Phép tính vi phân hàm một biến (2)

Trương Phước Nhân, 18/09/2023

Chúng ta có thể nhận thấy rằng khái niệm vi phân có hiệu quả rất rõ rệt trong việc nghiên cứu các tính chất hình học của các hàm số. Chúng ta cũng đã thấy rằng khái niệm đạo hàm hữu ích như thế nào trong việc xác định tính đơn điệu, tính lồi và tính lõm của các hàm khả vi xác định trên một khoảng. (xem lại bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**") Chúng ta sẽ nghiên cứu các ứng dụng tương tự như vậy trong bài viết này.

Đầu tiên, trong mục **1. Giá trị cực tiểu và cực đại tuyệt đối**, chúng ta sẽ xem xét cách mà người ta có thể xác định giá trị cực tiểu và giá trị cực đại tuyệt đối (hoặc toàn cục) của một lớp lớn các hàm. Kế tiếp, trong mục **2. Cực trị địa phương và điểm uốn**, chúng ta sẽ mô tả một số phép thử hữu ích để xác định cực tiểu và cực đại cục bộ của một hàm và phát hiện các điểm uốn. Bằng cách này, chúng ta sẽ có thể xác định được các điểm lên và xuống, các đỉnh và đáy cũng như các điểm uốn trên đồ thị của một hàm giá trị thực. Thông tin này cực kỳ hữu ích trong việc phác thảo đường cong đồ thị, nghĩa là, trong việc vẽ đồ thị của các hàm giá trị thực và xác định các đặc điểm chính của chúng. Trong mục **3. Phép xấp xỉ tuyến tính và phép xấp xỉ bậc hai**, chúng ta sẽ xem xét lại ý tưởng xấp xỉ các hàm bởi các hàm đơn giản hơn mà chúng ta đã thảo luận trong bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**" liên quan đến Định lí giá trị trung bình và Công thức Taylor. Ở đây, chúng ta sẽ thảo luận chi tiết hơn về các phương pháp tính gần đúng được sử dụng rộng rãi nhất, cụ thể là các phép xấp xỉ tuyến tính và phép xấp xỉ bậc hai. Cuối cùng, trong mục **4. Phương pháp Picard và phương pháp Newton**, chúng ta sẽ thảo luận phương pháp Picard để tìm các điểm bất động của các hàm và phương pháp Newton để tìm các không điểm của các hàm.

1. Giá trị cực tiểu và cực đại tuyệt đối

Chúng ta đã thấy trong Kết quả 3.2.1) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**" rằng một hàm liên tục giá trị thực xác định trên một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ bị chặn và đạt được các chặn của nó. Nói cách khác, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ là một tập con đóng và bị chặn và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thì giá trị cực tiểu tuyệt đối và giá trị cực đại tuyệt đối của f trên D, cụ thể là,

$$m = inf\{f(x): x \in D\} \text{ và } M = sup\{f(x): x \in D\},$$

tồn tại và, hơn nữa, tồn tại các số thực $r, s \in D$ sao cho $m = f(r)$ và $M = f(s)$.

Một câu hỏi nảy sinh một cách tự nhiên như sau: "Nếu biết trước hàm f thì làm thể nào để chúng ta có thể tìm được các giá trị cực trị tuyệt đối m và M, cũng như các điểm r và s nơi mà chúng đạt được?" Hóa ra là chúng ta hoàn toàn có thể thu hẹp đáng kể việc tìm kiếm các điểm đạt cực trị tuyệt đối nếu chúng ta xét đạo hàm của f. Để làm cho điều này trở nên chính xác, trước tiên chúng ta hãy đưa ra một vài định nghĩa như sau.

Giả sử cho trước $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \to \mathbb{R}$, một điểm $c \in D$ sẽ được gọi là một ***điểm tới hạn của f*** nếu c là một điểm trong của D sao cho f không khả vi tại c hoặc f khả vi tại c và $f'(c) = 0$.

Giả sử cho trước $D \subseteq \mathbb{R}$, một điểm c sẽ được gọi là một điểm biên của D nếu, với mọi $r > 0$, khoảng $(c - r, c + r)$ có chứa một điểm thuộc D cũng như một điểm không thuộc D.

Chẳng hạn, nếu $D = [a, b]$ thì các đầu mút a và b đều là các điểm biên của D, trong khi các điểm của (a, b) là các điểm trong của D.

Kết quả 1.1.

Giả sử D là một tập con đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Khi đó, giá trị cực tiểu tuyệt đối cũng như giá trị cực đại tuyệt đối của f sẽ đạt được tại một điểm tới hạn nào đó của f hoặc tại một điểm biên nào đó của D.

Chứng minh kết quả 1.1.

Từ Kết quả 3.2.1), f sẽ đạt được giá trị cực tiểu tuyệt đối cũng như giá trị cực đại tuyệt đối của nó trên D. Giả sử $c \in D$ là một điểm mà tại đó f đạt được cực tiểu tuyệt đối. Giả sử c là một điểm trong của D. Khi đó, rõ ràng f sẽ đạt được cực tiểu địa phương tại c. Do đó, nếu f khả vi tại c thì, theo Kết quả 2.1) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**", $f'(c) = 0$. Điều này chỉ ra rằng c phải là một điểm tới hạn của D. Như vậy, c hoặc sẽ là một điểm tới hạn của f hoặc sẽ là một điểm biên của D.

Lập luận tương tự cho điểm mà tại đó f đạt được cực đại tuyệt đối. □

Trên thực tế, số các điểm tới hạn của một hàm và số các điểm biên của miền xác định của nó là rất ít. Như vậy, theo mệnh đề nêu ở trên, chúng ta sẽ có một công thức đơn giản để xác định các giá trị cực trị tuyệt đối và các điểm mà tại đó chúng đạt được. Cụ thể, chúng ta sẽ xác định các điểm tới hạn của hàm cho trước và các điểm biên của miền xác định của nó, và, sau đó, tính các giá trị tại các điểm này và so sánh các giá trị này với nhau. Giá trị lớn nhất trong số chúng chính là giá trị cực đại tuyệt đối, trong khi giá trị nhỏ nhất chính là giá trị cực tiểu tuyệt đối. Công thức này sẽ được minh họa bởi các ví dụ sau.

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } -1 \le x \le 0, \\ 2x^3 - 4x^2 + 2x & \text{nếu } 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Đầu tiên, từ Kết quả 3.1.4) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**", chúng ta có thể nhận thấy rằng f sẽ liên tục trên $[-1,2]$.

Kế tiếp, do

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } -1 \le x < 0, \\ 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x-1)(x-1) & \text{nếu } 0 < x \le 2, \end{cases}$$

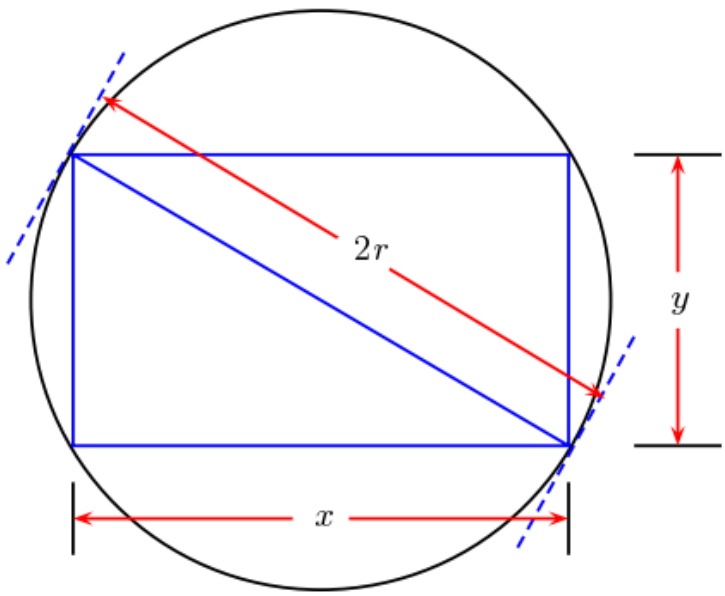
nên f sẽ không khả vi tại 0, bởi vì $f'_-(0) = -1$ và $f'_+(0) = 2$.

Do đó, $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$ và $x = 1$. Điều này chỉ ra rằng $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$ là các điểm tới hạn duy nhất của f. Các điểm biên của miền xác định $[-1,2]$ của chúng ta là -1 và 2. Như vậy, chúng ta có thể lập được bảng dưới đây.

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$f(x)$	1	0	$\frac{8}{27}$	0	4

Từ đó, chúng ta có thể kết luận được rằng giá trị cực tiểu tuyệt đối của f là 0, đạt được tại $x = 0$ cũng như tại $x = 1$, trong khi giá trị cực đại tuyệt đối của f là 4, đạt được tại $x = 2$. Lưu ý rằng mặc dù f có cực đại cục bộ tại $x = \frac{1}{3}$, nhưng nó lại không phải là cực đại tuyệt đối của f.

(ii) Chúng ta sẽ chứng minh rằng, trong số tất cả các hình chữ nhật nội tiếp trong một hình tròn cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất.



Hình vẽ minh họa một hình chữ nhật nội tiếp trong một đường tròn bán kính r.

Kí hiệu r là bán kính của đường tròn cho trước. Nếu chúng ta kí hiệu x là chiều dài và y là chiều rộng của hình chữ nhật nội tiếp thì $0 \leq x, y \leq 2r$ và $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Kế tiếp, diện tích hình chữ nhật $A(r)$ có thể được biểu diễn lại dưới dạng một hàm $A: [0,2r] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $A(x) = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2}$.

Để tính $A'(x)$, chúng ta có thể sử dụng quá trình "vi phân ngầm".

Chẳng hạn, phương trình $x^2 + y^2 = 4r^2$ ngụ ý rằng

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

và, do đó, tại những điểm $y \neq 0$, nghĩa là, $x \neq 2r$, chúng ta sẽ thu được

$$\frac{dA}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^2}{y} = \frac{y^2 - x^2}{y} = \frac{4r^2 - 2x^2}{y}.$$

Với $0 \leq x < 2r$, chúng ta sẽ có

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}r.$$

Như vậy, $x = \sqrt{2}r$ là điểm tới hạn duy nhất của A, nên chúng ta có thể lập được bảng sau:

x	0	$\sqrt{2}\,r$	$2r$
$A(x)$	0	$2r^2$	0

Từ đó, chúng ta có thể kết luận được rằng diện tích $A(x)$ của hình chữ nhật sẽ lớn nhất khi $x = y = \sqrt{2}r$, nghĩa là, khi hình chữ nhật là một hình vuông.

2. Cực trị địa phương và điểm uốn

Cực trị địa phương

Nói một cách trực quan, một giá trị cực đại cục bộ của một hàm sẽ tương ứng với một đỉnh trong đồ thị của nó, trong khi giá trị cực tiểu cục bộ của một hàm lại giống như một đáy trong đồ thị của nó. Chúng ta hãy nhắc lại một số định nghĩa hình thức đã trình bày trong bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**". Cụ thể, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D thì $f: D \to \mathbb{R}$ sẽ được gọi là ***đạt cực tiểu cục bộ tại c*** nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho

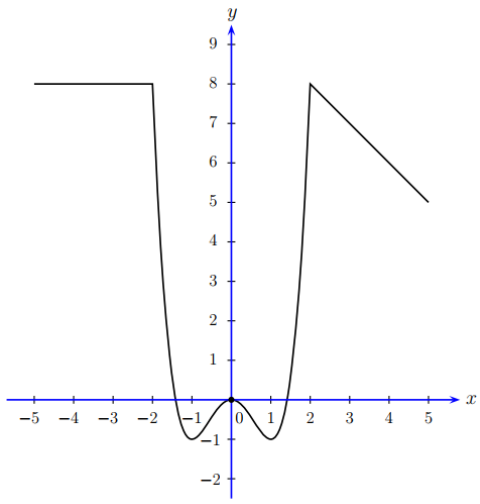
$$(c - \delta, c + \delta) \subseteq D \text{ và } f(x) \geq f(c) \text{ với mọi } x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Tương tự, f sẽ được gọi là ***đạt cực đại cục bộ tại c*** nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho

$$(c - \delta, c + \delta) \subseteq D \text{ và } f(x) \leq f(c) \text{ với mọi } x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Ngoài ra, nhắc lại rằng f sẽ được gọi là ***đạt cực tiểu cục bộ nghiêm ngặt*** (hoặc ***đạt cực đại cục bộ nghiêm ngặt tại c***) ***tại c*** nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $(c - \delta, c + \delta) \subseteq D$ và $f(x) > f(c)$ (hoặc $f(x) < f(c)$) với mọi $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$.

