|<\varepsilon$ với mọi $(m,n)\ge(m_0,n_0)$."

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng $(a_{m,n})$ ***hội tụ đến a*** và viết $a_{m,n} \to a$ khi $(m,n) \to (\infty,\infty)$. Dễ dàng nhận thấy rằng số thực a là duy nhất; nó thường được gọi là ***giới hạn kép*** (hoặc ***giới hạn***) của $(a_{m,n})$ và được kí hiệu lại bởi

$$lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n}.$$

Một dãy kép không hội tụ sẽ được gọi là ***phân kỳ***. Đặc biệt, nếu, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại một $(m_0,n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a_{m,n} > \alpha$ với mọi $(m,n) \geq (m_0,n_0)$ thì chúng ta sẽ nói rằng $(a_{m,n})$ ***phân kỳ đến*** ∞ và viết $a_{m,n} \to \infty$ khi $(m,n) \to (\infty,\infty)$. Tương tự, $(a_{m,n})$ được gọi là phân kỳ đến $-\infty$ nếu, với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, tồn tại một $(m_0,n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a_{m,n} < \beta$ với mọi $(m,n) \geq (m_0,n_0)$. Chẳng hạn, nếu $a_{m,n} = 1/(m+n)$, $b_{m,n} = m+n$, $c_{m,n} = (-1)^{m+n}$, với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, thì $a_{m,n} \to 0$, $(b_{m,n})$ phân kỳ đến ∞, trong khi dãy kép $(c_{m,n})$ bị chặn nhưng phân kỳ.

Chúng ta nhớ lại rằng một dãy hội tụ sẽ bị chặn. Tuy nhiên, một dãy kép hội tụ có thể không bị chặn.

Chẳng hạn, xét dãy kép $(a_{m,n})$ xác định bởi $a_{m,n} = n$ nếu $m = 1$, $a_{m,n} = m$ nếu $n = 1$, $a_{m,n} = 0$ nếu $m \neq 1$ và $n \neq 1$. Khi đó, $a_{m,n} \to 0$, bởi vì $a_{m,n} = 0$ với mọi $(m,n) \geq (2,2)$, nhưng rõ ràng $(a_{m,n})$ không bị chặn.

Như ví dụ trên đã chỉ ra, sự hội tụ của một dãy kép $(a_{m,n})$ sẽ không bị thay đổi nếu một số $a_{m,n}$ bị thay đổi, miễn là có một $(m_0,n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $m \leq m_0$ hoặc $n \leq n_0$ bất cứ khi nào một số hạng $a_{m,n}$ bị thay đổi.

Chúng ta sẽ viết một dãy kép $(a_{m,n})$ lại dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Khi đó, một số hoặc tất cả $a_{m,n}$ viết trong một số hữu hạn hàng hoặc trong một số hữu hạn cột có thể thay đổi mà không làm thay đổi sự hội tụ của $a_{m,n}$. (Lưu ý rằng mỗi hàng và mỗi cột đều có chứa vô số các số hạng của $a_{m,n}$.)

Định lí giới hạn cho các dãy kép chỉ ra rằng: "**Nếu $a_{m,n} \to a$ và $b_{m,n} \to b$ thì $a_{m,n} + b_{m,n} \to a + b$, $ra_{m,n} \to ra$ với mọi $r \in \mathbb{R}$, $a_{m,n}b_{m,n} \to ab$; nếu $a \neq 0$ thì sẽ tồn tại một $(m_0,n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a_{m,n} \neq 0$ với mọi $(m,n) \geq (m_0,n_0)$ và $1/a_{m,n} \to 1/a$; nếu tồn tại một $(m_1,n_1) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a_{m,n} \leq b_{m,n}$ với mọi $(m,n) \geq (m_1,n_1)$ thì $a \leq b$; nếu $a_{m,n} \geq 0$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ thì $a_{m,n}^{1/k} \to a^{1/k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, nếu $a_{m,n} \to a$ thì $|a_{m,n}| \to |a|$, nhưng chiều ngược lại không xảy ra trừ khi $a = 0$**". Phép chứng minh cho những kết quả này khá đơn giản và không mang nhiều tính kỹ thuật nên chúng ta sẽ bỏ qua không trình bày.

Một kết quả hữu ích khác là **Định lí kẹp cho các dãy kép**: "**Nếu $(a_{m,n}), (b_{m,n}), (c_{m,n})$ là các dãy kép sao cho $a_{m,n} \leq c_{m,n} \leq b_{m,n}$ và $c \in \mathbb{R}$ là một số thực sao cho $a_{m,n} \to c$ và $b_{m,n} \to c$ thì $c_{m,n} \to c$**". Phép chứng minh cho kết quả này cũng khá đơn giản và không mang nhiều tính kỹ thuật nên chúng ta cũng sẽ bỏ qua không trình bày.

Một dãy kép $(a_{m,n})$ được gọi là ***dãy Cauchy kép*** nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho

$$|a_{m,n} - a_{p,q}| < \varepsilon \text{ với mọi } (m,n), (p,q) \geq (m_0, n_0).$$

Kết quả sau đây cho phép chúng ta có thể chứng minh sự hội tụ của một dãy kép mà không cần phải dự đoán trước giới hạn của nó.

Kết quả 1.1. (Điều kiện Cauchy cho các dãy kép)

Một dãy kép sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu nó là một dãy Cauchy kép.

Chứng minh kết quả 1.1.

Dễ dàng nhận thấy rằng mọi dãy kép hội tụ sẽ là một dãy Cauchy kép.

Ngược lại, giả sử $(a_{m,n})$ là một dãy Cauchy kép và xét dãy chéo (b_n) xác định bởi $b_n = a_{n,n}$ với $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, rõ ràng (b_n) là một dãy Cauchy và, do đó, từ Điều kiện Cauchy cho giới hạn của các dãy trong phép tính một biến (Kết quả 2.2.6), (b_n) hội tụ.

Giả sử $b_n \to b$ và $\varepsilon > 0$ là một số thực cho trước.

Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Do $(a_{m,n})$ là dãy Cauchy kép nên tồn tại một số tự nhiên $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_1 \geq n_0$ và

$$|a_{m,n} - a_{p,q}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } (m,n), (p,q) \geq (n_1, n_1),$$

nên, do đó,

$$|a_{m,n} - b| \leq |a_{m,n} - a_{n_1,n_1}| + |b_{n_1} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ với mọi } (m,n) \geq (n_1, n_1).$$

Như vậy, $(a_{m,n})$ sẽ hội tụ đến b. □

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét các giới hạn lặp của một dãy kép.

Kết quả 1.2. (Giới hạn lặp của các dãy kép)

Giả sử $(a_{m,n})$ là một dãy kép hội tụ và $a_{m,n} \to a$.

(i) Nếu $lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại với mỗi $m \in \mathbb{N}$ thì ***giới hạn lặp***

$$lim_{m\to\infty}(lim_{n\to\infty} a_{m,n})$$

tồn tại và bằng với a.

(ii) Nếu $lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại với mỗi $n \in \mathbb{N}$ thì giới hạn lặp

$$lim_{n\to\infty}\left(lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right)$$

tồn tại và bằng với a.

(iii) Nếu các giả thiết trong các khẳng định (i) và (ii) ở trên đều được thỏa mãn thì dãy kép $\left(a_{m,n}\right)$ sẽ bị chặn và

$$lim_{m\to\infty}\left(lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right) = lim_{n\to\infty}\left(lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right) = a.$$

Chứng minh kết quả 1.2.

Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Do $a_{m,n} \to a$ nên sẽ tồn tại một $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho

$$\left|a_{m,n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } (m,n) \geq (m_0, n_0).$$

Giả sử $lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại với mỗi $m \in \mathbb{N}$ và chúng ta sẽ biểu thị nó lại bởi b_m.

Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, tồn tại một số tự nhiên $k_m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|a_{m,n} - b_m\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } n \geq k_m.$$

Nhận thấy rằng, với $m \geq m_0$, nếu chúng ta kí hiệu $n_1 = max\{n_0, k_m\}$ thì

$$|b_m - a| \leq \left|b_m - a_{m,n_1}\right| + \left|a_{m,n_1} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} b_m$ tồn tại và bằng với a. Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (i). Phép chứng minh của khẳng định (ii) cũng được thực hiện tương tự.

Bây giờ, giả sử các giả thiết nêu trong các khẳng định (i) và (ii) đều được thỏa mãn. Do $\left|a_{m,n}\right| \to |a|$ nên sẽ tồn tại một $(m_1, n_1) \in \mathbb{N}^2$ sao cho

$$\left|a_{m,n}\right| < 1 + |a| \text{ với mọi } (m,n) \geq (m_1, n_1).$$

Ngoài ra, với mỗi m cố định cho trước với $1 \leq m < m_1$, do $lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại nên dãy $\left(a_{m,n}\right)$ sẽ bị chặn. Như vậy, tồn tại một số thực $\alpha \geq 0$ sao cho $\left|a_{m,n}\right| \leq \alpha$ nếu $n \in \mathbb{N}$ và $1 \leq m < m_1$. Tương tự, tồn tại một số thực $\beta \geq 0$ sao cho $\left|a_{m,n}\right| \leq \beta$ nếu $1 \leq n < n_1$ và $m \in \mathbb{N}$. Do đó, $\left|a_{m,n}\right| \leq max\{1 + |a|, \alpha, \beta\}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, $\left(a_{m,n}\right)$ sẽ bị chặn. Phần cuối cùng của khẳng định (iii) có thể được suy ra trực tiếp từ các khẳng định (i) và (ii). □

Chúng ta sẽ đưa ra các ví dụ để chứng minh rằng nếu bất kỳ giả thiết nào trong các mệnh đề trên không được thỏa mãn thì các kết luận nêu ở trên có thể không còn đúng.

Chẳng hạn,

(i) Kí hiệu $a_{m,n} = (-1)^{m+n}(m+n)/mn$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Do $|a_{m,n}| \le 1/n + 1/m$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $a_{m,n} \to 0$. Tuy nhiên, $lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ sẽ không tồn tại với mọi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước.

Thật vậy,

$$a_{m,n} = (-1)^m \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{m}\right] \text{ với } (m,n) \in \mathbb{N}^2$$

và $(-1)^n/n \to 0$ khi $n \to \infty$, trong khi $lim_{n\to\infty} (-1)^n/m$ không tồn tại.

(ii) Kí hiệu $a_{m,n} = mn/(m^2+n^2)$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, $lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại và bằng với 0, bởi vì $|a_{m,n}| \le m/n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tương tự, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, $lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ tồn tại và bằng với 0. Tuy nhiên, $(a_{m,n})$ không hội tụ, bởi vì $a_{m,n} = 1/2$ nếu $m = n$ và $a_{m,n} = 2/5$ nếu $m = 2n$.

(iii) Kí hiệu $a_{m,n} = m/(m+n)$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, $lim_{n\to\infty} a_{m,n} = 0$ và, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, $lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 1$. Như vậy, $lim_{m\to\infty}(lim_{n\to\infty} a_{m,n}) = 0$, trong khi $lim_{n\to\infty}(lim_{m\to\infty} a_{m,n}) = 1$. Lưu ý rằng $(a_{m,n})$ không hội tụ, bởi vì $a_{m,n} = 1/2$ nếu $m = n$ và $a_{m,n} = 2/3$ nếu $m = 2n$.

Tính đơn điệu và tính song đơn điệu

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét khái niệm về tính đơn điệu của một dãy kép cho trước tương tự với khái niệm về tính đơn điệu của các hàm giá trị thực xác định trên $I \times J$, trong đó I và J là các khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$. Chúng ta sẽ nói rằng một dãy kép $(a_{m,n})$ là ***tăng đơn điệu*** nếu $a_{m,n} \le a_{m+1,n}$ và $a_{m,n} \le a_{m,n+1}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng nó là ***giảm đơn điệu*** nếu $a_{m,n} \ge a_{m+1,n}$ và $a_{m,n} \ge a_{m,n+1}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Nhận thấy rằng một dãy kép $(a_{m,n})$ sẽ là tăng đơn điệu nếu và chỉ nếu

$$a_{m,n} \le a_{p,q} \text{ với mọi } (m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ với } (m,n) \le (p,q).$$

Ngoài ra, một dãy kép $(a_{m,n})$ sẽ là tăng đơn điệu nếu và chỉ nếu, với mỗi số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy xác định bởi $n \longmapsto a_{m,n}$ là tăng đơn điệu và, với mỗi số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy xác định bởi $m \longmapsto a_{m,n}$ cũng tăng đơn điệu. Kết quả tương tự cũng đúng đối với các dãy kép giảm đơn điệu. Một dãy kép sẽ được gọi là ***đơn điệu*** nếu nó tăng đơn điệu hoặc giảm đơn điệu.

Chúng ta cũng cần lưu ý rằng một dãy kép hội tụ có thể không bị chặn và dãy kép bị chặn có thể không hội tụ. Với quan điểm này, kết quả sau đây sẽ rất đáng chú ý.

Kết quả 1.3.

(i) Một dãy kép tăng đơn điệu $(a_{m,n})$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu nó bị chặn trên.

Trong trường hợp này,

$$a_{m,n} \to sup\{a_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Nếu $(a_{m,n})$ tăng đơn điệu nhưng không bị chặn trên thì $a_{m,n} \to \infty$.

(ii) Một dãy kép giảm đơn điệu $(a_{m,n})$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu nó bị chặn dưới.

Trong trường hợp này,

$$a_{m,n} \to inf\{a_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Nếu $(a_{m,n})$ giảm đơn điệu nhưng không bị chặn dưới thì $a_{m,n} \to -\infty$.

Chứng minh kết quả 1.3.

Giả sử $(a_{m,n})$ là một dãy kép tăng đơn điệu. Giả sử nó bị chặn trên và kí hiệu $a = sup\{a_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$. Khi đó, với mọi số thực $\varepsilon > 0$, tồn tại một $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a - \varepsilon < a_{m_0,n_0}$. Do đó,

$$a - \varepsilon < a_{m_0,n_0} \leq a_{m,n} \leq a < a + \varepsilon \text{ với mọi } (m,n) \geq (m_0, n_0).$$

Như vậy, $a_{m,n} \to a$.

Ngược lại, giả sử $(a_{m,n})$ hội tụ và $a_{m,n} \to a$.

Khi đó, tồn tại một $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho

$$a_{m,n} < a + 1 \text{ với mọi } (m,n) \geq (m_0, n_0).$$

Bây giờ, với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta sẽ có $(m + m_0, n + n_0) \geq (m,n)$ cũng như $(m + m_0, n + n_0) \geq (m_0, n_0)$, và, do đó,

$$a_{m,n} \leq a_{m+m_0,n+n_0} < a + 1.$$

Như vậy, $(a_{m,n})$ bị chặn trên bởi $a + 1$.

Nhận thấy rằng nếu $(a_{m,n})$ không bị chặn trên thì, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ cho trước, tồn tại một $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $a_{m_0,n_0} > \alpha$. Nhưng khi đó $a_{m,n} \geq a_{m_0,n_0} > \alpha$ với mọi $(m,n) \geq (m_0, n_0)$. Như vậy, $a_{m,n} \to \infty$. Điều này hoàn tất phép chứng minh của khẳng định (i).

Phép chứng minh cho khẳng định (ii) được thực hiện tương tự. □

Kết quả 1.4.

Một dãy kép đơn điệu $(a_{m,n})$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu dãy $(a_{p,p})$ gồm các số hạng chéo của nó hội tụ.

Trong trường hợp này,

$$lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = lim_{p\to\infty} a_{p,p}.$$

Chứng minh kết quả 1.4.

Giả sử $(a_{m,n})$ là một dãy kép tăng đơn điệu. Nhận thấy rằng nếu, với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta kí hiệu $p = max\{m,n\}$ thì $a_{m,n} \le a_{p,p}$. Do đó, $\{a_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ sẽ bị chặn trên nếu và chỉ nếu $\{a_{p,p}: p \in \mathbb{N}\}$ cũng bị chặn trên và, trong trường hợp này, $sup\{a_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = sup\{a_{p,p}: p \in \mathbb{N}\}$. Như vậy, Kết quả 1.3) và dạng tương tự của nó đối với các dãy (Kết quả 2.1.6) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**") chỉ ra tính đúng đắn của kết quả mong muốn. Phép chứng minh cho trường hợp $(a_{m,n})$ là một dãy kép giảm đơn điệu cũng được thực hiện tương tự. □

Cuối cùng, chúng ta sẽ xem xét một phiên bản hai biến của tính đơn điệu tương tự với tính song đơn điệu của các hàm giá trị thực xác định trên $I \times J$, trong đó I và J là các khoảng nào đó trong $\mathbb{R}$. Khái niệm này sẽ rất hữu ích trong việc xử lý tính hội tụ có điều kiện của một chuỗi kép nêu trong mục **7. Các loại tích phân kép suy rộng**.

Chúng ta sẽ nói rằng một dãy kép $(a_{m,n})$ là ***tăng song song*** nếu $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} \le a_{m,n} + a_{m+1,n+1}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Tương tự, chúng ta sẽ nói rằng nó là ***giảm song song*** nếu $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} \ge a_{m,n} + a_{m+1,n+1}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Nhận thấy rằng, với mọi $(m,n), (p,q) \in \mathbb{N}^2$ với $(m,n) \le (p,q)$,

$$a_{m,n} + a_{p,q} - a_{m,q} - a_{p,n} = \sum_{i=m}^{p-1} \sum_{j=n}^{q-1} (a_{i,j} + a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1} - a_{i+1,j}),$$

và, do đó, dãy kép $(a_{m,n})$ sẽ tăng song song nếu và chỉ nếu

$$a_{m,n} + a_{p,q} \le a_{m,q} + a_{p,n} \text{ với mọi } (m,n), (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ với } (m,n) \le (p,q).$$

Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng một đặc trưng tương tự cũng đúng với các dãy kép giảm song song. Một dãy kép sẽ được gọi là ***song đơn điệu*** nếu nó tăng song song hoặc giảm song song.

Kết quả sau đây thường sẽ rất hữu ích để chúng ta xây dựng một số ví dụ về các dãy kép đơn điệu và song đơn điệu.

Kết quả 1.5.

Với các dãy (α_n) và (β_n) bất kỳ cho trước trong $\mathbb{R}$, xét các dãy kép $(a_{m,n})$ và $(b_{m,n})$ xác định bởi

$$a_{m,n} = \alpha_m + \beta_n \text{ và } b_{m,n} = \alpha_m \beta_n \text{ với } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Khi đó, các khẳng định sau sẽ được thỏa mãn:

(i) $(a_{m,n})$ sẽ tăng đơn điệu khi và chỉ khi cả (α_n) và (β_n) đều tăng.

(ii) Giả sử $\alpha_n \ge 0$ và $\beta_n \ge 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, đồng thời, $\alpha_{m_0} > 0$ và $\beta_{n_0} > 0$ với một số $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó, $(b_{m,n})$ sẽ tăng đơn điệu khi và chỉ khi cả (α_n) và (β_n) đều tăng.

(iii) $(a_{m,n})$ luôn tăng song song cũng như giảm song song.

(iv) Nếu (α_n) và (β_n) là đơn điệu thì $\left(b_{m,n}\right)$ sẽ song đơn điệu. Nói một cách cụ thể hơn, nếu (α_n) và (β_n) đều tăng hoặc đều giảm thì $\left(b_{m,n}\right)$ sẽ tăng song song, trong khi nếu (α_n) tăng và (β_n) giảm hoặc ngược lại thì $\left(b_{m,n}\right)$ sẽ giảm song song.

Chứng minh kết quả 1.5.

Nhận thấy rằng các khẳng định (i) và (ii) đều là các hệ quả đơn giản có thể được suy ra trực tiếp từ các định nghĩa, trong khi các khẳng định (iii) và (iv) có thể được suy ra từ lưu ý rằng $a_{p,q} + a_{m,n} = a_{m,q} + a_{p,n}$ và $b_{p,q} + b_{m,n} - b_{m,q} - b_{p,n} = \left(\alpha_p - \alpha_m\right)\left(\beta_q - \beta_n\right)$ với mọi $(m,n), (p,q) \in \mathbb{N}^2$. □

Các kết quả tương tự với các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 1.5) cũng sẽ đúng cho các dãy kép giảm đơn điệu.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $a_{m,n} = m + n$ và $b_{m,n} = mn$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, cả hai dãy kép $\left(a_{m,n}\right)$ và $\left(b_{m,n}\right)$ đều tăng đơn điệu cũng như tăng song song. Mặt khác, nếu chúng ta kí hiệu $c_{m,n} = m - n$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ thì dãy kép $\left(c_{m,n}\right)$ sẽ song đơn điệu, nhưng không đơn điệu, trong khi nếu, với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta kí hiệu

$$d_{m,n} = \begin{cases} -1 \text{ nếu } m = n = 1, \\ mn \text{ nếu } m > 1 \text{ hoặc } n > 1, \end{cases}$$

thì dãy kép $\left(d_{m,n}\right)$ sẽ đơn điệu, nhưng không song đơn điệu.

Thật vậy, rõ ràng $\left(d_{m,n}\right)$ tăng đơn điệu, nhưng nó không đơn điệu bởi vì $d_{1,2} + d_{2,1} = 4 > 3 = d_{1,1} + d_{2,2}$ và $d_{2,3} + d_{3,2} = 12 < 13 = d_{2,2} + d_{3,3}$.

(ii) Giả sử $p \in \mathbb{R}$ và $a_{m,n} = (m+n)^p$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng dãy kép $\left(a_{m,n}\right)$ giảm đơn điệu và tăng song song nếu $p \le 0$, tăng đơn điệu và giảm song song nếu $0 \le p \le 1$, và tăng đơn điệu và tăng song song nếu $p \ge 1$.

Tính biến phân bị chặn và tính song biến phân bị chặn

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ giới thiệu các khái niệm về tính biến phân bị chặn và tính song biến phân bị chặn của một dãy kép và một số mối quan hệ của chúng với các dãy kép đơn điệu và song đơn điệu.

Giả sử cho trước một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ và xét tập S gồm tất cả các tổng hữu hạn

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| a_{p_i,q_i} - a_{p_{i+1},q_{i+1}} \right|,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ là các phần tử bất kì của $\mathbb{N}^2$ thỏa mãn $(p_1, q_1) \le \cdots \le (p_n, q_n)$.

Một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ sẽ được gọi là có ***biến phân bị chặn*** nếu tập S bị chặn trên.

Kết quả 1.6.

(i) Nếu $(a_{k,l})$ có biến phân bị chặn thì nó sẽ bị chặn.

(ii) Nếu cả $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ đều có biến phân bị chặn và $r \in \mathbb{R}$ thì $(a_{k,l} + b_{k,l})$, $(ra_{k,l})$, $(a_{k,l}b_{k,l})$ cũng đều sẽ có biến phân bị chặn.

(iii) Nếu $(a_{k,l})$ đơn điệu và bị chặn thì $(a_{k,l})$ sẽ có biến phân bị chặn. Ngoài ra, nếu $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ tăng đơn điệu và bị chặn thì $(a_{k,l} - b_{k,l})$ sẽ có biến phân bị chặn.

(iv) (**Phép phân tích Jordan cho một dãy kép có biến phân bị chặn**) Nếu $(a_{k,l})$ có biến phân bị chặn thì sẽ tồn tại các dãy kép tăng đơn điệu và bị chặn $(b_{k,l})$ và $(c_{k,l})$ sao cho $a_{k,l} = b_{k,l} - c_{k,l}$ với mọi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Một dãy kép $(a_{k,l})$ sẽ được gọi là ***bị chặn song song*** nếu dãy kép $(a'_{k,l})$ xác định bởi $a'_{k,l} = a_{k,l} - a_{k,1} - a_{1,l} + a_{1,1}$, với $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, bị chặn. Ngoài ra, một dãy kép $(a_{k,l})$ sẽ được gọi là có song biến phân bị chặn nếu chuỗi kép

$$\sum_{(k,l)} \sum \left| a_{k,l} + a_{k+1,l+1} - a_{k,l+1} - a_{k+1,l} \right| \text{ hội tụ.}$$

Kết quả 1.7.

(i) Nếu $(a_{k,l})$ bị chặn thì nó cũng sẽ bị chặn song song, nhưng chiều ngược lại thì không đúng. Ngoài ra, $(a_{k,l})$ sẽ bị chặn nếu và chỉ nếu nó bị chặn song song và các dãy $(a_{k,1})$ và $(a_{1,l})$ đều bị chặn.

(ii) Nếu $(a_{k,l})$ có song biến phân bị chặn thì nó sẽ bị chặn song song và, hơn nữa, dãy kép $(a'_{k,l})$ cũng sẽ hội tụ.

(iii) Nếu cả $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ đều có song biến phân bị chặn và $r \in \mathbb{R}$ thì $(a_{k,l} + b_{k,l})$, $(ra_{k,l})$ cũng đều sẽ có song biến phân bị chặn, nhưng $(a_{k,l}b_{k,l})$ không nhất thiết phải có song biến phân bị chặn.

(iv) Nếu $(a_{k,l})$ song đơn điệu và bị chặn song song thì $(a_{k,l})$ sẽ có song biến phân bị chặn. Ngoài ra, nếu $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ tăng song song và bị chặn song song thì $(a_{k,l} - b_{k,l})$ sẽ có song biến phân bị chặn

(v) (**Phép phân tích Jordan cho một dãy kép có song biến phân bị chặn**) Nếu $(a_{k,l})$ có song biến phân bị chặn thì sẽ tồn tại các dãy kép tăng song song và bị chặn song song $(b_{k,l})$ và $(c_{k,l})$ sao cho $a_{k,l} = b_{k,l} - c_{k,l}$ với mọi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Kết quả sau đây chỉ ra mối quan hệ giữa tính biến phân bị chặn và tính song biến phân bị chặn.

Kết quả 1.8.

Giả sử dãy kép $(a_{k,l})$ có song biến phân bị chặn và các dãy $(a_{k,1})$ và $(a_{1,l})$ đều có biến phân bị chặn

Khi đó, $(a_{k,l})$ sẽ có biến phân bị chặn.

Lưu ý rằng một dãy kép có thể có biến phân bị chặn nhưng không có song biến phân bị chặn. Ngoài ra, một dãy kép có thể có song biến phân bị chặn nhưng không có biến phân bị chặn.

2. Khái niệm chuỗi kép vô hạn

Một ***chuỗi vô hạn kép*** (hoặc đơn giản, một ***chuỗi kép***) ***các số thực*** được định nghĩa là một cặp sắp thứ tự $\left((a_{k,l}),(A_{m,n})\right)$ gồm các dãy số thực kép sao cho

$$A_{m,n}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{k,l} \text{ với mọi } (m,n)\in\mathbb{N}^2.$$

(Chúng ta cần lưu ý rằng, với mỗi $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, tổng kép hữu hạn nêu ở trên sẽ không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện nó)

Một cách tương đương, một chuỗi kép là một cặp sắp thứ tự $\left((a_{k,l}),(A_{m,n})\right)$ gồm các dãy số thực kép sao cho

$$a_{k,l}=A_{k,l}-A_{k,l-1}-A_{k-1,l}+A_{k-1,l-1} \text{ với mọi } (k,l)\in\mathbb{N}^2,$$

trong đó chúng ta quy ước $A_{k,0}=0$ với mọi $k=0,1,2,\dots$ và $A_{0,l}=0$ với mọi $l=0,1,2,\dots$ với quy ước tiêu chuẩn một tổng rỗng sẽ luôn bằng không.

Dãy kép đầu tiên $(a_{k,l})$ được gọi là ***dãy kép các số hạng*** còn dãy kép thứ hai $(A_{m,n})$ được gọi là ***dãy kép các tổng kép riêng*** của chuỗi kép $\left((a_{k,l}),(A_{m,n})\right)$. Hai dãy kép $(a_{k,l})$ và $(A_{m,n})$ xác định duy nhất lẫn nhau. Chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu không chính thức nhưng mang tính gợi ý $\sum\sum_{(k,l)}a_{k,l}$ cho chuỗi kép $\left((a_{k,l}),(A_{m,n})\right)$. Đôi khi sẽ thuận tiện hơn khi chúng ta cho phép các chỉ số k và l nhận các giá trị $k=k_0,k_0+1,\dots$ và $l=l_0,l_0+1,\dots$ đối với một cặp số nguyên (k_0,l_0) cho trước nào đó.

Chúng ta sẽ nói rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)}a_{k,l}$ ***hội tụ*** nếu dãy kép $(A_{m,n})$ các tổng kép riêng của nó hội tụ. Nếu $(A_{m,n})$ hội tụ đến A thì số thực (duy nhất) A sẽ được gọi là ***tổng kép*** của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)}a_{k,l}$ và nó được biểu thị lại bởi cùng một biểu tượng đã được sử dụng để biểu thị chuỗi kép.

Như vậy, khi chúng ta viết

$$\sum_{(k,l)}\sum =A,$$

chúng ta ngầm muốn nói rằng chuỗi kép bên trái hội tụ và tổng kép của nó là số thực A.

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ nói rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ ***hội tụ đến A***. Một chuỗi kép không hội tụ sẽ được gọi là ***phân kỳ***. Đặc biệt, chúng ta sẽ nói rằng chuỗi kép phân kỳ đến ∞ hoặc đến $-\infty$ tùy thuộc vào dãy kép gồm các tổng kép riêng của nó tiến đến ∞ hoặc $-\infty$. Tính hội tụ của một chuỗi kép sẽ không bị ảnh hưởng nếu chúng ta thay đổi một số hữu hạn các số hạng của nó, mặc dù tổng kép của nó có thể bị thay đổi khi chúng ta làm như vậy. Mặt khác, nếu chúng ta thay đổi một số vô hạn các số hạng của nó (ngay cả khi chúng cùng nằm trong một hàng hoặc một cột nào đó) thì chúng ta cũng có thể làm ảnh hưởng đến tính hội tụ của chuỗi kép. Chẳng hạn, nếu $a_{k,l} = 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ thì rõ ràng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ. Nhưng nếu chúng ta kí hiệu $b_{k,1} = 1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $b_{k,l} = 0$ với mọi $(k,l) \geq (1,2)$ thì $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ sẽ phân kỳ đến ∞. (Điều này trái ngược hoàn toàn với hiệu ứng về tính hội tụ của một dãy kép khi một số số hạng của nó bị thay đổi, như chúng ta đã thảo luận trong mục **1. Khái niệm dãy kép.**)

Chúng ta cũng có thể lưu ý rằng một chuỗi (đơn) $\sum_k a_k$ có thể được coi như là một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ nếu chúng ta kí hiệu $a_{k,1} = a_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $a_{k,l} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $l \geq 2$. Trong trường hợp này, $A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} a_k$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, các ví dụ đã được xem xét trong lý thuyết về các chuỗi (đơn) cũng hoạt động tốt đối với các chuỗi kép. Như trong trường hợp các chuỗi đơn, một cách nhanh chóng và hữu ích để chỉ ra rằng một chuỗi kép phân kỳ là sử dụng kết quả sau đây, kết quả này đưa ra một điều kiện cần cho tính hội tụ của một chuỗi kép.

Kết quả 2.1. (Phép thử $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})-$ số hạng)

Nếu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ thì $a_{k,l} \to 0$ khi $k,l \to \infty$. Nói cách khác, nếu $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $k,l \to \infty$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.

Chứng minh kết quả 2.1.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ. Nhận thấy rằng nếu $(A_{m,n})$ là dãy kép gồm các tổng kép riêng và A là tổng kép của nó thì chúng ta sẽ có $a_{k,l} = A_{k,l} - A_{k-1,l} - A_{k,l-1} + A_{k-1,l-1} \longrightarrow A - A - A + A = 0$. □

Chúng ta sẽ thấy trong ví dụ bên dưới rằng hai chuỗi $\sum\sum_{(k,l)} 1/kl$ và $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)$ sẽ phân kỳ đến ∞ mặc dù các số hạng thứ (k,l) của chúng đều tiến đến 0 khi $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Như vậy, chiều ngược lại của Phép thử $(k,l) -$ số hạng (Kết quả 2.1) là không đúng.

Một biến thể khác của Phép thử $(k,l) -$ số hạng, được gọi là **Phép thử $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) -$ số hạng Abel**, được đưa ra như sau:

"Giả sử $(\boldsymbol{a_{k,l}})$ là một dãy kép các số thực không âm giảm đơn điệu.

Khi đó, nếu chuỗi $\sum\sum_{(k,l)} \boldsymbol{a_{k,l}}$ hội tụ thì $\boldsymbol{kla_{k,l}} \to 0$ khi $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) \to (\infty,\infty)$."

Kết quả sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho tính hội tụ của một số "chuỗi tích" nhất định và thường rất hữu ích.

Kết quả 2.2.

Giả sử $\sum_k b_k$ và $\sum_l c_l$ là các dãy số thực và kí hiệu $a_{k,l} = b_k c_l$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó, các khẳng định sau sẽ được thỏa mãn:

(i) Nếu cả $\sum_k b_k$ và $\sum_l c_l$ đều hội tụ thì chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ và, hơn nữa, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = (\sum_k b_k)(\sum_k c_k)$.

(ii) Nếu cả $\sum_k b_k$ và $\sum_l c_l$ đều phân kỳ đến ∞ thì chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ đến ∞.

(iii) Nếu $\sum_k b_k$ hội tụ đến B và $B \neq 0$, trong khi $\sum_l c_l$ phân kỳ, thì chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.

Chứng minh kết quả 2.2.

Kí hiệu (B_m) và (C_n) lần lượt là dãy các tổng riêng của các chuỗi $\sum_k b_k$ và $\sum_l c_l$. Ngoài ra, kí hiệu $(A_{m,n})$ là dãy kép các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$.

Khi đó,

$$A_{m,n} = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l\right) = B_m C_n \text{ với mọi } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Như vậy, nếu $B_m \to B$ và $C_n \to C$ với các số $B, C \in \mathbb{R}$ nào đó thì $A_{m,n} \to BC$. Ngoài ra, nếu $B_m \to \infty$ và $C_n \to \infty$ thì $A_{m,n} \to \infty$. Điều này chứng minh tính đúng đắn của các khẳng định (i) và (ii). Ngoài ra, nếu $B_m \to B$ với $B \neq 0$ và dãy kép $(A_{m,n})$ hội tụ đến A thì (C_n) sẽ hội tụ đến A/B. Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (iii). □

Trong các ví dụ sau đây cũng như phần còn lại của bài viết này, chúng ta sẽ áp dụng quy ước $x^0 = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (kể cả $x = 0$).