Chẳng hạn, xét hàm có đồ thị như trong hình vẽ bên dưới đây.



Hình vẽ minh họa các giá trị cực trị cục bộ dưới dạng các đỉnh và các đáy.

Trên thực tế, đây là đồ thị của hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{nếu } x \leq -2, \\ x^4 - 2x^2 & \text{nếu } x \in (-2,2), \\ 10 - x & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

Chúng ta có thể nhận thấy rằng, tại $x = -1$ và $x = 1$, hàm đạt cực tiểu cục bộ nghiêm ngặt, trong khi, tại $x = 0$ và $x = 2$, nó đạt cực đại cục bộ nghiêm ngặt. Tại $x = -2$, nó đạt cực đại cục bộ nghiêm ngặt. (Trên thực tế, nó đạt cực đại cục bộ (không nghiêm ngặt) cũng như đạt cực tiểu cục bộ (không nghiêm ngặt) tại mọi điểm trong $(-\infty, -2)$), bởi vì hàm hằng trên khoảng này, nghĩa là, đồ thị của nó là một điểm phẳng.)

Để hiểu được mối quan hệ giữa đạo hàm và các khái niệm cực tiểu (cực đại) cục bộ, chúng ta cần xem xét hành vi của đồ thị trên xung quanh các đỉnh hoặc các đáy (hoặc thậm chí là một điểm phẳng) của nó. Chúng ta nhận thấy rằng, khi chúng ta tiếp cận đáy (cực tiểu cục bộ) từ bên trái, đồ thị giảm dần và các tiếp tuyến có độ dốc âm; trong khi, khi chúng ta tiếp cận nó từ bên phải, đồ thị tăng dần và các tiếp tuyến có độ dốc dương. Tương tự, khi chúng ta tiếp cận một đỉnh (cực đại cục bộ) từ bên trái, đồ thị tăng dần và các tiếp tuyến có độ dốc dương; trong khi, khi chúng ta tiếp cận nó từ bên phải, đồ thị giảm dần và các tiếp tuyến có độ dốc âm. Trong trường hợp tiếp tuyến xác định tại một đỉnh hoặc một đáy, nó nhất thiết phải nằm ngang, nghĩa là, nó có độ dốc bằng 0. Chúng ta đã thấy công thức giải tích của tính chất này trong Kết quả 2.1) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**". Kết quả này chỉ ra rằng nếu $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại một điểm trong c của $D \subseteq \mathbb{R}$ thì sự triệt tiêu của $f'(c)$ sẽ là một **điều kiện cần để f có một cực trị địa phương tại c**. Chúng ta có thể nhận thấy rằng điều kiện này không đủ để đảm bảo có một cực trị cục bộ (chẳng hạn, xét hàm $f(x) = x^3$ với $x \in \mathbb{R}$; $c = 0$). Tuy nhiên, những quan sát trên về hành vi của đồ thị lại dẫn chúng ta đến một số điều kiện đủ để đảm bảo có một cực trị cục bộ. Đầu tiên, chúng ta sẽ phát biểu kết quả cho các cực tiểu cục bộ.

Kết quả 2.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, c là một điểm trong của D và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ nào đó.

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau:

(i) (**Phép thử đạo hàm bậc nhất cho cực tiểu cục bộ**) Nếu f liên tục tại c và, hơn nữa,

(a) f khả vi trên $(c - r, c) \cup (c, c + r)$ với một số $r > 0$ nào đó,

(b) tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (c - r, c)$, và $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (c, c + r)$,

thì f sẽ đạt cực tiểu cục bộ tại c.

(ii) (**Phép thử đạo hàm bậc hai cho cực tiểu cục bộ**) Nếu f khả vi hai lần tại c, $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$ thì f sẽ đạt cực tiểu cục bộ tại c.

Chứng minh kết quả 2.1.

(i) Nếu các điều kiện trong (i) được thỏa mãn và tồn tại một số thực $\delta > 0$ giống như trong tiểu phần (b) của (i) thì, theo các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 3.1) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**", chúng ta nhận thấy rằng f giảm trên $(c-\delta, c)$ và tăng trên $(c, c+\delta)$. Kế tiếp, tính liên tục của f tại c chỉ ra rằng $f(x) \to f(c)$ khi $x \to c$ (Kết quả 3.3.1) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**"), và, do đó, nó cũng chỉ ra rằng $f(x) \geq f(c)$ với mọi $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Như vậy, f sẽ đạt cực tiểu cục bộ tại c.

(ii) Nếu $f''(c)$ tồn tại thì chúng ta đã ngầm định rằng f' tồn tại trên $(c-r, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó với $(c-r, c+r) \subseteq D$.

Kế tiếp, nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$ thì

$$lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{x-c} = lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = f''(c) > 0.$$

Như vậy, theo khẳng định (i) của Kết quả 3.3.3) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**", tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $\delta < r$ và

$$\frac{f'(x)}{x-c} > 0 \text{ với mọi } x \in (c-r, c)\cup(c, c+r).$$

Theo quan điểm này, chúng ta nhận thấy rằng f sẽ thỏa mãn các điều kiện nêu trong (i). Như vậy, f sẽ đạt cực đại địa phương tại c. □

Kết quả tương ứng cho các cực đại cục bộ cũng được thực hiện tương tự và được nêu ra dưới đây để dễ tham khảo.

Kết quả 2.2.

Giả sử c là một điểm trong của D và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ nào đó.

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau:

(i) (**Phép thử đạo hàm bậc nhất cho cực đại cục bộ**) Nếu f liên tục tại c và, hơn nữa,

(a) f khả vi trên $(c-r, c)\cup(c, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó,

(b) tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (c-r, c)$, và $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (c, c+r)$,

thì f sẽ đạt cực đại cục bộ tại c.

(ii) (**Phép thử đạo hàm bậc hai cho cực đại cục bộ**) Nếu f khả vi hai lần tại c, $f'(c) = 0$ và $f''(c) < 0$ thì f sẽ đạt cực đại cục bộ tại c.

Chứng minh kết quả 2.2.

Phép chứng minh được thực hiện tương tự như chứng minh của Kết quả 2.1). □

Nhận xét rằng,

(i) Một cách không chính thức, nhưng dễ nhớ, để ghi nhớ Phép thử đạo hàm bậc nhất (đối với cực tiểu cục bộ cũng như cực đại cục bộ) như sau:

$$f' \text{ thay đổi từ } - \text{ thành } + \text{ tại } c \Rightarrow f \text{ sẽ đạt cực tiểu cục bộ tại } c;$$

$$f' \text{ thay đổi từ } + \text{ thành } - \text{ tại } c \Rightarrow f \text{ sẽ đạt cực đại cục bộ tại } c.$$

Tuy nhiên, lưu ý rằng ngoài tính khả vi trong một khoảng mở xung quanh c, ngoại trừ có thể tại c, tính liên tục tại điểm c là cần thiết. Chẳng hạn, chúng ta có thể sử dụng phép thử này để chỉ ra rằng hàm giá trị tuyệt đối đạt cực tiểu cục bộ tại 0. Tuy nhiên, nó không thể được sử dụng để kiểm tra xem hàm phần nguyên có đạt cực trị cục bộ tại $x = 0$ hay không.

(ii) Phép thử đạo hàm bậc hai (đối với cực tiểu cục bộ cũng như cực đại cục bộ) có giá trị trong một giả thiết hạn chế, cụ thể là khả vi hai lần và thường cần kiểm tra (giá trị của cả hai đạo hàm) nhiều hơn. Nhưng nó có ưu điểm là ngắn gọn và dễ nhớ.

(iii) Mặc dù Phép thử đạo hàm bậc nhất và Phép thử đạo hàm bậc hai cung cấp cho chúng ta các điều kiện đủ cho cực trị cục bộ, nhưng cả hai điều không phải là một điều kiện cần, nghĩa là, một hàm có thể đạt cực trị cục bộ tại một điểm nhưng vẫn có thể không thỏa mãn bất kỳ giả thiết nào trong số hai phép thử này. Trên thực tế, chúng ta đã thấy trong bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**" ví dụ về một hàm đạt cực tiểu cục bộ tại 0 nhưng không giảm trên $(-\delta, 0]$ và tăng trên $[0, \delta)$ với mọi $\delta > 0$ (hàm zigzag tuyến tính từng phần). Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng hàm này không thỏa mãn giả thiết của Phép thử đạo hàm bậc nhất cũng như của Phép thử đạo hàm bậc hai, mặc dù nó đạt cực tiểu cục bộ tại 0. Các phản ví dụ khác cũng xuất hiện trong các ví dụ (ii) và (iii) bên dưới. Lưu ý rằng phần âm của các hàm này cung cấp cho chúng ta các ví dụ về các hàm đạt cực đại cục bộ nhưng không thỏa mãn giả thiết của bất kỳ phép thử nào.

(iv) Nếu, trong phần con (b) của Phép thử đạo hàm bậc nhất cho cực tiểu cục bộ, chúng ta thay đổi các bất đẳng thức "$f'(x) \leq 0$" và "$f'(x) \geq 0$" thành các bất đẳng thức nghiêm ngặt "$f'(x) < 0$" và "$f'(x) > 0$" tương ứng thì chúng ta cũng có thể kết luận được rằng f sẽ đạt cực tiểu cục bộ nghiêm ngặt tại điểm tương ứng. Lập luận tương tự như vậy cho trường hợp cực đại cục bộ. Nói một cách tổng quát hơn, chúng ta có thể đi đến kết luận về việc f đạt cực trị cục bộ nghiêm ngặt nếu, ngoài các giả thiết của Phép thử đạo hàm bậc nhất, chúng ta yêu cầu thêm rằng f' không triệt tiêu trên bất kỳ một khoảng con nào của $(c - r, c)$ hoặc của $(c, c + r)$ có chứa nhiều hơn một điểm. Như vậy, f' chỉ được phép triệt tiêu tại một số điểm lẻ loi nhưng không nằm trên một đoạn liên tục với c là một trong hai đầu mút của nó. Mặt khác, nếu giả thiết của Phép thử đạo hàm bậc hai được thỏa mãn thì, trên thực tế, chúng ta sẽ đạt được một cực trị cục bộ nghiêm ngặt. Những khẳng định này có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách xem xét các chứng minh của các Kết quả 2.1) và Kết quả 2.2) cũng như sử dụng các Kết quả 3.1) và Kết quả 3.3) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**".

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 7}.$$

Lưu ý rằng do $x^4 - 2x^2 + 7 = (x^2 - 1)^2 + 6 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm f sẽ được xác định rõ ràng và khả vi trên $\mathbb{R}$.

Ngoài ra,

$$f'(x) = \frac{-(4x^3 - 4x)}{(x^4 - 2x^2 + 7)^2} = \frac{-4x(x-1)(x+1)}{(x^4 - 2x^2 + 7)^2} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, f' sẽ chỉ triệt tiêu tại $x = -1,0,1$, nên chúng ta có thể lập được bảng như sau:

Interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$	$-$

Theo quan điểm này, từ Phép thử đạo hàm bậc nhất, chúng ta có thể kết luận được rằng f đạt cực tiểu cục bộ tại $x = 0$ và đạt cực đại cục bộ tại $x = -1$ và $x = 1$. Lưu ý rằng, trong ví dụ này, việc tính f'' và sử dụng Phép thử đạo hàm bậc hai sẽ khá phức tạp.

(ii) Xét hàm $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ nếu } 0 < |x| < 1, \\ -1 \text{ nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó, rõ ràng $f(0) < f(x)$ với mọi $x \in (-1,1)$, và, do đó, f sẽ đạt cực tiểu cục bộ nghiêm ngặt tại $x = 0$. Tuy nhiên, các điều kiện của Phép thử đạo hàm bậc nhất lại không được thỏa mãn. Thật vậy, f sẽ khả vi trên $(-1,0)$ cũng như trên $(0,1)$ và f' đổi dấu từ $-$ sang $+$ tại $x = 0$ nhưng f không liên tục tại 0.

(iii) Xét hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^4$.

Khi đó, $f(0) = 0 < f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khác không, và, do đó, f sẽ đạt cực tiểu cục bộ nghiêm ngặt tại $x = 0$. Tuy nhiên, các điều kiện của Phép thử đạo hàm bậc hai lại không được thỏa mãn. Thật vậy, f sẽ khả vi hai lần và $f'(0) = 0$, nhưng $f''(0)$ không dương.

Điểm uốn

Bây giờ, chúng ta sẽ chuyển sang một thuộc tính tinh tế hơn của (đồ thị của) một hàm thực, cụ thể là khái niệm hình học về một điểm uốn, đã được định nghĩa trong bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**". Nói một cách ngắn gọn, một điểm uốn là một điểm mà tại đó tính lồi được chuyển sang tính lõm, hoặc ngược lại. Nói một cách chính xác hơn, với mọi $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ cho trước, một điểm trong $c \in D$ sẽ được gọi là một ***điểm uốn của f*** nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $(c - \delta, c + \delta) \subseteq D$ sao cho f lồi trên $(c - \delta, c)$ và lõm trên $(c, c + \delta)$, hoặc ngược lại. Ngoài ra, nhắc lại rằng c sẽ được gọi là một ***điểm uốn***

nghiêm ngặt của f nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $(c-\delta, c+\delta) \subseteq D$ sao cho f lồi chặt trên $(c-\delta, c)$ và lõm chặt trên $(c, c+\delta)$, hoặc ngược lại.

Một ví dụ điển hình là hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3$, trong đó 0 là một điểm uốn; trên thực tế, 0 là một điểm uốn nghiêm ngặt của hàm số này.

Đặc trưng của tính lồi và tính lõm theo đạo hàm đã thảo luận trong bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**" dẫn chúng ta đến kết quả sau đây về điểm uốn.

Kết quả 2.3. (Điều kiện cần và đủ cho một điểm uốn)

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, c là một điểm trong của D. Giả sử $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ.

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau đây:

(i) Giả sử f khả vi trên $(c-r, c) \cup (c, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó. Khi đó, c sẽ là một điểm uốn của f nếu và chỉ nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho f' tăng đơn điệu trên $(c-\delta, c)$, trong khi f' giảm đơn điệu trên $(c, c+\delta)$, hoặc ngược lại.

(ii) Giả sử f khả vi hai lần trên $(c-r, c) \cup (c, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó. Khi đó, c sẽ là một điểm uốn của f nếu và chỉ nếu tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho f'' không âm trên toàn bộ $(c-\delta, c)$, trong khi f'' không dương trên toàn bộ $(c, c+\delta)$, hoặc ngược lại.

Chứng minh kết quả 2.3.

Tính đúng đắn của khẳng định (i) được suy ra từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 3.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**", trong khi tính đúng đắn của khẳng định (ii) được suy ra từ các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 3.5) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**". □

Các kết quả trên có thể được sử dụng để thu được các điều kiện cần và đủ yêu hơn nhưng ngắn gọn hơn để một điểm trong trong miền xác định của một hàm là một điểm uốn.

Kết quả 2.4.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$, c là một điểm trong của D và $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm bất kỳ.

Khi đó, chúng ta sẽ có những khẳng định sau đây:

(i) (**Điều kiện cần cho một điểm uốn**) Giả sử f khả vi hai lần tại c. Khi đó, nếu c là một điểm uốn của f thì $f''(c) = 0$.

(ii) (**Điều kiện đủ cho một điểm uốn**) Giả sử f khả vi ba lần tại c. Khi đó, nếu $f''(c) = 0$ và $f'''(c) \neq 0$ thì c sẽ là một điểm uốn của f.

Chứng minh kết quả 2.4.

(i) Nếu $f''(c)$ tồn tại thì chúng ta đã ngầm giả định rằng f' tồn tại trên $(c-r, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó với $(c-r, c+r) \subseteq D$. Nếu c là một điểm uốn của f thì, theo khẳng định (i) của Kết quả 2.3), tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho

f' tăng đơn điệu trên $(c-\delta, c)$ và giảm đơn điệu trên $(c, c+\delta)$, hoặc ngược lại.

Kế tiếp, do f' khả vi tại c, liên tục tại c nên chúng ta sẽ có

$$f'(x) \leq f'(c) \text{ với mọi } x \in (c-\delta, c) \text{ và } f'(c) \geq f'(x) \text{ với mọi } x \in (c, c+\delta),$$

hoặc ngược lại (nghĩa là, các bất đẳng thức $\leq$ và $\geq$ ở trên được hoán đổi cho nhau).

Như vậy,

$$0 \leq lim_{x \to c^-} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c) = lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} \leq 0,$$

hoặc ngược lại (nghĩa là, các bất đẳng thức $\leq$ và $\geq$ ở trên được hoán đổi cho nhau).

Trong mọi trường hợp, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $f''(c) = 0$.

(ii) Nếu $f''(c)$ tồn tại thì chúng ta đã ngầm giả định rằng f'' tồn tại trên $(c-r, c+r)$ với một số $r > 0$ nào đó với $(c-r, c+r) \subseteq D$. Kế tiếp, giả sử $f''(c) = 0$ và $f'''(c) \neq 0$. Đầu tiên, chúng ta có thể giả sử rằng $f'''(c) < 0$.

Khi đó,

$$lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{x - c} = lim_{x \to c} \frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} = f'''(c) < 0.$$

Như vậy, theo khẳng định (i) của Kết quả 3.3.3) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**", tồn tại một số thực $\delta > 0$ với $\delta \leq r$ sao cho $f''(x)/(x-c) < 0$ với mọi $x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$.

Do đó,

$$f''(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (c-\delta, c) \text{ và } f''(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (c, c+\delta).$$

Như vậy, theo khẳng định (ii) của Kết quả 2.3), c là một điểm uốn của f.

Lập luận tương tự cũng đúng nếu $f''(c) = 0$ và $f'''(c) > 0$. □

Nhận xét rằng,

(i) Điều kiện trong khẳng định (i) của mệnh đề trên là không đủ. Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^4$. Khi đó, 0 không phải là một điểm uốn của f, mặc dù $f''(0) = 0$.

(ii) Điều kiện trong khẳng định (ii) của mệnh đề trên là không cần. Chẳng hạn, xét hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^5$. Khi đó, 0 là một điểm uốn của f, mặc dù $f'''(0) = 0$.

(iii) Nếu, trong khẳng định (i) của Kết quả 2.3), chúng ta thay đổi các từ "tăng đơn điệu" và "giảm đơn điệu" lần lượt thành các từ "tăng nghiêm ngặt" và "giảm nghiêm ngặt" thì chúng ta sẽ thu được một điều kiện cần và đủ để c là một điểm uốn nghiêm ngặt của f. Tương tự, trong khẳng định (ii) của Kết quả 2.3), nếu, ngoài điều kiện về dấu của f'', chúng ta yêu cầu thêm f'' không triệt tiêu trên bất kỳ khoảng con nào của $(c-\delta, c)$ hoặc của $(c, c+\delta)$ có chứa nhiều hơn một điểm thì chúng ta sẽ thu được một điều kiện cần và đủ để c là một điểm uốn nghiêm ngặt của f. Mặt khác, nếu điều kiện đủ trong khẳng định (ii) của Kết quả

2.4) được thỏa mãn thì, trên thực tế, c sẽ là một điểm uốn nghiêm ngặt của f. Những khẳng định này có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách xem xét các phép chứng minh của Kết quả 2.3) và Kết quả 2.4), đồng thời viện dẫn các khẳng định (iii) và (iv) của Kết quả 3.4) cũng như các khẳng định (i) và (ii) của Kết quả 3.7) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**".

Để minh họa cho các phép thử khác nhau thu được trong phần này và cả trong mục **3. Tính đơn điệu, tính lồi, tính lõm** của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**", chúng ta sẽ trình bày một ví dụ trong đó lần đầu tiên chúng ta sẽ sử dụng các phép thử này để xác định một số đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị của nó. Chúng ta cũng sẽ xem xét việc làm thế nào, với những kiến thức được trang bị này, người ta có thể phác họa sơ bộ đồ thị của một hàm số.

Chẳng hạn,

Xét hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Khi đó,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) \text{ và } f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Như vậy, $f'(x) = 0$ chỉ tại $x = 1$ và 3, trong khi $f''(x) = 0$ chỉ tại $x = 2$; nên chúng ta có thể lập được bảng sau:

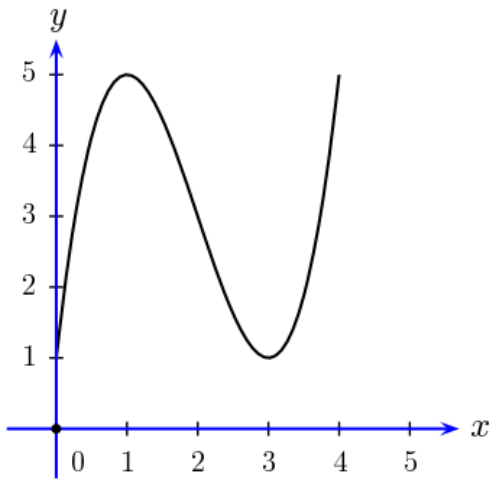
Interval	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$

Interval	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Sign of f''	$-$	$+$

Theo quan điểm này (cùng với các Kết quả 3.1) và Kết quả 3.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**" và các Kết quả 2.1), Kết quả 2.2), Kết quả 2.3), Kết quả 2.4)), chúng ta sẽ thu được các kết quả sau:

- f tăng (nghiêm ngặt) trên $(-\infty, 1)$ cũng như trên $(3, \infty)$, và f giảm (nghiêm ngặt) trên $(1,3)$.
- f đạt cực đại cục bộ (nghiêm ngặt) tại $x = 1$ và đạt cực tiểu cục bộ (nghiêm ngặt) tại $x = 3$.
- f lõm (nghiêm ngặt) trên $(-\infty, 2)$ và lồi (nghiêm ngặt) trên $(2, \infty)$.
- 2 là điểm uốn (nghiêm ngặt) của f.

Bây giờ, chúng ta có thể phác họa sơ bộ đường cong $y = f(x)$ bằng cách vẽ một vài điểm (chẳng hạn, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$) và sử dụng các dữ kiện trên. Nó sẽ trông giống như biểu đồ trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

3. Phép xấp xỉ tuyến tính và bậc hai

Bằng cách thúc đẩy việc sử dụng Công thức Taylor, chúng ta đã thảo luận trong bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**" về Định lí giá trị trung bình và các dạng khái quát của nó hữu ích như thế nào trong việc đánh giá các hàm xấp xỉ. Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ chính thức hóa các khía cạnh này và đưa ra một số đặc điểm cơ bản của các phép gần đúng đơn giản nhất thường được sử dụng trong thực tế, cụ thể là các phép tính xấp xỉ tuyến tính và bậc hai.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D.

Nếu $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại c thì hàm $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c) \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

được gọi là ***phép xấp xỉ tuyến tính của f xung quanh c***.

Lưu ý rằng $L(x)$ chính là đa thức Taylor bậc nhất của f xung quanh c.