Chẳng hạn,

(i) (Chuỗi hình học kép) Giả sử $x, y \in \mathbb{R}$. Kí hiệu $a_{k,l} = x^k y^l$ với k, l là các số nguyên không âm nào đó. Lưu ý rằng, theo quy ước đã nêu ở trên, $a_{0,0} = 1$, $a_{k,0} = x^k$ và $a_{0,l} = y^l$ với mọi $k, l \in \mathbb{N}$. Chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, trong đó chỉ số (k, l) thay đổi trên tập các cặp số nguyên không âm, được gọi là ***chuỗi hình học kép***.

Nhắc lại rằng chuỗi hình học $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $|x| < 1$.

Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng chuỗi hình học kép sẽ hội tụ nếu $|x| < 1$ và $|y| < 1$; hơn nữa,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} x^k y^l = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \text{ với } |x| < 1 \text{ và } |y| < 1.$$

Ngoài ra, nếu $|x| \geq 1$ và $|y| \geq 1$ thì $|x^k y^l| = |x|^k |y|^l \geq 1$ với mọi số nguyên không âm k, l. Do đó, từ Phép thử $(k, l) -$ số hạng (Kết quả 2.1), chúng ta nhận thấy rằng chuỗi hình học kép sẽ phân kỳ. Cuối cùng, do $1/(1 - z)$ khác không bất cứ khi nào $z \in \mathbb{R}$ với $|z| < 1$ nên, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng nếu chỉ một trong hai số $|x|$ và $|y|$ nhỏ hơn 1 thì chuỗi hình học kép sẽ phân kỳ. Như vậy, chúng ta nhận thấy rằng chuỗi hình học kép $\sum\sum_{(k,l)} x^k y^l$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $|x| < 1$ và $|y| < 1$.

(ii) (Chuỗi hàm mũ kép) Giả sử $x, y \in \mathbb{R}$. Kí hiệu $a_{k,l} = x^k y^l / k!\, l!$ với k, l là các số nguyên không âm nào đó. Chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, trong đó chỉ số (k, l) thay đổi trên tập các cặp số nguyên không âm, được gọi là chuỗi hàm mũ kép. Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.2), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng chuỗi hàm mũ kép sẽ luôn hội tụ và

$$\sum_{(k,l)}\sum a_{k,l} = \sum_{(k,l)\geq(0,0)}\sum \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!} = (\exp x)(\exp y) = \exp(x+y) \text{ với } x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) (Chuỗi điều hòa kép và các biến thể của nó) Các chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/kl$ và $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)$ có thể được coi là các dạng tương tự của chuỗi điều hòa $\sum_k 1/k$ và hai chuỗi kép này có thể được coi là các chuỗi điều hòa kép. Chúng ta đã biết từ lý thuyết về các chuỗi (đơn) rằng chuỗi điều hòa sẽ phân kỳ đến ∞. Do đó, từ khẳng định (ii) của Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/kl$ sẽ phân kỳ đến ∞. Tổng quát hơn, với mọi $p \in \mathbb{R}$, chúng ta đã biết rằng chuỗi $\sum_k 1/k^p$ hội tụ với $p > 1$ (trong trường hợp này, tổng rõ ràng sẽ khác không) và phân kỳ đến ∞ với $p \leq 1$. Như vậy, từ các khẳng định (i), (ii), (iii) của Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng, với mọi $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{(k,l)}\sum \frac{1}{k^p l^q} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p > 1 \text{ và } q > 1.$$

Đối với các biến thể khác của chuỗi điều hòa, cụ thể là chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)$, chúng ta nhận thấy rằng nó cũng sẽ phân kỳ đến ∞, bởi vì

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{k+l} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{kl} \text{ với mọi } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Bây giờ, chúng ta sẽ xét chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)^2$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $A_{n,n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} 1/(k+l)^2$.

Với $n \geq 3$ và $i = 2, \ldots, n-1$, mỗi một trong $i - 1$ số hạng $1/[1+(i-1)]^2$, $1/[1+(i-2)]^2$, …, $1/[(i-2)+2]^2$, $1/[(i-1)+1]^2$ của $A_{n,n}$ đều bằng $1/i^2$ và, do đó,

$$A_{n,n} \geq \sum_{i=2}^{n-1}\frac{i-1}{i^2} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

Do $\sum_{i=2}^{n-1} 1/i \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên chúng ta nhận thấy rằng $A_{n,n} \to \infty$ khi $n \to \infty$. Như vậy, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)^2$ sẽ phân kỳ đến ∞. Điều này chỉ ra rằng ngưỡng cho tính hội tụ của $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)^p$ sẽ không phải là $p = 1$. Thật vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)^p$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 2$.

(iv) (Chuỗi thay phiên kép) Chúng ta đã biết từ lý thuyết về các chuỗi (đơn) rằng nếu chúng ta đổi dấu các số hạng của chuỗi điều hòa thì chuỗi thay phiên thu được, cụ thể là $\sum_k (-1)^{k-1}/k$, sẽ hội tụ. Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 2.2), chúng ta nhận thấy rằng chuỗi thay phiên kép $\sum\sum_{(k,l)} (-1)^{k+l}/kl$ tương ứng sẽ hội tụ.

Tổng quát hơn, giả sử $p \in \mathbb{R}$. Chúng ta đã biết rằng chuỗi $\sum_k (-1)^{k-1}/k^p$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 0$. Ngoài ra, nếu, với mọi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta kí hiệu A_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_k (-1)^{k-1}/k^p$ thì

$$A_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + B_n, \text{trong đó } B_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p}\right),$$

và, do $B_n \geq 0$, chúng ta nhận thấy rằng $A_{2n} \geq (1 - 2^{-p})$.

Như vậy, nếu $p > 1$ thì tổng của chuỗi $\sum_k (-1)^{k-1}/k^p$ tối thiểu sẽ là $(1 - 2^{-p})$ và, do đó, khác không.

Với quan điểm này, chúng ta dễ dàng suy ra từ các khẳng định (i) và (iii) của Kết quả 2.2.) cùng với Phép thử $(k, l) -$ số hạng (Kết quả 2.1) rằng, với mọi $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{k^p l^q} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p > 0 \text{ và } q > 0.$$

Đối với các biến thể khác, cụ thể là chuỗi thay phiên kép $\sum\sum_{(k,l)} (-1)^{k+l}/(k+l)^p$, chúng ta nhận thấy rằng nó sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 0$.

Các phát biểu sau đây về tính hội tụ của một chuỗi kép được phát triển tiếp từ các phát biểu tương ứng về tính hội tụ của một dãy kép nêu trong mục **1. Khái niệm về dãy kép**.

1. (**Định lí giới hạn**) Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = A$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l} = B$.

Khi đó,

$$\sum\sum_{(k,l)} (a_{k,l} + b_{k,l}) = A + B \text{ và } \sum\sum_{(k,l)} (r a_{k,l}) = rA \text{ với mọi } r \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, nếu $a_{k,l} \leq b_{k,l}$ với mọi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ thì $A \leq B$.

2. (**Định lí kẹp**) Nếu $(a_{k,l}), (b_{k,l}), (c_{k,l})$ là các dãy kép gồm các số thực sao cho $a_{k,l} \leq c_{k,l} \leq b_{k,l}$ với mỗi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ và, ngoài ra, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = A$ cũng như $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l} = A$ thì $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} = A$.

3. (**Điều kiện Cauchy**) Một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho

$$\left| \sum_{k=p+1}^{m} \sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=p+1}^{m} \sum_{l=1}^{q} a_{k,l} \right| < \varepsilon,$$

với mọi $(m, n) \geq (p, q) \geq (m_0, n_0)$.

Bây giờ, chúng ta sẽ liên hệ tính hội tụ của một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ với tính hội tụ của hai chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ và $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$. Với mục đích này và để sử dụng sau này, sẽ thật thuận tiện khi chúng ta sử dụng thuật ngữ sau: Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, chuỗi (đơn) $\sum_l a_{k,l}$ sẽ được gọi là ***chuỗi hàng*** và, với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, chuỗi (đơn) $\sum_k a_{k,l}$ sẽ được gọi là ***chuỗi cột*** (tương ứng với chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$).

Kết quả sau đây có thể được so sánh với Kết quả 1.11) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**".

Kết quả 2.3. (Định lí Fubini cho các chuỗi kép)

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ và kí hiệu A là tổng kép của nó.

(i) Nếu mỗi chuỗi hàng đều hội tụ thì ***chuỗi lặp*** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ tương ứng sẽ hội tụ và bằng với A.

(ii) Nếu mỗi chuỗi cột đều hội tụ thì chuỗi lặp $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ tương ứng sẽ hội tụ và bằng với A.

(iii) Nếu mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột đều hội tụ thì dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ bị chặn, và

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)=\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}.$$

Chứng minh kết quả 2.3.

Như thường lệ, giả sử $\left(A_{m,n}\right)$ là dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$.

Theo giả thiết của chúng ta, $\left(A_{m,n}\right)$ sẽ hội tụ đến A.

Giả sử mỗi chuỗi hàng đều hội tụ.

Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước,

$$lim_{n\to\infty}A_{m,n}=lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}=\sum_{k=1}^{m}\left(lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

Do đó, từ Kết quả 1.2), giới hạn lặp $lim_{m\to\infty}\left(lim_{n\to\infty}A_{m,n}\right)$ tồn tại và bằng A, nghĩa là,

$$lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)=A.$$

Như vậy, chuỗi lặp $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ sẽ hội tụ và tổng của nó sẽ bằng A. Điều này chứng minh tính đúng đắn của khẳng định (i). Phép chứng minh của khẳng định (i) cũng được thực hiện tương tự.

Cuối cùng, giả sử mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột đều hội tụ. Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, giới hạn $lim_{n\to\infty}A_{m,n}$ tồn tại và, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, giới hạn $lim_{m\to\infty}A_{m,n}$ cũng tồn tại. Như vậy, từ khẳng định (iii) của Kết quả 1.2), $\left(A_{m,n}\right)$ sẽ bị chặn. Phần cuối cùng của khẳng định (iii) được suy ra trực tiếp từ (i) và (ii). □

Chẳng hạn,

(i) Ngay cả khi một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ, cả hai chuỗi lặp cũng có thể phân kỳ.

Chẳng hạn, xét một dãy kép $(a_{k,l})$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & -3 & -1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Khi đó, $A_{1,n} = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $A_{m,1} = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$, trong khi $A_{m,n} = 0$ với mọi $(m,n) \geq (2,2)$. Do đó, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} A_{m,n} = 0$. Nhưng $\sum_{l=1}^{n} a_{1,l} = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\sum_{l=1}^{n} a_{2,l} = -n$ với mọi $n \geq 2$, trong khi $\sum_{k=1}^{m} a_{k,1} = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và $\sum_{k=1}^{m} a_{k,2} = -m$ với mọi $m \geq 2$. Như vậy, $\sum_{l=1}^{\infty} a_{1,l}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1}$ sẽ phân kỳ đến ∞, trong khi $\sum_{l=1}^{\infty} a_{2,l}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2}$ sẽ phân kỳ đến $-\infty$. Rõ ràng, không có chuỗi lặp nào được xác định một cách rõ ràng.

(ii) Ngay cả khi cả hai chuỗi lặp $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ và $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ hội tụ và có cùng một tổng, chuỗi kép vẫn có thể phân kỳ.

Chẳng hạn, xét một dãy kép $(a_{k,l})$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Khi đó, $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}$ sẽ bằng 1 nếu $k = 1$ hoặc 2, và bằng 0 nếu $k \geq 3$. Tương tự, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}$ sẽ bằng 1 nếu $l = 1$ hoặc 2, và bằng 0 nếu $l \geq 3$. Như vậy, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$. Nhưng $A_{m,m} = 4$ với mọi $m \geq 2$ và $A_{m,m-1} = 3$ với mọi $m \geq 3$, nên dãy kép $(A_{m,n})$ sẽ phân kỳ, nghĩa là, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.

(iii) Ngay cả khi cả hai chuỗi lặp $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ và $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ đều hội tụ, tổng của chúng cũng có thể không bằng nhau.

Chẳng hạn, xét một dãy kép $(a_{k,l})$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Khi đó, $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}$ sẽ bằng 1 nếu $k = 1$ và sẽ bằng 0 nếu $k \geq 2$, trong khi $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}$ sẽ bằng -1 nếu $l = 1$ và sẽ bằng 0 nếu $l \geq 2$. Như vậy, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = 1$, trong khi $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = -1$. Tuy nhiên, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ, bởi vì $A_{m,m} = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và $A_{m,m-1} = -1$ với mọi $m \geq 2$.

Chuỗi kép lồng nhau

Nhận thấy rằng nếu $(b_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực thì chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)}(b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1})$$

được gọi là một ***chuỗi kép lồng nhau***.

Chúng ta có kết quả sau về tính hội tụ của nó:

Kết quả 2.4.

Một chuỗi kép lồng nhau $\sum\sum_{(k,l)}(b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1})$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu dãy kép $(b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l})$ hội tụ và, trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)}(b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}) = b_{1,1} - lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)}(b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l}).$$

Chứng minh kết quả 2.4.

Giả sử $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\big(b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}\big) = b_{1,1} - b_{m+1,1} - b_{1,n+1} + b_{m+1,n+1}.$$

Điều này chỉ ra tính đúng đắn của kết quả mong muốn. □

Chúng ta có thể lưu ý rằng mọi chuỗi kép đều có thể được viết lại dưới dạng một chuỗi kép lồng nhau. Thật vậy, nếu kí hiệu $A_{m,n}$ là tổng kép thứ (m,n) của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ thì, bằng cách đặt $b_{k,l} = A_{k-1,l-1}$ với mọi $(k,l) \geq (1,1)$ với quy ước thông thường $A_{0,0}, A_{k,0}, A_{0,l}$ đều bằng không, chúng ta sẽ có $a_{k,l} = A_{k,l} - A_{k-1,l} - A_{k,l-1} + A_{k-1,l-1} = b_{k+1,l+1} - b_{k,l+1} - b_{k+1,l} + b_{k,l}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.Tuy nhiên, Kết quả 2.4) đặc biệt hữu ích khi nó có thể giúp chúng ta viết $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ dưới dạng một chuỗi kép lồng nhau mà không liên quan đến các tổng kép riêng của nó.

Chẳng hạn, xét chuỗi $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, trong đó

$$a_{k,l} = \frac{1}{kl(k+1)(l+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right).$$

Nếu chúng ta đặt $b_{k,l} = 1/kl$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ thì $a_{k,l} = b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Do $b_{1,1} = 1$ và $(b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l}) \to 0$ nên, từ Kết quả 2.4), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/kl(k+1)(l+1)$ sẽ hội tụ và tổng kép của nó sẽ bằng $1 - 0 = 1$.

Chuỗi kép với các số hạng không âm

Điều kiện cần và đủ sau đây rất hữu ích để một chuỗi kép với các số hạng không âm hội tụ.

Kết quả 2.5.

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép sao cho $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu dãy kép $(A_{m,n})$ gồm các tổng kép riêng của nó bị chặn và, trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = sup\{A_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Ngoài ra, nếu $(A_{m,n})$ không bị chặn trên thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ đến ∞.

Chứng minh kết quả 2.5.

Nhận thấy rằng do $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta sẽ có $A_{m+1,n} = A_{m,n} + a_{m+1,1} + \cdots + a_{m+1,n} \geq A_{m,n}$ và $A_{m,n+1} = A_{m,n} + a_{1,n+1} + \cdots + a_{m,n+1} \geq A_{m,n}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, dãy kép $(A_{m,n})$ sẽ tăng đơn điệu. Từ khẳng định (i) của Kết quả 1.3), chúng ta nhận thấy rằng $(A_{m,n})$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu nó bị chặn trên và, trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} A_{m,n} = sup\{A_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Ngoài ra, nếu $(A_{m,n})$ không bị chặn trên thì $A_{m,n} \to \infty$, nghĩa là, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ

đến ∞. □

Từ quan điểm của kết quả trên, khi $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta sẽ viết $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} < \infty$ nếu chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ và $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \infty$ nếu chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ.

Kết quả 2.5) chỉ ra rằng nếu một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ với các số hạng không âm hội tụ và A là tổng kép của nó thì dãy kép $(a_{k,l})$ gồm các số hạng của nó cũng như dãy kép $(A_{m,n})$ gồm các tổng kép riêng của nó sẽ bị chặn. Điều này xảy ra sau khi chúng ta nhận xét rằng, trong trường hợp này, $0 \leq a_{k,l} \leq A_{k,l} \leq A$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Một ứng dụng thú vị của kết quả này, được gọi là **Phép thử ngưng tụ Cauchy**, được đưa ra như sau:

“Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực không âm giảm đơn điệu.

Khi đó, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)\geq(1,1)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} 2^{k+l} a_{2^k,2^l}$ hội tụ.”

Một kết quả tương tự như Kết quả 2.5) cũng đúng cho các chuỗi kép với các số hạng không dương. Tổng quát hơn, khi các số hạng $a_{k,l}$ có cùng dấu ngoại trừ một số hữu hạn trong số chúng là khác dấu, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $(A_{m,n})$ bị chặn. Tuy nhiên, nếu vô số các $a_{k,l}$ dương và vô số các $a_{k,l}$ âm thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ có thể phân kỳ mặc dù $(A_{m,n})$ bị chặn và $(A_{m,n})$ cũng có thể không bị chặn mặc dù $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ.

Hai tuyên bố này sẽ được minh họa tương ứng bởi các chuỗi kép được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \text{ và } \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Đối với các chuỗi kép có các số hạng không âm, kết quả sau đây là sự cải tiến đáng kể so với Định lí Fubini cho các chuỗi kép (Kết quả 2.3).

Kết quả 2.6. (Định lí Tonelli cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép sao cho $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó, các khẳng định sau sẽ tương đương với nhau.

(i) Chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ.

(ii) Mỗi chuỗi hàng đều hội tụ và chuỗi lặp $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ cũng hội tụ.

(iii) Mỗi chuỗi cột đều hội tụ và chuỗi lặp $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ cũng hội tụ.

Trong trường hợp này,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum_{(k,l)}\sum a_{k,l}.$$

Chứng minh kết quả 2.6.

Giả sử khẳng định (i) được thỏa mãn. Nếu chúng ta kí hiệu A là tổng kép của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ thì, từ quan điểm của Kết quả 2.5), $\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \leq A_{k,n} \leq A$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước và với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, mỗi chuỗi hàng đều là một chuỗi (đơn) với các số hạng không âm có tổng riêng bị chặn và, do đó, nó sẽ hội tụ. Từ Định lí Fubini (Kết quả 2.3), chúng ta dễ dàng suy ra rằng chuỗi lặp $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ hội tụ và tổng của nó sẽ bằng A.

Giả sử khẳng định (ii) được thỏa mãn.

Khi đó, với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \alpha, \text{tạm giả sử.}$$

Như vậy, từ Kết quả 2.5), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ.

Điều này thiết lập sự tương đương của các khẳng định (i) và (ii). Phép chứng minh cho sự tương đương của các khẳng định (i) và (iii) cũng được thực hiện tương tự. Sự bằng nhau của tổng kép và tổng của một trong hai chuỗi lặp cũng được thiết lập trong quá trình này. □

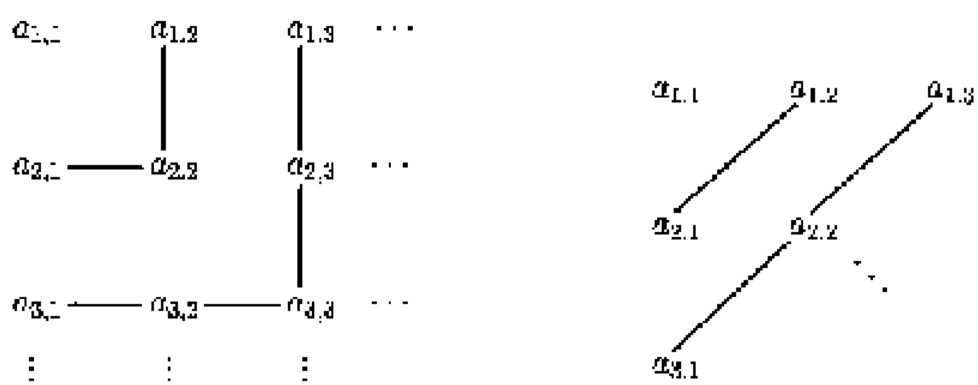
Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng không thể bỏ qua tính không âm của các số hạng của các chuỗi kép trong Định lí Tonelli.

Câu hỏi về tính hội tụ của một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ với các số hạng không âm có thể được rút gọn thành câu hỏi về sự hội tụ của mỗi một trong hai chuỗi (đơn) sau, tương ứng với việc lấy tổng của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ "theo các hình vuông" hoặc "theo các đường chéo".

1. Chuỗi (đơn) $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, trong đó với mỗi $j \in \mathbb{N}$, b_j là tổng của tất cả các số hạng $a_{k,l}$ sao cho một trong hai chỉ số k và l bằng j và số còn lại lớn nhất là j, nghĩa là, $b_j = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}$. Như vậy, $b_1 = a_{1,1}$, $b_2 = a_{1,2} + a_{2,2} + a_{2,1}$, $b_3 = a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{3,1} + a_{3,2}$, v.v...

2. Chuỗi (đơn) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, trong đó với mỗi $j \in \mathbb{N}$, c_j là tổng của tất cả các số hạng $a_{k,l}$ sao cho $k + l = j + 1$, nghĩa là, $c_j = \sum_{i=1}^{j} a_{j-i+1,i}$. Như vậy, $c_1 = a_{1,1}$, $c_2 = a_{2,1} + a_{1,2}$, $c_3 = a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}$. v.v…

Chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ đôi khi còn được gọi là ***chuỗi đường chéo*** tương ứng với chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$.



Hình vẽ minh họa việc lấy tổng của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ "theo các hình vuông" hoặc "theo các đường chéo".

Kết quả 2.7.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép với các số hạng không âm, và b_j, c_j như trên.

Khi đó, các khẳng định sau sẽ tương đương với nhau.

(i) (**Tổng tính theo các hình chữ nhật**) $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ.

(ii) (**Tổng tính theo các hình vuông**) $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ hội tụ.

(iii) (**Tổng tính theo các đường chéo**) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ hội tụ.

Trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j.$$

Chứng minh kết quả 2.7.

Như thường lệ, với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}$ cũng như $B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $B_n = A_{n,n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, từ quan điểm của Kết quả 1.4), các khẳng định (i) và (ii) là tương đương với nhau và, trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = sup\{A_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = sup\{B_n: n \in \mathbb{N}\} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Kế tiếp, với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $C_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_j$. Lưu ý rằng nếu $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $k + l \leq n + 1$ thì $k \leq n$ và $l \leq n$. Điều này ngụ ý rằng $C_n \leq A_{n,n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, nếu $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ và $(k,l) \leq (m,n)$ thì $k + l \leq m + n = (m + n - 1) + 1$. Điều này ngụ ý rằng $A_{m,n} \leq C_{m+n-1}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Từ quan điểm của các mối quan hệ này, chúng ta nhận thấy rằng các khẳng định (i) và (iii) là tương đương và, trong trường hợp này,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = sup\{A_{m,n}: (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = sup\{C_n: n \in \mathbb{N}\} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j,$$

như đã tuyên bố. □

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $p > 0$ và, với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = 1/(k + l)^p$.

Khi đó, $c_j = \sum_{i=1}^{j} 1/(j + 1)^p = j/(j + 1)^p$ với $j \in \mathbb{N}$.

Do

$$\frac{1}{2(j + 1)^{p-1}} \leq \frac{j}{(j + 1)^p} < \frac{1}{(j + 1)^{p-1}} \text{ với mọi } j \in \mathbb{N},$$

nên chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 2$.

Như vậy, từ Kết quả 2.7), chúng ta nhận thấy rằng $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k + l)^p$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 2$.

(ii) Do $A_{m,n} \to A$ khi $(m,n) \to (\infty, \infty)$ ngụ ý rằng $A_{n,n} \to A$ khi $n \to \infty$ nên chúng ta nhận thấy rằng, trong Kết quả 2.7), khẳng định (i) sẽ kéo theo khẳng định (ii) bất kể dấu của các số hạng của chuỗi kép này. Tuy nhiên, chiều ngược lại nói chung không đúng.

Chẳng hạn, xét một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Trong ví dụ này, $A_{n,n} = 4$ với mọi $n \geq 2$, nên $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 4$. Tuy nhiên, chuỗi kép này lại không hội tụ. Điều này suy ra từ việc lưu ý rằng $A_{n,n+1} = 3$ với $n \geq 2$.

(iii) Xét một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Như vậy, $A_{m,n} = 0$ với mọi $(m, n) \geq (2,2)$ và, do đó, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ và tổng kép của nó cũng sẽ bằng 0. Tuy nhiên, do $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, và $c_j = (-1)^j$ với $j \geq 3$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ sẽ phân kỳ.

Mặt khác, xét một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Chúng ta nhận thấy rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ, trong khi chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ lại hội tụ.

Trong ví dụ này, chúng ta lưu ý rằng $c_1 = 2$ và $c_j = 0$ với mọi $j \geq 2$ và, do đó, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 2$.

Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng cả $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum_j c_j$ đều hội tụ nhưng tổng kép lại không bằng với "tổng tính theo các đường chéo".

Để minh họa điều này, xét một dãy kép $\left(a_{k,l}\right)$ được cho dưới dạng sơ đồ như sau:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Như vậy, $A_{m,n} = 2$ với mọi $(m,n) \neq (1,1)$ và, do đó, tổng kép sẽ bằng 2. Nhưng do $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, $c_j = 0$ với mọi $j \geq 4$ nên chúng ta sẽ có $\sum_j c_j = 4$.

Tính hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ thảo luận về tính hội tụ và phân kỳ của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ được hình thành bằng cách xét các giá trị tuyệt đối của các số hạng của một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$. Một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ được gọi là ***hội tụ tuyệt đối*** nếu chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ hội tụ.

Kết quả 2.8.

Mọi chuỗi kép hội tụ tuyệt đối cũng sẽ hội tụ.

Chứng minh kết quả 2.8.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ tuyệt đối.

Với mỗi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu

$$a_{k,l}^{+} = \frac{|a_{k,l}| + a_{k,l}}{2} \text{ và } a_{k,l}^{-} = \frac{|a_{k,l}| - a_{k,l}}{2}.$$

Kí hiệu $(A_{m,n}), (A_{m,n}^{+}), (A_{m,n}^{-}), (\tilde{A}_{m,n})$ lần lượt biểu thị các dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{+}$, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{-}$, $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$.

Từ Kết quả 2.5), $(\tilde{A}_{m,n})$ sẽ bị chặn. Ngoài ra, $0 \leq a_{k,l}^{+} \leq |a_{k,l}|$ và $0 \leq a_{k,l}^{-} \leq |a_{k,l}|$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, và, do đó,

$$0 \leq A_{m,n}^{+} \leq \tilde{A}_{m,n} \text{ và } 0 \leq A_{m,n}^{-} \leq \tilde{A}_{m,n} \text{ với mọi } (m,n) \in \mathbb{N}^2,$$

và, như vậy, các dãy kép $(A_{m,n}^{+})$ và $(A_{m,n}^{-})$ đều bị chặn.

Một lần nữa từ Kết quả 2.5), chúng ta nhận thấy rằng các chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{+}$ và $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{-}$ đều hội tụ. Nhưng $a_{k,l} = a_{k,l}^{+} - a_{k,l}^{-}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ. □

Chiều ngược lại của kết quả trên lại không đúng, như chúng ta có thể thấy khi xét chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} (-1)^{kl}/(kl)$, nó hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Một chuỗi kép hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối sẽ được gọi là ***hội tụ có điều kiện***.

Các khái niệm về các chuỗi hàng và chuỗi cột được giới thiệu trước đó có thể được sử dụng để thu được đặc trưng hữu ích sau đây cho tính hội tụ tuyệt đối.

Kết quả 2.9.

Một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối nếu và chỉ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Tồn tại một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ và một $\alpha_0 > 0$ sao cho

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n}|a_{k,l}| \leq \alpha_0 \text{ với mọi } (m,n) \geq (k_0,l_0).$$

(ii) Mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột đều hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh kết quả 2.9.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ tuyệt đối. Do $|a_{k,l}| \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên Kết quả 2.5) cho thấy rằng điều kiện (i) sẽ đúng với $(k_0,l_0) = (1,1)$ và Định lí Tonelli cho các chuỗi kép (Kết quả 2.6) cho thấy rằng điều kiện (ii) cũng đúng.

Ngược lại, giả sử điều kiện (i) và (ii) đều được thỏa mãn. Kí hiệu (k_0,l_0) và α_0 như trong điều kiện (i). Từ điều kiện (ii), chúng ta nhận thấy rằng, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, tồn tại một $\beta_k > 0$ sao cho $\sum_l |a_{k,l}| \leq \beta_k$ và, với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, tồn tại một $\gamma_l > 0$ sao cho $\sum_k |a_{k,l}| \leq \gamma_l$. Kí hiệu $(\tilde{A}_{m,n})$ là dãy kép gồm các tổng kép riêng của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)}|a_{k,l}|$ và kí hiệu $p_0 = max\{k_0,l_0\}$.

Khi đó,

$$\tilde{A}_{p,p} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}|a_{k,l}| = \sum_{k=k_0}^{p}\sum_{l=l_0}^{p}|a_{k,l}| + \sum_{k=1}^{p_0-1}\sum_{l=1}^{p}|a_{k,l}| + \sum_{l=1}^{p_0-1}\sum_{k=p_0}^{p}|a_{k,l}|$$

$$\leq \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p_0-1}\beta_k + \sum_{l=1}^{p_0-1}\gamma_l \text{ với } p \in \mathbb{N} \text{ với } p \geq p_0.$$

Điều này ngụ ý rằng dãy đường chéo $(\tilde{A}_{p,p})$ sẽ bị chặn, và, do đó, từ Kết quả 1.4), dãy kép tăng đơn điệu $(\tilde{A}_{m,n})$ sẽ bị chặn. Như vậy, từ Kết quả 2.5), $(\tilde{A}_{m,n})$ sẽ hội tụ, nghĩa là, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. □

Kết quả trên cũng sẽ được sử dụng lại trong mục **3. Các phép thử hội tụ cho các chuỗi kép** để thu được một số phép thử về tính hội tụ tuyệt đối của một chuỗi kép.

Nhận xét rằng cả hai điều kiện (i) và (ii) trong Kết quả 2.9) đều cần thiết để mô tả tính hội tụ tuyệt đối. Chẳng hạn, nếu chúng ta kí hiệu $a_{k,1} = 1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $a_{k,l} = 0$ với mọi $(k,l) \geq (1,2)$ thì điều kiện (i) sẽ được thỏa mãn với $k_0 = 1$ và $l_0 = 2$, nhưng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ không hội tụ (tuyệt đối), bởi vì $A_{m,n} = m$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Mặt khác, nếu chúng ta kí hiệu $a_{k,l} = 1/(k+l)^2$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ thì điều kiện (ii) sẽ được thỏa mãn, nhưng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ không hội tụ (tuyệt đối). Điều này cũng cho thấy rằng không có điều kiện nào trong số các điều kiện (i) và (ii) trong Kết quả 2.9) ngụ ý điều kiện còn lại.

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng một số kết quả đối với các chuỗi kép hội tụ với các số hạng không âm vẫn có giá trị đối với các chuỗi kép hội tụ tuyệt đối.

Kết quả 2.10.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ tuyệt đối.

Khi đó, các khẳng định sau sẽ được thỏa mãn.

(i) Dãy kép $(A_{m,n})$ gồm các tổng kép riêng của nó sẽ bị chặn.

(ii) Mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột đều hội tụ tuyệt đối, và

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}.$$

(iii) Chuỗi đường chéo $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ tương ứng sẽ hội tụ tuyệt đối, và

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}.$$

Chứng minh kết quả 2.10.

Với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $A_{m,n}$ và $\tilde{A}_{m,n}$ lần lượt là các tổng kép riêng thứ (m,n) của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$, và kí hiệu A và $\tilde{A}$ lần lượt là các tổng kép tương ứng.

Bây giờ, khẳng định (i) sẽ được suy ra từ Kết quả 2.5), bởi vì $|A_{m,n}| \le \tilde{A}_{m,n}$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, trong khi khẳng định (ii) được suy ra từ Kết quả 2.9) và Định lí Fubini (Kết quả 2.3).

Để chứng minh khẳng định (iii), kí hiệu $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ và $\sum_{j=1}^{\infty} d_j$ lần lượt là các chuỗi đường chéo tương ứng với các chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$, và, với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu C_n và D_n lần lượt là các tổng riêng thứ n tương ứng. Từ Kết quả 2.7), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $D_n \to \tilde{A}$. Nhưng do $|c_j| \le d_j$ với mọi $j \in \mathbb{N}$ và dãy (D_n) bị chặn nên chúng ta nhận thấy rằng dãy (C_n) sẽ bị chặn, và, do đó, chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Bây giờ, chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $|A_{n,n} - C_n| \le |\tilde{A}_{n,n} - D_n|$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $\tilde{A}_{n,n} \to \tilde{A}$ và, ngoài ra, $D_n \to \tilde{A}$ nên chúng ta nhận thấy rằng các dãy $(A_{n,n})$ và (C_n) sẽ có cùng giới hạn, nghĩa là, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, như đã tuyên bố. □

Chúng ta có thể nhận thấy rằng một chuỗi kép có thể phân kỳ ngay cả khi chuỗi đường chéo tương ứng hội tụ tuyệt đối.

Tính hội tụ vô điều kiện

Khái niệm về sự hội tụ của một chuỗi kép được phát triển trong bài viết này phụ thuộc vào thứ tự mà các số hạng được tính tổng, hoặc nói một cách chính xác hơn, vào cách mà các tổng kép riêng được hình thành. Nói một cách đại khái, chúng ta đã "tính tổng theo các hình chữ nhật". Chúng ta đã chỉ ra trong Kết quả 2.10) rằng, đối với một chuỗi hội tụ tuyệt đối, việc "tính tổng theo các đường chéo" cũng sẽ dẫn đến tổng kép như vậy. Khái niệm về sự hội tụ vô điều kiện được định nghĩa dưới đây là sự mở rộng của ý tưởng cho rằng sự tồn tại của một tổng kép phải độc lập với cách hình thành của các tổng kép riêng. Một số tác giả thường coi đây như là định nghĩa về sự hội tụ của một chuỗi kép. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy rằng khái niệm có vẻ khác biệt này, trên thực tế, tương đương với tính hội tụ tuyệt đối.