Về mặt hình học, $y = L(x)$ biểu thị một đường thẳng, chính là tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(c, f(c))$. Với lý do này, L còn được gọi là ***đường tiếp tuyến gần đúng của f xung quanh c***.

Hiệu

$$e_1(x) = f(x) - L(x) \text{ với } x \in D$$

được gọi là ***sai số tại x trong phép xấp xỉ tuyến tính của f xung quanh c***.

Kết quả 3.1.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D.

Khi đó, nếu $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại c thì phép xấp xỉ tuyến tính L của f xung quanh c thực sự là một phép xấp xỉ của f xung quanh c, nghĩa là,

$$lim_{x \to c} L(x) = f(c) \text{ hoặc tương đương, } lim_{x \to c} e_1(x) = 0.$$

Trên thực tế, $e_1(x)$ tiến tới 0 khi $x \longrightarrow c$ theo nghĩa là

$$lim_{x\to c}\frac{e_1(x)}{x-c} = 0.$$

Ngoài ra, với mọi $b \in D$ cho trước với $b \neq c$, nếu kí hiệu I_b là khoảng mở với c và b là các đầu mút của nó và nếu f' tồn tại và liên tục trên I_b cũng như tại các đầu mút c và b của nó, f'' tồn tại trên I_b và $|f''(x)| \leq M_2(b)$ với mọi $x \in I_b$ thì chúng ta sẽ có chặn sai số sau:

$$|e_1(b)| \leq \frac{M_2(b)}{2}|b-c|^2.$$

Chứng minh kết quả 3.1.

Rõ ràng, từ định nghĩa của L, là

$$lim_{x\to c}L(x) = f(c) \text{ hoặc tương đương, } lim_{x\to c}e_1(x) = 0.$$

Khẳng định về sự triệt tiêu nhanh chóng của $e_1(x)$ được suy ra bằng cách lưu ý rằng

$$lim_{x\to c}\frac{e_1(x)}{x-c} = lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c} = f'(c) - f'(c) = 0.$$

Cuối cùng, nếu $b \in D$ và $b \neq c$ thì, bằng cách áp dụng Công thức Taylor, với $I = I_b$ và $n = 1$, chúng ta nhận thấy rằng sẽ tồn tại một số thực ξ nằm giữa c và b sao cho

$$e_1(b) = f(b) - f(c) - f'(c)(b-c) = \frac{f''(\xi)}{2}(b-c)^2.$$

Điều này ngụ ý chặn sai số mong muốn cho $|e_1(b)|$. □

Chẳng hạn,

Giả sử $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 1\}$ và xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 1/(1-x)$.

Khi đó, $f'(x) = 1/(1-x)^2$ với $x \in D$; đặc biệt, $f'(0) = 1$.

Như vậy, phép xấp xỉ tuyến tính của f xung quanh 0 xác định bởi

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + x \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Chặn sai số e_1 cho $f - L$ trong trường hợp này có thể được tính như sau:

Giả sử cho trước $b \in (-1,1)$, $b \neq 0$, chúng ta xem xét hai trường hợp sau.

Đầu tiên, giả sử $b > 0$ và $I_b = (0, b)$.

Khi đó,

$$|f''(x)| = \frac{2}{(1-x)^3} \leq \frac{2}{(1-b)^3} \text{ với } x \in I_b.$$

Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta có thể chọn $M_2(b) = 2/(1-b)^3$ và, theo Kết quả 3.1), kết luận rằng $|e_1(b)| \leq b^2/(1-b)^3$.

Chẳng hạn, nếu $0 < b < 0{,}1$ thì chúng ta sẽ có $|e_1(b)| \leq (0{,}1)^2/(0{,}9)^2 < 0{,}014$.

Kế tiếp, giả sử $b < 0$ và $I_b = (b, 0)$.

Khi đó,

$$|f''(x)| = \frac{2}{(1-x)^3} \leq 2 \text{ với } x \in I_b.$$

Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta có thể chọn $M_2(b) = 2$ và, theo Kết quả 3.1), kết luận rằng $|e_1(b)| \leq b^2$.

Chẳng hạn, nếu $-0{,}1 < b < 0$ thì chúng ta sẽ có $|e_1(b)| \leq (0{,}1)^2 = 0{,}01$.

Như ví dụ trên cho thấy, phép tính xấp xỉ tuyến tính đưa ra một phép xấp xỉ hợp lý cho các giá trị của hàm xung quanh một điểm mà tại đó nó khả vi. Tuy nhiên, nếu muốn làm tốt hơn thì chúng ta có thể sử dụng phép xấp xỉ bậc hai, phương pháp này khả dụng với điều kiện các đạo hàm bậc hai có liên quan tồn tại.

Như thường lệ, giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D.

Nếu $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần tại c thì hàm $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$Q(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c) \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

được gọi là ***phép xấp xỉ bậc hai của f xung quanh c***.

Lưu ý rằng $Q(x)$ chính là đa thức Taylor bậc hai của f xung quanh c.

Về mặt hình học, $y = Q(x)$ biểu thị một parabol đi qua điểm $\big(c, f(c)\big)$ sao cho parabol này và đường cong $y = f(x)$ có một tiếp tuyến chung tại $\big(c, f(c)\big)$.

Hiệu

$$e_2(x) = f(x) - Q(x) \text{ với } x \in D$$

được gọi là ***sai số tại x trong phép xấp xỉ bậc hai của f xung quanh c***.

Kết quả 3.2.

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và c là một điểm trong của D.

Khi đó, nếu $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần tại c thì phép xấp xỉ bậc hai Q của f xung quanh c thực sự là một phép xấp xỉ của f xung quanh c, nghĩa là,

$$lim_{x \to c} Q(x) = f(c) \text{ hoặc tương đương, } lim_{x \to c} e_2(x) = 0.$$

Trên thực tế, $e_2(x)$ tiến tới 0 khi $x \longrightarrow c$ nhanh gấp đôi theo nghĩa là

$$lim_{x\to c}\frac{e_2(x)}{(x-c)^2} = 0.$$

Ngoài ra, với mọi $b \in D$ cho trước với $b \neq c$, nếu kí hiệu I_b là khoảng mở với c và b là các đầu mút của nó và nếu f'' tồn tại và liên tục trên I_b cũng như tại các đầu mút c và b của nó, f''' tồn tại trên I_b và $|f'''(x)| \leq M_3(b)$ với mọi $x \in I_b$ thì chúng ta sẽ có chặn sai số sau:

$$|e_2(b)| \leq \frac{M_3(b)}{3!}|b-c|^3.$$

Chứng minh kết quả 3.2.

Rõ ràng, từ định nghĩa của Q, là

$$lim_{x\to c}Q(x) = f(c) \text{ hoặc tương đương, } lim_{x\to c}e_2(x) = 0.$$

Khẳng định về sự triệt tiêu nhanh gấp đôi của $e_2(x)$ được suy ra bằng cách lưu ý rằng, theo Quy tắc L'Hôpital cho các dạng vô định $\frac{0}{0}$,

$$lim_{x\to c}\frac{e_2(x)}{(x-c)^2} = lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)-f''(c)(x-c)}{2(x-c)} = \frac{1}{2}[f''(c)-f''(c)] = 0.$$

Cuối cùng, nếu $b \in D$ và $b \neq c$ thì, bằng cách áp dụng Công thức Taylor, với $I = I_b$ và $n = 2$, chúng ta nhận thấy rằng sẽ tồn tại một số thực $\eta \in I_b$ sao cho

$$e_2(b) = f(b) - f(c) - f'(c)(b-c) - \frac{f''(c)}{2}(b-c)^2 = \frac{f'''(\eta)}{3!}(b-c)^3.$$

Điều này ngụ ý chặn sai số mong muốn cho $|e_2(b)|$. □

Bây giờ, chúng ta sẽ xét xem một phép xấp xỉ bậc hai và chặn sai số tương ứng sẽ trông như thế nào.

Chẳng hạn,

Xét hàm $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 1/(1-x)$ và $c = 0$.

Khi đó, $f'(x) = 1/(1-x)^2$ và $f''(x) = 2/(1-x)^3$ với $x \in (-1,1)$; đặc biệt, $f'(0) = 1$ và $f''(0) = 2$.

Như vậy, phép xấp xỉ bậc hai của f xung quanh 0 xác định bởi

$$Q(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + x + x^2.$$

Chặn sai số e_2 cho $f - L$ trong trường hợp này có thể được tính như sau:

Giả sử cho trước $b \in (-1,1)$, $b \neq 0$, chúng ta xem xét hai trường hợp sau.

Đầu tiên, giả sử $b > 0$ và $I_b = (0, b)$.

Khi đó,

$$|f'''(x)| = \frac{6}{(1-x)^4} \leq \frac{6}{(1-b)^4} \text{ với } x \in I_b.$$

Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta có thể chọn $M_3(b) = 6/(1-b)^4$ và, theo Kết quả 3.2), kết luận rằng $|e_2(b)| \leq |b|^3/(1-b)^4$.

Chẳng hạn, nếu $0 < b < 0{,}1$ thì chúng ta sẽ có $|e_2(b)| \leq (0{,}1)^3/(0{,}9)^4 < 0{,}0016$.

Kế tiếp, giả sử $b < 0$ và $I_b = (b, 0)$.

Khi đó,

$$|f'''(x)| = \frac{6}{(1-x)^4} \leq 6 \text{ với } x \in I_b.$$

Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta có thể chọn $M_3(b) = 6$ và, theo Kết quả 3.2), kết luận rằng $|e_2(b)| \leq |b|^3$.

Chẳng hạn, nếu $-0{,}1 < b < 0$ thì chúng ta sẽ có $|e_2(b)| \leq (0{,}1)^3 = 0{,}001$.

Chúng ta có thể lưu ý rằng, trong ví dụ trên, các ước tính đã trở nên chính xác hơn rất nhiều so với trong ví dụ trước đó. Theo cách tương tự, nếu chúng ta xem xét các phép xấp xỉ bậc ba, bậc bốn, v.v… thì các ước tính sẽ ngày càng trở nên chính xác hơn. Những phép xấp xỉ bậc cao hơn này và các chặn sai số tương ứng cũng có thể thu được theo cách tương tự.

4. Phương pháp Picard và phương pháp Newton

Nội dung của phần này của bài viết đề cập đến các phương pháp có thể được sử dụng để thu được lời giải gần đúng cho hai vấn đề liên quan với nhau sau đây:

1. Bài toán tìm một ***điểm cố định*** của một hàm, cụ thể, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \to D$ thì bài toán yêu cầu tìm $x \in D$ sao cho $f(x) = x$.

2. Bài toán tìm một nghiệm của một phương trình, cụ thể, nếu $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \to D$ thì bài toán yêu cầu tìm $x \in D$ sao cho $f(x) = 0$.

Để thấy rằng những vấn đề này có liên quan với nhau, chúng ta cần lưu ý rằng nếu $f: D \to D$ và nếu chúng ta kí hiệu $F(x) = f(x) - x$ thì việc tìm một điểm cố định của f sẽ tương đương với việc tìm một nghiệm của phương trình $F(x) = 0$. Mặt khác, nếu $f: D \to \mathbb{R}$ và nếu chúng ta kí hiệu $F(x) = x + h(x)g(x)$ trong đó $h: D \to \mathbb{R}$ được chọn sao cho $h(x) \neq 0$ và $x + h(x)g(x) \in D$ với mọi $x \in D$ thì việc tìm một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ sẽ tương đương với việc tìm một điểm cố định của $F: D \to D$.

Tìm một điểm cố định

Đầu tiên, chúng ta hãy giải bài toán tìm điểm cố định. Để đơn giản, chúng ta sẽ giới hạn các khảo sát trong trường hợp các hàm từ một khoảng đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$ vào chính nó. Trong trường hợp này, sự tồn tại của một điểm cố định sẽ được đảm bảo nếu hàm thỏa mãn một điều kiện nhẹ như tính liên tục.

Kết quả 4.1.