Với mục đích này, chúng ta sẽ nói rằng một dãy (S_n) gồm các tập con của $\mathbb{N}^2$ là ***vét cạn*** nếu S_n là hữu hạn và $S_n \subseteq S_{n+1}$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$, và $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{N}^2$.

Chẳng hạn, nếu chúng ta kí hiệu $S_n = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n$ và $l \leq n\}$ với $n \in \mathbb{N}$ thì rõ ràng (S_n) là một dãy các tập con vét cạn của $\mathbb{N}^2$.

Chúng ta sẽ nói một chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là ***hội tụ vô điều kiện*** nếu tồn tại một số thực $A \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi dãy vét cạn (S_n) gồm các tập con của $\mathbb{N}^2$, giới hạn

$$lim_{n\to\infty} \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$$

tồn tại và bằng với A.

Trong trường hợp này, A được gọi là ***tổng kép vô điều kiện của*** $\boldsymbol{\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}}$.

Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng nếu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ là các chuỗi kép hội tụ vô điều kiện, với A và B là các tổng kép vô điều kiện của chúng, thì $\sum\sum_{(k,l)}(a_{k,l} + b_{k,l})$ và $\sum\sum_{(k,l)}(ra_{k,l})$, với mọi $r \in \mathbb{R}$, cũng vậy, và, ngoài ra, tổng kép vô điều kiện của chúng lần lượt là $A + B$ và rA.

Chúng ta sẽ chỉ ra dưới đây rằng, đối với một chuỗi kép với các số hạng không âm, khái niệm hội tụ và hội tụ vô điều kiện là tương đương với nhau. Kết quả này có thể được xem như là sự tổng quát hóa của Kết quả 2.7).

Kết quả 2.11.

Một chuỗi kép với các số hạng không âm sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu nó hội tụ. Trong trường hợp này, tổng kép của nó sẽ trùng với tổng kép vô điều kiện của nó.

Chứng minh kết quả 2.11.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép với $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$,và, với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $A_{m,n}$ là tổng kép riêng thứ (m,n) của nó.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ vô điều kiện và kí hiệu A là tổng kép vô điều kiện của nó. Xét $S_n = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n$ và $l \leq n\}$ và $A_n = \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ với $n \in \mathbb{N}$. Do (S_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của $\mathbb{N}^2$ nên chúng ta nhận thấy rằng $A_n \to A$ khi $n \longrightarrow \infty$. Như vậy, từ Kết quả 2.7), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ và tổng kép của nó là A.

Ngược lại, giả sử chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ và A là tổng kép của nó. Từ Kết quả 2.5), dãy kép $(A_{m,n})$ bị chặn và, ngoài ra, $A = sup\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$. Giả sử (S_n) là một dãy vét cạn bất kì gồm các tập con của $\mathbb{N}^2$, và kí hiệu $A_n = \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, dãy (A_n) sẽ tăng đơn điệu. Ngoài ra, do mỗi S_n đều hữu hạn nên $A_n \leq A_{r,s}$ với một $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ nào đó, và, do đó, $A_n \leq A$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, (A_n) hội tụ và $lim_{n\to\infty} A_n = sup\{A_p : p \in \mathbb{N}\} \leq A$. Mặt khác, do $\bigcup_{p=1}^{\infty} S_p = \mathbb{N}^2$ nên, với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, tồn tại một số tự nhiên $p \in \mathbb{N}$ sao cho $(k,l) \in S_p$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với $(k,l) \leq (m,n)$, và, do đó, $A_{m,n} \leq A_p$. Điều này chỉ ra rằng $sup\{A_p : p \in \mathbb{N}\} = sup\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = A$. Như vậy, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ vô điều kiện và tổng kép vô điều kiện của nó là A. □

Để thu được một dạng tương tự của đặc trưng nêu trong Kết quả 2.11) cho các chuỗi kép có các số hạng với dấu hỗn hợp, chúng ta sẽ cần đến kết quả phụ trợ sau đây.

Kết quả 2.12.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ vô điều kiện.

Khi đó, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\sum_{(k,l)\in S}\sum |a_{k,l}| \leq \alpha \text{ với mọi tập con hữu hạn } S \text{ của } \mathbb{N}^2.$$

Chứng minh kết quả 2.12.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\left|\sum\sum_{(k,l)\in S} a_{k,l}\right| \leq \beta$ với mọi tập con hữu hạn S của $\mathbb{N}^2$. Giả sử, trong giây lát, khẳng định của chúng ta không được thỏa mãn. Do tập $\mathbb{N}^2$ là đếm được nên chúng ta có thể tìm được các $(k_1, l_1), (k_2, l_2), \dots$ trong $\mathbb{N}^2$ sao cho $\mathbb{N}^2 = \{(k_j, l_j): j \in \mathbb{N}\}$. Kí hiệu $D_n = \{(k_j, l_j): j = 1, \dots, n\}$ với $n \in \mathbb{N}$. Kí hiệu $U_1 = D_1$. Khi đó, tồn tại một tập con hữu hạn T_1 của $\mathbb{N}^2$ sao cho $\left|\sum\sum_{(k,l)\in T_1} a_{k,l}\right| \geq 1 + |a_{k_1,l_1}|$, và, với mỗi $n \geq 2$, tồn tại một tập con hữu hạn T_n của $\mathbb{N}^2$ sao cho

$$\left|\sum_{(k,l)\in T_n}\sum a_{k,l}\right| \geq n + \sum_{(k,l)\in U_n}\sum |a_{k,l}| \text{ ,trong đó } U_n = D_n \cup T_1 \cup .. \cup T_{n-1}.$$

Kí hiệu $S_n = T_n \cup U_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng (S_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của $\mathbb{N}^2$. Nếu, với $n \in \mathbb{N}$, chúng ta kí hiệu $V_n = S_n / T_n$ thì $V_n \subseteq U_n$, và

$$\left|\sum_{(k,l)\in S_n}\sum a_{k,l}\right| = \left|\sum_{(k,l)\in T_n}\sum a_{k,l} + \sum_{(k,l)\in V_n}\sum a_{k,l}\right| \geq \left|\sum_{(k,l)\in T_n}\sum a_{k,l}\right| - \sum_{(k,l)\in U_n}\sum |a_{k,l}| \geq n.$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ sẽ không tồn tại, mâu thuẫn. Điều này chỉ ra rằng sẽ tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bất đẳng thức đã nêu ở phần đầu của phép chứng minh.

Bây giờ, với mọi tập con hữu hạn S cho trước của $\mathbb{N}^2$, nếu chúng ta kí hiệu $S^+ = \{(k,l) \in S: a_{k,l} \geq 0\}$ và $S^- = \{(k,l) \in S: a_{k,l} \leq 0\}$ thì

$$\sum_{(k,l)\in S}\sum |a_{k,l}| = \left|\sum_{(k,l)\in S^+}\sum a_{k,l}\right| + \left|\sum_{(k,l)\in S^-}\sum a_{k,l}\right| \leq 2\beta.$$

Chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn khi kí hiệu $\alpha = 2\beta$. □

Kết quả 2.13.

Một chuỗi kép sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu nó hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh kết quả 2.13.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ vô điều kiện. Từ Kết quả 2.12), các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ sẽ bị chặn, và, do đó, từ Kết quả 2.5), chúng ta có thể nhận thấy rằng $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ sẽ hội tụ, nghĩa là, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

Ngược lại, giả sử $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ tuyệt đối. Với mỗi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l}^+$ và $a_{k,l}^-$ như trong phép chứng minh của Kết quả 2.8). Khi đó, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^+$ và $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^-$ đều là các chuỗi kép hội tụ với các số hạng không âm, và, do đó, từ Kết quả 2.11), cả hai đều hội tụ vô điều kiện. Do $a_{k,l} = a_{k,l}^+ - a_{k,l}^-$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ vô điều kiện. □

Từ quan điểm của các Kết quả 2.8), Kết quả 2.11) và Kết quả 2.13), chúng ta nhận thấy rằng một chuỗi kép hội tụ vô điều kiện sẽ luôn hội tụ và tổng kép vô điều kiện của nó sẽ bằng với tổng kép của nó. Tuy nhiên, do tồn tại một chuỗi hội tụ có điều kiện nên chúng ta nhận thấy rằng một chuỗi kép hội tụ sẽ không nhất thiết phải hội tụ vô điều kiện.

3. Các phép thử hội tụ cho các chuỗi kép

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ thảo luận một số phép thử thực tế để kiểm tra tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi kép. Chúng ta đã gặp qua phép thử đơn giản nhất trong số đó, cụ thể là Phép thử $(k,l) -$ số hạng. Trong phần tiếp theo, đầu tiên chúng ta sẽ xem xét các phép thử cho tính hội tụ tuyệt đối và sau đó là các phép thử cho tính hội tụ có điều kiện.

Các phép thử cho tính hội tụ tuyệt đối

Phép thử đơn giản sau đây thường được sử dụng để xác định tính hội tụ tuyệt đối của một chuỗi kép.

Kết quả 3.1. (Phép thử so sánh cho các chuỗi kép)

Giả sử $a_{k,l}$ và $b_{k,l}$ là các số thực sao cho $|a_{k,l}| \leq b_{k,l}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó, nếu $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ hội tụ thì chuỗi $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối, và

$$\left|\sum_{(k,l)}\sum a_{k,l}\right| \leq \sum_{(k,l)}\sum b_{k,l}.$$

Chứng minh kết quả 3.1.

Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ là một chuỗi kép hội tụ.

Với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta sẽ có

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \left|a_{k,l}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}.$$

Do $b_{k,l} \ge 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ sẽ bị chặn trên (Kết quả 2.5). Từ bất đẳng thức thứ hai nêu ở trên, điều tương tự cũng xảy ra đối với $\sum\sum_{(k,l)}\left|a_{k,l}\right|$. Ngoài ra, do $\left|a_{k,l}\right| \ge 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên, từ Kết quả 2.5), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\sum\sum_{(k,l)}\left|a_{k,l}\right|$ sẽ hội tụ, nghĩa là, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Các bất đẳng thức trên cũng ngụ ý rằng $\left|\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\right| \le \sum\sum_{(k,l)}\left|a_{k,l}\right| \le \sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$. □

Kết quả trên có thể được phát biểu lại như sau: "**Nếu $\left|a_{k,l}\right| \le b_{k,l}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ và $\sum\sum_{(k,l)}\left|a_{k,l}\right|$ phân kỳ đến ∞ thì $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ cũng vậy**". Chuỗi hình học kép và chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/k^p l^q$, trong đó $p, q \in \mathbb{R}$, sẽ thường rất hữu ích khi sử dụng Phép thử so sánh cho các chuỗi kép.

Chẳng hạn,

(i) Với $p \in \mathbb{R}$ và $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = 1/(k^p + l^p)$. Giả sử $p > 2$ và kí hiệu $b_{k,l} = 1/2(kl)^{p/2}$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, $\left|a_{k,l}\right| \le b_{k,l}$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ (điều này suy ra từ bất đẳng thức AM - GM). Do đó, từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ. Kế tiếp, giả sử $p \le 2$ và kí hiệu $b_{k,l} = 1/(k+l)^2$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, $\left|a_{k,l}\right| \ge 1/(k^2 + l^2) \ge b_{k,l}$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.

(ii) Với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = (2^k 5^l + kl^2)/(3^k 7^l + k^3 + l^4)$. Kí hiệu $b_{k,l} = (2/3)^k (5/7)^l$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Do $kl^2 < 2^k 5^l$ và $k^3 + l^4 > 0$ nên chúng ta nhận thấy rằng

$$\left|a_{k,l}\right| < \frac{2^k 5^l + 2^k 5^l}{3^k 7^l} = 2b_{k,l} \text{ với mọi } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Như vậy, từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ.

(iii) Kí hiệu $a_{k,l} = 1/(1 + k + l + kl + k^3 l^4)^{1/2}$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Kí hiệu $b_{k,l} = 1/k^{3/2} l^2$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, $\left|a_{k,l}\right| \le b_{k,l}$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Như vậy, từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ (tuyệt đối).

Bây giờ chúng ta cũng sẽ xem xét các dạng tương tự của các phép thử so sánh giới hạn, phép thử căn và phép thử tỉ lệ cho các chuỗi kép. Đầu tiên, chúng ta sẽ nhắc lại một số kết quả cơ bản đã đạt được trong trường hợp một chuỗi (đơn) để dễ tham khảo. Đối với các phép chứng minh, chẳng hạn, chúng ta có thể tham khảo phép chứng minh của các Kết quả 2.4), Kết quả 2.5) và Kết quả 2.5) của Kết quả 2.6) của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**".

Kết quả 1.

Giả sử (a_k) là một dãy gồm các số thực.

(i) Giả sử $a_k > 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Giả sử (b_k) là một dãy gồm các số thực dương sao cho $a_k/b_k \to r$ khi $k \longrightarrow \infty$, trong đó $r \in \mathbb{R}$ với $r \neq 0$. Khi đó, chuỗi $\sum_k a_k$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu chuỗi $\sum_k b_k$ hội tụ.

(ii) Nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ sao cho $|a_k|^{1/k} \leq \alpha$ với mọi k đủ lớn thì chuỗi $\sum_k a_k$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Nếu $|a_k|^{1/k} \geq 1$ với vô số số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ thì chuỗi $\sum_k a_k$ sẽ phân kỳ.

(iii) Nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ sao cho $|a_{k+1}| \leq \alpha |a_k|$ với mọi k đủ lớn thì chuỗi $\sum_k a_k$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Nếu $|a_{k+1}| \geq |a_k| > 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì chuỗi $\sum_k a_k$ sẽ phân kỳ.

Kết quả sau đây sẽ dẫn chúng ta đến phép thử so sánh giới hạn đối với các chuỗi kép, phép thử này thường dễ sử dụng hơn so với phép thử so sánh.

Kết quả 3.2.

Giả sử $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ là các dãy kép sao cho $b_{k,l} \neq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Giả sử mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với cả $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ đều hội tụ tuyệt đối và $a_{k,l}/b_{k,l} \to r$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$, trong đó $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(i) Nếu $b_{k,l} > 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ hội tụ và $r \in \mathbb{R}$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

(ii) Nếu $a_{k,l} > 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ và $r \neq 0$ thì $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh kết quả 3.2.

(i) Giả sử $b_{k,l} > 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ và chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ hội tụ. Giả sử $r \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{k,l}/b_{k,l} \to r$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$. Khi đó, tồn tại một $(k_0,l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho, với mọi $(k,l) \geq (k_0,l_0)$,

$$(r-1)b_{k,l} < a_{k,l} < (r+1)b_{k,l}, \text{ và, do đó, } |a_{k,l}| < max\{|r-1|,|r+1|\}|b_{k,l}|.$$

Ngoài ra, từ Kết quả 2.5), tồn tại một số thực $\beta > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l} \leq \beta$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Như vậy, với mọi $(m,n) \geq (k_0,l_0)$, chúng ta sẽ có

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n}|a_{k,l}| < max\{|r-1|,|r+1|\}\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} b_{k,l} \leq max\{|r-1|,|r+1|\}\beta.$$

Từ Kết quả 2.9), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

(ii) Giả sử $a_{k,l} > 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ và $r \neq 0$. Khi đó, giới hạn của $b_{k,l}/a_{k,l}$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$ sẽ là $1/r$ hoặc 0 tùy theo $r \in \mathbb{R}$ hoặc $r = \pm\infty$. Bằng cách hoán đổi $a_{k,l}$ và $b_{k,l}$ trong khẳng định (i) nêu ở trên, kết quả mong muốn sẽ được suy ra ngay sau đó. □

Kết quả 3.3. (Phép thử so sánh giới hạn cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ là các dãy kép gồm các số thực dương. Giả sử mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với cả $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ đều hội tụ, và

$$lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} \frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} = r, \text{trong đó } r \in \mathbb{R} \text{ và } r \neq 0.$$

Khi đó,

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \sum\sum_{(k,l)} b_{k,l} \text{ hội tụ.}$$

Chứng minh kết quả 3.3.

Chiều ⇒ được suy ra từ khẳng định (ii) của Kết quả 3.2), trong khi chiều ngược lại ⇐ được suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 3.2). □

Nhận xét rằng, trong phép thử so sánh giới hạn cho các chuỗi kép, điều kiện $r \in \mathbb{R}$ và $r \neq 0$ là không thể bị loại bỏ.

Để thấy rằng $r = 0$ sẽ không hoạt động, kí hiệu

$$a_{k,l} = \frac{1}{k^2 l^2} \text{ và } b_{k,l} = \frac{1}{(k+l)^2} \text{ với } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Khi đó, $lim_{l\to\infty}\left(a_{k,l}/b_{k,l}\right) = 1/k^2$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$ và $lim_{k\to\infty}\left(a_{k,l}/b_{k,l}\right) = 1/l$ với mỗi $l \in \mathbb{N}$.

Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 1), chúng ta nhận thấy rằng mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với cả $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ đều hội tụ.

Tuy nhiên, $lim_{l\to\infty}\left(a_{k,l}/b_{k,l}\right) = 0$ và chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ, trong khi chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ phân kỳ.

Bằng cách hoán đổi các định nghĩa của $a_{k,l}$ và $b_{k,l}$, chúng ta nhận thấy rằng $r = \infty$ cũng sẽ không hoạt động.

Chẳng hạn,

(i) Kí hiệu $a_{k,l} = sin(1/k^2 l^2)$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Xét dãy kép $b_{k,l} = 1/k^2 l^2$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, và quan sát thấy rằng $\left(a_{k,l}/b_{k,l}\right) \to 1$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$. Do $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ hội tụ nên Kết quả 3.3) chứng tỏ rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ.

(ii) Kí hiệu $a_{k,l} = sin(1/(k+l)^2)$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Xét dãy kép $b_{k,l} = 1/(k+l)^2$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, và quan sát thấy rằng $\left(a_{k,l}/b_{k,l}\right) \to 1$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$. Do $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ phân kỳ nên Kết quả 3.3) cũng chứng tỏ rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ.

Kết quả sau đây sẽ đưa chúng ta đến Phép thử căn Cauchy, hoặc đơn giản là phép thử căn, là một trong những phép thử cơ bản nhất để xác định tính hội tụ tuyệt đối của một chuỗi kép.

Trong phần tiếp theo của bài viết, chúng ta sẽ nói rằng một mệnh đề sẽ đúng bất cứ khi nào "**cả $\boldsymbol{k}$ và $\boldsymbol{l}$ đủ lớn**", nghĩa là, tồn tại một $(k_0,l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho mệnh đề đúng với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với $(k,l) \geq (k_0,l_0)$.

Kết quả 3.4.

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực.

(i) Giả sử mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ tuyệt đối.

Khi đó, nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ sao cho $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \leq \alpha$ bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

(ii) Nếu, với mỗi $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$, tồn tại một $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $(k,l) \geq (k_0, l_0)$ và $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.

Chứng minh kết quả 3.4.

(i) Giả sử tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ và một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \leq \alpha$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

Khi đó, $\alpha \geq 0$ và

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n}|a_{k,l}| < \left(\sum_{k=k_0}^{m}\alpha^k\right)\left(\sum_{l=l_0}^{n}\alpha^l\right) \leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \text{ với } (m,n) \geq (k_0, l_0).$$

Như vậy, khẳng định (i) sẽ được suy ra trực tiếp từ Kết quả 2.9).

(ii) Giả sử, với mỗi $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$, tồn tại một $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $(k,l) \geq (k_0, l_0)$ và $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$, nghĩa là, $|a_{k,l}| \geq 1$. Như vậy, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty, \infty)$. Từ Phép thử $(k,l) -$ số hạng (Kết quả 2.1), chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ. □

Kết quả 3.5. (Phép thử căn cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực sao cho $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \rightarrow a$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty, \infty)$, trong đó $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Khi đó, nếu mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ tuyệt đối và $a < 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Mặt khác, nếu $a > 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ và tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các chuỗi hàng và các chuỗi cột cũng sẽ phân kỳ.

Chứng minh kết quả 3.5.

Khẳng định đầu tiên được suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 3.4) với $\alpha = (1+a)/2$. Kế tiếp, giả sử $a > 1$. Khi đó, tồn tại một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Khẳng định (ii) của Kết quả 3.4) cho thấy rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ. Ngoài ra, với mỗi $k \geq k_0$ cố định cho trước, chúng ta nhận thấy rằng $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $l \longrightarrow \infty$, và, do đó, chuỗi hàng $\sum_l a_{k,l}$ sẽ phân kỳ. Tương tự, với mỗi $l \geq l_0$ cố định cho trước, chuỗi cột $\sum_k a_{k,l}$ sẽ phân kỳ. □

Kết quả sau đây sẽ dẫn chúng ta đến phép thử tỉ lệ D'Alembert, hay đơn giản là phép thử tỉ lệ, là một phép thử cơ bản khác để xác định tính hội tụ tuyệt đối của một chuỗi kép.

Kết quả 3.6.

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực.

(i) Giả sử mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ tuyệt đối. Khi đó, nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ sao cho $|a_{k,l+1}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn hoặc $|a_{k+1,l}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

(ii) Nếu $min\{|a_{k,l+1}|, |a_{k+1,l}|\} \geq |a_{k,l}| > 0$ bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ và tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các chuỗi hàng và các chuỗi cột cũng sẽ phân kỳ.

Chứng minh kết quả 3.6.

(i) Giả sử tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ và $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{k,l+1}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $\alpha > 0$.

Kế tiếp,

$$|a_{k,l}| \leq \alpha |a_{k,l-1}| \leq \cdots \leq \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}| \text{ với mọi } (k,l) \geq (k_0, l_0).$$

Do $0 < \alpha < 1$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\sum_{l=1}^{n} \alpha^l \leq 1/(1-\alpha)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, do chuỗi $\sum_k a_{k,l_0}$ hội tụ tuyệt đối nên sẽ tồn tại một số thực $\beta > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{m} |a_{k,l_0}| \leq \beta$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Do đó,

$$\sum_{k=k_0}^{m} \sum_{l=l_0}^{n} |a_{k,l}| \leq \frac{\alpha^{-l_0}\beta}{1-\alpha} \text{ với mọi } (k,l) \geq (k_0, l_0).$$

Như vậy, từ Kết quả 2.9), $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Lập luận tương tự vẫn đúng nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha < 1$ và một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{k+1,l}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

(ii) Giả sử tồn tại một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $min\{|a_{k,l+1}|, |a_{k+1,l}|\} \geq |a_{k,l}| > 0$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

Khi đó,

$$|a_{k,l}| \geq |a_{k,l-1}| \geq \cdots \geq |a_{k,l_0}| \geq |a_{k-1,l_0}| \geq \cdots \geq |a_{k_0,l_0}| > 0 \text{ với mọi } (k,l) \geq (k_0, l_0).$$

Do $a_{k_0,l_0} \neq 0$ nên chúng ta nhận thấy rằng $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty, \infty)$, và, hơn nữa, với mỗi $k \geq k_0$ cố định cho trước, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $l \to \infty$ và, với mỗi $l \geq l_0$ cố định cho trước, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $k \to \infty$. Kết quả mong muốn sẽ được suy ra từ Phép thử $(k,l) -$ số hạng cho các chuỗi kép (Kết quả 2.1) và Phép thử $k -$ số hạng cho các chuỗi (đơn) (Kết quả 2.1) của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**"). □

Kết quả 3.7. (Phép thử tỉ lệ cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực khác không sao cho $|a_{k,l+1}|/|a_{k,l}| \to a$ hoặc $|a_{k+1,l}|/|a_{k,l}| \to \tilde{a}$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$, trong đó $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Khi đó, nếu mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ tuyệt đối và $a < 1$ hoặc $\tilde{a} < 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Mặt khác, nếu $a > 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ và tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các chuỗi hàng cũng phân kỳ, trong khi nếu $\tilde{a} > 1$ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ và tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các chuỗi cột cũng phân kỳ.

Chứng minh kết quả 3.7.

Khẳng định đầu tiên là hệ quả trực tiếp của khẳng định (i) của Kết quả 3.6) với $\alpha = (1+a)/2$ hoặc $\alpha = (1+\tilde{a})/2$ tùy theo $a < 1$ hoặc $\tilde{a} < 1$.

Bây giờ, giả sử $a > 1$. Khi đó, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha > 1$ và một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $|a_{k,l+1}|/|a_{k,l}| \geq \alpha$ với mọi $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

Khi đó,

$$|a_{k,l}| \geq \alpha |a_{k,l-1}| \geq \cdots \geq \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}| \text{ với mọi } (k,l) \geq (k_0, l_0).$$

Với mọi $(k_1, l_1) \in \mathbb{N}^2$ cho trước, kí hiệu $k = max\{k_0, k_1\}$. Do $\alpha > 1$ và $a_{k,l_0} \neq 0$ nên chúng ta luôn có thể tìm được $l \geq max\{l_0, l_1\}$ sao cho $\alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| \geq 1$. Khi đó, $k \geq k_1, l \geq l_1$, và $|a_{k,l}| \geq 1$. Điều này chỉ ra rằng $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$, và, do đó, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ (điều này suy ra từ Phép thử $(k,l)-$ số hạng). Ngoài ra, với mỗi $k \geq k_0$ cố định cho trước, chúng ta sẽ có $|a_{k,l}| \geq \alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| \geq |a_{k,l_0}| > 0$ với mọi $l \geq l_0$, và, do đó, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ khi $l \to \infty$, nghĩa là $\sum_k a_{k,l}$ sẽ phân kỳ. Lập luận tương tự vẫn đúng nếu $\tilde{a} > 1$. □

Một biến thể khác của phép thử so sánh liên quan đến tỉ lệ của các số hạng liên tiếp của hai chuỗi kép, được gọi là **Phép thử so sánh tỉ lệ**, được đưa ra như sau:

“**Giả sử $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ là các dãy kép sao cho $b_{k,l} > 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.**

(i) Giả sử $|a_{k+1,l}|b_{k,l} \leq |a_{k,l}|b_{k+1,l}$ và $|a_{k,l+1}|b_{k,l} \leq |a_{k,l}|b_{k,l+1}$ bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn. Nếu $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ hội tụ, và mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)}|a_{k,l}|$ đều hội tụ thì $\sum\sum_{(k,l)}|a_{k,l}|$ sẽ hội tụ.

(ii) Giả sử $|a_{k+1,l}|b_{k,l} \geq |a_{k,l}|b_{k+1,l} > 0$ bất cứ khi nào k đủ lớn và $l \in \mathbb{N}$, và $|a_{k,l+1}|b_{k,l} \geq |a_{k,l}|b_{k,l+1} > 0$ bất cứ khi nào l đủ lớn và $k \in \mathbb{N}$. Nếu $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ phân kỳ thì $\sum\sum_{(k,l)}|a_{k,l}|$ sẽ phân kỳ.”

Bằng cách áp dụng phép thử này cho chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/(kl)^p$, trong đó $p > 0$, chúng ta sẽ thu được một dạng tương tự của phép thử Raabe (Kết quả 2.6) của bài viết “**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**”) cho các chuỗi kép:

“Giả sử $\left(a_{k,l}\right)$ là một dãy kép gồm các số thực không âm.

(i) Nếu tồn tại một số thực $p \in \mathbb{R}$ với $p > 1$ sao cho

$$\boldsymbol{a_{k,l+1} \leq \left(1 - \frac{p}{l}\right) a_{k,l}} \text{ và } \boldsymbol{a_{k+1,l} \leq \left(1 - \frac{p}{k}\right) a_{k,l}},$$

bất cứ khi nào cả k và l đủ lớn, và, hơn nữa, nếu mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ.

(ii) Nếu tồn tại một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boldsymbol{a_{k,l+1} \geq \left(1 - \frac{1}{l}\right) a_{k,l} > 0} \text{ với mọi } \boldsymbol{l} \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn},$$

hoặc nếu tồn tại một số tự nhiên $l \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boldsymbol{a_{k+1,l} \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) a_{k,l} > 0} \text{ với mọi } \boldsymbol{k} \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn},$$

thì $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ.”

Nó đặc biệt hữu ích khi $\left|a_{k,l+1}\right| / \left|a_{k,l}\right| \to 1$ và $\left|a_{k+1,l}\right| / \left|a_{k,l}\right| \to 1$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$. Cuối cùng, chúng ta nhận xét rằng có một phép thử rất hữu ích cho tính hội tụ của một chuỗi kép gồm các số hạng không âm, được gọi là **Phép thử tích phân cho các chuỗi kép**. Nó được dựa trên khái niệm “tích phân kép suy rộng” và sẽ được đưa ra trong Kết quả 5.3).

Chẳng hạn,

(i) Nếu giới hạn a trong Phép thử căn cho các chuỗi kép (Kết quả 3.5) bằng 1 thì chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ có thể hội tụ tuyệt đối hoặc cũng có thể phân kỳ. Điều tương tự cũng sẽ xảy ra nếu các giới hạn a và $\tilde{a}$ trong Phép thử tỉ lệ cho các chuỗi kép (Kết quả 3.7) bằng 1. Chẳng hạn, kí hiệu $a_{k,l} = 1/k^2 l^2$ và $b_{k,l} = 1/(k+l)^2$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với cả $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ đều hội tụ (tuyệt đối) và tất cả các giới hạn nêu ở trên đều bằng 1 cho cả hai trường hợp. Tuy nhiên, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ (tuyệt đối), nhưng $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ phân kỳ.

(ii) Giả sử $p > 0$ và, với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = (k+l)^p / 2^k 3^l$. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ (tuyệt đối). Do $\left|a_{k,l+1}\right| / \left|a_{k,l}\right| \to 1/3$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$ nên Kết quả 3.7) chỉ ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ (tuyệt đối). Ngoài ra, kết luận tương tự vẫn đúng bằng cách lưu ý rằng $\left|a_{k+1,l}\right| / \left|a_{k,l}\right| \to 1/2$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$.

(iii) Với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = (k+l)!/2^k 3^l$. Do $a_{k,l+1}/a_{k,l} \to \infty$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$ nên Kết quả 3.7) chỉ ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ. Ngoài ra, chúng ta quan sát thấy rằng $a_{k,l} \geq (k!/2^k)(l!/3^l) \geq 1$ với $(k,l) \geq (4,7)$, và, do đó, Phép thử $(k,l) -$ số hạng chỉ ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ phân kỳ.

(iv) Với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $a_{k,l} = (k+l)!/(k+l)^{k+l}$. Do $(1 + (1/n))^n \to e$ khi $n \to \infty$, trong đó e là cơ số của logarit tự nhiên, nên chúng ta nhận thấy rằng $a_{k,l+1}/a_{k,l} \to 1/e$ khi $(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)$. Ngoài ra, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, chúng ta sẽ có $lim_{l\to\infty} a_{k,l+1}/a_{k,l} = 1/e$, và, với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, chúng ta sẽ có $lim_{k\to\infty} a_{k+1,l}/a_{k,l} = 1/e$. Do $e > 1$ nên Kết quả 3.7) và khẳng định (iii) của Kết quả 1) chỉ ra rằng $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ hội tụ (tuyệt đối).

(v) Với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu

$$a_{k,l} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+l}} \text{ nếu } k+l \text{ chẵn,} \\ \dfrac{1}{3^{k+l}} \text{ nếu } k+l \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Do $|a_{k,l+1}|/|a_{k,l}| = |a_{k+1,l}|/|a_{k,l}| = 2^{k+l}/3^{k+l+1} \le 4/27$ nếu $k+l$ chẵn, và $|a_{k,l+1}|/|a_{k,l}| = |a_{k+1,l}|/|a_{k,l}| = 3^{k+l}/2^{k+l+1} \ge 27/16$ nếu $k+l$ lẻ nên Phép thử tỉ lệ cho các chuỗi kép (Kết quả 3.7) không thể áp dụng cho ví dụ này. Với cùng một lý do, Kết quả 3.6) cũng không thể áp dụng cho ví dụ này. Ngoài ra, do dãy kép $\left(|a_{k,l}|^{1/(k+l)}\right)$ không hội tụ nên Phép thử căn cho các chuỗi kép (Kết quả 3.5) không thể áp dụng cho ví dụ này. Tuy nhiên, do $|a_{k,l}|^{1/l}$ và $|a_{k,l}|^{1/k}$ nhỏ hơn hoặc bằng $1/2$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta nhận thấy rằng mỗi chuỗi hàng cũng như mỗi chuỗi cột tương ứng với $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ đều hội tụ (tuyệt đối). Hơn nữa, $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \le \frac{1}{2} < 1$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, và, do đó, Kết quả 3.4) có thể áp dụng cho ví dụ này. Như vậy, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ (tuyệt đối).

Các phép thử cho tính hội tụ có điều kiện

Bây giờ, chúng ta sẽ chuyển sang khảo sát các phép thử cho tính hội tụ có điều kiện (nghĩa là, không tuyệt đối). Chúng đều dựa trên kết quả cơ bản sau đây, nó có thể được so sánh với công thức tính tổng từng phần đã biết, công thức này phát biểu rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ với $n \ge 2$, a_k và b_k là các số thực với $k = 1, \dots, n$, và kí hiệu $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ thì

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

(Kết quả 2.7) của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**")

Kết quả 3.8. (Công thức tính tổng kép từng phần)

Giả sử cho trước một $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ với $(m,n) \ge (2,2)$. Với $k = 1, \dots, m$ và $l = 1, \dots, n$, giả sử $a_{k,l}$ và $b_{k,l}$ là các số thực, và kí hiệu $B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}$.

Khi đó,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} b_{k,l} = a_{m,n} B_{m,n} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \left(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1}\right) B_{k,l}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left(a_{k,n} - a_{k+1,n}\right) B_{k,n} + \sum_{l=1}^{n-1} \left(a_{m,l} - a_{m,l+1}\right) B_{m,l}.$$

Chứng minh kết quả 3.8.

Nhận thấy rằng do $b_{k,l} = B_{k,l} - B_{k-1,l} - B_{k,l-1} + B_{k-1,l-1}$ (với quy ước thông thường là $B_{0,0} = 0$, $B_{0,l} = 0$ và $B_{k,0} = 0$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$) nên chúng ta sẽ có

$$\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l} - \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k-1,l} - \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l-1} + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k-1,l-1}.$$

Như vậy,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l} - \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n} a_{k+1,l}B_{k,l} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k,l+1}B_{k,l} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k+1,l+1}B_{k,l}.$$

Bằng cách viết tổng kép $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l}$ trong đẳng thức trên lại dưới dạng

$$a_{m,n}B_{m,n} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k,l}B_{k,l} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{k,n}B_{k,n} + \sum_{l=1}^{n-1} a_{m,l}\,B_{m,l},$$

và đối chiếu các số hạng thích hợp, chúng ta sẽ thu được đẳng thức mong muốn. □

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét một phép thử quan trọng cho tính hội tụ có điều kiện của một chuỗi kép tương tự như phép thử Dirichlet cho các chuỗi (đơn) (Kết quả 2.8) của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**").

Kết quả 3.9. (Phép thử Dirichlet cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ là các dãy kép gồm các số thực sao cho

(i) $(a_{k,l})$ là song đơn điệu,

(ii) Với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy xác định bởi $k \longmapsto a_{k,l}$ là đơn điệu, và, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, dãy xác định bởi $l \longmapsto a_{k,l}$ là đơn điệu.

(iii) Các giới hạn $lim_{k\to\infty}a_{k,k}$, $lim_{k\to\infty}a_{k,1}$, $lim_{l\to\infty}a_{1,l}$ đều tồn tại và bằng 0.

(iv) Dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ bị chặn.

Khi đó, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}b_{k,l}$ hội tụ và dãy kép gồm các tổng kép riêng của nó sẽ bị chặn.

Chứng minh kết quả 3.9.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $a_{k,l} \to 0$ khi $(k,l) \to (\infty,\infty)$ và $(a_{k,l})$ bị chặn. Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Từ giả thiết (iii), tồn tại một số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$(k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ với } (k,l) \geq (k_0,k_0) \Rightarrow |a_{k,k}| < \varepsilon, |a_{k,1}| < \varepsilon, |a_{1,l}| < \varepsilon.$$

Xét một $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với $k \geq k_0$ và $l \leq k$. Từ giả thiết (ii), $a_{k,1} \leq a_{k,l} \leq a_{k,k}$ hoặc $a_{k,1} \geq a_{k,l} \geq a_{k,k}$. Do cả $a_{k,1}$ và $a_{k,k}$ đều nằm trong khoảng mở $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $a_{k,l} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Tương tự, nếu $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với $l \geq k_0$ và $k \leq l$ thì $a_{k,l} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Như vậy, với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ với $k \geq k_0$ hoặc $l \geq k_0$, chúng ta sẽ có $|a_{k,l}| < \varepsilon$. Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên điều này ngụ ý rằng $a_{k,l} \to 0$ khi $(k,l) \to (\infty, \infty)$. Ngoài ra, bằng cách kí hiệu $\varepsilon = 1$ và $\alpha = max\{|a_{k,l}|: 1 \leq k, l \leq k_0\}$, chúng ta sẽ thu được $|a_{k,l}| \leq max\{1, \alpha\}$, điều này chứng tỏ rằng $(a_{k,l})$ sẽ bị chặn.

Kế tiếp, chúng ta sẽ kiểm tra từng số hạng ở vế phải của Công thức tính tổng kép từng phần (Kết quả 3.8). Nhắc lại rằng số hạng đầu tiên là $a_{m,n}B_{m,n}$, trong đó $B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Do $(B_{m,n})$ bị chặn nên, từ giả thiết (iv), tồn tại một số thực $\beta > 0$ sao cho $|B_{m,n}| \leq \beta$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Do $a_{m,n} \to 0$ khi $(m,n) \to \infty$ nên điều này chỉ ra rằng $a_{m,n}B_{m,n} \to 0$ khi $(m,n) \to \infty$.

Đối với số hạng thứ hai, lưu ý từ giả thiết (i), dãy kép $(a_{k,l})$ là song đơn điệu, và, do đó, với mọi $(m,n) \geq (2,2)$,

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\left|(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})B_{k,l}\right| \leq \beta\left|\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})\right|$$

$$= \beta|a_{1,1} - a_{m,1} - a_{1,n} + a_{m,n}|,$$

như chúng ta đã thấy trong phép chứng minh của Kết quả 2.4).

Do dãy kép $(a_{m,n})$ bị chặn nên, từ Kết quả 2.5), chúng ta dễ dàng suy ra rằng dãy kép $\sum\sum_{(k,l)}(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})B_{k,l}$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Từ khẳng định (i) của Kết quả 2.10), tổng kép riêng của nó sẽ bị chặn, và, từ Kết quả 2.8), nó sẽ hội tụ.

Kí hiệu C là tổng kép của nó.

Đối với số hạng thứ ba, lưu ý rằng do, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy $k \mapsto a_{k,n}$ là đơn điệu nên, với mọi $(m,n) \geq (2,2)$, chúng ta dễ dàng suy ra rằng

$$\left|\sum_{k=1}^{m-1}(a_{k,n} - a_{k+1,n})B_{k,n}\right| \leq \beta\left|\sum_{k=1}^{m-1}(a_{k,n} - a_{k+1,n})\right| = \beta|a_{1,n} - a_{m,n}|.$$

Do $a_{1,n} \to 0$ khi $n \to \infty$ và $a_{m,n} \to 0$ khi $(m,n) \to (\infty, \infty)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $|a_{1,n} - a_{m,n}| \to 0$, và, do đó, $\sum_{k=1}^{m-1}(a_{k,n} - a_{k+1,n})B_{k,n} \to 0$ khi $(m,n) \to (\infty, \infty)$. Tương tự, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\sum_{l=1}^{n-1}(a_{m,l} - a_{m,l+1})\,B_{m,l} \to 0$ khi $(m,n) \to (\infty, \infty)$.

Từ Công thức tính tổng kép từng phần, chúng ta sẽ thu được

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\,b_{kl} \to 0 + C + 0 + 0 = C \text{ khi } (m,n) \to (\infty, \infty).$$

Như vậy, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}b_{kl}$ sẽ hội tụ. Ngoài ra, do mỗi số hạng trong số bốn số hạng ở vế phải của Công thức tính tổng kép từng phần đều bị chặn nên chúng ta nhận thấy rằng dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} b_{kl}$ sẽ bị chặn. □

Một dãy kép $(a_{m,n})$ sẽ được gọi là ***hội tụ đều*** nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau:

(i) $(a_{m,n})$ hội tụ,

(ii) Với mỗi $m \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy $(a_{m,n})$ hội tụ,

(iii) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy $(a_{m,n})$ hội tụ.

Một chuỗi kép sẽ được gọi là ***hội tụ đều*** nếu dãy kép gồm các tổng kép riêng của nó hội tụ đều.

Một kết quả tương tự, tương tự như Phép thử Abel cho các chuỗi (đơn), được gọi là **Phép thử Abel cho các chuỗi kép**, được đưa ra như sau:

"**Giả sử $(a_{k,l})$ và $(b_{k,l})$ là các dãy kép gồm các số thực thỏa mãn bốn điều kiện sau:**

(i) $(a_{k,l})$ song đơn điệu,

(ii) Với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy xác định bởi $k \mapsto a_{k,l}$ là đơn điệu, và, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, dãy xác định bởi $l \mapsto a_{k,l}$ là đơn điệu,

(iii) Các dãy $(a_{k,k}), (a_{k,1}), (a_{1,l})$ đều bị chặn,

(iv) Chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} b_{kl}$ hội tụ đều.

Khi đó, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} b_{kl}$ sẽ hội tụ đều."

Đối với dạng khái quát hóa của cả hai kết quả này, tương tự như Phép thử Dedekind cho các chuỗi (đơn), được gọi là **Phép thử Dedekind cho các chuỗi kép**, được đưa ra như sau:

"**Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực thỏa mãn hai điều kiện sau:**

(i) $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1}|$ hội tụ,

(ii) Cả $\sum_k |a_{k,1} - a_{k+1,1}|$ và $\sum_l |a_{1,l} - a_{1,l+1}|$ đều hội tụ.

Khi đó, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} b_{kl}$ sẽ hội tụ đều bất cứ khi nào chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} b_{kl}$ hội tụ đều.

Ngoài ra, nếu điều kiện sau:

(iii) $lim_{k\to\infty} a_{k,l} = 0$, với mỗi $l \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, và $lim_{l\to\infty} a_{k,l} = 0$, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước,

cũng được thỏa mãn thì chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} b_{kl}$ sẽ hội tụ đều bất cứ khi nào dãy kép gồm các tổng kép riêng của $\sum\sum_{(k,l)} b_{kl}$ bị chặn."

Kết quả 3.10. (Phép thử Leibniz cho các chuỗi kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) nêu trong Kết quả 3.9).

Khi đó, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)}(-1)^{k+l}a_{k,l}$ hội tụ.

Chứng minh kết quả 3.10.

Kí hiệu $b_{k,l} = (-1)^{k+l}$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ và $B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}$ với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó,

$$B_{m,n} = \left(\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\right) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } m \text{ hoặc } n \text{ là chẵn,} \\ 1 \text{ nếu cả } m \text{ và } n \text{ đều lẻ.} \end{cases}$$

Do đó, dãy kép $(B_{m,n})$ sẽ bị chặn. Như vậy, Kết quả 3.9) chỉ ra rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)}(-1)^{k+l}a_{k,l}$ sẽ hội tụ. □

Trong kết quả tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng các đẳng thức lượng giác sau đây

$$sin\frac{B}{2}\sum_{j=1}^{p} sin(A+jB) = sin\left(A+\frac{p+1}{2}B\right)sin\frac{pB}{2},$$

$$sin\frac{B}{2}\sum_{j=1}^{p} cos(A+jB) = cos\left(A+\frac{p+1}{2}B\right)sin\frac{pB}{2},$$

trong đó $A, B \in \mathbb{R}$ và $p \in \mathbb{N}$. Chúng có thể dễ dàng suy ra bằng cách biểu diễn lại các vế trái dưới dạng các tổng lồng nhau.

Kết quả 3.11. (Phép thử hội tụ cho các chuỗi lượng giác kép)

Giả sử $(a_{k,l})$ là một dãy kép gồm các số thực thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) nêu trong Kết quả 3.9). Kí hiệu θ và φ là các số thực sao cho cả hai đều không phải là một bội số nguyên của 2π.

Khi đó, các chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}sin(k\theta + l\varphi) \text{ và } \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}cos(k\theta + l\varphi)$$

đều hội tụ.

Chứng minh kết quả 3.11.

Với $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, kí hiệu $B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} sin(k\theta + l\varphi)$ và $C_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} cos(k\theta + l\varphi)$.

Nhận thấy rằng do cả θ và φ đều không phải là một bội số nguyên của 2π nên chúng ta sẽ có $sin(\theta/2) \neq 0$ và $sin(\varphi/2) \neq 0$.

Bằng cách sử dụng các đẳng thức lượng giác đã đề cập ở trên, chúng ta sẽ thu được

$$B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{sin\left(k\theta + \frac{n+1}{2}\varphi\right) sin\frac{n\varphi}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{sin\frac{n\varphi}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}} \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi + \frac{m+1}{2}\varphi\right) sin\frac{m\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}},$$

$$C_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{cos\left(k\theta + \frac{n+1}{2}\varphi\right) sin\frac{n\varphi}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{sin\frac{n\varphi}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}} \frac{cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi + \frac{m+1}{2}\varphi\right) sin\frac{m\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$|B_{m,n}| \leq \frac{1}{\left|sin\frac{\theta}{2} sin\frac{\varphi}{2}\right|} \text{ và } |C_{m,n}| \leq \frac{1}{\left|sin\frac{\theta}{2} sin\frac{\varphi}{2}\right|} \text{ với mọi } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Bằng cách chọn $b_{k,l} = sin(k\theta + l\varphi)$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ trong Kết quả 3.9), chúng ta nhận thấy rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} sin(k\theta + l\varphi)$ sẽ hội tụ. Tương tự, chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} cos(k\theta + l\varphi)$ cũng sẽ hội tụ. □

Chúng ta có thể nhận thấy rằng Kết quả 3.10) là một trường hợp đặc biệt của Kết quả 3.11) với $\theta = \varphi = \pi$.

Nhận thấy rằng nếu cả θ và φ đều là các bội số nguyên của 2π thì $sin(k\theta + l\varphi) = 0$ và $cos(k\theta + l\varphi) = 1$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, và, do đó, mỗi số hạng của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} sin(k\theta + l\varphi)$ đều bằng 0, trong khi chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} cos(k\theta + l\varphi)$ chỉ là chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Kế tiếp, giả sử một trong hai số θ và φ là một bội số nguyên của 2π còn cái kia thì không. Giả sử $\theta = 2p\pi$ với một số $p \in \mathbb{Z}$ nào đó và $\varphi \neq 2q\pi$ với mọi $q \in \mathbb{Z}$. Khi đó, $sin(k\theta + l\varphi) = sin(l\varphi)$ và $cos(k\theta + l\varphi) = cos(l\varphi)$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tùy thuộc vào cách chọn dãy kép $(a_{k,l})$ (thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) nêu trong Kết quả 3.9) và cách lựa chọn φ, các chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} sin(l\varphi)$ và $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} cos(l\varphi)$ có thể hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hoặc phân kỳ.

Chẳng hạn,

Giả sử $p > 0$ và $a_{k,l} = 1/(k+l)^p$ với $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó, dãy kép $(a_{k,l})$ sẽ thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) nêu trong Kết quả 3.9).

Như vậy, từ Phép thử Leibniz cho các chuỗi kép, chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{(k+l)^p}$$

sẽ hội tụ.

Trên thực tế, chuỗi kép này sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $p > 2$, hội tụ có điều kiện nếu $0 < p \leq 2$.

Mặt khác, Phép thử $(k,l) -$ số hạng chỉ ra rằng nó sẽ phân kỳ nếu $p \leq 0$.

Ngoài ra, nếu θ và φ là các số thực sao cho cả hai số đó đều không phải là một bội số nguyên của 2π thì Kết quả 3.11) chứng tỏ rằng các chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{sin(k\theta + l\varphi)}{(k+l)^p} \text{ và } \sum\sum_{(k,l)} \frac{cos(k\theta + l\varphi)}{(k+l)^p}$$

đều hội tụ.

4. Chuỗi lũy thừa kép

Với các số nguyên không âm k và l, kí hiệu $c_{k,l} \in \mathbb{R}$.

Chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} c_{k,l} x^k y^l \text{ ,trong đó } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

được gọi là một ***chuỗi lũy thừa kép*** (xung quanh $(0,0)$) và, với $(k,l) \geq (0,0)$, số thực $c_{k,l}$ được gọi là ***hệ số thứ*** $\boldsymbol{(k,l)}$ của nó.

Từ giờ trở đi, khi chúng ta xem xét một chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$, chúng ta sẽ luôn ngầm giả định rằng chỉ số (k,l) thay đổi trên tập tất cả các cặp số nguyên không âm (và không vượt quá $\mathbb{N}^2$) và các hệ số $c_{k,l}$ đều nằm trong $\mathbb{R}$.

Với $(m,n) \geq (0,0)$, tổng kép riêng thứ (m,n) của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ xác định bởi

$$A_{m,n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} c_{k,l} x^k y^l.$$

Rõ ràng là nếu $(x,y) = (0,0)$ thì, với bất kỳ sự lựa chọn nào của các hệ số $c_{k,l}$, chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ sẽ hội tụ và tổng kép của nó luôn bằng $c_{0,0}$. Ngoài ra, nếu $x \in \mathbb{R}$ và $y = 0$ thì chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi lũy thừa (đơn) $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,0} x^k$ hội tụ; và, tương tự, nếu $x = 0$ và $y \in \mathbb{R}$ thì chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi lũy thừa (đơn) $\sum_{l=0}^{\infty} c_{0,l} y^l$ hội tụ. Mặt khác, nếu tồn tại một $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $c_{k,l} = 0$ bất cứ khi nào $k > k_0$ hoặc $l > l_0$ thì chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, và tổng kép của nó sẽ bằng

$$\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{l=0}^{l_0} c_{k,l} x^k y^l.$$

Một cách tổng quát hơn, nếu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ thì chuỗi kép

$$\sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} c_{k,l} (x - x_0)^k (y - y_0)^l$$

sẽ được gọi một ***chuỗi lũy thừa kép xung quanh*** $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$.

Tính hội tụ của nó có thể được khảo sát bằng cách đặt $\tilde{x} = x - x_0$ và $\tilde{y} = y - y_0$, và xét chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}\tilde{x}^k\tilde{y}^l$.

Các tập điển hình của các điểm (x, y) trong $\mathbb{R}^2$ mà tại đó một chuỗi lũy thừa kép hội tụ sẽ được minh họa bởi các ví dụ sau đây.

Chẳng hạn,

(i) Kí hiệu $c_{k,l} = k^k l^l$ với $(k, l) \geq (0,0)$, và giả sử $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nếu $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thì $|c_{k,l}x^k y^l| > 1$ với mọi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $k > 1/|x|$ và $l > 1/|y|$, và, do đó, từ Phép thử $(k, l) -$ số hạng (Kết quả 2.1), chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ phân kỳ. Tương tự, nếu $x \neq 0$ và $y = 0$ thì chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,0}x^k$ sẽ phân kỳ, và nếu $x = 0$ và $y \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{l=0}^{\infty} c_{0,l}y^l$ cũng sẽ phân kỳ. Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $(x, y) = (0,0)$.

(ii) Kí hiệu $c_{k,l} = 1/k!\,l!$ với $(k, l) \geq (0,0)$. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Giả sử a và b là các số thực khác không, và kí hiệu $c_{k,l} = a^k b^l$ với $(k, l) \geq (0,0)$. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $|ax| < 1$ và $|by| < 1$, nghĩa là, $|x| < 1/|a|$ và $|y| < 1/|b|$.

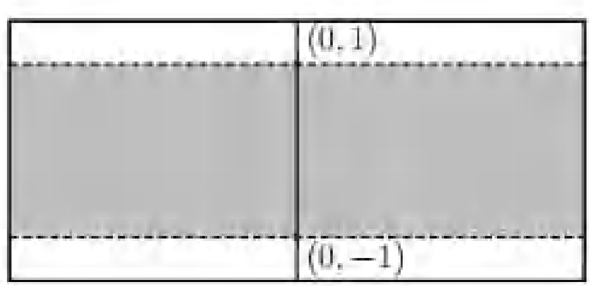
(iv) Với $(k, l) \geq (0,0)$, kí hiệu

$$c_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } k = 1, \\ 0 \text{ nếu } k \neq 1. \end{cases}$$

Khi đó, với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, các tổng kép riêng của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ được xác định bởi $A_{0,n}(x, y) = 0$ với mọi $n \geq 0$, và

$$A_{m,n}(x, y) = x \sum_{l=0}^{n} y^l \text{ với } (m, n) \geq (1,0).$$

Như vậy, chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $x = 0$ hoặc $|y| < 1$, trong khi nó sẽ phân kỳ nếu $x \neq 0$ và $|y| \geq 1$. Điều này chỉ ra rằng tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mà tại đó chuỗi lũy thừa kép này hội tụ là dải ngang $\mathbb{R} \times (-1,1)$ cùng với trục y. Trên tập này, sự hội tụ là tuyệt đối.



Hình vẽ minh họa tập hội tụ: Dải ngang $\mathbb{R} \times (-1,1)$ và trục y.

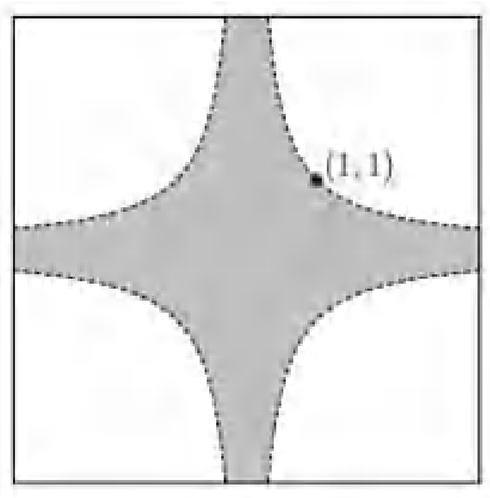
(v) Với $(k,l) \geq (0,0)$, kí hiệu

$$c_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } k = l, \\ 0 \text{ nếu } k \neq l. \end{cases}$$

Khi đó, với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, các tổng kép riêng của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ sẽ được xác định bởi

$$A_{m,n}(x,y) = \sum_{p=0}^{min\{m,n\}} (xy)^p \text{ với } (m,n) \geq (0,0).$$

Bằng cách sử dụng thực tế là chuỗi hình học $\sum_p a^p$ sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $|a| < 1$, trong khi nó sẽ phân kỳ nếu $|a| \geq 1$, chúng ta nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $|xy| < 1$, trong khi nó sẽ phân kỳ nếu $|xy| \geq 1$. Như vậy, tập các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mà tại đó chuỗi lũy thừa kép này hội tụ chính là miền $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\}$ bị giới hạn bởi các đường hyperbol chữ nhật $xy = 1$ và $xy = -1$. Trên tập này, sự hội tụ là tuyệt đối.



Hình vẽ minh họa tập hội tụ: Miền bị giới hạn bởi các đường hyperbol chữ nhật $xy = 1$ và $xy = -1$.

(vi) Kí hiệu $c_{k,l} = (k+l)!/k!\,l!$ với $(k,l) \geq (0,0)$, và giả sử $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

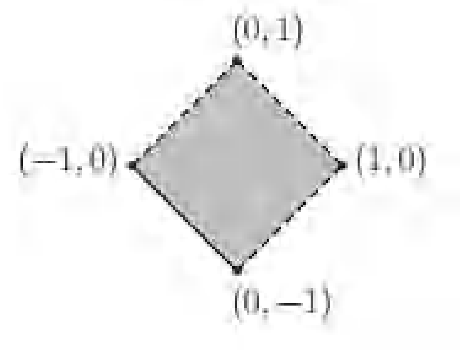
Như trong phép chứng minh của khẳng định (iii) của Kết quả 2.7),

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |c_{k,l}||x|^k|y|^l \leq \sum_{j=0}^{m+n}\sum_{k=0}^{j} \frac{j!\,|x|^k|y|^{j-k}}{k!\,(j-k)!} = \sum_{j=0}^{m+n} (|x|+|y|)^j \text{ với } (m,n) \geq (0,0),$$

trong khi

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} |c_{k,l}||x|^k|y|^l \geq \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \frac{j!\,|x|^k|y|^{j-k}}{k!\,(j-k)!} = \sum_{j=0}^{n} (|x|+|y|)^j \text{ với } n \geq 0.$$

Như vậy, chúng ta có thể nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x| + |y| < 1$. Điều này chỉ ra rằng tập các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mà tại đó chuỗi lũy thừa kép này hội tụ tuyệt đối là miền hình thoi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$. Hóa ra tập mà trên đó chuỗi kép hội tụ là miền hình thoi này cùng với đoạn thẳng nối $(-1,0)$ và $(0,-1)$.



Hình vẽ minh họa tập hội tụ: Miền hình thoi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$

cùng với đoạn thẳng nối $(-1,0)$ và $(0,-1)$.

Các ví dụ trên cho thấy rằng rằng tập tất cả các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mà tại đó chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ hội tụ (tuyệt đối) có thể có tính chất rất đa dạng. Điều này hoàn toàn trái ngược với sự hội tụ của một chuỗi lũy thừa (đơn) trong đó tập các điểm tương ứng của $\mathbb{R}$ luôn là một khoảng. , chúng ta sẽ nhắc lại kết quả sau đây (Kết quả 3.1 của bài viết “**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**”) cho các chuỗi lũy thừa (đơn).

Kết quả 1. (Bổ đề Abel)

Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$ và $c_k \in \mathbb{R}$ với $k \geq 0$.

Khi đó, nếu tập $\{c_k x_0^k : k \geq 0\}$ bị chặn thì chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbb{R}$ với $|x| < |x_0|$.

Điều này, như trong Kết quả 3.2) của bài viết “**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**”, sẽ dẫn chúng ta đi đến kết quả cơ bản sau đây về sự hội tụ (tuyệt đối) của một chuỗi lũy thừa (đơn).

Kết quả 2.

Một chuỗi lũy thừa $\sum_k c_k x^k$ bất kỳ hoặc sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc sẽ tồn tại một số thực không âm duy nhất r sao cho chuỗi này sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbb{R}$ với $|x| < r$ và phân kỳ với mọi $x \in \mathbb{R}$ với $|x| > r$.

Bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa sẽ được định nghĩa là ∞ trong trường hợp đầu và nó sẽ được định nghĩa là số thực không âm duy nhất r với các tính chất đã nêu trong trường hợp sau. Bây giờ, chúng ta sẽ cố gắng thu được các kết quả tương tự của các kết quả trên cho các chuỗi lũy thừa kép.

Kết quả 4.1. (Bổ đề Abel cho các chuỗi kép)

Giả sử $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và $c_{k,l} \in \mathbb{R}$ với $(k,l) \geq (0,0)$.

Khi đó, nếu tập $\left\{c_{k,l} x_0^k y_0^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$ bị chặn thì chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < |x_0|$ và $|y| < |y_0|$.

Chứng minh kết quả 4.1.

Nếu $x_0 = 0$ hoặc $y_0 = 0$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử $x_0 \neq 0$ và $y_0 \neq 0$. Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\left|c_{k,l}x_0^k y_0^l\right| \leq \alpha$ với mọi $(k,l) \geq (0,0)$. Với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cho trước với $|x| < |x_0|$ và $|y| < |y_0|$, kí hiệu $\beta = |x|/|x_0|$ và $\gamma = |y|/|y_0|$.

Khi đó,

$$\left|c_{k,l}x^k y^l\right| = \left|c_{k,l}x_0^k y_0^l\right|\beta^k\gamma^l \leq \alpha\beta^k\gamma^l \text{ với mọi } (k,l) \geq (0,0).$$

Nhận thấy rằng do $\beta < 1$ và $\gamma < 1$ nên chuỗi hình học kép $\sum\sum_{(k,l)} \beta^k\gamma^l$ sẽ hội tụ. Từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép, chúng ta dễ dàng suy ra rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ tuyệt đối. □

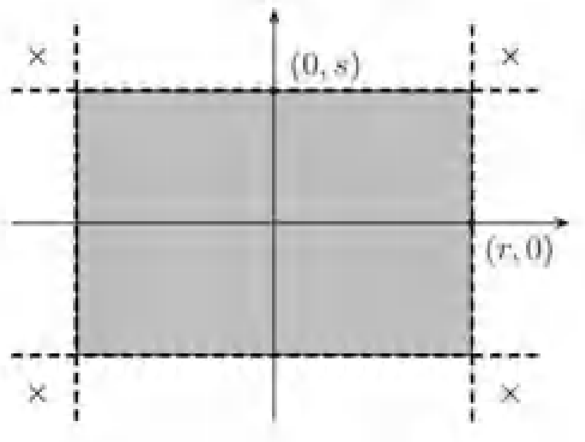
Kết quả 4.2.

Một chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ bất kỳ hoặc sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hoặc sẽ tồn tại các số thực không âm r và s sao cho chuỗi kép này sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < r$ và $|y| < s$, trong khi tập $\left\{c_{k,l}x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$ sẽ không bị chặn với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| > r$ và $|y| > s$.

Chứng minh kết quả 4.2.

Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, kí hiệu $C_{x,y} = \left\{c_{k,l}x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$. Xét tập $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : C_{x,y} \text{ bị chặn}\right\}$. Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, chúng ta lưu ý rằng $(x,y) \in E$ khi và chỉ khi $(|x|,|y|) \in E$. Nếu $E = \mathbb{R}^2$ thì, với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được một $(x_0,y_0) \in E$ sao cho $|x| < |x_0|$ và $|y| < |y_0|$. Do tập C_{x_0,y_0} bị chặn nên, từ Bổ đề Abel cho các chuỗi kép (Kết quả 4.1), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Kế tiếp, giả sử $E \neq \mathbb{R}^2$. Tập E khác rỗng bởi vì $(0,0) \in E$. Từ Kết quả 2.3.2) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**", E sẽ có một điểm biên $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$. Kí hiệu $r = |x^*|$ và $s = |y^*|$. Giả sử $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < r$ và $|y| < s$. Từ định nghĩa của một điểm biên, chúng ta sẽ có thể tìm được một dãy điểm nào đó trong E hội tụ tới (x^*,y^*), và, do đó, chúng ta luôn có thể tìm được một điểm $(x_0,y_0) \in E$ sao cho $|x| < |x_0|$ và $|y| < |y_0|$. Như vậy, từ Bổ đề Abel cho các chuỗi kép (Kết quả 4.1), chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ sẽ hội tụ tuyệt đối. Mặt khác, giả sử $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| > r$ và $|y| > s$. Từ định nghĩa của một điểm biên, chúng ta sẽ có thể tìm được một dãy điểm nào đó trong $\mathbb{R}^2/E$ hội tụ tới (x^*,y^*), và, do đó, chúng ta luôn có thể tìm được một điểm $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2/E$ sao cho $|x_1| < |x|$ và $|y_1| < |y|$. Bây giờ, do tập C_{x_1,y_1} không bị chặn nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng tập $C_{x,y}$ cũng không bị chặn. Điều này chứng minh sự tồn tại của các số thực không âm r và s với các tính chất mong muốn. □

Nếu một chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ thì chúng ta sẽ nói rằng ***song bán kính hội tụ*** của nó là (∞,∞); trường hợp ngược lại, một cặp các số thực không âm (r,s) sẽ được gọi là một ***song bán kính hội tụ*** của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ nếu chuỗi kép này hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < r$ và $|y| < s$, trong khi tập $C_{x,y} = \left\{c_{k,l}x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$ không bị chặn với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| > r$ và $|y| > s$. Hiện tượng này sẽ được minh họa chi tiết hơn trong hình vẽ bên dưới. Ngoài ra, Kết quả 4.2) cũng chỉ ra rằng mọi chuỗi lũy thừa kép đều có một song bán kính hội tụ.



Hình vẽ minh họa trường hợp (r, s) là một song bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$: nó sẽ hội tụ tuyệt đối trong hình chữ nhật được tô bóng, trong khi tập các số hạng của nó không bị chặn trong bốn hình tứ giác được đánh dấu bởi $\times$.

Nhận xét rằng,

(i) Nếu r là bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa (đơn) thì chuỗi lũy thừa đó sẽ phân kỳ với mọi $x \in \mathbb{R}$ với $|x| > r$, trong khi nếu (r, s) là một song bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép thì tập $C_{x,y} = \{c_{k,l}x^k y^l : (k, l) \geq (0,0)\}$ sẽ không bị chặn với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| > r$ và $|y| > s$. Ngoài ra, tính không bị chặn của tập $C_{x,y}$ không thể được thay thế bởi tính phân kỳ của chuỗi lũy thừa kép tại (x, y).

Chẳng hạn, kí hiệu $c_{0,0} = 1$, $c_{k,0} = c_{0,l} = 1$ với mọi $k, l \in \mathbb{N}$, $c_{1,1} = -1$, $c_{k,1} = c_{1,l} = -1/2$ với mọi $k, l \geq 2$, và $c_{k,l} = 0$ với mọi $(k, l) \geq (2,2)$.

Khi đó, nếu chúng ta kí hiệu $A_{m,n}(x, y)$ là tổng kép riêng thứ (m, n) của $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ thì $A_{0,0}(x, y) = 1$ và, với $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, chúng ta sẽ có

$$A_{m,0}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} x^k,$$

$$A_{0,n}(x, y) = \sum_{l=0}^{n} y^l,$$

$$A_{m,n}(x, y) = 1 + \left(1 - \frac{y}{2}\right)\sum_{k=1}^{m} x^k + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\sum_{l=1}^{n} y^k.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < 1$ và $|y| < 1$, và nó sẽ phân kỳ đến ∞ với mọi (x, y) với $x \geq 1$ và $y \geq 1$ ngoại trừ $(x, y) = (2,2)$. Tại $(2,2)$, hiện tượng đặc biệt sau sẽ xảy ra: Do $c_{k,0}2^k 2^0 = 2^k$ và $c_{0,l}2^0 2^l = 2^l$ với mọi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta nhận thấy rằng tập $C_{2,2}$ sẽ không bị chặn, nhưng do $A_{m,n}(2,2) = 1$ với mọi $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ nên chúng ta nhận thấy rằng chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tới 1 tại $(2,2)$. Điều này chỉ ra rằng không thể tồn tại các số thực không âm r và s sao cho chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| < r$ và $|y| < s$, và nó sẽ phân kỳ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x| > r$ và $|y| > s$.

(ii) Bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa (đơn) là duy nhất. Tuy nhiên, một chuỗi lũy thừa kép có thể có một vài song bán kính hội tụ khác nhau.

Chẳng hạn, kí hiệu $c_{k,l} = 1$ nếu $k = l$ và $c_{k,l} = 0$ nếu $k \neq l$ với $(k,l) \geq (0,0)$.

Khi đó, chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$ sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $|xy| < 1$. Mặt khác, nếu $|xy| > 1$ thì tập $C_{x,y} = \{x^k y^k : k \geq 0\}$ sẽ không bị chặn. Điều này chỉ ra rằng $(t, 1/t)$ là một song bán kính hội tụ với mỗi số thực dương t.

Như vậy, điều quan trọng nhất là chúng ta phải tìm tất cả các song bán kính hội tụ, hoặc nếu không, càng nhiều song bán kính hội tụ càng tốt, để có được một bức tranh đầy đủ hơn về hành vi hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép.

Nếu r là bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa (đơn) thì tập $(-r, r)$ sẽ được gọi là ***khoảng hội tụ*** của chuỗi lũy thừa. Nó là tập con mở lớn nhất của $\mathbb{R}$ mà chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối. Tương tự, ***miền hội tụ*** của một chuỗi lũy thừa kép được định nghĩa là tập tất cả các điểm $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm trong một hình vuông mở nào đó có tâm tại (x,y). Lưu ý rằng nếu D là miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép thì D sẽ là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và, ngoài ra, $(x,y) \in D$ khi và chỉ khi $(|x|,|y|) \in D$. Từ Phép thử so sánh cho các chuỗi kép và Bổ đề Abel cho các chuỗi kép, chúng ta dễ dàng suy ra điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sẽ nằm trong miền hội tụ của $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ khi và chỉ khi tập $\left\{c_{k,l} x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$ bị chặn với mọi (x,y) trong một hình vuông mở nào đó có tâm tại (x_0, y_0). Ngoài ra, chúng ta cũng dễ dàng suy ra rằng miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép sẽ rỗng khi và chỉ khi $(0,0)$ là một song bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa kép đó.