Nếu $f: [a, b] \to [a, b]$ là một hàm liên tục thì f sẽ có một điểm cố định.

Chứng minh kết quả 4.1.

Kí hiệu $F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi $F(x) = f(x) - x$. Do $a \leq f(x) \leq b$ với mọi $x \in [a, b]$ nên chúng ta sẽ có

$$F(a) = f(a) - a \leq 0 \text{ và } F(b) = f(b) - b \geq 0.$$

Ngoài ra, do f là một hàm liên tục nên F cũng sẽ là một hàm liên tục. Do đó, theo Kết quả 3.2.4) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**", F sẽ có tính chất giá trị trung gian trên $[a, b]$. Như vậy, tồn tại một số thực $c \in [a, b]$ sao cho $F(c) = 0$, nghĩa là, $f(c) = c$. □

Chẳng hạn,

(i) Trong khi một điểm cố định trong $[a, b]$ luôn tồn tại đối với một hàm liên tục $f: [a, b] \to [a, b]$, nó không nhất thiết phải là duy nhất. Chẳng hạn, xét hàm $f: [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi $f(x) = x$, trong đó mọi điểm của $[0,1]$ đều là một điểm cố định của f.

(ii) Điều kiện f xác định trên một tập con đóng của $\mathbb{R}$ là cần thiết để đảm bảo tồn tại một điểm cố định. Chẳng hạn, nếu hàm $f: [0, 1) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = (1 + x)/2$ thì f sẽ ánh xạ $[0, 1)$ vào chính nó và f là một hàm liên tục. Nhưng f lại không có bất kỳ một điểm cố định nào trong $[0, 1)$. Thật vậy, $(1 + x)/2 = x$ khi và chỉ khi $x = 1$.

(iii) Điều kiện f xác định trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}$ là cần thiết để đảm bảo tồn tại một điểm cố định. Chẳng hạn, nếu hàm $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x + (1/x)$ thì f sẽ ánh xạ $[1, \infty)$ vào chính nó và f là một hàm liên tục. Nhưng rõ ràng f không có bất kỳ một điểm cố định nào trong $[1, \infty)$.

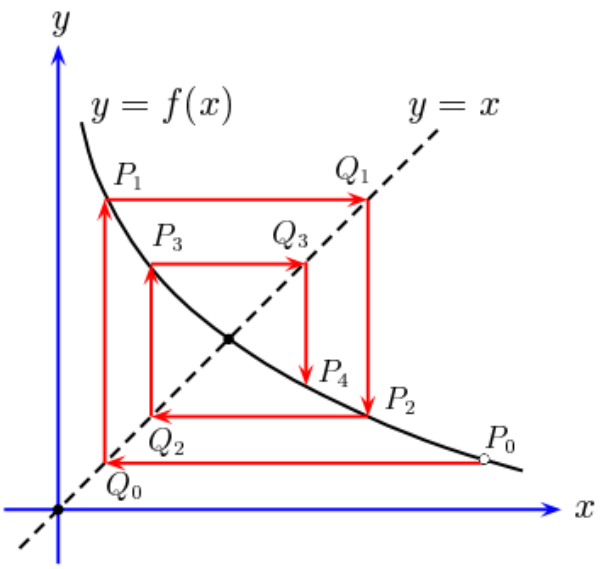
(iv) Điều kiện f xác định trên một khoảng trong $\mathbb{R}$ là cần thiết để đảm bảo tồn tại một điểm cố định. Chẳng hạn, nếu $D = [-2, -1] \cup [1,2]$ và hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x$ thì f sẽ ánh xạ D vào chính nó và f là một hàm liên tục. Nhưng f không có bất kỳ một điểm cố định nào trong D.

Giả sử chúng ta đã biết rằng hàm $f: [a, b] \to [a, b]$ có một điểm cố định nào đó. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra cho chúng ta đó là: "Liệu chúng ta có thể tìm thấy nó hay không?". Nói chung, không dễ để chúng ta có thể tìm thấy nó một cách chính xác. Một phương pháp đơn giản mà hiệu quả do Picard đưa ra nhằm đạt được điều có thể là giải pháp tốt nhất có thể thay thế cho việc tìm một điểm cố định một cách chính xác, cụ thể là tìm nó một cách xấp xỉ.

Về mặt hình học, ý tưởng cơ bản của phương pháp Picard có thể được mô tả lại như sau:

Đầu tiên, chọn ra một điểm $P_0 = (x_0, f(x_0))$ bất kỳ nào đó trên đường cong $y = f(x)$. Chiếu P_0 theo chiều ngang lên đường chéo $y = x$ để thu được điểm Q_0, sau đó chiếu điểm Q_0 theo chiều dọc lên đường cong $y = f(x)$ để thu được điểm $P_1 = (x_1, f(x_1))$. Một lần nữa, chiếu P_1 theo chiều ngang lên đường chéo $y = x$ để thu được điểm Q_1, sau đó chiều điểm Q_1 theo chiều dọc lên đường cong $y = f(x)$ để thu được điểm $P_2 = (x_2, f(x_2))$. Quá trình này có thể được lặp đi lặp lại nhiều lần. Thông thường, nó sẽ dệt ra một mạng nhện trong đó điểm cố định của f, nghĩa là, giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và đường chéo

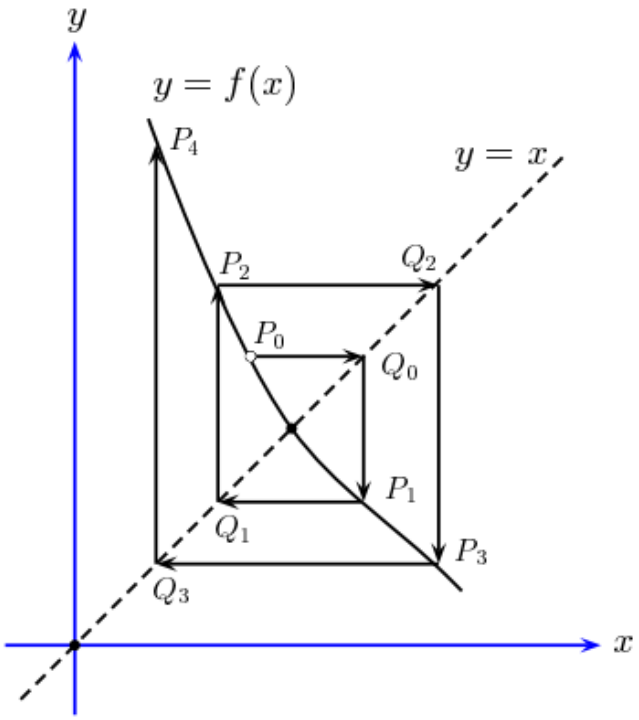
$y = x$, bị mắc kẹt.



Hình vẽ minh họa một dãy Picard hội tụ về điểm cố định.

Trên thực tế, chúng ta sẽ nhận thấy rằng một bẫy như vậy sẽ xảy ra nếu độ dốc của các tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ nhỏ hơn (theo giá trị tuyệt đối) so với độ dốc của đường chéo $y = x$.

Khi điều kiện về độ dốc này không được thỏa mãn, các điểm $P_0, P_1, P_2, \ldots$ có thể sẽ di chuyển ra xa khỏi điểm cố định.



Hình vẽ minh họa một dãy Picard phân kỳ ra khỏi điểm cố định.

Theo thuật ngữ giải tích, **phương pháp Picard** có thể được mô tả lại như sau:

Với mọi $x_0 \in [a, b]$ cho trước, chúng ta định nghĩa đệ quy một dãy (x_n) bởi

$$x_n = f(x_{n-1}) \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Một dãy (x_n) như vậy sẽ được gọi là một dãy Picard của hàm f (với điểm đầu là x_0). Rõ ràng là nếu một dãy Picard (x_n) của hàm f là hội tụ và f là một hàm liên tục thì giới hạn x của (x_n) sẽ là một điểm cố định của f.

Thật vậy,

$$f(x) = f(lim_{n\to\infty} x_n) = f(lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Một điều kiện đủ cho sự hội tụ của một dãy Picard, một dạng tương tự về mặt hình thức của điều kiện hình học về các độ dốc nêu ở trên, được cho bởi kết quả sau:

Kết quả 4.2. (Định lí hội tụ Picard)

Nếu hàm $f: [a, b] \to [a, b]$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) với $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f sẽ có một điểm cố định duy nhất. Ngoài ra, mọi dãy Picard của hàm f đều hội tụ và hội tụ về điểm cố định duy nhất này của f.

Chứng minh kết quả 4.2.

Theo Kết quả 4.1), f sẽ có một điểm cố định trong $[a, b]$. Nếu có hai điểm cố định $c_1, c_2 \in [a, b]$ thì, theo Định lí giá trị trung bình (Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**"), sẽ tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho

$$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| = |f'(c)||c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|,$$

mâu thuẫn.

Như vậy, f sẽ chỉ có một điểm cố định duy nhất.

Kí hiệu c^* là điểm cố định duy nhất của f. Xét một điểm $x_0 \in [a, b]$ bất kỳ và kí hiệu (x_n) là dãy Picard của hàm f với điểm ban đầu là x_0. Kế tiếp, với mọi $n \in \mathbb{N}$ cho trước, theo Định lí giá trị trung bình (Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**"), chúng ta sẽ có một số thực c_{n-1} nằm giữa x_{n-1} và c^* sao cho

$$x_n - c^* = f(x_{n-1}) - f(c^*) = f'(c_{n-1})(x_{n-1} - c^*).$$

Như một hệ quả, $|x_n - c^*| \leq |x_{n-1} - c^*|$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Kế tiếp, chúng ta sẽ chứng minh rằng $x_n \to c^*$. Đầu tiên, lưu ý rằng do $x_n \in [a, b]$ với $n \geq 0$ nên dãy (x_n) sẽ bị chặn. Như vậy, theo Kết quả 2.2.4) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**", chúng ta chỉ cần chứng minh rằng mọi dãy con hội tụ của (x_n) đều có c^* là giới hạn của nó.

Giả sử $x \in \mathbb{R}$ và $\left(x_{n_k}\right)$ là một dãy con của (x_n) sao cho $x_{n_k} \to x$.

Khi đó,

$$\left|x_{n_{k+1}} - c^*\right| \leq \left|x_{n_k+1} - c^*\right| \leq \left|x_{n_k} - c^*\right|.$$

Nhưng cả hai dãy $\left(\left|x_{n_k} - c^*\right|\right)$ và $\left(\left|x_{n_{k+1}} - c^*\right|\right)$ đều hội tụ về $|x - c^*|$.

Như vậy, theo Định lí kẹp, $\left|x_{n_k+1} - c^*\right| \to |x - c^*|$ khi $k \to \infty$.

Mặt khác,

$$lim_{k\to\infty}\left|x_{n_k+1} - c^*\right| = lim_{k\to\infty}\left|f\left(x_{n_k}\right) - f(c^*)\right| = |f(x) - f(c^*)|.$$

Điều này chỉ ra rằng $|f(x) - f(c^*)| = |x - c^*|$.

Kế tiếp, nếu $x \neq c^*$ thì, theo Định lí giá trị trung bình (Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**"), sẽ tồn tại một số thực $c \in (a, b)$ sao cho

$$|x - c^*| = |f(x) - f(c^*)| = |f'(c)||x - c^*| < |x - c^*|, \text{ mâu thuẫn.}$$

Điều này chỉ ra rằng $x_n \to c^*$. □

Nhận xét rằng phép chứng minh Định lí hội tụ Picard sẽ trở nên đơn giản hơn nếu, thay vì giả sử $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in (a, b)$, chúng ta đưa ra giả định mạnh hơn cho rằng tồn tại một số thực $\alpha < 1$ sao cho $|f'(x)| < \alpha$ với mọi $x \in (a, b)$.

Trong trường hợp này, chúng ta cũng có thể thu được "tốc độ hội tụ" của dãy Picard:

"(**Tính tuyến tính của phương pháp Picard**)

Giả sử $\boldsymbol{f}$: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ là một hàm liên tục sao cho $\boldsymbol{f'}$ tồn tại và bị chặn trên $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Khi đó, nếu $\boldsymbol{f}$ có một điểm cố định $\boldsymbol{c}^* \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ thì sẽ tồn tại một số thực $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ sao cho, với mọi dãy Picard $(\boldsymbol{x_n})$ bất kỳ của hàm $\boldsymbol{f}$ với điểm đầu là $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, chúng ta sẽ có $|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{c}^*| \leq \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{x_{n-1}} - \boldsymbol{c}^*|$ với mọi $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, $|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{c}^*| \leq \boldsymbol{\alpha^n}|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{c}^*|$ với mọi $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$."

(Trong trường hợp $\alpha < 1$, bất đẳng thức đầu tiên chứng tỏ rằng các số hạng của dãy Picard sẽ đưa ra một phép xấp xỉ tốt hơn cho điểm cố định c^* của f. Bất đẳng thức này cũng có thể được dùng để giải thích cho việc chúng ta nói rằng dãy Picard hội tụ tuyến tính. Mặt khác, bất đẳng thức thứ hai đưa ra cho chúng ta một chặn sai số cho (số hạng thứ n) của dãy Picard.)

Một tập các điều kiện thay thế khác cho sự hội tụ của dãy Picard cũng được đưa ra trong kết quả sau:

"Giả sử $\boldsymbol{f}$: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ là một hàm liên tục và đơn điệu.

Khi đó, với mọi điểm $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, mọi dãy Picard của $\boldsymbol{f}$ với điểm ban đầu $\boldsymbol{x_0}$ đều hội tụ về một điểm cố định của $\boldsymbol{f}$."

Bản thân Định lí hội tụ Picard thừa nhận một số dạng khái quát hóa và mở rộng nhất định. Một số trong số này được nêu ra trong kết quả sau:

"Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}$ và $f: D \to \mathbb{R}$ sao cho $f(D) \subseteq D$.

Khi đó, chúng ta sẽ có các dạng khái quát hóa và mở rộng sau đây của Định lí hội tụ Picard:

(i) Nếu D đóng và f là một hàm *rút gọn* (nghĩa là, tồn tại một số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ với $0 \leq \alpha < 1$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ với mọi $x, y \in D$) thì f sẽ có một điểm cố định duy nhất và bất kỳ chuỗi Picard nào của f cũng sẽ hội tụ về điểm cố định này.

(ii) Nếu D đóng và bị chặn và f là một hàm *co* (nghĩa là, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ với mọi $x, y \in D$, $x \neq y$) thì f sẽ có một điểm cố định duy nhất và bất kỳ chuỗi Picard nào của f cũng sẽ hội tụ về điểm cố định này.

(iii) Nếu D là một khoảng đóng và bị chặn và f là một hàm *không giãn nở* (nghĩa là, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ với mọi $x, y \in D$) thì f sẽ có một điểm cố định nhưng nó có thể không phải là duy nhất."

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = (1 + x)^{1/5}$.

Khi đó, $0 \leq f(x) \leq 3^{1/5} < 2$ với mọi $x \in [0,2]$, nên f sẽ ánh xạ khoảng $[0,2]$ vào chính nó.

Ngoài ra, f liên tục trên $[0,2]$, khả vi trên $(0,2)$, và

$$|f'(x)| = \frac{1}{5(1 + x)^{4/5}} \leq \frac{1}{5} < 1 \text{ với mọi } x \in [0,2].$$

Như vậy, theo Định lí hội tụ Picard, f sẽ có một điểm cố định duy nhất và phép xấp xỉ cho điểm cố định này sẽ được cho bởi các số hạng của một dãy Picard nào đó của hàm f.

(ii) Xét hàm $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2/2$.

Khi đó, f sẽ ánh xạ $[0,1]$ vào chính nó.

Ngoài ra, f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$, và

$$|f'(x)| = |x| < 1 \text{ với mọi } x \in (0,1).$$

Như vậy, theo Định lí hội tụ Picard, f sẽ có một điểm cố định duy nhất và mọi dãy Picard của hàm f đều hội tụ về điểm cố định này. Thật vậy, chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng 0 là điểm cố định duy nhất của f trong $[0,1]$. Lưu ý rằng, trong trường hợp này, chúng ta không có bất kỳ một số thực $\alpha < 1$ nào sao cho $|f'(x)| < \alpha$ với mọi $x \in (0,1)$.

(iii) Điều kiện $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in (a, b)$ là cần thiết để đảm bảo cho tính duy nhất của một điểm cố định. Chẳng hạn, nếu hàm $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x$ thì f sẽ ánh xạ $[a, b]$ vào chính nó và mọi điểm của $[a, b]$ đều là một điểm cố định của f. Ở đây, $f'(x) = 1$ với mọi $x \in (a, b)$.

(iv) Khi điều kiện $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in (a, b)$ không được thỏa mãn, hàm vẫn có thể có một điểm cố định c^* duy nhất nhưng dãy Picard (x_n) của f với điểm ban đầu $x_0 \neq c$ có thể sẽ không hội tụ về c^*. Chẳng hạn, nếu hàm $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x$ thì f sẽ ánh xạ $[-1,1]$ vào chính nó, f khả vi và

$|f'(x)| = 1$ với mọi $x \in [-1,1]$. Rõ ràng, $c^* = 0$ là điểm cố định duy nhất của f, nhưng nếu $x_0 \neq 0$ thì dãy Picard tương ứng sẽ có dạng $-x_0, x_0, -x_0, x_0, \ldots$; nói cách khác, nó sẽ dao động giữa x_0 và $-x_0$ nhưng không bao giờ đạt đến điểm cố định này. Về mặt hình học, mạng nhện mà chúng ta dệt ra chỉ là vẽ đi vẽ lại một hình vuông.

Nhận xét rằng, khi các giả thiết của Định lí hội tụ Picard được thỏa mãn, dãy Picard của hàm $f: [a, b] \to [a, b]$ với $x_0 \in [a, b]$ bất kỳ là điểm ban đầu sẽ hội tụ về một điểm cố định. Một điều tự nhiên là nếu x_0 càng gần điểm cố định thì sự hội tụ sẽ càng nhanh. Nhưng do chúng ta không biết điểm cố định nằm ở đâu để bắt đầu nên thoạt nhìn có vẻ như chúng ta sẽ không thể làm rõ được việc: "Làm thể nào để có thể chọn được điểm ban đầu x_0 "đủ tốt""?. Để đạt được mục đích này, chúng ta có thể quan sát thấy rằng một điểm cố định của f nhất thiết phải nằm trong tập giá trị của nó. Tập giá trị thường sẽ nhỏ hơn $[a, b]$. Như vậy, tốt hơn hết là chúng ta nên chọn x_0 từ $f([a, b])$. Chẳng hạn, nếu hàm $f: [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi $f(x) = (x + 1)/4$ thì tập giá trị của f sẽ bằng $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ và, do đó, chúng ta nên chọn x_0 nằm trong khoảng nhỏ hơn này. Trên thực tế, quan sát đơn giản này hoàn toàn có thể được mở rộng thêm hơn nữa. Một điểm cố định của f sẽ không chỉ nằm tập giá trị của hàm f mà còn nằm trong tập giá trị của các hàm hợp $f \circ f, f \circ f \circ f, \text{v.v} \ldots$ Như vậy, nếu kí hiệu R_n là tập giá trị của hàm $n -$ hợp $f \circ \ldots \circ f$ thì một điểm cố định sẽ nằm trong mỗi R_n với n thay đổi trên $\mathbb{N}$. Nếu chúng ta chỉ có một điểm duy nhất thuộc về mỗi R_n $(n \in \mathbb{N})$ thì chúng ta đã tìm được điểm cố định của mình! Chẳng hạn, nếu hàm $f: [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi $f(x) = (x + 1)/4$ thì chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $n -$ hợp của f, tạm giả sử là f_n, và tập giá trị R_n của nó được xác định bởi

$$f_n(x) = \frac{x + (4^n - 1)/3}{4^n} \text{ và } R_n = f_n([0,1]) = \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right), \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)\right].$$

Như vậy, rõ ràng $\frac{1}{3}$ là điểm duy nhất nằm trong mỗi R_n $(n \in \mathbb{N})$ và đây cũng là điểm cố định duy nhất của hàm f (điều này cũng có thể được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của f). Tất nhiên, nói chung, việc xác định các tập giá trị của $n -$ hợp của f với mọi $n \in \mathbb{N}$ là một việc không thực tế. Do đó, việc sử dụng phương pháp Picard sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Nhưng phương pháp Picard sẽ hiệu quả hơn rất nhiều nếu những quan sát trên được sử dụng ở một mức độ nào đó trong việc chọn điểm ban đầu.

Tìm một nghiệm của một phương trình

Bây giờ, chúng ta sẽ chuyển sang bài toán thứ hai đã đề cập trước đó, cụ thể là bài toán tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, trong đó f là một hàm giá trị thực xác định trên một tập con nào đó của $\mathbb{R}$. Để đơn giản, chúng ta sẽ giới hạn các khảo sát của mình trong trường hợp f xác định trên một khoảng đóng và bị chặn của $\mathbb{R}$. Trong trường hợp này, sự tồn tại của một nghiệm sẽ được đảm bảo nếu f có sẵn tính chất giá trị trung gian.

Kết quả 4.3.

Nếu hàm $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và nếu $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu thì phương trình $f(x) = 0$ sẽ có một nghiệm nằm trong $[a, b]$.

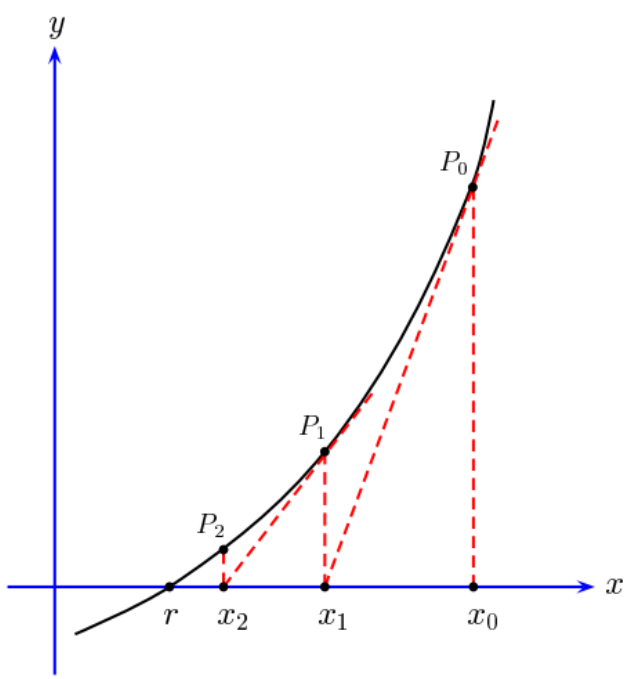
Chứng minh kết quả 4.3.

Kết quả trên rõ ràng là hệ quả trực tiếp của một thực tế là một hàm liên tục xác định trên $[a, b]$ sẽ có tính chất giá trị trung gian. □

Giả sử chúng ta đã biết phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm, trong đó $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm nào đó. Khi đó, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra cho chúng ta đó là: "Liệu chúng ta có thể tìm thấy nó hay không?". Nói chung, không dễ để có thể tìm ra một lời giải chính xác. (Trên thực tế, đây là một bài toán rất khó ngay cả đối với những hàm đẹp nhất, cụ thể là các hàm đa thức. Trong trường hợp đặc biệt của phương trình tuyến tính và phương trình bậc hai, chúng ta có những công thức đơn giản và phổ biến cho nghiệm của chúng. Để giải phương trình bậc ba và bậc bốn, chúng ta có những công thức phức tạp hơn, được tìm ra bởi Cardan và Ferrari, biểu diễn nghiệm theo các hệ số của đa thức bằng cách sử dụng các phép tính cơ bản của đại số, cụ thể là cộng, trừ, nhân, chia và khai căn. Sau nhiều nỗ lực không thành công để tìm ra một công thức tương tự cho các phương trình đa thức tổng quát với bậc từ 5 trở lên, Abel đã chứng minh rằng không tồn tại bất kỳ công thức nào như vậy. Nói cách khác, một phương trình tổng quát với bậc từ 5 trở lên không thể giải được bằng căn thức. Một phép chứng minh độc đáo cho kết quả này của Abel được đưa ra bởi Galois, người cũng đã đưa ra một tiêu chuẩn để nhận biết khi nào thì một phương trình có thể giải được bằng căn thức.) Một phương pháp do Newton đề xuất nhằm giải quyết vấn đề này có thể là giải pháp thay thế tốt nhất cho việc phải tìm một lời giải chính xác, cụ thể là tìm một lời giải gần đúng.