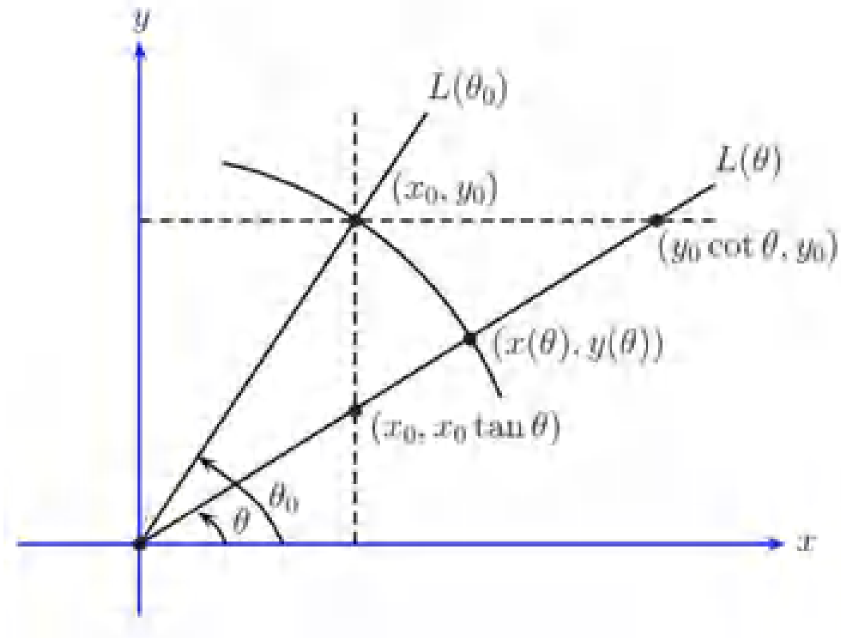
Giả sử $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ là một chuỗi lũy thừa kép, và D là miền hội tụ của nó. Giả sử $(0,0) \in D$, nhưng $D \neq \mathbb{R}^2$. Chúng ta sẽ mô tả ranh giới của các tập con D của $\mathbb{R}^2$.

Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, kí hiệu $C_{x,y} = \left\{c_{k,l} x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\right\}$. Từ Bổ đề Abel cho các chuỗi kép, với mỗi $\theta \in (0, \pi/2)$, tồn tại duy nhất một điểm $\big(x(\theta), y(\theta)\big)$ trên tia $L_\theta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x sin\theta = y cos\theta\}$ thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

(i) Chuỗi lũy thừa kép hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm (x,y) nằm trên đoạn thẳng mở nằm giữa $(0,0)$ và $\big(x(\theta), y(\theta)\big)$,

(ii) Tập $C_{x,y}$ không bị chặn với mỗi $(x,y) \in L_\theta$ với $x > x(\theta)$ và $y > y(\theta)$.

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng các hàm xác định bởi $\theta \mapsto x(\theta)$ và $\theta \mapsto y(\theta)$ từ $(0, \pi/2)$ đến $\mathbb{R}$ đều liên tục. Giả sử $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ và $(x_0, y_0) = \big(x(\theta_0), y(\theta_0)\big)$. Khi đó, chuỗi lũy thừa kép sẽ hội tụ tuyệt đối tại mỗi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $0 \leq x < x_0$ và $0 \leq y < y_0$, trong khi tập $C_{x,y}$ sẽ không bị chặn với mỗi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $x > x_0$ và $y > y_0$. Như vậy, với mọi $\theta \in (0, \pi/2)$, điểm $\big(x(\theta), y(\theta)\big)$ nằm trên đoạn thẳng đóng sẽ nằm giữa $(x_0, x_0 tan\theta)$ và $(y_0 cot\theta, y_0)$. Do các hàm tan và cot liên tục tại θ_0, $x_0 tan\theta_0 = y_0$ và $y_0 cot\theta_0 = x_0$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $x(\theta) \to x_0$ và $y(\theta) \to y_0$ khi $\theta \to \theta_0$. Điều này chứng tỏ tính liên tục tại θ_0. Như vậy, chúng ta sẽ thu được một đường cong liên tục phân định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa kép trong góc phần tư thứ nhất. Từ tính đối xứng, chúng ta cũng sẽ thu được các đường cong tương tự trong ba góc phần tư còn lại (ngoại trừ trục x và trục y).



Hình vẽ minh họa ranh giới của một miền hội tụ trong góc phần tư thứ nhất.

Trong bảng dưới đây, chúng ta sẽ thống kê lại các miền hội tụ và các song bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa kép đã được xem xét ở trên.

Chuỗi lũy thừa kép	Miền hội tụ	Song bán kính hội tụ
$\sum\sum_{(k,l)} k^k l^l x^k y^l$	$\emptyset$	$(0,0)$
$\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k!\,l!} x^k y^l$	$\mathbb{R}^2$	(∞, ∞)
$\sum\sum_{(k,l)} a^k b^l x^k y^l \ (a \neq 0, b \neq 0)$	$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \lvert x\rvert < \frac{1}{\lvert a\rvert} \text{ và } \lvert y\rvert < \frac{1}{\lvert b\rvert}\right\}$	$\left(r, \frac{1}{\lvert b\rvert}\right)$ với $0 \leq r \leq \frac{1}{\lvert a\rvert}$, $\left(\frac{1}{\lvert a\rvert}, s\right)$ với $0 \leq s \leq \frac{1}{\lvert b\rvert}$
$x \sum_{l=0}^{\infty} y^l$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \lvert y\rvert < 1\}$	$(r, 1)$ với $0 \leq r < \infty$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \lvert xy\rvert < 1\}$	$(t, 1/t)$ với $0 < t < \infty$
$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} x^k y^l$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \lvert x\rvert + \lvert y\rvert < 1\}$	$(t, 1-t)$ với $0 \leq t \leq 1$

Các ví dụ trên là điển hình và thể hiện nhiều hình dạng khác nhau mà một miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép có thể có. Ví dụ ở hàng áp chót của bảng trên cho thấy rằng một miền hội tụ D như vậy không nhất thiết phải là một tập con lồi của $\mathbb{R}^2$. Tuy nhiên, theo một kết quả của Fabry (1902), miền hội tụ của mọi chuỗi lũy thừa kép đều là một ***tập log - lồi***, nghĩa là, nó là một tập con mở D của $\mathbb{R}^2$ sao cho $\{(ln\lvert x\rvert, ln\lvert y\rvert) : (x,y) \in D \text{ và } xy \neq 0\}$ là một tập con lồi của $\mathbb{R}^2$.

Kết quả 4.3. (Fabry)

Giả sử D là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa kép $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$.

Khi đó, với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ và với mọi $t \in \mathbb{R}$ với $0 < t < 1$, chúng ta sẽ có $(|x_1|^t|x_2|^{1-t}, |y_1|^t|y_2|^{1-t}) \in D$. ($D$ được gọi là một ***tập log – lồi***)

Chuỗi Taylor kép và Chuỗi Taylor của một hàm hai biến

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) là một điểm trong của D và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm sao cho mọi đạo hàm riêng của f thuộc mọi cấp đều tồn tại và liên tục trên một lân cận vuông nào đó của (x_0, y_0).

Tương tự như với các chuỗi Taylor của các hàm một biến, chuỗi lũy thừa kép

$$\sum_{(k,l)}\sum \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}\frac{(y-y_0)^l}{l!}$$

sẽ được gọi là ***chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0)***.

Lưu ý rằng các hệ số của chuỗi lũy thừa kép này là

$$c_{k,l} = \frac{1}{k!\,l!}\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0) \text{ với } (k,l) \geq (0,0).$$

Chúng ta quan sát thấy rằng, với $n = 0,1,2, \ldots$, tổng riêng thứ n của chuỗi chéo $\sum_j c_j(x,y)$ tương ứng với chuỗi kép trên là

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k\geq 0 \\ k+l=j}} \sum_{l\geq 0} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}\frac{(y-y_0)^l}{l!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \frac{\partial^{j} f}{\partial x^k \partial y^{j-k}}(x_0, y_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}\frac{(y-y_0)^{j-k}}{(j-k)!},$$

trên thực tế đó là đa thức Taylor hai biến cấp n $P_n(x,y)$ của f xung quanh (x_0, y_0).

Với quan điểm này, chuỗi (đơn)

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y) \text{, trong đó } c_j(x,y) = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ k+l=j}} \sum_{l\geq 0} c_{k,l}(x-x_0)^k(y-y_0)^l \text{ với } j \geq 0,$$

sẽ được gọi là ***chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0)***.

Như vậy, chuỗi Taylor của một hàm hai biến chính là chuỗi chéo tương ứng với chuỗi Taylor kép của nó.

Một câu hỏi quan trọng mà chúng ta muốn xem xét đó là: “Liệu chuỗi Taylor kép (hoặc chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0)) có hội tụ (tuyệt đối) tại một điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cho trước hay không? Liệu tổng kép tương ứng (hoặc tổng tương ứng) có bằng với $f(x, y)$, với điều kiện $(x, y) \in D$?”. Nếu $(x, y) = (x_0, y_0)$ thì mỗi tổng kép riêng của chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) cũng như mỗi tổng riêng của chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) rõ ràng sẽ bằng với $f(x_0, y_0)$, và, do đó, câu hỏi của chúng ta có câu trả lời khẳng định nếu $(x, y) = (x_0, y_0)$. Tuy nhiên, có thể xảy ra trường hợp, với mỗi $(x, y) \in D/\{(x_0, y_0)\}$, cả chuỗi Taylor kép và chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) đều hội tụ nhưng không hội tụ tới $f(x, y)$.

Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & \text{nếu } (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Bằng cách xem xét hàm $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(0) = 0$, $g(t) = e^{-1/t^2}$ $(t \neq 0)$ và lưu ý rằng $g^{(k)}(0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, chúng ta có thể nhận thấy rằng

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = 0 \text{ với mọi } (k, l) \geq (0,0)$$

. Như vậy, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ cũng như chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ đều đồng nhất bằng 0 và không hội tụ đến $f(x, y)$ tại bất kỳ $(x, y) \neq (0,0)$.

Nếu chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) hội tụ tuyệt đối tại một điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thì, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.10), chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) cũng hội tụ tuyệt đối tại điểm (x, y). Nhưng chiều ngược lại lại không đúng.

Với $(x, y) \in D$ và với $n = 0,1,2, \ldots$, kí hiệu $R_n(x, y) = f(x, y) - P_n(x, y)$ và lưu ý rằng chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) sẽ hội tụ đến $f(x, y)$ khi và chỉ khi $R_n(x, y) \to 0$ khi $n \to \infty$. Kết quả sau đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}^2$ của chuỗi Taylor kép của một hàm và để quyết định xem nó có hội tụ về chính hàm đó hay không.

Kết quả 4.4.

Giả sử D là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$, và $(x_0, y_0) \in D$. Giả sử $f: D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng liên tục theo mọi cấp trên D, và tồn tại các số thực dương M_0, α_0, β_0 sao cho

$$\left| \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0) \right| \leq M_0 \alpha_0^k \beta_0^l \text{ với mọi } (k, l) \geq (0,0).$$

Khi đó, chuỗi Taylor kép của f và chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ngoài ra, cả hai chuỗi này đều hội tụ về $f(x, y)$, với điều kiện là đường thẳng L nối giữa (x_0, y_0) và (x, y) nằm trong D và tồn tại các số thực dương M, α, β sao cho

$$\left| \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| \leq M \alpha^k \beta^l \text{ với mọi } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in L \text{ và với mọi } (k, l) \geq (0,0).$$

Chứng minh kết quả 4.4.

Nhận thấy rằng do chuỗi hàm mũ kép

$$\sum_{(k,l)}\sum \frac{[\alpha_0(x-x_0)]^k}{k!}\frac{[\beta_0(y-y_0)]^l}{l!}$$

hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nên Phép thử so sánh cho các chuỗi kép cho thấy rằng chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0,y_0) sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Như vậy, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.10), chuỗi đường chéo tương ứng, cụ thể là chuỗi Taylor của f , cũng sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Kế tiếp, giả sử $(x,y)\in D$ sao cho đường thẳng L nối giữa (x_0,y_0) và (x,y) nằm trong D và tồn tại các số thực dương M,α,β sao cho

$$\left|\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(\tilde{x},\tilde{y})\right|\le M\alpha^k\beta^l \text{ với mọi } (\tilde{x},\tilde{y})\in L \text{ và với mọi } (k,l)\ge(0,0).$$

Khi đó, từ Dạng cổ điển của Công thức Taylor hai biến (Kết quả 3.3) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm nhiều biến**"), tồn tại một điểm $(c,d)\in L$ sao cho

$$R_n(x,y)=f(x,y)-P_n(x,y)=\sum_{\substack{k\ge0\ l\ge0\\k+l=n+1}}\sum\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^k\partial y^l}(c,d)\frac{(x-x_0)^k}{k!}\frac{(y-y_0)^l}{l!},$$

và, do đó,

$$\begin{aligned}|R_n(x,y)|&\le\sum_{\substack{k\ge0\ l\ge0\\k+l=n+1}}\sum M\frac{(\alpha|x-x_0|)^k}{k!}\frac{(\beta|y-y_0|)^l}{l!}\\&=M\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(\alpha|x-x_0|)^k}{k!}\frac{(\beta|y-y_0|)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\\&=\frac{M(\alpha|x-x_0|+\beta|y-y_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Điều này ngụ ý rằng $R_n(x,y)\to0$ khi $n\to\infty$. Như vậy, chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0,y_0) sẽ hội tụ đến $f(x,y)$ tại (x,y). Cuối cùng, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.10), sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0,y_0) tại (x,y) ngụ ý rằng tổng kép của nó cũng sẽ bằng $f(x,y)$. □

Chẳng hạn,

(i) Kí hiệu $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x<1 \text{ và } y<1\}$ và $f\colon D\to\mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$f(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Chúng ta nhận thấy rằng

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = k!\, l! \text{ với mọi } (k,l) \geq (0,0).$$

Như vậy, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ chính là chuỗi hình học kép $\sum\sum_{(k,l)} x^k y^l$. Ngoài ra, nó sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1$ và $|y| < 1$, và, trong trường hợp này, tổng kép của nó sẽ bằng với $1/(1-x)\,(1-y) = f(x,y)$.

Chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y)\,, \text{trong đó } c_j(x,y) = \sum_{k=0}^{j} x^k y^{j-k} \text{ với } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ngoài ra, nó sẽ hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1$ và $|y| < 1$, và, trong trường hợp này, tổng kép của nó sẽ bằng với $f(x,y)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng nó sẽ phân kỳ nếu $|x| \geq 1$ hoặc $|y| \geq 1$. Giả sử $|x| \geq 1$, và kí hiệu $u = y/x$.

Khi đó,

$$c_j(x,y) = x^j \sum_{k=0}^{j} u^{j-k} = x^j(1 + u + \cdots + u^j) \text{ với } j \geq 0.$$

Nhận thấy rằng nếu $u = 1$ thì $\left|c_j(x,y)\right| = |x|^j(j+1) \geq j+1$, và nếu $u \neq 1$ thì

$$\left|c_j(x,y)\right| = \frac{|x|^j\left|u^{j+1}-1\right|}{|u-1|} \geq \frac{\left|u^{j+1}-1\right|}{|u-1|} \text{ với } j \geq 0.$$

Điều này chỉ ra rằng $c_j(x,y) \nrightarrow 0$ khi $j \longrightarrow \infty$. Như vậy, chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ sẽ phân kỳ nếu $|x| \geq 1$. Tương tự, chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng nó sẽ phân kỳ nếu $|y| \geq 1$.

(ii) Kí hiệu $D = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-y}.$$

Chúng ta nhận thấy rằng

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = (k+l)! \text{ với } k,l = 0,1,2,\ldots$$

Như vậy, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{(k,l)}\sum \frac{(k+l)!}{k!\, l!} x^k y^l.$$

Hơn nữa, chuỗi kép này sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x| + |y| < 1$.

Ngoài ra, chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!\,(j-k)!}x^k y^{j-k}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(x+y)^j.$$

Rõ ràng, chuỗi hình học này sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x+y|<1$, và, trong trường hợp này, tổng của chuỗi tại (x,y) sẽ bằng $1/[1-(x+y)]=f(x,y)$. Như vậy, nếu $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sao cho $|x+y|<1\leq |x|+|y|$ thì chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ sẽ hội tụ tuyệt đối tại (x,y), nhưng chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ thì không. Do chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là chuỗi chéo tương ứng với chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ nên, từ Kết quả 2.7), chúng ta dễ dàng suy ra rằng nếu $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ và $|x|+|y|<1$ thì tổng kép của chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ tại (x,y) sẽ bằng $f(x,y)$. Điều này chỉ ra rằng chuỗi Taylor kép này sẽ hội tụ có điều kiện tại $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi $x\in(-1,0)$ và $x+y=1$, và, trong trường hợp này, tổng kép của nó sẽ bằng $1/2$.

(iii) (**Chuỗi hàm sin kép cho tổng**) Kí hiệu $D=\mathbb{R}^2$ và $f: D\to\mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x,y)=sin(x+y)$.

Bằng cách đặt $g(u)=sinu$ với $u\in\mathbb{R}$, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng, với $k,l=0,1,2,\ldots$,

$$\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=g^{(k+l)}(0)=\begin{cases}0 & \text{nếu } k+l \text{ chẵn,}\\ (-1)^{(k+l-1)/2} & \text{nếu } k+l \text{ lẻ.}\end{cases}$$

Như vậy, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{(k,l)}\sum c_{k,l}x^k y^l\text{, trong đó } c_{k,l}=\begin{cases}0 & \text{nếu } k+l \text{ chẵn,}\\ \dfrac{(-1)^{(k+l-1)/2}}{k!\,l!} & \text{nếu } k+l \text{ lẻ.}\end{cases}$$

Chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x,y)\text{, trong đó } c_j(x,y)=\sum_{k=0}^{j}g^{(j)}(0)\frac{x^k}{k!}\frac{y^{j-k}}{(j-k)!}=\frac{g^{(j)}(0)}{j!}(x+y)^j,$$

nghĩa là,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(x+y)^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Từ Kết quả 4.4), chúng ta dễ dàng suy ra rằng cả chuỗi Taylor kép và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ đều hội tụ tuyệt đối tới $f(x,y)$ tại mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Đối với hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x,y) = cos(x+y)$ (**Chuỗi hàm cos kép cho tổng**), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l \text{, trong đó } c_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k+l \text{ lẻ,} \\ \dfrac{(-1)^{(k+l+1)/2}}{k!\,l!} & \text{nếu } k+l \text{ chẵn,} \end{cases}$$

và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x+y)^{2j}}{(2j)!}.$$

Ngoài ra, cả hai chuỗi này đều hội tụ tuyệt đối tới $f(x,y)$ tại mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) (**Chuỗi hàm mũ kép cho tổng**) Kí hiệu $D = \mathbb{R}^2$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x,y) = e^{x+y}$. Chúng ta nhận thấy rằng chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là $\sum\sum_{(k,l)} x^k y^l / k!\,l!$, và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là $\sum_{j=0}^{\infty} (x+y)^j / j!$. Ngoài ra, cả hai chuỗi này đều hội tụ tuyệt đối tới $f(x,y)$ tại mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(v) (**Chuỗi logarithm kép cho tổng**) Kí hiệu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > -1\}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x,y) = ln(1+x+y)$.

Khi đó, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum\sum_{(k,l)\neq(0,0)} (-1)^{k+l+1} \frac{(k+l-1)!}{k!\,l!} x^k y^l \,.$$

Hơn nữa, chuỗi kép này sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x| + |y| < 1$ và, trong trường hợp này, tổng kép của nó sẽ bằng với $f(x,y)$.

Ngoài ra, chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (x+y)^j.$$

Hơn nữa, chuỗi này sẽ hội tụ tuyệt đối đến $f(x,y)$ nếu $|x+y| < 1$, hội tụ có điều kiện đến $f(x,y)$ nếu $x+y = 1$, và phân kỳ nếu $x+y \leq -1$ hoặc $x+y > 1$.

(vi) (**Chuỗi nhị thức kép cho tổng**) Kí hiệu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > -1\}$, $t \in \mathbb{R}/\{0,1,2,\dots\}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x,y) = (1+x+y)^t$.

Khi đó, chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$1 + \sum\sum_{(k,l)\neq(0,0)} t(t-1)\dots(t-k-l+1) \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!} \,.$$

Hơn nữa, chuỗi kép này sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x| + |y| \leq 1$, với điều kiện $t > 0$, hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x| + |y| < 1$, với điều kiện $t < 0$, và, bất cứ khi nào nó hội tụ tuyệt đối, tổng kép của nó luôn bằng $f(x, y)$.

Ngoài ra, chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} t(t-1) \dots (t-j+1) \frac{(x+y)^j}{j!}.$$

Hơn nữa, chuỗi này sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x + y| \leq 1$, với điều kiện $t > 0$, hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $|x + y| < 1$, với điều kiện $t < 0$, và, bất cứ khi nào nào nó hội tụ tuyệt đối, tổng kép của nó luôn bằng $f(x, y)$.

Tổng quát hơn, chúng ta có kết quả tổng quát sau:

"Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong của D. Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}$ là một tập sao cho $x + y \in E$ với mọi $(x, y) \in D$. Giả sử $g: E \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi vô hạn lần tại $x_0 + y_0$.

Khi đó, nếu chúng ta kí hiệu $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x, y) = g(x + y)$ thì chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) là

$$\sum_{(k,l)}\sum g^{(k+l)}(x_0 + y_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{(y - y_0)^l}{l!},$$

và chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) là

$$\sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}(x_0 + y_0) \frac{(x - x_0 + y - y_0)^j}{j!}.$$

Ngoài ra, nếu chúng ta kí hiệu r là bán kính hội tụ của chuỗi Taylor của g xung quanh $u_0 = x_0 + y_0$ thì chúng ta sẽ có:

(i) Chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x - x_0| + |y - y_0| < r$, trong khi nó sẽ không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|x - x_0| + |y - y_0| > r$. Ngoài ra, nếu $(x, y) \in D$ với $|x - x_0| + |y - y_0| < r$ và chuỗi Taylor của g xung quanh u_0 tại $u = x + y$ hội tụ tới $g(u)$ thì chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) tại (x, y) sẽ hội tụ tới $f(x, y)$.

(ii) Chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|u - u_0| < r$, trong khi nó sẽ phân kỳ tại mọi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $|u - u_0| > r$, trong đó $u = x + y$. Ngoài ra, nếu $(x, y) \in D$ với $|u - u_0| < r$ và chuỗi Taylor của g xung quanh u_0 tại u hội tụ tới $g(u)$ thì chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) tại (x, y) sẽ hội tụ tới $f(x, y)$."

Chúng ta cũng có thể tìm được các chuỗi Taylor kép và các chuỗi Taylor xung quanh $(0,0)$ của các hàm sau:

(i) $f(x,y) = 1/(1-xy)$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $xy = -1$,

(ii) $f(x,y) = \sin(xy)$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(iii) $f(x,y) = \cos(xy)$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(iv) $f(x,y) = e^{xy}$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(v) $f(x,y) = ln(1+xy)$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $xy > -1$,

(vi) $f(x,y) = (1+xy)^t$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $xy > -1$ và $t \neq 0,1, \ldots$

Tương tự, chúng ta cũng có kết quả tổng quát sau:

"Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập sao cho $(0,0)$ là một điểm trong của D. Giả sử $E \subseteq \mathbb{R}$ là một tập sao cho $xy \in E$ với mọi $(x,y) \in D$. Giả sử $g: E \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi vô hạn lần tại 0.

Khi đó, nếu chúng ta kí hiệu $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(x,y) = g(xy)$ thì chuỗi Taylor kép của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{(k,l)}\sum c_{k,l}x^k y^l \text{, trong đó } c_{k,l} = \begin{cases} k!\, g^{(k)}(0) & \text{nếu } k = l, \\ 0 & \text{nếu } k \neq l, \end{cases}$$

và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ là

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y) \text{, trong đó } c_j(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g^{(j/2)}(0)}{(j/2)!}(xy)^{j/2} & \text{nếu } j \text{ chẵn}, \\ 0 & \text{nếu } j \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Ngoài ra, nếu chúng ta kí hiệu r là bán kính hội tụ của chuỗi Taylor của g xung quanh 0 thì chúng ta sẽ có:

(i) Nếu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ với $|xy| < r$ thì chuỗi Taylor kép của f và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ đều hội tụ tuyệt đối, trong khi nếu $|xy| > r$ thì cả hai đều phân kỳ.

(ii) Nếu $(x,y) \in D$ với $|xy| < r$ và chuỗi Taylor của g xung quanh 0 tại $u = xy$ hội tụ đến $g(u)$ thì cả chuỗi Taylor kép của f và chuỗi Taylor của f xung quanh $(0,0)$ tại (x,y) sẽ hội tụ về $f(x,y)$."

Giả sử D là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm sao cho mọi đạo hàm riêng của f của mọi cấp đều tồn tại và liên tục trên D. Nếu, với mọi $(x_0, y_0) \in D$, tồn tại các số thực $r > 0$ và $s > 0$ sao cho chuỗi Taylor kép của f xung quanh (x_0, y_0) hội tụ tuyệt đối đến $f(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$ với $|x - x_0| < r$ và $|y - y_0| < s$ thì f sẽ được gọi là một ***hàm giải tích thực trên D***. Trong trường hợp này, từ khẳng định (iii) của Kết quả 2.10), chuỗi Taylor của f xung quanh (x_0, y_0) cũng sẽ hội tụ tuyệt đối tới $f(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$ với $|x - x_0| < r$ và $|y - y_0| < s$. Rõ ràng, các hàm đa thức hai biến đều giải tích thực trên $\mathbb{R}^2$. Ngoài ra, từ Kết quả 4.4), chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng các hàm xác định bởi $f_1(x,y) = sin(x+y)$ và $f_2(x,y) = e^{x+y}$ với $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ đều giải tích thực trên $\mathbb{R}^2$. Thật vậy, nếu D là miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa kép và tổng kép của nó được kí hiệu bởi $f(x,y)$ với $(x,y) \in D$ thì hàm f sẽ giải tích thực trên D. Mặt khác, một hàm có đạo hàm riêng của tất cả các bậc trên một tập con mở của $\mathbb{R}^2$ đều liên tục sẽ không nhất thiết phải giải tích thực ở đó. Chẳng hạn, như đã lưu ý trước đó, chúng ta chỉ cần xét hàm $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0,0) = 0$ và $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$ với $(x,y) \neq (0,0)$.

5. Khái niệm tích phân kép suy rộng

Trong bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta đã xem xét tích phân Riemann của một hàm bị chặn xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ mở rộng quá trình tích phân sang cho các hàm xác định trên các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ có dạng $[a,\infty) \times [c,\infty)$, trong đó $a, c \in \mathbb{R}$, với điều kiện là các hàm này bị chặn trên $[a,x] \times [c,y]$ với mọi $(x,y) \geq (a,c)$. Cách xử lý của chúng ta sẽ chạy song song với cách xử lý của các chuỗi kép vô hạn được đưa ra trong mục **2. Khái niệm chuỗi kép vô hạn** và **3. Các phép thử hội tụ cho các chuỗi kép**. Cách xử lý của chúng ta cũng sẽ tương tự như cách xử lý các tích phân suy rộng (đơn) của các hàm xác định trên $[a,\infty)$, trong đó $a \in \mathbb{R}$, bị chặn trên $[a,x]$ với mọi $x \geq a$ (xem lại mục **4. Khái niệm tích phân suy rộng** của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**").

Đầu tiên, chúng ta sẽ đưa ra một định nghĩa hình thức (và mô phạm) của một tích phân kép suy rộng và, sau đó, áp dụng các quy ước phù hợp để đơn giản hóa nó.

Giả sử $a, c \in \mathbb{R}$. Một ***tích phân kép suy rộng trên*** $[\boldsymbol{a},\infty) \times [\boldsymbol{c},\infty)$ được định nghĩa là một cặp sắp thứ tự (f,F) gồm các hàm giá trị thực f và F xác định trên $[a,\infty) \times [c,\infty)$ sao cho f khả tích trên $[a,x] \times [c,y]$ với mọi $(x,y) \geq (a,c)$, và

$$F(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t) \text{ với mọi } (x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty).$$

Để đơn giản và ngắn gọn, chúng ta sẽ sử dụng cách ký hiệu không chính thức nhưng mang tính gợi ý

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$$

cho tích phân kép suy rộng (f,F) trên $[a,\infty) \times [c,\infty)$.

Hàm F thường được gọi là ***tích phân kép riêng*** của tích phân kép suy rộng này. Lưu ý rằng $F(x,c) = F(a,y) = 0$ với mọi $(x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$. Theo quan điểm của **Định lí cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến** (Kết quả 1.3) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), trong các điều kiện thích hợp trên f và F (chẳng hạn như tính liên tục của f và sự triệt tiêu của $F(x,c)$ và $F(a,y)$ với mọi $(x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$), chúng ta nhận thấy rằng

$$(f,F) \text{ sẽ là một tích phân kép suy rộng} \Leftrightarrow f = F_{xy}.$$

Đặc biệt, F sẽ được xác định duy nhất bởi f, và nếu f liên tục thì f sẽ được xác định duy nhất bởi F.

Giả sử $a, c \in \mathbb{R}$ và $f: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f khả tích trên $[a,x] \times [c,y]$ với mọi $(x,y) \geq (a,c)$. Chúng ta sẽ nói rằng tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ là ***hội tụ*** nếu giới hạn

$$lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t)$$

tồn tại. Rõ ràng là nếu giới hạn này tồn tại thì nó sẽ là duy nhất, và chúng ta có thể biểu thị nó bởi cùng một kí hiệu $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ đã được sử dụng để biểu thị tích phân kép suy rộng. Thông thường, khi chúng ta viết

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t) = I,$$

chúng ta muốn nói rằng I là một số thực và tích phân kép suy rộng bên vế trái của phương trình trên là hội tụ và giá trị giới hạn là I. Trong trường hợp này, chúng ta cũng có thể nói rằng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ tới I***, hoặc I là tích phân kép suy rộng của f trên $[a,\infty)\times[c,\infty)$. Một tích phân kép suy rộng không hội tụ sẽ được gọi là ***phân kỳ***. Đặc biệt, chúng ta sẽ nói rằng tích phân kép suy rộng phân kỳ đến ∞ hoặc $-\infty$, tùy thuộc vào việc $\iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t)$ có xu hướng tiến đến ∞ hoặc $-\infty$ khi $(x,y)\to(\infty,\infty)$.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử α,β là các số thực dương và xét tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} \alpha^s\beta^t d(s,t)$.

Với mọi (x,y) trong $[a,\infty)\times[c,\infty)$,

$$\iint_{[a,x]\times[c,y]} \alpha^s\beta^t d(s,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^x-\alpha^a}{ln\alpha}\right)\left(\dfrac{\beta^y-\beta^c}{ln\beta}\right) & \text{nếu } \alpha\neq 1 \text{ và } \beta\neq 1, \\ (x-a)\left(\dfrac{\beta^y-\beta^c}{ln\beta}\right) & \text{nếu } \alpha=1 \text{ và } \beta\neq 1, \\ \left(\dfrac{\alpha^x-\alpha^a}{ln\alpha}\right)(y-c) & \text{nếu } \alpha\neq 1 \text{ và } \beta=1, \\ (x-a)(y-c) & \text{nếu } \alpha=\beta=1. \end{cases}$$

Điều này chỉ ra rằng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} \alpha^s\beta^t d(s,t)$ sẽ hội tụ đến $\alpha^a\beta^c/(ln\alpha)(ln\beta)$ nếu $\alpha<1$ và $\beta<1$, và phân kỳ đến ∞ trong các trường hợp còn lại.

(ii) Giả sử $p,q\in\mathbb{R}$ và xét tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} (1/s^pt^q)d(s,t)$.

Với mọi (x,y) trong $[1,\infty)\times[1,\infty)$,

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{d(s,t)}{s^pt^q} = \begin{cases} \dfrac{(x^{1-p}-1)(y^{1-q}-1)}{(1-p)(1-q)} & \text{nếu } p\neq 1 \text{ và } q\neq 1, \\ \dfrac{(lnx)(y^{1-q}-1)}{1-q} & \text{nếu } p=1 \text{ và } q\neq 1, \\ \dfrac{(x^{1-p}-1)(lny)}{1-p} & \text{nếu } p\neq 1 \text{ và } q=1, \\ (lnx)(lny) & \text{nếu } p=q=1. \end{cases}$$

Điều này chỉ ra rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)}(1/s^p t^q)d(s,t)$ sẽ hội tụ đến $1/(p-1)(q-1)$ nếu $p>1$ và $q>1$, và phân kỳ đến ∞ trong các trường hợp còn lại.

Sự hội tụ của tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ không bị ảnh hưởng nếu chúng ta thay đổi hàm f trên một tập con bị chặn của $[a,\infty)\times[c,\infty)$, mặc dù giá trị giới hạn của nó có thể bị thay đổi khi chúng ta làm như vậy. Mặt khác, nếu chúng ta thay đổi f trên một tập con không bị chặn của $[a,\infty)\times[c,\infty)$, chẳng hạn như một dải vô hạn, thì chúng ta có thể làm ảnh hưởng đến sự hội tụ của $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$.

Chẳng hạn, nếu $f(s,t)=0$ với mọi $(s,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ thì rõ ràng $\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ. Nhưng nếu chúng ta kí hiệu $g(s,t)=1$ với mọi $(s,t)\in[0,\infty)\times[0,1]$ và $g(s,t)=0$ với mọi $(s,t)\in[0,\infty)\times(1,\infty)$ thì $\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ sẽ phân kỳ.