Về mặt hình học, ý tưởng cơ bản của phương pháp Newton có thể được mô tả lại như sau:

Đầu tiên, chọn ra một điểm $P_0 = (x_0, f(x_0))$ bất kỳ nào đó trên đường cong $y = f(x)$. Vẽ một tiếp tuyến của đường cong này tại P_0 và nếu nó cắt trục x tại điểm $(x_1, 0)$ thì xét điểm $P_1 = (x_1, f(x_1))$ tương ứng. Một lần nữa, vẽ một tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại P_1 và nếu nó cắt trục x tại điểm $(x_2, 0)$ thì xét điểm $P_2 = (x_2, f(x_2))$ tương ứng. Quá trình này có thể được lặp đi lặp lại nhiều lần. Thông thường, nó sẽ nhanh chóng đưa chúng ta đến gần giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và trục x, nghĩa là, nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Trên thực tế, mỗi lần chúng ta thay thế đường cong bởi đường tiếp tuyến gần đúng và tận dụng thực tế là mọi phương trình tuyến tính đều có thể giải được.



Hình vẽ minh họa một dãy Newton tiến tới một nghiệm của phương trình.

Theo thuật ngữ giải tích, **phương pháp Newton** (đôi khi còn gọi là **phương pháp Newton - Raphson**) có thể được mô tả lại như sau:

Chọn ra một điểm $x_0 \in [a, b]$ bất kỳ sao cho $f'(x_0)$ tồn tại và $f'(x_0) \neq 0$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ cho trước và $x_{n-1} \in [a, b]$ sao cho $f'(x_{n-1}) \neq 0$, chúng ta kí hiệu x_n là nghiệm của phép xấp xỉ tuyến tính

$$L(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

của f xung quanh x_{n-1}.

Nói cách khác,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Một dãy (x_n) như vậy sẽ được gọi là một ***dãy Newton của hàm f (với điểm ban đầu là x_0).*** Rõ ràng là nếu một dãy Newton (x_n) của hàm f hội tụ và f' bị chặn thì giới hạn x của (x_n) sẽ thỏa mãn $f(x) = 0$.

Thật vậy,

$$f(x) = f(lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = lim_{n\to\infty} f'(x_{n-1})(x_{n-1} - x_n) = 0.$$

Một điều kiện đủ cho sự hội tụ của một dãy Newton có thể được suy ra từ Định lí hội tụ Picard như sau:

Kết quả 4.4. (Tính hội tụ của các dãy Newton)

Giả sử hàm $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi với $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a, b]$, và

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [a, b] \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Giả sử f' liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b), và

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

Khi đó, tồn tại duy nhất một số thực $c^* \in [a, b]$ sao cho $f(c^*) = 0$. Ngoài ra, mọi dãy Newton của f với bất kỳ điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$ nào cũng sẽ đều hội tụ về c^*.

Chứng minh kết quả 4.4.

Kí hiệu $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Khi đó, F sẽ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b), và ánh xạ khoảng $[a, b]$ vào chính nó. Lưu ý rằng $x \in [a, b]$ sẽ là một điểm cố định của F khi và chỉ khi $f(x) = 0$.

Ngoài ra, với mọi $x \in [a, b]$, chúng ta cũng có

$$|F'(x)| = \left|1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1.$$

Như vậy, theo Định lí hội tụ Picard, F sẽ có một điểm cố định duy nhất c^* trong $[a, b]$, đó cũng là nghiệm duy nhất của f trong $[a, b]$. Ngoài ra, nếu $x_0 \in [a, b]$ là điểm ban đầu bất kỳ thì dãy Newton của f trên thực tế là dãy Picard của F và,do đó, nó sẽ hội tụ về c^*. □

Chẳng hạn,

(i) Xét hàm $f: \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3 - 3$.

Khi đó, f sẽ liên tục trên $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$, và

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{64} - 3, \text{trong khi } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 3 > 0.$$

Như vậy, theo Kết quả 4.3), f sẽ có một nghiệm nằm trong $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

Trong trường hợp này, công thức đệ quy của dãy Newton được xác định bởi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3}{3x_{n-1}^2} = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}, \text{với điều kiện } x_{n-1} \neq 0.$$

Như vậy, nếu chúng ta chọn $x_0 = \frac{5}{4}$ thì chúng ta sẽ thu được

$$x_1 = 1{,}473333 \ldots, x_2 = 1{,}442900 \ldots, x_3 = 1{,}442249 \ldots$$

Mặt khác, nếu chúng ta chọn $x_0 = \frac{3}{2}$ thì chúng ta sẽ thu được

$$x_1 = 1{,}444444 \ldots, x_2 = 1{,}442252 \ldots, x_3 = 1{,}442249 \ldots$$

Điều này chỉ ra rằng cả hai dãy Newton này đều hội tụ đến cùng một giới hạn, xấp xỉ bằng $1{,}442249 \ldots$

Trên thực tế, điều này khá phù hợp với lý thuyết bởi vì

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 + 3}{3x^2} \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \text{ với mọi } x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

Ngoài ra, với $x \in \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$, chúng ta cũng sẽ có

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{(x^3 - 3)6x}{9x^4}\right| = \frac{2}{3}\frac{|x^3 - 3|}{x^3} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Như vậy, các giả thiết của Kết quả 4.4) sẽ được thỏa mãn. Do đó, phương trình $f(x) = 0$ sẽ có nghiệm duy nhất trong $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ và mọi dãy Newton của f đều hội tụ về nó.

(ii) Xét hàm $f: [-10,10] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 1, \\ -\sqrt{1-x} \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$$

Trong trường hợp này, chúng ta sẽ có

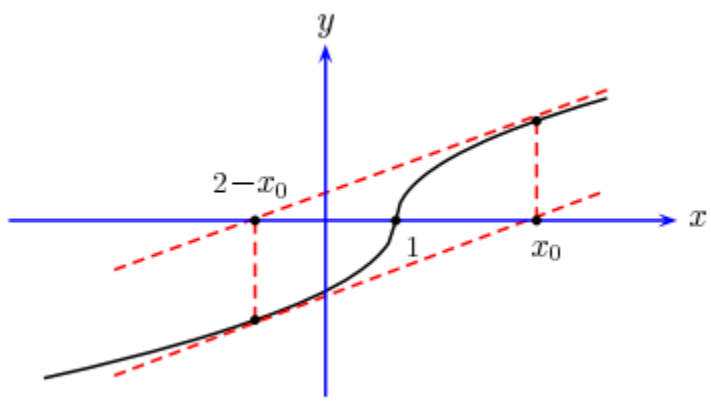
$$f'(x) = \begin{cases} 1/\left(2\sqrt{x-1}\right) \text{ nếu } x \geq 1, \\ 1/\left(2\sqrt{1-x}\right) \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$$

Dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \neq 1$ bất kỳ nào cũng sẽ được xác định bởi

$$x_n = x_{n-1} - 2(x_{n-1} - 1) = -x_{n-1} + 2.$$

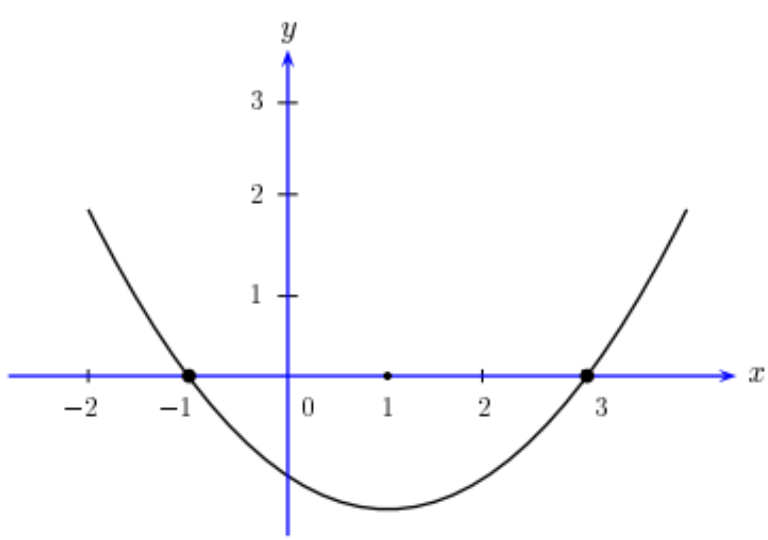
Do $x_n - 1 = -(x_{n-1} - 1)$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $x_n = 1 + (-1)^n(x_0 - 1)$.

Như vậy, dãy Newton sẽ dao động giữa x_0 và $2 - x_0$.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm $y = \begin{cases} \sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 1, \\ -\sqrt{1-x} \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$

(iii) Để minh họa cách dãy Newton hoạt động khi có nhiều hơn một nghiệm, xét hàm $f: [-2,4] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.



Hình vẽ minh họa đồ thị của hàm $y = x^2 - 2x - 3$.

Rõ ràng, phương trình $f(x) = 0$ sẽ có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

Kế tiếp, $f'(x) = 2(x - 1)$, và, do đó, dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \neq 1$ bất kỳ sẽ được xác định bởi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} - 3}{2(x_{n-1} - 1)} = \frac{x_{n-1}^2 + 3}{2(x_{n-1} - 1)}, \text{với điều kiện } x_{n-1} \neq 1.$$

Không khó để chúng ta có thể chứng minh rằng nếu $x_0 < 1$ thì (x_n) sẽ hội tụ về nghiệm -1 của phương trình $f(x) = 0$, trong khi nếu $x_0 > 0$ thì (x_n) sẽ hội tụ về nghiệm 3 của phương trình $f(x) = 0$.

Như các ví dụ trên cho thấy, dãy Newton có thể không phải lúc nào cũng hội tụ đến nghiệm mong muốn, nhưng khi nó hội tụ, tốc độ hội tụ sẽ khá nhanh và chỉ với một vài lần lặp sẽ cho chúng ta các giá trị khá gần với nghiệm mong muốn. Tuy nhiên, chúng ta cũng có những tập các điều kiện đủ khác, chẳng hạn như tập các điều kiện đủ được cho bởi kết quả sau đây.

Kết quả 4.5.

Giả sử $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sao cho $f(c^*) = 0$ với một số $c^* \in [a, b]$ nào đó.

Khi đó, nếu f' khác 0 trên toàn bộ $[a, b]$ và f' đơn điệu trên $[a, b]$ thì c^* sẽ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trong $[a, b]$ và dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$ sẽ hội tụ về c^*.

Chứng minh kết quả 4.5.

Nhận thấy rằng do $f(c^*) = 0$ và f' khác 0 trên toàn bộ $[a, b]$ nên, theo Định lí Rolle (Kết quả 2.3) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**"), c^* sẽ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trong $[a, b]$. Hơn nữa, do f' có tính chất giá trị trung gian trên $[a, b]$ (Kết quả 2.2) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**") nên chúng ta sẽ nhận thấy rằng f' sẽ dương trên toàn $[a, b]$ hoặc sẽ âm trên toàn $[a, b]$. Ngoài ra, do f' đơn điệu trên $[a, b]$ nên chúng ta sẽ có bốn trường hợp có thể xảy ra là f' dương hoặc f' âm và f' tăng đơn điệu hoặc f' giảm đơn điệu.