Chúng ta có thể quan sát thấy rằng có một sự tương tự đáng chú ý giữa cách định nghĩa của một chuỗi kép vô hạn $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ và cách định nghĩa của một tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$. Dãy kép gồm các số hạng $\left(a_{k,l}\right)$ sẽ tương ứng với hàm $f:[a,\infty)\times[c,\infty)\to\mathbb{R}$, và một tổng kép riêng $A_{m,n}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}$, trong đó $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, sẽ tương ứng với một tích phân kép riêng $F(x,y)=\iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)\,d(s,t)$, trong đó $(x,y)\in[a,\infty)\times[c,\infty)$. Quy ước $A_{k,0}=A_{0,l}=0$ với mọi $(k,l)\geq(0,0)$ sẽ tương ứng với điều kiện ban đầu $F(x,c)=F(a,y)=0$ với mọi $(x,y)\in[a,\infty)\times[c,\infty)$.

Ngoài ra, các phương trình liên quan đến thương số của tổng kép riêng, cụ thể là

$$a_{k,l}=\frac{A_{k,l}-A_{k,l-1}-A_{k-1,l}+A_{k-1,l-1}}{[k-(k-1)][l-(l-1)]},$$

sẽ tương ứng với các phương trình liên quan đến đạo hàm riêng hỗn hợp của tích phân kép riêng F, cụ thể là

$$f(s,t)=lim_{u\to s}\frac{1}{s-u}\left(lim_{v\to t}\frac{F(s,t)-F(s,v)-F(u,t)-F(u,v)}{t-v}\right).$$

Sự tương tự này sẽ ngày càng trở nên rõ ràng hơn khi chúng ta phát triển thêm lý thuyết về tích phân kép suy rộng. Tuy nhiên, sự tương tự này đôi khi có thể bị phá vỡ. Chẳng hạn, chúng ta sẽ chỉ ra trong mục **6. Các phép thử hội tụ cho các tích phân kép suy rộng** rằng một dạng tương tự đơn giản của Phép thử $(k,l)-$ số hạng cho một chuỗi kép sẽ không đúng đối với các tích phân kép suy rộng.

Các kết quả sau đây có thể được suy ra từ các kết quả tương ứng đối với các giới hạn của các hàm hai biến, giống như các kết quả tương tự trong trường hợp các chuỗi kép có thể được suy ra từ các kết quả tương ứng đối với các giới hạn của các dãy kép. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ kí hiệu $a,c\in\mathbb{R}$ và f,g,h là các hàm giá trị thực xác định trên $[a,\infty)\times[c,\infty)$.

1. (**Định lí giới hạn**) Giả sử $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f = I$ và $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f = J$.

Khi đó,

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} (f+g) = I + J \text{ và } \iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} (rf) = rI \text{ với mọi } r \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, nếu $f(s,t) \leq g(s,t)$ với mọi $(s,t) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$ thì $I \leq J$.

2. (**Định lí kẹp**) Nếu $f(s,t) \leq h(s,t) \leq g(s,t)$ với mọi $(s,t) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$ và tích phân kép suy rộng của cả f và g đều hội tụ tới I thì tích phân kép suy rộng của h cũng vậy.

3. (**Điều kiện Cauchy**) Một tích phân kép suy rộng (f, F) sẽ hội tụ khi và chỉ khi, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một $(x_0, y_0) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$ sao cho

$$|F(x,y) - F(u,v)| < \varepsilon \text{ với mọi } (x,y) \geq (u,v) \geq (x_0,y_0).$$

(Để nhận thấy điều này, lưu ý rằng, theo Kết quả 1.7) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", $F(x,y) - F(u,v)$ chính là tổng của các tích phân kép của f trên $[a,u] \times [v,y]$, $[u,x] \times [c,v]$, $[u,x] \times [v,y]$ và sử dụng dạng tương tự của Điều kiện Cauchy cho giới hạn của các hàm hai biến (Kết quả 3.3.6) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**") cho trường hợp $(x,y) \to (\infty,\infty)$)

Cách xử lý của chúng ta cho tích phân kép suy rộng của các hàm giá trị thực xác định trên các tập con của $\mathbb{R}^2$ có dạng $[a,\infty) \times [c,\infty)$, trong đó $a, c \in \mathbb{R}$, cũng có thể được sử dụng để thảo luận về sự hội tụ của các tích phân kép suy rộng của các hàm giá trị thực xác định trên một số tập con không bị chặn khác của $\mathbb{R}^2$. Điều này sẽ được thực hiện như sau:

Đầu tiên, giả sử $b, c \in \mathbb{R}$ và $f: (-\infty, b] \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ khả tích trên $[x,b] \times [c,y]$ với mọi $(x,y) \in (-\infty,b] \times [c,\infty)$. Kí hiệu $\tilde{f}: [-b,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $\tilde{f}(u,y) = f(-u,y)$. Khi đó, với mọi $(x,y) \in (-\infty,b] \times [c,\infty)$, chúng ta có thể áp dụng Công thức đổi biến cho các phép biến đổi affine (Kết quả 2.19) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**") cho phép biến đổi $\Phi: [-b,-x] \times [c,y] \to [x,b] \times [c,y]$ xác định bởi $\Phi(u,t) = (-u,t)$.

Lưu ý rằng do $|J(\Phi)| = |-1| = 1$ nên chúng ta sẽ có

$$\iint_{[x,b]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t) = \iint_{[-b,-x]\times[c,y]} \tilde{f}(u,t)d(u,t).$$

Với quan điểm này, chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{(-\infty,b]\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ*** nếu tích phân kép suy rộng $\iint_{[-b,\infty)\times[c,\infty)} f(u,t)d(u,t)$ hội tụ, nghĩa là, nếu giới hạn

$$lim_{(\xi,y)\to(\infty,\infty)} \iint_{[-b,-\xi]\times[c,y]} \tilde{f}(u,t)d(u,t) = lim_{(x,y)\to(-\infty,\infty)} \iint_{[x,b]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t)$$

tồn tại.

Trong trường hợp này, giới hạn này sẽ được kí hiệu lại bởi $\iint_{(-\infty,b]\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$. Ngược lại, chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{(-\infty,b]\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ ***phân kỳ***.

Kế tiếp, giả sử $c \in \mathbb{R}$ và $f: \mathbb{R} \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a,b] \times [c,y]$ với mọi $a,b,y \in \mathbb{R}$ với $a \le b$ và $c \le y$. Chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{\mathbb{R}\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ*** nếu cả $\iint_{[0,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ và $\iint_{(-\infty,0]\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ đều hội tụ; trong trường hợp này, tổng của chúng sẽ được kí hiệu lại bởi chính $\iint_{\mathbb{R}\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$. Nếu có bất kỳ một trong số các tích phân kép suy rộng này phân kỳ thì chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{\mathbb{R}\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ ***phân kỳ***.

Cách định nghĩa tương tự có thể được đưa ra cho sự hội tụ và phân kỳ của

$$\iint_{(-\infty,b]\times(-\infty,d]} f(s,t)d(s,t)\,, \iint_{[a,\infty)\times(-\infty,d]} f(s,t)d(s,t),$$

và

$$\iint_{(-\infty,b]\times\mathbb{R}} f(s,t)d(s,t)\,, \iint_{\mathbb{R}\times(-\infty,d]} f(s,t)d(s,t)\,, \iint_{[a,\infty)\times\mathbb{R}} f(s,t)d(s,t).$$

Cuối cùng, giả sử $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a,b] \times [c,d]$ với mọi $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ với $a \le b$ và $c \le d$. Chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ*** nếu cả $\iint_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ và $\iint_{\mathbb{R}\times(-\infty,0]} f(s,t)d(s,t)$ đều hội tụ; trong trường hợp này, tổng của chúng sẽ được kí hiệu lại bởi chính $\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)d(s,t)$. Nếu có bất kỳ một trong số các tích phân kép suy rộng này phân kỳ thì chúng ta sẽ nói rằng $\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)d(s,t)$ ***phân kỳ***.

Theo quan điểm trên, chúng ta sẽ chỉ khảo sát các tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ có dạng $[a,\infty) \times [c,\infty)$, trong đó $a,c \in \mathbb{R}$, trong phần này và phần tiếp theo. Tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên các tập con không bị chặn tổng quát hơn của $\mathbb{R}^2$ sẽ được thảo luận trong mục **7. Các loại tích phân kép suy rộng khác**.

Tích phân kép suy rộng của các đạo hàm riêng hỗn hợp

Kết quả sau đây là một dạng tương tự của kết quả về sự hội tụ của một chuỗi kép lồng nhau (Kết quả 2.4).

Kết quả 5.1.

Giả sử $g: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm sao cho cả g_x và g_{xy} đều tồn tại trên $[a,\infty) \times [c,\infty)$, g_x liên tục trên $[a,\infty) \times [c,\infty)$ và g_{xy} khả tích trên $[a,b] \times [c,d]$ với mọi $(b,d) \ge (a,c)$.

Khi đó, $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g_{xy}(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $lim_{(b,d)\to(\infty,\infty)}[g(b,c) + g(a,d) - g(b,d)]$ tồn tại, và, trong trường hợp này,

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g_{xy}(s,t)d(s,t) = g(a,c) - lim_{(b,d)\to(\infty,\infty)}[g(b,c) + g(a,d) - g(b,d)].$$

Chứng minh kết quả 5.1.

Từ khẳng định (i) của Định lí cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến (Kết quả 1.13) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta sẽ có

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g_{xy}(s,t)d(s,t) = g(b,d) - g(b,c) - g(a,d) + g(a,c).$$

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $(b,d) \to (\infty,\infty)$, chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn. □

Chúng ta có thể lưu ý rằng nếu một hàm $f: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục thì tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ có thể được viết lại dưới dạng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g_{xy}(s,t)d(s,t)$ đối với một hàm $g: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ phù hợp.

Trên thực tế, nếu chúng ta định nghĩa hàm $g: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ bởi

$$g(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t),$$

nghĩa là, nếu g là tích phân kép riêng của $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$, thì, từ khẳng định (ii) của Định lí cơ bản của giải tích cho các hàm hai biến (Kết quả 1.13) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), $g_{xy} = f$. Nhưng khi đó việc xác định sự tồn tại của $lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}[g(x,y) - g(x,c) - g(a,y)]$ cũng giống như việc xác định sự hội tụ của tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt, chúng ta có thể tìm được một hàm g thỏa mãn các điều kiện nêu ở trên mà không cần đến bất kỳ tích phân kép nào. Trong những trường hợp này, chúng ta có thể dễ dàng xác định sự hội tụ của tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ bằng cách sử dụng Kết quả 5.1).

Chẳng hạn, xét tích phân kép suy rộng

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} ste^{-(s^2+t^2)}d(s,t).$$

Nếu chúng ta kí hiệu $g(s,t) = e^{-(s^2+t^2)}/4$ với $(s,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $g_{xy}(s,t) = ste^{-(s^2+t^2)}$ với mọi $(s,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Ngoài ra, do

$$lim_{(b,d)\to(\infty,\infty)}[g(b,0) + g(0,d) - g(b,d)] = lim_{(b,d)\to(\infty,\infty)} \frac{e^{-b^2} + e^{-d^2} - e^{-(b^2+d^2)}}{4} = 0,$$

nên, từ Kết quả 5.1), tích phân kép suy rộng đã cho sẽ hội tụ đến $g(0,0) = 1/4$.

Tích phân kép suy rộng của các hàm không âm

Kết quả sau đây về sự hội tụ của một tích phân kép suy rộng của một hàm không âm là dạng tương tự của kết quả về sự hội tụ của một chuỗi kép gồm các số hạng không âm (Kết quả 2.5).

Kết quả 5.2.

Giả sử $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm không âm khả tích trên $[a, x] \times [c, y]$ với mọi $(x, y) \geq (a, c)$.

Khi đó, tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi tích phân kép riêng F của nó bị chặn trên, và, trong trường hợp này,

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t) = sup\{F(x, y): (x, y) \in [a, \infty) \times [c, \infty)\}.$$

Ngoài ra, nếu F không bị chặn trên thì $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t)$ sẽ phân kỳ đến ∞.

Chứng minh kết quả 5.2.

Giả sử $(x_2, y_2) \geq (x_1, y_1) \geq (a, c)$.

Từ Kết quả 1.7) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} F(x_2, y_2) &= \iint_{[a,x_1]\times[c,y_1]} f(s, t)d(s, t) + \iint_{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]} f(s, t)d(s, t) \\ &+ \iint_{[a,x_1]\times[y_1,y_2]} f(s, t)d(s, t) + \iint_{[x_1,x_2]\times[c,y_1]} f(s, t)d(s, t) \\ &\geq \iint_{[a,x_1]\times[c,y_1]} f(s, t)d(s, t) \\ &= F(x_1, y_1), \end{aligned}$$

bởi vì $f(s, t) \geq 0$ với mọi $(s, t) \geq (a, c)$.

Do đó, F là một hàm tăng đơn điệu. Như vậy, từ khẳng định (i) của Kết quả 3.3.10) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**" với $b = d = \infty$, chúng ta sẽ thu được các kết quả mong muốn. □

Một kết quả tương tự như Kết quả 5.2) cũng đúng nếu $f(s, t) \leq 0$ với mọi (s, t) trong $[a, \infty) \times [c, \infty)$. Tổng quát hơn, nếu tồn tại một tập con bị chặn E của $[a, \infty) \times [c, \infty)$ sao cho $f(s, t)$ có cùng dấu với mọi $(s, t) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$ nằm ngoài E thì $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi hàm F bị chặn. Tuy nhiên, nếu không có bất kỳ một tập con bị chặn nào như vậy thì tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t)$ có thể phân kỳ, mặc dù hàm F bị chặn. Ngoài ra, hàm F có thể không bị chặn, mặc dù tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s, t)d(s, t)$ hội tụ. Những nhận định này có thể được minh họa bởi các ví dụ sau đây.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(s,t) = \begin{cases} (-1)^{[s]} & \text{nếu } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{nếu } t > 2, \end{cases}$$

trong đó, như thường lệ, $[s]$ biểu thị phần nguyên của $s \in [1,\infty)$.

Với (x,y) trong $[1,\infty) \times [1,\infty)$, chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $F(x,y) = g(x)h(y)$, trong đó

$$g(x) = \begin{cases} -1 + x - [x] & \text{nếu } [x] \text{ chẵn}, \\ -x + [x] & \text{nếu } [x] \text{ lẻ}, \end{cases} \text{ và } h(y) = min\{1, y-1\}.$$

Rõ ràng, F bị chặn trên $[1,\infty) \times [1,\infty)$, nhưng do $F(2m-1,y) = 0$ và $F(2m,y) = -1$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và $y \ge 2$ nên giới hạn của $F(x,y)$ khi (x,y) tiến đến (∞,∞) sẽ không tồn tại, nghĩa là, $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ phân kỳ.

(ii) Xét hàm $f: [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(s,t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \le t \le 1, \\ -1 \text{ nếu } 1 < t \le 2, \\ 0 \text{ nếu } t > 2. \end{cases}$$

Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng, với $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$,

$$F(x,y) = \begin{cases} xy & \text{nếu } 0 \le y \le 1, \\ x(2-y) & \text{nếu } 1 < y \le 2, \\ 0 & \text{nếu } y > 2. \end{cases}$$

Rõ ràng, F không bị chặn trên $[0,\infty) \times [0,\infty)$, nhưng do $F(x,y) = 0$ với mọi $(x,y) \ge (0,2)$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ đến 0.

Kết quả sau đây là một dạng tương tự của việc "tính tổng theo các hình vuông" và "tính tổng theo các đường chéo" của các chuỗi kép (Kết quả 2.7) đối với các tích phân kép suy rộng được đưa ra như sau:

"Giả sử $\boldsymbol{a, c \in \mathbb{R}}$ và $\boldsymbol{\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)}$ là một tích phân kép suy rộng với $\boldsymbol{f(s,t) \ge 0}$ với mọi $\boldsymbol{(s,t) \in [a,\infty) \times [c,\infty)}$.

Với $\boldsymbol{r \ge 0}$, kí hiệu $\boldsymbol{D_r = [a, a+r] \times [c, c+r]}$, $\boldsymbol{E_r = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le s, c \le t, s+t \le a+c+r\}}$,

$$\boldsymbol{G(r) = \iint_{D_r} f(s,t)d(s,t) \text{ và } H(r) = \iint_{E_r} f(s,t)d(s,t).}$$

Khi đó, $\boldsymbol{\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)}$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi một trong hai giới hạn $\boldsymbol{lim_{r\to\infty} G(r)}$ và $\boldsymbol{lim_{r\to\infty} H(r)}$ tồn tại và, trong trường hợp này,

$$\iint_{[\boldsymbol{a},\infty)\times[\boldsymbol{c},\infty)} \boldsymbol{f(s,t)d(s,t) = lim_{r\to\infty}G(r) = lim_{r\to\infty}H(r)}."$$

Bây giờ, chúng ta sẽ cố gắng liên hệ sự hội tụ của một tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ của một hàm không âm f với sự hội tụ của chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$. Đầu tiên, chúng ta xét hàm $f: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = 1$ nếu $(s,t) \in \mathbb{N}^2$ và $f(s,t) = 0$ nếu $(s,t) \notin \mathbb{N}^2$. Khi đó, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ về 0, nhưng $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ lại phân kỳ đến ∞. Mặt khác, nếu chúng ta kí hiệu $g = 1 - f$ thì chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ sẽ phân kỳ đến ∞, nhưng $\sum\sum_{(k,l)} g(k,l)$ lại hội tụ đến 0. Như vậy, nói chung, sự hội tụ của $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ đối với các hàm không âm. Theo quan điểm này, kết quả sau đây sẽ rất đáng chú ý.

Kết quả 5.3. (Phép thử tích phân kép)

Giả sử $f: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm giảm đơn điệu không âm.

Khi đó, tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ hội tụ, và, trong trường hợp này,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty} f(k,l) \le \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f(k,l),$$

hoặc, tương đương,

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f(k,l) \le f(1,1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k,1) + \sum_{l=2}^{\infty} f(1,l) + \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t).$$

Ngoài ra, tích phân kép $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ phân kỳ đến ∞ khi và chỉ khi chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ phân kỳ đến ∞.

Chứng minh kết quả 5.3.

Nhận thấy rằng do f là một hàm đơn điệu nên, từ khẳng định (i) của Kết quả 1.8) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", f sẽ khả tích trên $[1,x] \times [1,y]$ với mọi $(x,y) \ge (1,1)$. Kí hiệu $F: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $F(x,y) = \iint_{[1,x)\times[1,y)} f(s,t)d(s,t)$. Do f không âm nên, từ Kết quả 1.7) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", F sẽ là một hàm tăng đơn điệu.

Như vậy, Kết quả 5.2) ngụ ý rằng tích phân kép $\iint_{[1,x)\times[1,y)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi tập $\{F(m,n): (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ bị chặn trên và, trong trường hợp này,

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t) = sup\{F(x,y): (x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty)\}$$

$$= sup\{F(m,n): (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$$

$$= lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} F(m,n).$$

(Đẳng thức áp chót được suy ra từ việc F là một hàm tăng đơn điệu và đẳng thức cuối cùng được suy ra từ khẳng định (i) của Kết quả 4.3)

Tương tự,

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t) \text{ phân kỳ đến } \infty \Leftrightarrow F(m,n) \longrightarrow \infty \text{ khi } m,n \to \infty.$$

Kí hiệu

$$a_{k,l} = \iint_{[k,k+1]\times[l,l+1]} f(s,t)d(s,t) \text{ với } (k,l) \in \mathbb{N}^2$$

và

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \text{ với } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Khi đó, từ tính chất cộng miền của tích phân kép trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.6 của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta sẽ có $A_{m,n} = F(m+1,n+1)$ với mọi $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Ngoài ra, do $a_{k,l} \geq 0$ với mọi $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ nên, từ Kết quả 2.15), chúng ta dễ dàng suy ra rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi dãy kép $\big(F(m,n)\big)$ bị chặn trên, nghĩa là, tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ hội tụ và, trong trường hợp này, tổng của chuỗi kép sẽ bằng với tích phân kép suy rộng. Tương tự, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ đến ∞ khi và chỉ khi dãy kép $\big(F(m,n)\big)$ không bị chặn trên, nghĩa là, tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ phân kỳ đến ∞.

Bây giờ, do f là một hàm giảm đơn điệu nên

$$f(k+1,l+1) \leq a_{k,l} \leq f(k,l) \text{ với mọi } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Như vậy, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ hội tụ và $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ sẽ phân kỳ đến ∞ khi và chỉ khi $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ phân kỳ đến ∞ (Phép thử so sánh cho các chuỗi kép (Kết quả 3.1)).

Cuối cùng, do

$$\sum_{k=2}^{m+1}\sum_{l=2}^{n+1} f(k,l) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(k+1,l+1) \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(k,l) \text{ với mọi } (m,n) \in \mathbb{N}^2,$$

và

$$lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} A_{m,n} = \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t),$$

nên chúng ta nhận thấy rằng

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty} f(k,l) \le \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f(k,l),$$

bất cứ khi nào $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ hội tụ. □

Kết quả trên có thể sẽ rất hữu ích trong việc xác định xem liệu một chuỗi kép hoặc một tích phân kép suy rộng có hội tụ hay không và, trong trường hợp chuỗi kép này hội tụ, chúng ta sẽ thu được các chặn dưới và các chặn trên của chúng. Điều này sẽ được minh họa bởi ví dụ dưới đây.

Chẳng hạn,

Xét hàm $f(s,t) = 1/(s+t)^p$ với $(s,t) \in [1,\infty) \times [1,\infty)$, trong đó $p \in \mathbb{R}$ với $p > 0$.

Khi đó, f sẽ là một hàm không âm giảm đơn điệu.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng chuỗi kép $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$.

Như vậy, từ Phép thử tích phân, tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$.

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể chỉ ra trực tiếp rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$ và, do đó, $\sum\sum_{(k,l)} f(k,l)$ sẽ hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$.

Thật vậy, kí hiệu $F(x,y) = \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ và giả sử $(x,y) \ge (1,1)$, $p \le 2$.

Khi đó,

$$F(x,y) \ge \iint_{[1,x]\times[1,y]} \frac{d(s,t)}{(s+t)^2} = \int_1^x \left(\int_1^y \frac{dt}{(s+t)^2}\right) ds$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+y}\right) ds = ln(x+1) - ln2 - ln(x+y) + ln(1+y)$$

$$= ln\frac{(x+1)(y+1)}{x+y} - ln2 \ge -ln\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right) - ln2.$$

Như vậy, $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} 1/(s+t)^p\, d(s,t)$ sẽ phân kỳ đến ∞.

Kế tiếp, giả sử $p > 2$.

Khi đó,

$$F(x,y) = \frac{1}{p-1}\int_1^x \left[\frac{1}{(s+1)^{p-1}} - \frac{1}{(s+y)^{p-1}}\right] ds$$

$$= \frac{1}{(p-1)(p-2)}\left[\frac{1}{2^{p-2}} - \frac{1}{(x+1)^{p-2}} - \frac{1}{(1+y)^{p-2}} + \frac{1}{(x+y)^{p-2}}\right].$$

Như vậy,

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{d(s,t)}{(s+t)^p} = \frac{1}{(p-1)(p-2)2^{p-2}} \text{ nếu } p > 2.$$

Với $p > 2$, Kết quả 5.3) cũng cho phép chúng ta ước tính giá trị của tổng kép $\sum\sum_{(k,l)} 1/(k+l)^p$ như sau:

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)2^{p-2}} \leq \sum\sum_{(k,l)\geq(1,1)} \frac{1}{(k+l)^p} \leq \frac{1}{2^p} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^p} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(1+l)^p} + \frac{1}{(p-1)(p-2)2^{p-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p-1)(p-2)2^{p-2}} \leq \sum\sum_{(k,l)\geq(1,1)} \frac{1}{(k+l)^p} \leq \frac{p^2-3p+6}{(p-1)(p-2)2^{p-2}} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^p}.$$

Với $p = 4$, chúng ta sẽ có

$$\frac{1}{24} \leq \sum\sum_{(k,l)\geq(1,1)} \frac{1}{(k+l)^4} \leq \frac{5}{48} + 2\left(\frac{\pi^4}{90} - 1 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{\pi^4}{45} - \frac{97}{48} < \frac{3}{20}.$$

Chặn trên của đánh giá này được suy ra từ công thức $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4 = \pi^4/90$.

Tính hội tụ tuyệt đối và tính hội tụ có điều kiện

Nhắc lại rằng nếu một hàm f khả tích trên một hình chữ nhật thì $|f|$ cũng vậy. Một tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ được gọi là ***hội tụ tuyệt đối*** nếu tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(s,t)|$ $d(s,t)$ hội tụ.

Kết quả sau đây là dạng tương tự của Kết quả 2.8).

Kết quả 5.4.

Mọi tích phân kép suy rộng hội tụ tuyệt đối cũng sẽ hội tụ.

Chứng minh kết quả 5.4.

Giả sử $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ là một tích phân kép suy rộng hội tụ tuyệt đối.

Xét các hàm $f^+, f^-: [a,\infty)\times[c,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f^+(s,t) = \frac{|f(s,t)| + f(s,t)}{2} \text{ và } f^-(s,t) = \frac{|f(s,t)| - f(s,t)}{2}.$$

Nhận thấy rằng, với mỗi $(x,y) \in [a,\infty)\times[c,\infty)$, các hàm f^+ và f^- đều khả tích trên $[a,x]\times[c,y]$.

Với $(x, y) \in [a, \infty) \times [c, \infty)$, kí hiệu $F(x, y)$, $F^{+}(x, y)$, $F^{-}(x, y)$, $\tilde{F}(x, y)$ lần lượt là các tích phân riêng của các tích phân kép suy rộng tương ứng của $f, f^{+}, f^{-}, |f|$. Do tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(s,t)| d(s,t)$ hội tụ nên $\tilde{F}$ sẽ là một hàm bị chặn. Ngoài ra, $0 \le F^{+}(x,y) \le \tilde{F}(x,y)$ và , $0 \le F^{-}(x,y) \le \tilde{F}(x,y)$ với mọi (x,y) nằm trong $[a,\infty) \times [c,\infty)$. Như vậy, từ Kết quả 5.2), cả $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f^{+}(s,t) d(s,t)$ và $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f^{-}(s,t)\, d(s,t)$ đều hội tụ. Do $f = f^{+} - f^{-}$ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ hội tụ. □

Một tích phân kép suy rộng hội tụ nhưng không tụ tuyệt đối sẽ được gọi là ***hội tụ có điều kiện***.

Chẳng hạn,

Giả sử $a, c \in \mathbb{R}$ và xét các hàm $\phi: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ và $\psi: [c,\infty) \to \mathbb{R}$ sao cho ϕ khả tích Riemann trên $[a, x]$, với mọi $x \ge a$, và ψ khả tích Riemann trên $[c, y]$, với mọi $y \ge c$, và, hơn nữa, cả hai tích phân suy rộng $\int_a^\infty \phi(s) ds$ và $\int_c^\infty \psi(t) dt$ đều hội tụ có điều kiện. Kí hiệu $f: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $f(s,t) = \phi(s)\psi(t)$. Kí hiệu Φ, Ψ lần lượt là tích phân riêng của các tích phân suy rộng $\int_a^\infty \phi(s) ds$, $\int_c^\infty \psi(t) dt$ và F là tích phân kép riêng của tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$. Khi đó, từ Định lí Fubini trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.11) của bài viết “**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**”), $F(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$ với mọi $(x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$. Do cả $\int_a^\infty \phi(s) ds$ và $\int_c^\infty \psi(t) dt$ đều hội tụ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ cũng hội tụ. Tương tự, kí hiệu $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ lần lượt là tích phân riêng của các tích phân suy rộng $\int_a^\infty |\phi(s)| ds$, $\int_c^\infty |\psi(t)| dt$ và $\tilde{F}$ là tích phân kép riêng của tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(s,t)| d(s,t)$. Như trước, chúng ta cũng sẽ có $\tilde{F}(x,y) = \tilde{\Phi}(x)\tilde{\Psi}(y)$ với mọi $(x,y) \in [a,\infty) \times [c,\infty)$. Do $\int_a^\infty |\phi(s)| ds$ và $\int_c^\infty |\psi(t)| dt$ đều phân kỳ đến ∞ nên tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(s,t)| d(s,t)$ sẽ phân kỳ đến ∞. Như vậy, $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ sẽ hội tụ có điều kiện.

Như một ví dụ cụ thể, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng tích phân kép suy rộng

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{(coss)(cost)}{st} d(s,t)$$

sẽ hội tụ có điều kiện. (điều này suy ra từ việc tích phân suy rộng $\int_1^\infty \frac{cost}{t} dt$ hội tụ có điều kiện)

Bây giờ, chúng ta sẽ đưa ra một đặc trưng của sự hội tụ tuyệt đối của một tích phân kép suy rộng. Nó có thể được xem như dạng tương tự của đặc trưng của sự hội tụ tuyệt đối của một chuỗi kép (Kết quả 2.9).

Kết quả 5.5.

Giả sử $f: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm sao cho f khả tích trên $[a, x] \times [c, y]$ với mỗi $(x,y) \ge (a,c)$ cố định cho trước, tích phân Riemann $\int_a^x |f(s,t)| ds$ tồn tại với mỗi $(x,t) \ge (a,c)$ cố định cho trước và tích phân Riemann $\int_c^y |f(s,t)| dt$ tồn tại với mỗi $(s,y) \ge (a,c)$ cố định cho trước.

Khi đó, tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ sẽ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Tồn tại một $(s_0,t_0) \geq (a,c)$ và một $\alpha_0 > 0$ sao cho

$$\iint_{[s_0,x]\times[t_0,y]} |f(s,t)| d(s,t) \leq \alpha_0 \text{ với mọi } (x,y) \geq (s_0,t_0).$$

(ii) Với mỗi $x \geq a$ cố định cho trước, tích phân suy rộng $\int_c^\infty \left(\int_a^x |f(s,t)|\, ds\right) dt$ hội tụ và, với mỗi $y \geq c$ cố định cho trước, tích phân suy rộng $\int_a^\infty \left(\int_c^y |f(s,t)|\, dt\right) ds$ hội tụ.

Chứng minh kết quả 5.5.

Nhận thấy rằng do hàm $|f|$ khả tích trên $[a,x]\times[c,y]$ nên chúng ta có thể định nghĩa

$$\tilde{F}(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} |f(s,t)| d(s,t) \text{ với mọi } (x,y) \geq (a,c).$$

Theo Định lí Fubini trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.11) của bài viết "**Phép tính Riemann hàm nhiều biến**"),

$$\tilde{F}(x,y) = \int_c^y \left(\int_a^x |f(s,t)| ds\right) dt = \int_a^x \left(\int_c^y |f(s,t)| dt\right) ds \text{ với } (x,y) \geq (a,c).$$

Giả sử $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ hội tụ tuyệt đối. Do $|f(s,t)| \geq 0$ với mọi $(s,t) \geq (a,c)$ nên Kết quả 5.2) chỉ ra rằng $\tilde{F}$ là một hàm bị chặn trên. Như vậy, điều kiện (i) sẽ đúng với $(s_0,t_0) = (a,c)$ và $\alpha_0 = sup\{\tilde{F}(x,y): (x,y) \geq (a,c)\}$. Ngoài ra, theo quan điểm của điều kiện đầu tiên được nêu ra ở trên, với mỗi $x \geq a$ cố định cho trước, chúng ta sẽ có $sup\left\{\int_c^y \left(\int_a^x |f(s,t)| ds\right) dt : y \geq c\right\} \leq \alpha_0$, nên tích phân suy rộng $\int_c^\infty \left(\int_a^x |f(s,t)| ds\right) dt$ sẽ hội tụ. Tương tự, với mỗi $y \geq c$ cố định cho trước, tích phân suy rộng $\int_a^\infty \left(\int_c^y |f(s,t)| dt\right) ds$ hội tụ.

Ngược lại, giả sử các điều kiện (i) và (ii) đều được thỏa mãn. Giả sử tồn tại một $(s_0,t_0) \geq (a,c)$ và một $\alpha_0 > 0$ sao cho $\iint_{[s_0,x]\times[t_0,y]} |f(s,t)| d(s,t) \leq \alpha_0$ với mọi $(x,y) \geq (s_0,t_0)$.

Từ tính chất cộng miền (Kết quả 1.6) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"),

$$\tilde{F}(x,y) = \iint_{[s_0,x]\times[t_0,y]} |f(s,t)| d(s,t) + \iint_{[a,s_0]\times[c,y]} |f(s,t)| d(s,t) + \iint_{[s_0,x]\times[c,t_0]} |f(s,t)| d(s,t),$$

với mọi $(x,y) \geq (s_0,t_0)$.

Bây giờ, do tích phân suy rộng $\int_c^\infty \left(\int_a^{s_0} |f(s,t)| ds\right) dt$ hội tụ nên sẽ tồn tại một $\beta_0 > 0$ sao cho

$$\iint_{[a,s_0]\times[c,y]} |f(s,t)| d(s,t) = \int_c^y \left(\int_a^{s_0} |f(s,t)| ds\right) dt \leq \beta_0 \text{ với mọi } y \geq c.$$

Tương tự, do tích phân suy rộng $\int_c^\infty\left(\int_a^{t_0}|f(s,t)|dt\right)ds$ hội tụ nên sẽ tồn tại một $\gamma_0 > 0$ sao cho

$$\iint_{[s_0,x]\times[c,t_0]}|f(s,t)|d(s,t) = \int_{s_0}^{x}\left(\int_c^{t_0}|f(s,t)|dt\right)ds \le \gamma_0 \text{ với mọi } x \ge a.$$

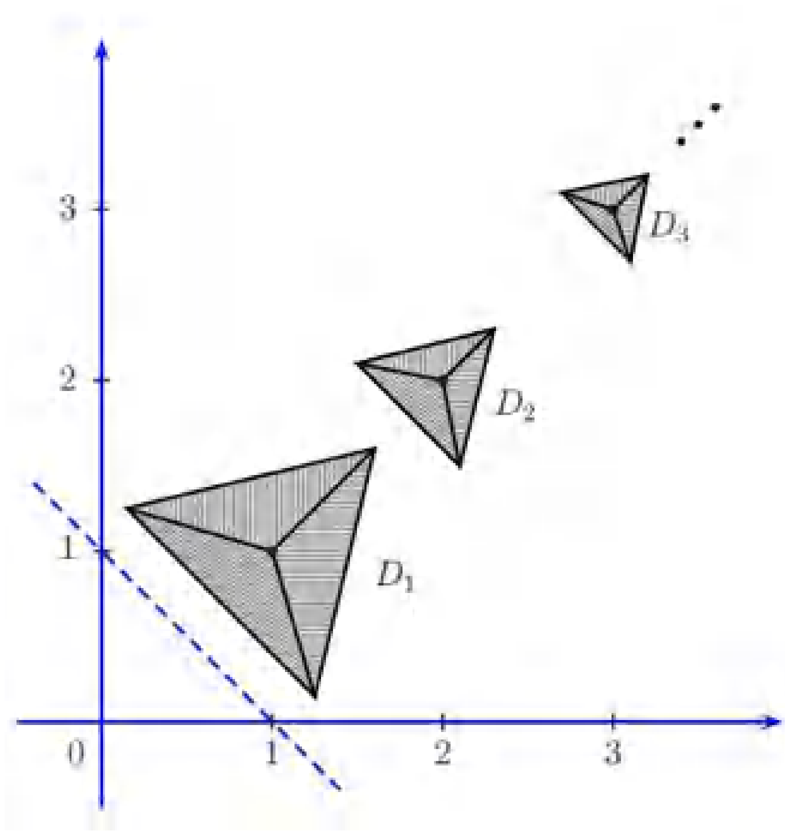
Do đó, $\tilde{F}(x,y) \le \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$ với mọi $(x,y) \ge (s_0,t_0)$. Điều này chứng tỏ rằng $\tilde{F}$ là một hàm tăng đơn điệu bị chặn trên $[a,\infty)\times[c,\infty)$. Như vậy, từ Kết quả 5.2), $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)\, d(s,t)$ sẽ hội tụ tuyệt đối. □

6. Các phép thử hội tụ cho các tích phân kép suy rộng

Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ xem xét một số phép thử cho phép chúng ta kết luận sự hội tụ hoặc phân kỳ của các tích phân kép suy rộng. Đối với hầu hết các khảo sát trong phần này của bài viết, những phép thử này sẽ tương tự như các phép thử đối với các chuỗi kép. Tuy nhiên, như đã nhận xét từ trước đó, chúng ta không có bất kỳ một dạng tương tự đơn giản nào của Phép thử $(k,l) -$ số hạng cho các chuỗi kép. Chẳng hạn, xét hàm $f: [0,\infty)\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = 1$ nếu $(s,t) = (k,k)$ với một số $k \in \mathbb{N}$ nào đó và $f(s,t) = 0$ trong trường hợp ngược lại. Rõ ràng, f bị chặn và tích phân kép suy rộng của f trên $[0,\infty)\times[0,\infty)$ sẽ hội tụ về 0, nhưng $f(s,t) \nrightarrow 0$ khi $(s,t) \to (\infty,\infty)$. Bằng cách sửa đổi hàm này đi đôi chút, chúng ta cũng có thể tìm được một hàm liên tục khác thuộc loại này, như ví dụ sau đây.

Chẳng hạn,

Với $k \in \mathbb{N}$, kí hiệu T_k là tam giác đều có một cạnh song song với đường thẳng xác định bởi $x + y = 1$ sao cho trọng tâm của miền tam giác D_k được bao bởi T_k là (k,k) và diện tích của D_k là $1/k^2$.



Hình vẽ minh họa các miền tam giác $D_1, D_2, D_3, \ldots$ có một cạnh song song với đường thẳng $x + y = 1$,

trọng tâm tại $(1,1), (2,2), (3,3), \ldots$ và các diện tích $1, 1/4, 1/9, \ldots$

Với mọi $k \in \mathbb{N}$ cố định cho trước, kí hiệu $(a_k, b_k), (c_k, d_k), (p_k, q_k)$ lần lượt là các đỉnh của T_k.

Khi đó, đa thức tuyến tính hai biến

$$\frac{1}{\Delta_k} det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a_k & b_k & 1 \\ c_k & d_k & 1 \end{bmatrix}, \text{trong đó } \Delta_k = det \begin{bmatrix} k & k & 1 \\ a_k & b_k & 1 \\ c_k & d_k & 1 \end{bmatrix},$$

sẽ xác định một hàm đa thức hai biến bậc 1 trên miền tam giác con của D_k với các đỉnh tại (a_k, b_k), (c_k, d_k), (k, k) sao cho giá trị của nó tại (a_k, b_k) và (c_k, d_k) là 0, trong khi giá trị của nó tại (k, k) là 1.

Theo cách tương tự, chúng ta cũng sẽ thu được các hàm đa thức hai biến bậc 1 trên hai miền tam giác con còn lại của D_k. Chúng ta dễ dàng quan sát thấy rằng giá trị của các hàm này sẽ nằm trong khoảng từ 0 đến 1 và chúng sẽ trùng nhau trên các đường nối giữa các đỉnh của T_k với trọng tâm của nó. Như vậy, bằng cách ghép các hàm này lại với nhau, chúng ta sẽ thu được một hàm không âm, liên tục, tuyến tính từng phần $f_k: D_k \to \mathbb{R}$ sao cho $f_k(k, k) = 1$, trong khi $f_k(a_k, b_k) = f_k(c_k, d_k) = f_k(p_k, q_k) = 0$. Từ tính chất cộng miền (Kết quả 2.13) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), tích phân kép của f_k trên D_k sẽ là tổng của các tích phân kép của f_k trên ba miền tam giác con của D_k. Nếu E_k biểu thị một miền con như vậy, chẳng hạn với các đỉnh tại (a_k, b_k), (c_k, d_k), (p_k, q_k) thì $Area(E_k) = \frac{1}{3} Area(D_k) = \frac{1}{3k^2}$, và

$$\iint_{E_k} f_k = \frac{Area(E_k)}{3} \big(f_k(a_k, b_k) + f_k(c_k, d_k) + f_k(k, k)\big) = \frac{1}{9k^2}.$$

Như vậy, $\iint_{D_k} f_k = 3(1/9k^2) = 1/3k^2$.

Bây giờ, chúng ta sẽ thay đổi k và xét hàm $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(s,t) = \begin{cases} f_k(s,t) & \text{nếu } (s,t) \in D_k \text{ với một số } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó,} \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Nhận thấy rằng do f_k triệt tiêu trên các đỉnh của T_k và, do đó, trên các cạnh của T_k nên chúng ta có thể nhận thấy rằng f là một hàm liên tục xác định trên $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Ngoài ra, do $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ hội tụ và, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leq \iint_{[0,x]\times[0,y]} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{D_k} f = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

nên chúng ta nhận thấy rằng tích phân kép suy rộng $\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f$ sẽ hội tụ.

Nhưng do $f(k, k) = 1$ với $k \in \mathbb{N}$ nên rõ ràng là $f(s,t) \nrightarrow 0$ khi $(s,t) \to (\infty, \infty)$.

Bằng cách sửa đổi hàm nêu trong ví dụ trên đi đôi chút, chúng ta sẽ thu được một hàm liên tục $\tilde{f}: [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} \tilde{f}$ hội tụ, nhưng $\tilde{f}(k, k) \to \infty$ khi $k \to \infty$. Thật vậy, chúng ta chỉ cần thay D_k bởi một miền tam giác $\widetilde{D_k}$ với $Area\big(\widetilde{D_k}\big) = 1/k^3$ và f_k bởi hàm $\widetilde{f_k} = k f_k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Nhận thấy rằng Phép thử $(k,l) -$ số hạng cho các chuỗi kép (Kết quả 2.1) có thể được trình bày lại như sau:

"**Nếu một chuỗi kép $\boldsymbol{\left((a_{k,l}),(A_{m,n})\right)}$ hội tụ thì $\boldsymbol{A_{k,l} - A_{k,l-1} - A_{k-1,l} + A_{k-1,l-1} \to 0}$ khi $\boldsymbol{(k,l) \longrightarrow (\infty,\infty)}$.**"

Công thức này có một dạng tương tự sau đối với các tích phân kép suy rộng.

Kết quả 6.1.

Nếu một tích phân kép suy rộng (f,F) hội tụ thì

$$\iint_{[x-1,x]\times[y-1,y]} f(s,t)d(s,t) \to 0 \text{ khi } (x,y) \to (\infty,\infty).$$

Chứng minh kết quả 6.1.

Xét hàm $F(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t)$ với $(x,y) \geq (a,c)$.

Từ tính chất cộng miền (Kết quả 1.6) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), với mọi $(x,y) \geq (a+1,c+1)$, chúng ta sẽ có

$$\iint_{[x-1,x]\times[y-1,y]} f(s,t)d(s,t) = F(x,y) - F(x,y-1) - F(x-1,y) + F(x-1,y-1).$$

Nếu (f,F) hội tụ thì sẽ tồn tại một số thực $I \in \mathbb{R}$ sao cho $F(x,y) \to I$ và, do đó, vế phải của đẳng thức trên sẽ tiến tới 0 khi $(x,y) \to (\infty,\infty)$. □

Các phép thử cho tính hội tụ tuyệt đối

Phép thử sau đây là một dạng tương tự của Phép thử so sánh cho các chuỗi kép.

Kết quả 6.2. (Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng)

Giả sử $a,c \in \mathbb{R}$ và $f,g\colon [a,\infty)\times[c,\infty) \to \mathbb{R}$ sao cho cả f và g đều khả tích trên $[a,x]\times[c,y]$ với mọi $(x,y) \geq (a,c)$ và $|f| \leq g$.

Khi đó, nếu $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ hội tụ thì $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ tuyệt đối và

$$\left|\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)\right| \leq \iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t).$$

Chứng minh kết quả 6.2.

Với $(x,y) \in [a,\infty)\times[c,\infty)$, kí hiệu $F(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} f(s,t)d(s,t)$, $G(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} g(s,t)$ $d(s,t)$ và $\tilde{F}(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} |f(s,t)|d(s,t)$.

Giả sử $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ hội tụ. Khi đó, G sẽ là một hàm bị chặn trên. Do $|f| \leq g$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\tilde{F} \leq G$ và, do đó, $\tilde{F}$ sẽ là một hàm bị chặn trên. Hơn nữa, do $|f| \geq 0$ nên, từ Kết quả 5.2), $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} |f(s,t)|d(s,t)$ sẽ hội tụ, nghĩa là, $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ hội tụ tuyệt đối. Ngoài ra, do $-f \leq |f| \leq g$ và $f \leq |f| \leq g$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $-F(x,y) \leq \tilde{F}(x,y) \leq G(x,y)$ và $F(x,y) \leq \tilde{F}(x,y) \leq G(x,y)$ với mọi $(x,y) \geq (a,c)$.

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $(x,y) \to (\infty,\infty)$, chúng ta sẽ thu được

$$\left|\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)\right| \leq \iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t),$$

như đã tuyên bố. □

Các tích phân kép suy rộng được đưa ra trong các ví dụ trước rất hữu ích trong việc sử dụng Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $f: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$f(s,t) = \frac{2^s 5^t + st^2}{3^s 7^t + s^3 + t^4}.$$

Để nhận thấy rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f$ hội tụ, xét hàm $g: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(s,t) = (2/3)^s (5/7)^t$.

Khi đó, $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ, bởi vì $0 < \frac{2}{3} < 1$ và $0 < \frac{5}{7} < 1$.

Ngoài ra, do $st^2 < 2^s 5^t$ và $s^3 + t^4 > 0$,với mọi $s,t \geq 1$, nên

$$|f(s,t)| < \frac{2^s 5^t + 2^s 5^t}{3^s 7^t} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^s \left(\frac{5}{7}\right)^t \text{ với mọi } (s,t) \in [1,\infty) \times [1,\infty).$$

Như vậy, $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ (tuyệt đối) bởi Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng.

(ii) Giả sử $f: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$f(s,t) = \frac{1}{(1+s+t+st+s^3t^4)^{1/2}}.$$

Để nhận thấy rằng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f$ hội tụ, xét hàm $g: [1,\infty) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(s,t) = 1/s^{3/2}t^2$.

Khi đó, $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ, bởi vì $\frac{3}{2} > 1$ và $2 > 1$.

Ngoài ra, $|f(s,t)| < g(s,t)$ với mọi $(s,t) \in [1,\infty) \times [1,\infty)$.

Như vậy, tích phân kép suy rộng $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} f(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ (tuyệt đối) bởi Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng.

Chúng ta cũng có thể dễ dàng rút ra Phép thử so sánh giới hạn và Phép thử căn cho các tích phân kép suy rộng từ Kết quả 5.5). Những phép thử này đều có liên quan đến khái niệm về tính hội tụ đều mà chúng ta đã chưa có cơ hội giới thiệu trong bài viết này. Như vậy, chúng ta cũng sẽ không thảo luận về chúng ở đây.

Các phép thử cho tính hội tụ có điều kiện

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét một số phép thử cho tính hội tụ có điều kiện của các tích phân kép suy rộng. Chúng đều dựa trên kết quả sau, nó có thể coi là một dạng tương tự của Công thức tính tổng kép từng phần (Kết quả 3.8).

Kết quả 6.3. (Công thức tích phân kép từng phần)

Giả sử $R = [a,b] \times [c,d]$ là một hình chữ nhật nằm trong $\mathbb{R}^2$ và $f, g: R \to \mathbb{R}$ là các hàm sao cho f_x, f_y, f_{xy} tồn tại và liên tục trên R, còn g liên tục trên R.

Kí hiệu $G(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} g(s,t)d(s,t)$ với (x,y) nằm trong R.

Khi đó,

$$\iint_R f(s,t)g(s,t)d(s,t) = f(b,d)G(b,d) + \iint_R f_{xy}(s,t)G(s,t)d(s,t)$$

$$-\int_a^b f_x(s,d)G(s,d)ds - \int_c^d f_y(b,t)G(b,t)dt.$$

Chứng minh kết quả 6.3.

Nhận thấy rằng do f_x và f_y đều liên tục trên R nên khẳng định (iii) của Kết quả 1.1) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm nhiều biến**" chứng tỏ rằng f liên tục trên R. Ngoài ra, từ Kết quả 1.14) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta có thể nhận thấy rằng G_x, G_y, G_{xy} tồn tại và liên tục, và, trên thực tế, $G_{xy} = g$ trên R.

Bằng cách sử dụng công thức tích phân kép từng phần (Kết quả 1.15 của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta sẽ thu được

$$\iint_R fg = \Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) - \iint_R \left(f_x G_y + f_y G_x + f_{xy} G\right).$$

Ngoài ra, $\Delta_{(a,c)}^{(b,d)}(fG) = f(b,d)G(b,d)$, bởi vì $G(a,c) = G(b,c) = G(a,d) = 0$.

Kế tiếp, từ Định lí Fubini trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.11) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta nhận thấy rằng

$$\iint_R f_x G_y = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(s,t) G_y(s,t) dt \right) ds.$$

Với mỗi $s \in [a,b]$ cố định cho trước, chúng ta có thể sử dụng công thức tích phân từng phần một biến (Kết quả 3.4) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm một biến**") và thu được

$$\int_c^d f_x(s,t) G_y(s,t) dt = (f_x G)(s,d) - (f_x G)(s,c) - \int_c^d (f_x)_y(s,t) G(s,t) dt.$$

Do $G(s,c) = 0$ với mọi $s \in [a,b]$ nên điều này cũng chỉ ra rằng

$$\iint_R f_x G_y = \int_a^b f_x(s,d) G(s,d) ds - \int_a^b \left(\int_c^d f_{xy}(s,t) G(s,t) dt \right) ds.$$

Theo cách tương tự, chúng ta cũng sẽ có

$$\iint_R f_y G_x = \int_c^d f_y(b,t) G(b,t) dt - \int_c^d \left(\int_a^b f_{yx}(s,t) G(s,t) ds \right) dt.$$

Từ Định lí đạo hàm riêng hỗn hợp (Kết quả 1.7) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm nhiều biến**"),

$$f_{xy} = f_{yx} \text{ trên } R.$$

Kế tiếp, Định lí Fubini trên các hình chữ nhật chỉ ra rằng

$$\int_a^b \left(\int_c^d f_{xy}(s,t) G(s,t) dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f_{yx}(s,t) G(s,t) ds \right) dt = \iint_R f_{xy} G.$$

Kết quả mong muốn được suy ra bằng cách cộng các phương trình thích hợp nêu trên lại với nhau. □

Kết quả 6.4. (Phép thử Dirichlet cho các tích phân kép suy rộng)

Giả sử $f, g: [a,\infty) \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm sao cho f_x, f_y, f_{xy} tồn tại và liên tục, còn g liên tục.

Giả sử

(i) f song đơn điệu,

(ii) Với mỗi $t \geq c$ cố định cho trước, hàm xác định bởi $s \longmapsto f(s,t)$ đơn điệu trên $[a,\infty)$ và, với mỗi $s \geq a$ cố định cho trước, hàm xác định bởi $t \longmapsto f(s,t)$ đơn điệu trên $[c,\infty)$,

(iii) $lim_{s\to\infty} f(s,s)$, $lim_{s\to\infty} f(s,c)$, $lim_{t\to\infty} f(a,t)$ tồn tại và đều bằng 0,

(iv) Tích phân kép riêng của $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t) d(s,t)$ bị chặn.

Khi đó, tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t) g(s,t) d(s,t)$ sẽ hội tụ và tích phân kép riêng của nó bị chặn.

Chứng minh kết quả 6.4.

Nhận thấy rằng, như trong phép chứng minh của Kết quả 6.3), f liên tục trên $[a,\infty)\times[c,\infty)$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $f(s,t)\to 0$ khi $(s,t)\to(\infty,\infty)$ và f là một hàm bị chặn.

Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon>0$.

Theo giả thiết (iii), tồn tại một số thực $s_0\in[a,\infty)$ sao cho

$$(s,t)\geq(s_0,s_0)\Rightarrow|f(s,s)|<\varepsilon,|f(s,c)|<\varepsilon,|f(a,t)|<\varepsilon.$$

Xét $(s,t)\geq(a,c)$ với $s\geq s_0$ và $t\leq s$.

Theo giả thiết (ii), chúng ta sẽ có $f(s,c)\leq f(s,t)\leq f(s,s)$ hoặc $f(s,c)\geq f(s,t)\geq f(s,s)$.

Nhận thấy rằng do cả $f(s,c)$ và $f(s,s)$ đều thuộc $(-\varepsilon,\varepsilon)$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $f(s,t)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Tương tự, nếu $(s,t)\geq(a,c)$ với $t\geq s_0$ và $s\leq t$ thì $f(s,t)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Như vậy, với mọi $(s,t)\geq(a,c)$ với $s\geq s_0$ hoặc $t\geq s_0$, chúng ta sẽ có $|f(s,t)|<\varepsilon$.

Do $\varepsilon>0$ là tùy ý nên điều này chỉ ra rằng $f(s,t)\to 0$ khi $(s,t)\to(\infty,\infty)$.

Ngoài ra, bằng cách xét $\varepsilon=1$ và $\alpha=sup\{|f(s,t)|: a\leq s\leq s_0$ và $c\leq t\leq s_0\}$, chúng ta sẽ thu được $|f(s,t)|\leq max\{1,\alpha\}$, điều này chứng tỏ rằng f là một hàm bị chặn.

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét từng số hạng một ở vế bên phải của Công thức tích phân kép từng phần (Kết quả 6.6). Kí hiệu G là tích phân kép riêng của $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t)$. Khi đó, G sẽ bị chặn bởi giả thiết (iv), và, do đó, tồn tại một số thực $\beta>0$ sao cho $|G(b,d)|\leq\beta$ với mọi $(b,d)\geq(a,c)$. Do $f(b,d)\to 0$ khi $(b,d)\to(\infty,\infty)$ nên điều này chỉ ra rằng $f(b,d)G(b,d)\to 0$ khi $(b,d)\to(\infty,\infty)$.

Ngoài ra, theo giả thiết (i), hàm f là song đơn điệu, và, do đó, Kết quả 4.2) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm nhiều biến**" chỉ ra rằng f_{xy} sẽ không đổi dấu trên $[a,\infty)\times[c,\infty)$.

Như vậy, với mọi $(b,d)\geq(a,c)$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}\left|f_{xy}(s,t)G(s,t)\right|d(s,t) &\leq \beta\left|\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{xy}(s,t)d(s,t)\right| \\ &= \beta\left|\int_a^b [f_x(s,d)-f_x(s,c)]ds\right| \\ &= \beta|f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c)|.\end{aligned}$$

Do hàm f bị chặn nên Kết quả 5.2) chỉ ra rằng tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f_{xy}(s,t)G(s,t)d(s,t)$ hội tụ tuyệt đối. Từ Kết quả 5.2), tích phân kép riêng của nó sẽ bị chặn, và, do đó, từ Kết quả 5.4), nó sẽ hội tụ về một số thực J.

Kế tiếp, do, với mỗi $t \in [c, \infty)$ cố định cho trước, hàm $s \mapsto f(s,t)$ là đơn điệu trên $[a, \infty)$ nên điều này chỉ ra rằng f_x có cùng dấu và, do đó, với mọi $(b,d) \geq (a,c)$,

$$\left|\int_a^b f_x(s,d)G(s,d)ds\right| \leq \beta\left|\int_a^b f_x(s,d)ds\right| = \beta|f(b,d) - f(a,d)|.$$

Do $f(a,d) \to 0$ khi $d \to \infty$ và $f(b,d) \to 0$ khi $(b,d) \to (\infty, \infty)$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $|f(b,d) - f(a,d)| \to 0$, và, do đó, $\int_a^b f_x(s,d)G(s,d)ds \to 0$ khi $(b,d) \to (\infty, \infty)$. Tương tự, điều này cũng chỉ ra rằng $\int_c^d f_y(b,t)G(b,t)dt \to 0$ khi $(b,d) \to (\infty, \infty)$.

Bằng cách sử dụng Công thức tích phân kép từng phần (Kết quả 6.3), chúng ta sẽ thu được

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(s,t)g(s,t)d(s,t) \to 0 + J + 0 + 0 = J \text{ khi } (b,d) \to (\infty, \infty).$$

Như vậy, tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)g(s,t)d(s,t)$ sẽ hội tụ. Ngoài ra, tích phân kép riêng của nó cũng bị chặn, bởi vì mỗi số hạng trong số bốn số hạng ở vế bên phải của Công thức tích phân kép từng phần đều bị chặn. □

Chúng ta cũng có thể rút ra những dạng tương tự của Phép thử Abel và Phép thử Dedekind cho các tích phân kép suy rộng. Do phép chứng minh của chúng đều có liên quan đến khái niệm hội tụ đều nên chúng ta chọn sẽ không xử lý những kết quả này. Phép thử Leibniz cho các chuỗi kép nêu trong Kết quả 3.10) không có bất kỳ một dạng tương tự đơn giản nào đối với các tích phân kép suy rộng, bởi vì về cơ bản hàm $g: [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(s,t) = \begin{cases} (-1)^{s+t} & \text{nếu } (s,t) \in \mathbb{N}^2, \\ 0 & \text{trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

là không liên tục.

Phép thử hội tụ cho các chuỗi lượng giác kép được đưa ra trong Kết quả 3.11) lại thừa nhận dạng tương tự sau đây đối với cái gọi là ***các tích phân Fourier kép***. Hai tích phân kép suy rộng trong hệ quả dưới đây đôi khi còn được gọi là ***tích phân Fourier sin kép*** và ***tích phân Fourier cosin kép***.

Kết quả 6.5. (Phép thử hội tụ cho các tích phân Fourier kép)

Giả sử $a, c \in \mathbb{R}$ và $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) của Kết quả 6.4). Giả sử θ và φ là các số thực khác không.

Khi đó, các tích phân kép suy rộng

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)sin(s\theta + t\varphi)d(s,t) \text{ và } \iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)cos(s\theta + t\varphi)d(s,t)$$

đều hội tụ.

Chứng minh kết quả 6.5.

Kí hiệu $g: [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $g(s,t) = sin(s\theta + t\varphi)$. Rõ ràng, g là liên tục. Xét tích phân kép riêng $G: [a, \infty) \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ của $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} g(s,t)d(s,t)$ xác định bởi $G(x,y) = \iint_{[a,x]\times[c,y]} g(s,t)\, d(s,t)$.

Bằng cách sử dụng Định lí Fubini trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.11) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**") và lưu ý rằng $\varphi \neq 0$ và $\theta \neq 0$, chúng ta sẽ thu được

$$|G(x,y)| = \frac{1}{|\varphi|}\left|\int_a^x [cos(s\theta + c\varphi) - cos(s\theta + y\varphi)]ds\right|$$

$$= \frac{1}{|\varphi||\theta|}|sin(x\theta + c\varphi) - sin(a\theta + c\varphi) + sin(x\theta + y\varphi) - sin(a\theta + y\varphi)|$$

$$\leq \frac{4}{|\varphi||\theta|}.$$

Như vậy, G là một hàm bị chặn. Do đó, từ Kết quả 6.4), tích phân kép suy rộng $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)$ $sin(s\theta + t\varphi)d(s,t)$ sẽ hội tụ. Tương tự, $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)cos(s\theta + t\varphi)d(s,t)$ cũng hội tụ. □

Nhận thấy rằng nếu $\theta = \varphi = 0$ thì $sin(s\theta + t\varphi) = 0$ và $cos(s\theta + t\varphi) = 1$ với mọi $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ và, do đó, tích phân Fourier sin kép $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)sin(s\theta + t\varphi)d(s,t)$ sẽ bằng 0, trong khi tích phân Fourier cosin kép $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)cos(s\theta + t\varphi)d(s,t)$ chính là tích phân kép $\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(s,t)d(s,t)$, nó có thể hội tụ hoặc không. Nếu một trong θ và φ bằng 0, trong khi cái còn lại không bằng 0, thì, tùy thuộc vào việc lựa chọn hàm f (thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) được đưa ra trong Kết quả 6.4), tích phân Fourier kép tương ứng có thể hội tụ tuyệt đối hoặc có thể hội tụ có điều kiện hoặc có thể phân kỳ.

Chẳng hạn,

Kí hiệu $f(s,t) = 1/(s+t)^p$ với $(s,t) \in [1,\infty) \times [1,\infty)$, trong đó $p \in \mathbb{R}$ với $p > 0$.

Khi đó, hàm f rõ ràng sẽ thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của Kết quả 6.4). Hơn nữa, chúng ta có thể nhận thấy rằng f là một hàm tăng song song. Ngoài ra, $f(s,s) \to 0$ và $f(s,1) \to 0$ khi $s \to \infty$, và $f(1,t) \to 0$ khi $t \to \infty$. Do đó, điều kiện (iii) của Kết quả 6.4) cũng được thỏa mãn.

Như vậy, nếu θ và φ là các số thực khác 0 thì, từ Kết quả 6.4), chúng ta nhận thấy rằng các tích phân kép suy rộng

$$\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{sin(s\theta + t\varphi)}{(s+t)^p} d(s,t) \text{ và } \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{cos(s\theta + t\varphi)}{(s+t)^p} d(s,t)$$

đều hội tụ. (Trên thực tế, cả hai tích phân kép suy rộng này đều hội tụ tuyệt đối nếu $p > 2$.)

7. Các loại tích phân kép suy rộng khác

Trong bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta đã phát triển lý thuyết tích phân kép của các hàm bị chặn xác định trên các tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Khi hàm hoặc tập con của $\mathbb{R}^2$ mà nó xác định trên đó là không bị chặn, chúng ta sẽ đi đến khái niệm về các tích phân kép suy rộng. Trong mục **5. Khái niệm tích phân kép suy rộng** và mục **6. Các phép thử hội tụ cho các tích phân kép suy rộng**, chúng ta đã thảo luận về lý thuyết tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ có dạng $[a,\infty)\times[c,\infty)$, trong đó $a,c\in\mathbb{R}$. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng điều này cũng có thể được sử dụng để định nghĩa một cách thích hợp các tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên một số tập con không bị chặn khác của $\mathbb{R}^2$ như $(-\infty,b]\times[c,\infty)$, $(-\infty,b]\times(-\infty,d]$, v.v…, trong đó $b,c,d\in\mathbb{R}$. Một vấn đề được đặt ra cho chúng ta như sau: "Nhưng còn các hàm xác định trên một tập con không bị chặn tùy ý của $\mathbb{R}^2$ hoặc các hàm không bị chặn xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thì sao?". Trong những trường hợp này, chúng ta đều không có bất kỳ một dạng tương tự đơn giản nào mà tích phân kép suy rộng có thể được định nghĩa là giới hạn của các tích phân kép từng phần của nó. Tuy nhiên, đối với một hàm $f: D\to\mathbb{R}$, trong đó $D\subseteq\mathbb{R}^2$, có vẻ sẽ tự nhiên nhất khi chúng ta xem xét một dãy thích hợp (D_n) gồm các tập con bị chặn của D sao cho f khả tích trên mỗi D_n và, sau đó, định nghĩa $\iint_D f$ như là giới hạn của $\iint_{D_n} f$ khi $n\to\infty$. Nhưng tất nhiên giới hạn này phải tồn tại và độc lập với cách chọn dãy (D_n). Chúng ta có thể nhận thấy rằng yêu cầu này sẽ dẫn đến một khái niệm hội tụ chặt chẽ hơn cả trong trường hợp tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên các tập con không bị chặn quen thuộc của $\mathbb{R}^2$ như $[a,\infty)\times[c,\infty)$. Khái niệm này, được gọi là tính hội tụ vô điều kiện, sẽ được thảo luận trong phần này của bài viết. Đầu tiên, chúng ta sẽ xem xét cái gọi là tích phân kép suy rộng loại một, tương ứng với trường hợp các hàm xác định trên các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$, và, sau đó, chúng ta sẽ xem xét tích phân kép suy rộng loại hai, tương ứng với trường hợp các hàm không bị chặn xác định trên các tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Trong suốt phần này của bài viết, chúng ta sẽ hạn chế các khảo sát chỉ ở các hàm liên tục vì mục đích đơn giản hóa vấn đề.

Tích phân kép suy rộng của các hàm xác định trên các tập con không bị chặn

Chúng ta sẽ bắt đầu với một ví dụ về một tập con không bị chặn D của $\mathbb{R}^2$ và một hàm liên tục $f: D\to\mathbb{R}$ với các dãy (D_n) và (E_n) gồm các tập con bị chặn của D sao cho f khả tích trên D_n cũng như trên E_n với mỗi $n\in\mathbb{N}$, $lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f$ tồn tại nhưng $lim_{n\to\infty}\iint_{E_n} f$ thì không.

Chẳng hạn,

Giả sử $D=[0,\infty)\times[0,\infty)$. Xét hàm $f: D\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t)=sin(s^2+t^2)$.

Khi đó, f liên tục trên D và, với $(x,y)\in D$,

$$F(x,y)=\iint_{[0,x]\times[0,y]} f(s,t)d(s,t)$$

$$=\int_0^x\left[\int_0^y (sins^2cost^2+coss^2sint^2)dt\right]ds$$

$$=\left(\int_0^x sins^2\,ds\right)\left(\int_0^y cost^2dt\right)+\left(\int_0^x coss^2\,ds\right)\left(\int_0^y sint^2dt\right).$$

Bằng cách đặt $u = s^2$ với $x \geq 1$, chúng ta sẽ có

$$\int_1^x sins^2\, ds = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{sinu}{\sqrt{u}}\, du.$$

Từ Phép thử hội tụ cho các tích phân Fourier (Kết quả 5.6) của bài viết "**Chuỗi vô hạn và Tích phân suy rộng**"), chúng ta nhận thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^\infty (sinu/\sqrt{u})du$ sẽ hội tụ. Do $\int_0^x sins^2\, ds = \int_0^1 sins^2\, ds + \int_1^x sins^2\, ds$ với mọi $x \geq 1$ nên tích phân suy rộng $\int_0^x sins^2\, ds$ sẽ hội tụ. Tương tự, tích phân suy rộng $\int_0^x coss^2\, ds$ cũng sẽ hội tụ. (Các tích phân suy rộng $\int_0^\infty sins^2\, ds$ và $\int_0^\infty coss^2\, ds$ được gọi là ***các tích phân Fresnel***. Mỗi tích phân này đều bằng $\sqrt{\pi/8}$.) Như vậy, chúng ta có thể kết luận được rằng $lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x,y)$ tồn tại. Ngoài ra, nếu, với $n \in \mathbb{N}$, chúng ta kí hiệu $D_n = \{(s,t) \in D: s \leq n$ và $t \leq n\}$ thì

$lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(s,t)d(s,t) = lim_{n\to\infty} F(n,n)$ sẽ tồn tại (và bằng với $\pi/4$).

Mặt khác, giả sử $E_n = \{(s,t) \in D: s^2 + t^2 \leq n\pi\}$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bằng cách chuyển sang tọa độ cực $s = rcos\theta$, $t = rsin\theta$, chúng ta nhận thấy rằng E_n sẽ được biến đổi thành $G_n = [0, \sqrt{n\pi}] \times [0, \pi/2]$ và, từ Kết quả 2.20) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**",

$$\iint_{E_n} f(s,t)d(s,t) = \iint_{G_n} f(rcos\theta, rsin\theta)rd(r,\theta)$$

$$= \left(\int_0^{\sqrt{n\pi}} rsinr^2 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}(1 - cosn\pi)$$

$$= \frac{\pi}{4}(1 - (-1)^n).$$

Điều này chỉ ra rằng $lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(s,t)d(s,t)$ sẽ không tồn tại.

Theo ví dụ trên và các thảo luận mà chúng ta đã thực hiện trong mục **2. Khái niệm chuỗi kép vô hạn** về các chuỗi kép hội tụ vô điều kiện, đầu tiên, chúng ta sẽ định nghĩa một lớp thích hợp các dãy gồm các tập con bị chặn của một tập không bị chặn và, sau đó, chúng ta sẽ đưa ra khái niệm về tính hội tụ vô điều kiện.

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Một dãy (D_n) gồm các tập con của D sẽ được gọi là một ***dãy vét cạn*** nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau:

(i) D_n là một tập bị chặn và ∂D_n là một tập có độ đo bằng 0 với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D_n \subseteq D_{n+1}$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

(iii) Mỗi tập con bị chặn của D đều được chứa trong một tập D_n với một số $n \in \mathbb{N}$ nào đó.

Chúng ta có thể quan sát thấy rằng các dãy (D_n) và (E_n) gồm các tập con của $[0,\infty) \times [0,\infty)$ được xem xét trong ví dụ trên là các dãy vét cạn.

Nói chung, nếu D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và nếu, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chúng ta kí hiệu

$$D_n = \{(s,t) \in D: |s| \leq n \text{ và } |t| \leq n\} \text{ và } E_n = \{(s,t) \in D: s^2 + t^2 \leq n^2\},$$

thì (D_n) sẽ là một dãy cạn kiệt, với điều kiện ∂D_n là một tập có độ đo bằng 0 với mỗi $n \in \mathbb{N}$, và (E_n) cũng sẽ là một dãy cạn kiệt, với điều kiện ∂E_n là một tập có độ đo bằng 0 với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác, nếu $D = \mathbb{Q}^2$ thì D sẽ không chấp nhận bất kỳ một dãy các tập con vét cạn nào. Để nhận thấy điều này, chúng ta có thể quan sát thấy rằng nếu một tập con E của D có chứa tập con bị chặn $([-1,1] \times [-1,1]) \cap \mathbb{Q}^2$ của D thì $\partial E \supseteq [-1,1] \times [-1,1]$ và, do đó, ∂E không thể có độ đo bằng 0.

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn các tập con và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D.

Khi đó, từ Kết quả 2.6) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biế**n", f sẽ khả tích trên mỗi số hạng của một dãy vét cạn gồm các tập con nào đó của D.

Chúng ta sẽ nói rằng tích phân kép suy rộng $\iint_D f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ vô điều kiện*** nếu tồn tại một số thực $I \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi dãy vét cạn (D_n) gồm các tập con của D, giới hạn

$$lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(s,t)d(s,t)$$

tồn tại và bằng I. (Giả thiết D luôn thừa nhận một dãy vét cạn gồm các tập con sao cho số thực I (nếu nó tồn tại) là duy nhất). Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết $\iint_D f(s,t)d(s,t) = I$ (hoặc đơn giản chỉ là $\iint_D f = I$).

Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng nếu các tích phân kép suy rộng $\iint_D f$ và $\iint_D g$ đều hội tụ vô điều kiện thì $\iint_D (f+g)$ và $\iint_D (rf)$ cũng sẽ hội tụ vô điều kiện với mọi $r \in \mathbb{R}$.

Chúng ta sẽ đưa ra dưới đây một điều kiện cần và đủ cho tính hội tụ vô điều kiện của một tích phân kép suy rộng của một hàm liên tục không âm xác định trên một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Phép chứng minh của điều kiện này cho chúng ta thấy tầm quan trọng của các điều kiện (ii) và (iii) trong định nghĩa của một dãy vét cạn.

Kết quả 7.1.

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn gồm các tập con nào đó, tạm giả sử là (D_n), và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục không âm bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D.

Khi đó, tích phân kép suy rộng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện khi và chỉ khi tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, trong trường hợp này, $\iint_D f = lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$.

Chứng minh kết quả 7.1.

Giả sử $\iint_D f$ hội tụ vô điều kiện. Khi đó, $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ sẽ tồn tại. Do một dãy các số thực hội tụ sẽ bị chặn nên sẽ tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, giả sử tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $I_n = \iint_{D_n} f$. Do f không âm nên (I_n) sẽ là một dãy các số thực tăng đơn điệu. Ngoài ra, (I_n) bị chặn trên bởi α. Như vậy, (I_n) sẽ hội tụ về $I = sup\{I_n: n \in \mathbb{N}\}$. Kế tiếp, giả sử (E_n) là một dãy vét cạn bất kì khác gồm các tập con của D và kí hiệu $J_n = \iint_{E_n} f$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, (J_n) cũng là một dãy các số thực tăng đơn điệu. Cố định một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$. Do E_m là một tập con bị chặn của D nên sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $E_m \subseteq D_{n_0}$ và, do đó, $J_m \leq I_{n_0} \leq I$. Điều này chứng tỏ rằng dãy (J_n) bị chặn và $J = sup\{J_n: n \in \mathbb{N}\} \leq I$. Bằng cách hoán đổi vai trò của (D_n) và (E_n), chúng ta nhận thấy rằng $I \leq J$. Như vậy, dãy (J_n) cũng sẽ hội tụ về I. Điều này cũng chứng tỏ rằng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện. □

Ví dụ ở phần đầu cho thấy rằng tính không âm của hàm f không thể bị loại bỏ khỏi mệnh đề trên. Để thu được dạng tương tự của Kết quả 7.1) đối với các hàm có thể đổi dấu, chúng ta sẽ cần đến các kết quả phụ trợ sau. Chúng ta nhắc lại rằng nếu S là một tập con của $\mathbb{R}^2$ và $f: S \to \mathbb{R}$ là một hàm nào đó thì các hàm $f^+, f^-: S \to \mathbb{R}$ sẽ được xác định bởi $f^+ = (|f| + f)/2$ và $f^- = (|f| - f)/2$. Quan sát thấy rằng f^+ và f^- là các hàm không âm, $f = f^+ - f^-$ và $|f| = f^+ + f^-$. Hơn nữa, f sẽ liên tục trên S khi và chỉ khi cả f^+ và f^- đều liên tục trên S. Ngoài ra, nếu S bị chặn thì f sẽ khả tích trên S khi và chỉ khi cả f^+ và f^- đều khả tích trên S.

Kết quả 7.2.

Giả sử S là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $f: S \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên S.

Khi đó, với mọi $\gamma \in \mathbb{R}$ cho trước với $\gamma > 2$, tồn tại một tập con T của S sao cho ∂T có độ đo bằng 0, f khả tích trên T, và

$$\iint_S |f| \leq \gamma \left| \iint_T f \right|.$$

Chứng minh kết quả 7.2.

Kí hiệu $\delta = \iint_S |f|$. Nếu $\delta = 0$ thì chúng ta sẽ đặt $T = \phi$. Giả sử $\delta \neq 0$. Do $\delta = \iint_S f^+ + \iint_S f^-$ nên chúng ta nhận thấy rằng $\iint_S f^+ \geq \delta/2$ hoặc $\iint_S f^- \geq \delta/2$.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $\iint_S f^+ \geq \delta/2$. Kí hiệu R là một hình chữ nhật nào đó chứa S và $g: R \to \mathbb{R}$ là hàm thu được từ f^+ bằng cách mở rộng S lên thành R như thường lệ, nghĩa là, bằng cách đặt nó bằng 0 trên R/S. Lưu ý rằng g là một hàm không âm và nếu $g(x, y) > 0$ với một $(x, y) \in R$ nào đó thì $(x, y) \in S$.

Nhận thấy rằng do $\gamma > 2$ và $\delta \neq 0$ nên

$$sup\{L(P,g): P \text{ là một phân hoạch của } R\} = L(g) = \iint_R g \geq \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{\gamma}.$$

Như vậy, tồn tại một phân hoạch $P = \{(x_i, y_j): i = 0,1,\dots,n \text{ và } j = 0,1,\dots,k\}$ của R sao cho $L(P,g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}(g)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) > \delta/\gamma$, trong đó $m_{ij}(g) = inf\{g(x,y): (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$ với $i = 0,1,\dots,n$ và $j = 0,1,\dots,k$.

Kí hiệu T là hợp của các hình chữ nhật con $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ của R sao cho $m_{ij}(g) > 0$. Do $g(x,y) > 0$ với mọi $(x,y) \in T$ nên chúng ta nhận thấy rằng $T \subseteq S$. Hơn nữa, ∂T có độ đo bằng 0, bởi vì nó bao gồm một số hữu hạn các đoạn thẳng. Ngoài ra, từ Kết quả 2.11) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", f sẽ khả tích trên T.

Bây giờ, với $(x,y) \in T$, $f^+(x,y) = g(x,y) > 0$ và, do đó, $f(x,y)$ sẽ dương và bằng với $g(x,y)$.

Như vậy,

$$\left|\iint_T f\right| = \iint_T f = \iint_T g.$$

Kế tiếp, giả sử $h: R \to \mathbb{R}$ là phần mở rộng của $g|_T$ trên R xác định bởi $h(x,y) = g(x,y)$ nếu $(x,y) \in T$ và $h(x,y) = 0$ nếu $(x,y) \in R/T$. Lưu ý rằng $0 \leq h \leq g$ và $m_{ij}(h) = m_{ij}(g)$ với mọi $i = 0,1,\dots,n$ và $j = 0,1,\dots,k$.

Như vậy,

$$\iint_T g = \iint_R h \geq L(P,h) > \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\iint_S |f|.$$

Điều này chỉ ra rằng $\gamma\left|\iint_T f\right| \geq \iint_S |f|$, như đã tuyên bố. □

Kết quả trên rất thú vị bởi vì nó đảo ngược dấu trong bất đẳng thức cơ bản $\left|\iint_S f\right| \leq \iint_S |f|$. Nếu biên của các tập $S^+ = \{(x,y) \in S: f(x,y) \geq 0\}$ và $S^- = \{(x,y) \in S: f(x,y) \leq 0\}$ đều có độ đo bằng 0 thì chúng ta có thể đặt $T = S^+$ hoặc $T = S^-$ và thay γ bởi 2 trong mệnh đề trên.

Kết quả 7.3.

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn gồm các tập con và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D. Giả sử $\iint_D f$ hội tụ vô điều kiện.

Khi đó, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_S |f| \leq \alpha$ với mọi tập con bị chặn S của D, với điều kiện ∂D có độ đo bằng 0.

Chứng minh kết quả 7.3.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\left|\iint_S f\right| \leq \beta$ với mọi tập con bị chặn S của D, với điều kiện ∂D có độ đo bằng 0. Giả sử điều này không xảy ra. Giả sử (D_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của D và kí hiệu $U_1 = D_1$.

Khi đó, tồn tại một tập con bị chặn T_1 của D sao cho ∂T_1 có độ đo bằng 0 và $\left|\iint_{T_1} f\right| \geq 1 + \iint_{U_1}|f|$, và, với mỗi $n \geq 2$, tồn tại một tập con bị chặn T_n của D sao cho ∂T_n có độ đo bằng 0 và

$$\left|\iint_{T_n} f\right| \geq n + \iint_{U_n} |f|, \text{trong đó } U_n = D_n \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{n-1}.$$

Kí hiệu $S_n = T_n \cup U_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Lưu ý rằng (S_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của D. Nếu, với $n \in \mathbb{N}$, chúng ta kí hiệu $V_n = S_n / T_n$ thì $V_n \subseteq U_n$ và ∂V_n là một tập có độ đo bằng 0.

Khi đó, từ Tính chất cộng miền (Kết quả 2.13) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta nhận thấy rằng

$$\left|\iint_{S_n} f\right| = \left|\iint_{T_n} f + \iint_{V_n} f\right| \geq \left|\iint_{T_n} f\right| - \iint_{U_n} |f| \geq n.$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f$ sẽ không thể tồn tại, mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại một số thực $\beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bất đẳng thức nêu ở phần đầu của phép chứng minh.

Kế tiếp, với mọi tập con bị chặn S cho trước của D sao cho ∂S có độ đo bằng 0, bằng cách sử dụng Kết quả 7.2) với $\gamma = 3$, chúng ta nhận thấy rằng sẽ tồn tại một tập con T của S sao cho ∂T có độ đo bằng 0, f khả tích trên T và $\iint_S |f| \leq 3\left|\iint_T f\right|$. Do $\left|\iint_T f\right| \leq \beta$ nên chúng ta sẽ thu được kết quả mong muốn khi đặt $\alpha = 3\beta$.□

Kết quả 7.4.

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn gồm các tập con, tạm giả sử là (D_n), và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D.

Khi đó, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện khi và chỉ khi tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n}|f| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, trong trường hợp này, $\iint_D f = lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$. Nói một cách tương đương, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện khi và chỉ khi $\iint_D |f|$ hội tụ vô điều kiện.

Chứng minh kết quả 7.4.

Giả sử $\iint_D f$ hội tụ vô điều kiện. Từ Kết quả 7.3), chúng ta sẽ tìm được một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n}|f| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, giả sử tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} |f| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do $0 \leq f^+ \leq |f|$ và $0 \leq f^- \leq |f|$ nên chúng ta sẽ thu được $\iint_{D_n} f^+ \leq \alpha$ và $\iint_{D_n} f^- \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bằng cách áp dụng Kết quả 7.1) cho các hàm f^+ và f^-, chúng ta nhận thấy rằng các tích phân kép suy rộng $\iint_D f^+$ và $\iint_D f^-$ đều hội tụ vô điều kiện. Do $f = f^+ - f^-$ nên điều này chỉ ra rằng $\iint_D f$ cũng sẽ hội tụ vô điều kiện.

Ngoài ra, $\iint_D f = lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$, bởi vì điều tương tự cũng đúng với f được thay thế bởi f^+ và f^-.

Cuối cùng, khẳng định cuối cùng có thể được rút ra từ Kết quả 7.1). □

Kết quả 7.5. (Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng loại một)

Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn gồm các tập con. Giả sử $f, g: D \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D và $|f| \leq g$.

Khi đó, nếu $\iint_D g$ hội tụ vô điều kiện thì $\iint_D f$ cũng sẽ hội tụ vô điều kiện.

Chứng minh kết quả 7.5.

Tính đúng đắn của khẳng định trên có thể được suy ra từ Kết quả 7.1) và Kết quả 7.4). □

Hệ quả tất yếu dưới đây có thể được xem như một dạng tương tự đối với các tích phân kép suy rộng của Kết quả 2.13).

Kết quả 7.6.

Giả sử $D = [a, \infty) \times [c, \infty)$, trong đó $a, c \in \mathbb{R}$, và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục nào đó.

Khi đó, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu nó hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh kết quả 7.6.

Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $D_n = [a, a+n] \times [c, c+n]$. Khi đó, (D_n) sẽ là một dãy vét cạn gồm các tập con của D. Do D là một tập đóng nên bao đóng của mọi tập con bị chặn của D đều được chứa trong D. Do đó, Kết quả 3.2.1) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm nhiều biến**" chứng tỏ rằng f bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của D. Ngoài ra, f sẽ khả tích trên $[a, x] \times [c, y]$ với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ với $x \geq a$ và $y \geq c$. Hơn nữa, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, nếu chúng ta đặt $n = max\{|x| + 1, |y| + 1\}$ thì $[a, x] \times [c, y] \subset D_n$. Như vậy, Kết quả 5.2) và Kết quả 7.1) chỉ ra rằng $\iint_D |f|$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu $\iint_D f$ hội tụ tuyệt đối. Do đó, theo Kết quả 7.4), $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu nó hội tụ tuyệt đối. □

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2: s^2 + t^2 \geq 1\}$ và $p \in \mathbb{R}$ với $p > 1$. Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s, t) = 1/(s^2 + t^2)^p$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $D_n = \{(s, t) \in D: s^2 + t^2 \leq n^2\}$, bằng cách chuyển sang các tọa độ cực, chúng ta nhận thấy rằng D_n sẽ chuyển về thành $G_n = [1, n] \times [-\pi, \pi]$ và, do đó,

$$\iint_{D_n} f = \iint_{G_n} r^{-2p} r d(r,\theta) = 2\pi \int_1^n r^{1-2p} dr = \frac{\pi}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{2p-2}}\right).$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \pi/(p-1)$. Do f không âm nên, theo Kết quả 7.1), $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện và bằng với $\pi/(p-1)$. Kế tiếp, xét hàm $g: R \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(s,t) = \sin(s^2+t^2)/(s^2+t^2)^p$. Khi đó, $|g| \leq f$ và, do đó, theo Kết quả 7.5), $\iint_D g$ sẽ hội tụ vô điều kiện.

(ii) Giả sử $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$. Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = e^{-(s^2+t^2)}$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $D_n = \{(s,t) \in D: s^2+t^2 \leq n^2\}$.

Như chúng ta có thể thấy,

$$\iint_{D_n} f = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-n^2}\right) \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

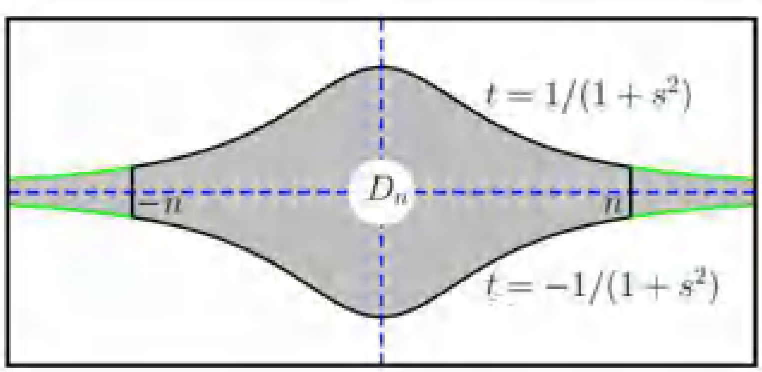
Như vậy, $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \pi/4$. Do f không âm nên Kết quả 7.1) cho thấy rằng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện (và, do đó, theo Kết quả 7.6), hội tụ tuyệt đối) và bằng với $\pi/4$.

Khái niệm về diện tích của một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$

Chúng ta sẽ mở rộng khái niệm diện tích lên cho các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Giả sử D là một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$ thừa nhận một dãy vét cạn (D_n) gồm các tập con của D. Khi đó, rõ ràng $Area(D_n)$ sẽ được xác định với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Nếu dãy $(Area(D_n))$ bị chặn thì, bằng cách áp dụng Kết quả 7.1) cho hàm 1_D, chúng ta nhận thấy rằng $lim_{n\to\infty} Area(D_n)$ tồn tại và độc lập với cách chọn của dãy vét cạn (D_n) gồm các tập con của D. Chúng ta sẽ định nghĩa ***diện tích của một tập con không bị chặn D của*** $\mathbb{R}^2$ là giới hạn này và kí hiệu nó lại bởi $A(D)$. Mặt khác, nếu dãy $(Area(D_n))$ không bị chặn thì, với mỗi dãy vét cạn (E_n) gồm các tập con của D, dãy $(Area(E_n))$ cũng sẽ không bị chặn; trong trường hợp này, chúng ta sẽ định nghĩa $A(D) = \infty$.

Chẳng hạn,

(i) Giả sử $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2: |t| \leq 1/(1+s^2)\}$. Kí hiệu $D_n = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2: |s| \leq n\}$ với $n \in \mathbb{N}$.



Hình vẽ minh họa các tập con bị chặn D_n của D.

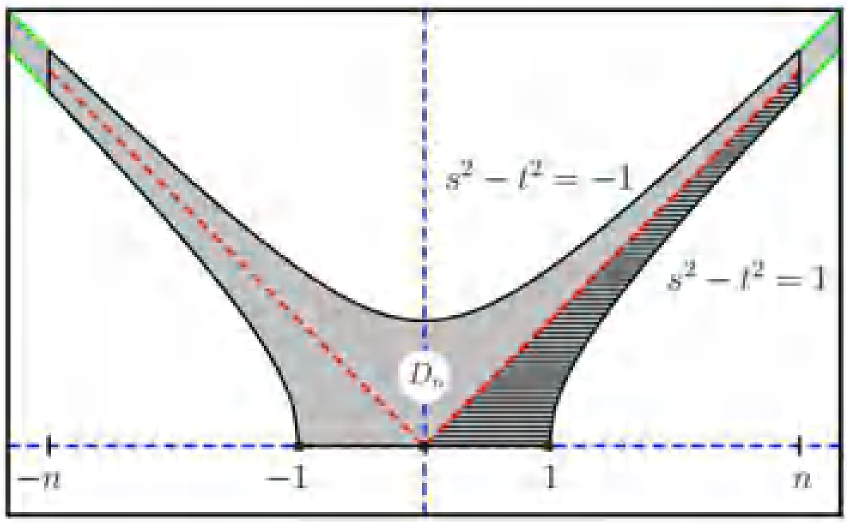
Rõ ràng (D_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của D.

Ngoài ra,

$$Area(D_n) = \iint_{D_n} 1_{D_n} = \int_{-n}^{n}\left(\int_{-1/(1+s^2)}^{1/(1+s^2)} dt\right) ds = 4\int_0^n \frac{ds}{1+s^2} = 4arctann.$$

Như vậy, $A(D) = lim_{n\to\infty} Area(D_n) = 2\pi$.

(ii) Giả sử $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0$ và $|s^2 - t^2| \leq 1\}$. Kí hiệu $D_n = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : |s| \leq n\}$ với $n \in \mathbb{N}$.



Hình vẽ minh họa các tập con bị chặn D_n của D.

Rõ ràng (D_n) là một dãy vét cạn gồm các tập con của D.

Ngoài ra,

$$\begin{aligned}
Area(D_n) &= \iint_{D_n} 1_{D_n} \\
&= 4\int_0^1 \left(\int_0^s dt\right) ds + 4\int_1^n \left(\int_{\sqrt{s^2-1}}^{s} dt\right) ds \\
&= 2 + 4\int_1^n \left(s - \sqrt{s^2-1}\right) ds \\
&\geq 2 + 4\int_1^n \frac{ds}{2s} \\
&= 2 + 2lnn.
\end{aligned}$$

Như vậy, dãy $(Area(D_n))$ sẽ không bị chặn và, do đó, $A(D) = \infty$.

Tích phân kép suy rộng của các hàm không bị chặn xác định trên các tập con bị chặn

Chúng ta cũng sẽ bắt đầu với một ví dụ về một tập con bị chặn D của $\mathbb{R}^2$ và một hàm liên tục không bị chặn $f: D \to \mathbb{R}$ với các dãy vét cạn tự nhiên (D_n) và (E_n) gồm các tập con của D sao cho f khả tích trên D_n cũng như E_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$, nhưng các giới hạn $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ và $lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f$ lại khác nhau.

Chẳng hạn,

Giả sử $D = [0,1] \times [0,1] \setminus \{(0,0)\}$. Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = (s^2 - t^2)/(s^2 + t^2)^2$.

Khi đó, ∂D có độ đo bằng không và f sẽ liên tục trên D.

Với mọi $(x, y) \neq (0,0)$ nằm trong D, kí hiệu

$$F(x,y) = \iint_{[x,1]\times[y,1]} f(s,t)d(s,t).$$

Theo Định lí Fubini trên các hình chữ nhật (Kết quả 1.11),

$$F(x,y) = \int_x^1 \left[\int_y^1 \frac{s^2 - t^2}{(s^2 + t^2)^2} dt\right] ds$$

$$= \int_x^1 \left[\frac{t}{s^2 + t^2}\right]_{t=y}^{t=1} ds$$

$$= \int_x^1 \frac{ds}{s^2 + 1} - \int_x^1 \frac{yds}{s^2 + y^2}.$$

Nếu $x \in (0, 1]$ thì, bằng cách thay thế $s = x/u$ trong tích phân thứ hai nêu ở trên,

$$F(x,x) = \int_x^1 \frac{ds}{s^2 + 1} + \int_1^x \frac{du}{1 + u^2} = 0 \text{ và } F(x,0) = \int_x^1 \frac{ds}{s^2 + 1}.$$

Giả sử $D_n = [1/n\,, 1] \times [1/n\,, 1]$ và $E_n = [1/n\,, 1] \times [0,1]$ với $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, f sẽ bị chặn trên D_n cũng như E_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$, và

$$\iint_{D_n} f(s,t)d(s,t) = F\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0 \text{ với mỗi } n \in \mathbb{N},$$

trong khi

$$\iint_{E_n} f(s,t)d(s,t) = F\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to \int_0^1 \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{\pi}{4} \text{ khi } n \to \infty.$$

Theo ví dụ trên và tương tự với khái niệm về một dãy vét cạn, bây giờ, chúng ta sẽ định nghĩa một lớp thích hợp gồm các tập con của một tập bị chặn. Lưu ý rằng nếu tập đã cho bị chặn thì điều kiện (iii) trong định nghĩa của một dãy vét cạn ngụ ý rằng tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các số hạng của dãy sẽ trùng với tập đã cho.

Với quan điểm này, chúng ta sẽ yêu cầu diện tích của các tập con tạo nên dãy sẽ tiến tới diện tích của tập đã cho.

Giả sử D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D có độ đo bằng 0. Một dãy (D_n) gồm các tập con của D được gọi là một ***dãy mở rộng*** nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau:

(i) ∂D_n có độ đo bằng 0 với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D_n \subseteq D_{n+1}$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $Area(D_n) \rightarrow Area(D)$ khi $n \longrightarrow \infty$.

Chúng ta có thể quan sát thấy rằng các dãy (D_n) và (E_n) gồm các tập con của $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(0,0)\}$ được xem xét trong ví dụ nêu ở trên đều là các dãy mở rộng. Ngược lại với các dãy vét cạn gồm các tập con của một tập không bị chặn, mọi tập con bị chặn D của $\mathbb{R}^2$ với biên có độ đo bằng 0 luôn thừa nhận một dãy mở rộng; thật vậy, chúng ta có thể xét dãy (D_n) xác định bởi $D_n = D$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục không bị chặn bị chặn (và, do đó, khả tích) trên mỗi số hạng của một dãy mở rộng gồm các tập con của D.

Chúng ta sẽ nói rằng tích phân kép suy rộng $\iint_D f(s,t)d(s,t)$ ***hội tụ vô điều kiện*** nếu tồn tại một số thực $I \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi dãy mở rộng (D_n) gồm các tập con của D sao cho f bị chặn trên mỗi D_n, giới hạn

$$lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(s,t)d(s,t)$$

tồn tại và bằng với I. (Giả thiết f bị chặn trên mỗi số hạng của một dãy mở rộng gồm các tập con của D sao cho số thực I (nếu nó tồn tại) là duy nhất). Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết $\iint_D f(s,t)d(s,t) = I$ (hoặc đơn giản chỉ là $\iint_D f = I$).

Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng nếu các tích phân kép suy rộng $\iint_D f$ và $\iint_D g$ đều hội tụ vô điều kiện thì $\iint_D (f+g)$ và $\iint_D (rf)$ cũng sẽ hội tụ vô điều kiện với mọi $r \in \mathbb{R}$.

Chúng ta sẽ đưa ra dưới đây một điều kiện cần và đủ cho tính hội tụ vô điều kiện của một tích phân kép suy rộng của một hàm liên tục không âm không bị chặn xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$. Phép chứng minh của điều kiện này cũng cho chúng ta thấy tầm quan trọng của các điều kiện (ii) và (iii) trong định nghĩa của một dãy mở rộng.

Kết quả 7.7.

Giả sử D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D có độ đo bằng 0 và $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục không âm không bị chặn. Giả sử D thừa nhận một dãy mở rộng (D_n) gồm các tập con của D sao cho f bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, trong trường hợp này, $\iint_D f = lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$.

Chứng minh kết quả 7.7.

Giả sử $\iint_D f$ hội tụ vô điều kiện. Khi đó, $lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f$ sẽ tồn tại. Do một dãy các số thực hội tụ sẽ bị chặn nên sẽ tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, giả sử tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} f \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $I_n = \iint_{D_n} f$. Do f không âm nên (I_n) sẽ là một dãy các số thực tăng đơn điệu. Ngoài ra, nó cũng sẽ bị chặn trên bởi α. Như vậy, (I_n) sẽ hội tụ về $I = sup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Kế tiếp, giả sử (E_n) là một dãy mở rộng bất kì khác gồm các tập con của D sao cho f bị chặn trên E_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và kí hiệu $J_n = \iint_{E_n} f$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, (J_n) cũng sẽ là một dãy các số thực tăng đơn điệu. Cố định một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ và chọn ra một số thực $\beta_m > 0$ sao cho $f(s,t) \leq \beta_m$ với mọi $(s,t) \in E_m$. Giả sử cho trước một số thực $\varepsilon > 0$. Do $Area(D_n) \to Area(D)$ khi $n \to \infty$ nên sẽ tồn tại một số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $Area(D) - Area(D_{n_0}) < \varepsilon/\beta_m$. Theo Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", $\partial(D \setminus D_{n_0})$, $\partial(E_m \setminus D_{n_0})$, $\partial(E_m \cap D_{n_0})$ đều có độ đo bằng 0. Ngoài ra, Kết quả 2.11) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**" cho thấy rằng f sẽ khả tích trên $\partial(E_m \setminus D_{n_0})$ và trên $\partial(E_m \cap D_{n_0})$.

Như vậy, từ Tính chất cộng miền (Kết quả 2.13) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**"), chúng ta sẽ thu được

$$\iint_{E_m} f = \iint_{E_m \cap D_{n_0}} f + \iint_{E_m \setminus D_{n_0}} f.$$

Nhưng do $Area(D \setminus D_{n_0}) = Area(D) - Area(D_{n_0}) < \varepsilon/\beta_m$ nên Bất đẳng thức cơ bản cho các tích phân kép (Kết quả 2.10) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**") cho thấy rằng

$$\iint_{E_m \setminus D_{n_0}} f \leq \beta_m Area(E_m \setminus D_{n_0}) \leq \beta_m Area(D \setminus D_{n_0}) < \beta_m \frac{\varepsilon}{\beta_m} = \varepsilon.$$

Như vậy,

$$\iint_{E_m} f < \iint_{E_m \cap D_{n_0}} f + \varepsilon \leq \iint_{D_{n_0}} f + \varepsilon \leq I + \varepsilon.$$

Do bất đẳng thức $\iint_{E_m} f < I + \varepsilon$ đúng với mọi $\varepsilon > 0$ nên chúng ta có thể dễ dàng suy ra rằng $J_m = \iint_{E_m} f \leq I$. Điều này chứng tỏ rằng dãy (J_n) bị chặn và $J = sup\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \leq I$. Bằng cách hoán đổi vai trò của (D_n) và (E_n), chúng ta nhận thấy rằng $I \leq J$. Như vậy, dãy (J_n) cũng sẽ hội tụ về I. Điều này cũng chứng tỏ rằng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện. □

Ví dụ ở trên cũng cho thấy rằng tính không âm của hàm f không thể bị loại bỏ khỏi mệnh đề trên. Để thu được dạng tương tự của Kết quả 7.7) đối với các hàm có thể đổi dấu, chúng ta có thể tiến hành tương tự như cách đã làm cho trường hợp các hàm xác định trên các tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^2$.

Kết quả 7.8.

Giả sử D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D có độ đo bằng 0 và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục không bị chặn. Giả sử D thừa nhận một dãy mở rộng (D_n) gồm các tập con của D sao cho f bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Giả sử $\iint_D f$ hội tụ vô điều kiện.

Khi đó, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\iint_S |f| \leq \alpha$$

với mọi tập con S của D sao cho ∂S có độ đo bằng 0 và f bị chặn trên S.

Chứng minh kết quả 7.8.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như chứng minh của Kết quả 7.3). □

Kết quả 7.9.

Giả sử D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D có độ đo bằng 0 và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục không bị chặn. Giả sử D thừa nhận một dãy mở rộng (D_n) gồm các tập con của D sao cho f bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\iint_{D_n} |f| \leq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, trong trường hợp này, $\iint_D f = lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$. Nói một cách tương đương, $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện nếu và chỉ nếu $\iint_D |f|$ hội tụ vô điều kiện.

Chứng minh kết quả 7.9.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như chứng minh của Kết quả 7.4). □

Kết quả 7.10. (Phép thử so sánh cho các tích phân kép suy rộng loại hai)

Giả sử D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ sao cho ∂D có độ đo bằng 0 và $f, g: D \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục không bị chặn sao cho $|f| \leq g$. Giả sử D thừa nhận một dãy mở rộng (D_n) gồm các tập con của D sao cho cả f và g đều bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, nếu $\iint_D g$ hội tụ vô điều kiện thì $\iint_D f$ cũng sẽ hội tụ vô điều kiện.

Chứng minh kết quả 7.10.

Tính đúng đắn của khẳng định trên có thể được suy ra từ Kết quả 7.7) và Kết quả 7.9). □

Chẳng hạn,

Giả sử $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < s^2 + t^2 \leq 1\}$ và, với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $D_n = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : (1/n^2) \leq s^2 + t^2 \leq 1\}$. Khi đó, D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^2$, ∂D có độ đo bằng 0 và (D_n) là một dãy mở rộng gồm các tập con của D.

(i) Giả sử $p \in \mathbb{R}$ với $0 < p < 1$. Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = 1/(s^2+t^2)^p$. Khi đó, f sẽ là một hàm liên tục không âm không bị chặn trên D và f sẽ bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Bằng cách chuyển sang tọa độ cực và Kết quả 2.20) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta có thể nhận thấy rằng

$$\iint_{D_n} f = \iint_{[1/n,1]\times[-\pi,\pi]} r^{-2p} r d(r,\theta)$$

$$= 2\pi \int_{1/n}^{1} r^{1-2p} dr$$

$$= \frac{\pi}{1-p}\left(1 - \frac{1}{n^{2-2p}}\right).$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \pi/(1-p)$. Do f không âm nên Kết quả 7.7) chứng tỏ rằng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện và bằng với $\pi/(1-p)$.

(ii) Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(s,t) = -\ln(s^2+t^2)$. Khi đó, f sẽ là một hàm liên tục không âm không bị chặn trên D và nó cũng sẽ bị chặn trên D_n với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

Bằng cách chuyển sang tọa độ cực và Kết quả 2.20) của bài viết "**Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến**", chúng ta có thể nhận thấy rằng

$$\iint_{D_n} f = -2 \iint_{[1/n,1]\times[-\pi,\pi]} (lnr) r d(r,\theta)$$

$$= -4\pi \int_{1/n}^{1} r(lnr) dr$$

$$= \pi[r^2 - 2r^2(lnr)]_{r=1/n}^{r=1}$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2lnn}{n^2}\right).$$

Như vậy, $lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \pi$. Do f không âm nên Kết quả 7.7) cũng chứng tỏ rằng $\iint_D f$ sẽ hội tụ vô điều kiện và bằng với π.

Trước khi chúng ta kết thúc phần này của bài viết, chúng ta nhận xét rằng "tích phân bội ba" của các hàm xác định trên một tập con không bị chặn của $\mathbb{R}^3$ và của các hàm không bị chặn xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^3$ cũng có thể được xử lý theo đúng cái cách mà chúng ta đã làm khi xử lý các "tích phân kép" trong phần này của bài viết.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

[01]. Sudhir R.Ghorpade, Balmohan V.Limaye, A course in Multivariable Calculus and Analysis, ????.

[02]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 2 – GIẢI TÍCH 2, ??/??/????.

[03]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập II, ??/??/???.

[04]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm một biến, 10/01/2023.

[05]. Trương Phước Nhân, Phép tính vi phân hàm một biến, 21/01/2023.

[06]. Trương Phước Nhân, Phép tính tích phân Riemann hàm một biến, 30/07/2021.

[07]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm nhiều biến, 03/02/2023.

[08]. Trương Phước Nhân, Phép tính vi phân hàm nhiều biến, 06/05/2023.

[09]. Trương Phước Nhân, Phép tính tích phân Riemann hàm nhiều biến, 01/08/2021.

[10]. Trương Phước Nhân, Chuỗi vô hạn và Tích phân kép suy rộng, 01/07/2023.