Để bắt đầu, chúng ta sẽ giả sử rằng f' dương và tăng đơn điệu trên $[a, b]$. Chọn ra một điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$. Kí hiệu (x_n) là dãy Newton của f với điểm ban đầu là x_0. Nếu $x_0 = c^*$ thì rõ ràng $x_n = c^*$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và, do đó, $x_n \to c^*$.

Bây giờ, giả sử $x_0 > c^*$. Khi đó, theo Định lí giá trị trung bình (Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**"), tồn tại một số thực $c \in (c^*, x_0)$ sao cho

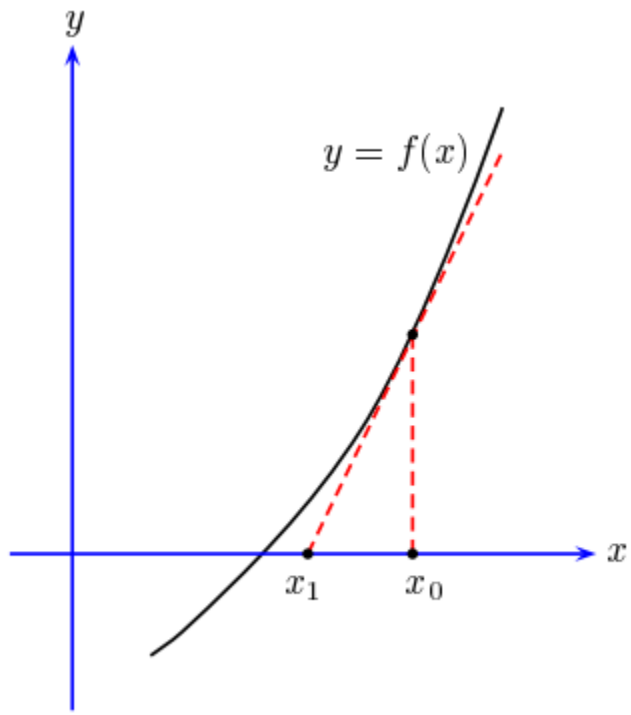
$$\frac{f(x_0)}{x_0 - c^*} = \frac{f(x_0) - f(c^*)}{x_0 - c^*} = f'(c).$$

Ngoài ra, do f' dương và tăng đơn điệu trên $[a, b]$ nên chúng ta sẽ có $0 < f'(c) \leq f'(x_0)$. Do đó, $f(x_0) > 0$ và $(f(x_0)/f'(x_0)) \leq x_0 - c^*$.

Như vậy,

$$c^* = x_0 - (x_0 - c^*) \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Do $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0))$ nên chúng ta có thể nhận thấy rằng $c^* \leq x_1 < x_0$.



Hình vẽ minh họa phép lặp Newton của f với điểm ban đầu x_0 khi f' dương và tăng đơn điệu và $x_0 > c^*$,

trong đó $c^* \in \mathbb{R}$ với $f(c^*) = 0$.

Như vậy, nếu $x_1 \neq c^*$ thì $x_1 > r$ và chúng ta có thể tiến hành như trước để thu được $c^* \leq x_2 < x_1$. Bằng cách tiếp tục theo cách này, chúng ta có thể nhận thấy rằng dãy Newton (x_n) sẽ có tính chất: "$x_n = c^*$ với một số $n \in \mathbb{N}$ nào đó (trong trường hợp này, $x_m = c^*$ với mọi $m > n$) hoặc (x_n) giảm nghiêm ngặt và bị chặn dưới bởi c^*." Trong trường hợp sau, theo khẳng định (ii) của Kết quả 2.1.6) của bài viết "**Phép tính giới hạn hàm một biến**", $x_n \to s$ với một số $s \in [a, b]$ nào đó với $r \leq s$. Nhưng khi đó $f(s) = 0$ và, do đó, $s = c^*$. Như vậy, trong mọi trường hợp, $x_n \to c^*$.

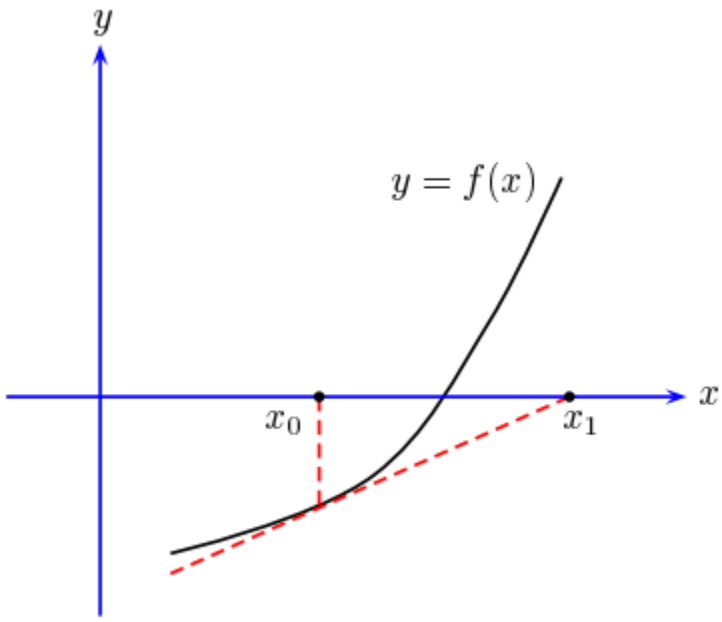
Kế tiếp, giả sử $x_0 < c^*$. Bằng cách sử dụng Định lí giá trị trung bình (Kết quả 2.4) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**") như trước, chúng ta nhận thấy rằng lần này cũng sẽ có một số thực $d \in (x_0, c^*)$ sao cho

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - c^*} = \frac{f(x_0) - f(c^*)}{x_0 - c^*} = f'(d).$$

Một lần nữa, do f' dương và tăng đơn điệu trên $[a, b]$ nên chúng ta sẽ có $0 < f'(x_0) \leq f'(d)$. Do đó, $(f(x_0)/f'(x_0)) \leq x_0 - c^*$.

Như vậy,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq c^*.$$



Hình vẽ minh họa phép lặp Newton của f với điểm ban đầu x_0 khi f' dương và tăng đơn điệu và $x_0 < c^*$,

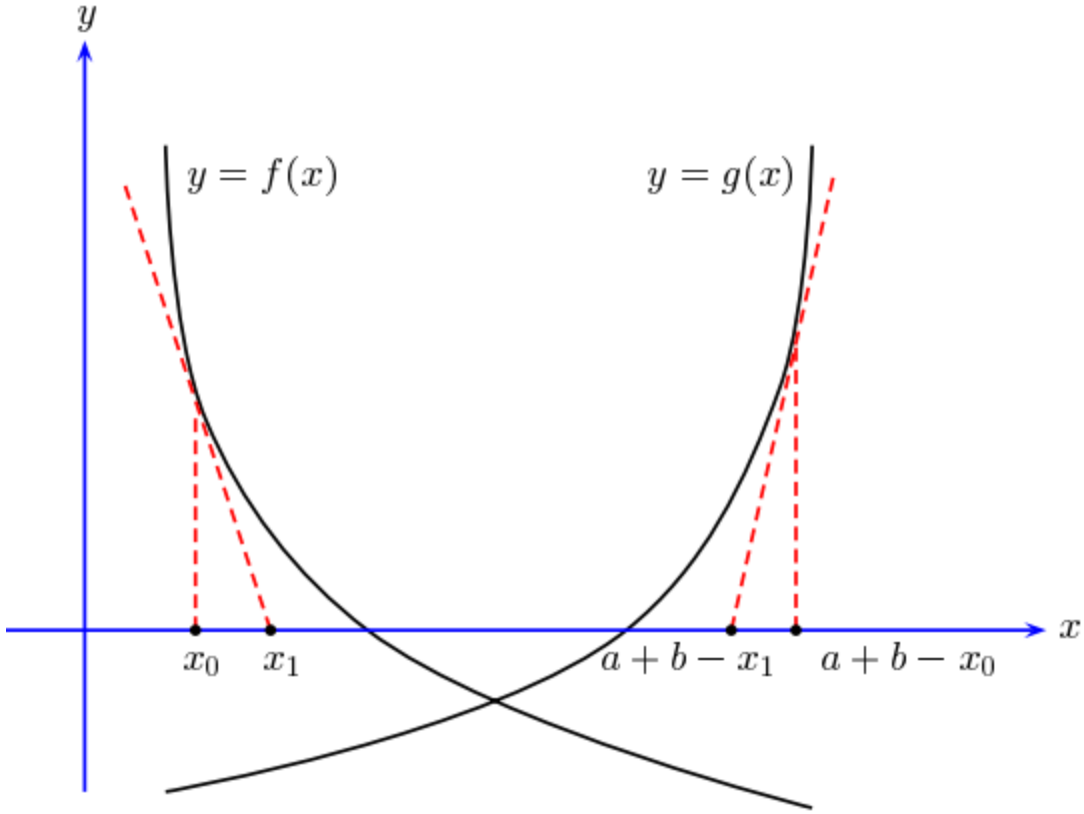
trong đó $c^* \in \mathbb{R}$ với $f(c^*) = 0$.

Điều này có nghĩa là chúng ta đang ở một trong các trường hợp trước, trong đó giá trị ban đầu $\geq c^*$. Như vậy, $x_n \to c^*$. Điều này cũng chứng tỏ mệnh đề đúng khi f' dương và tăng đơn điệu trên $[a, b]$.

Nếu f' âm và giảm đơn điệu trên $[a, b]$ thì chúng ta chỉ cần xét $-f$ và lưu ý rằng các dãy Newton của $-f$ và f là giống hệt nhau, miễn là cả hai đều có cùng điểm ban đầu.

Nếu f' âm và tăng đơn điệu trên $[a, b]$ thì chúng ta chỉ cần xét "ảnh đối xứng" của nó qua đường thẳng đứng $x = (b - a)/2$, nghĩa là, hàm $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = f(a + b - x)$ với $x \in [a, b]$ và lưu ý điều sau:

Đầu tiên, g khả vi và $s = a + b - c^*$ là một nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ trong $[a, b]$. Kế tiếp, g' dương và tăng đơn điệu trên $[a, b]$. Ngoài ra, nếu (x_n) là một dãy Newton của f với điểm ban đầu x_0 thì $(a + b - x_n)$ sẽ là một dãy Newton của g với điểm ban đầu $a + b - x_0$. Cuối cùng, nếu $a + b - x_n \to s$ thì $x_n \to c^*$.



Hình vẽ minh họa phép lặp Newton của $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ khi f' âm và tăng đơn điệu và "ảnh đối xứng" $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ của nó qua đường thẳng đứng $x = (b - a)/2$ xác định bởi $g(x) = f(a + b - x)$.

Nếu f' dương và giảm đơn điệu thì chúng ta chỉ cần xét $-f$ và sử dụng kết quả của đoạn trước. □

Kết quả 4.6.

Giả sử hàm $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần và $f(c^*) = 0$ với một số $c^* \in [a, b]$ nào đó.

Khi đó, nếu f' khác 0 trên toàn bộ $[a, b]$ và f'' không đổi dấu trên $[a, b]$ thì c^* sẽ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trong $[a, b]$ và mọi dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$ đều hội tụ về c^*.

Chứng minh kết quả 4.6.

Bằng cách áp dụng khẳng định (i) của Kết quả 3.2) của bài viết "**Phép tính vi phân hàm một biến**" cho f', chúng ta có thể nhận thấy rằng f' sẽ đơn điệu trên $[a, b]$. Như vậy, theo Kết quả 4.5), c^* sẽ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trong $[a, b]$ và mọi dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$ đều hội tụ về c^*. □

Một tập các điều kiện đủ thay thế khác cho sự hội tụ của dãy Newton cũng được đưa ra trong kết quả sau:

"Giả sử $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho f' bị chặn trên (a, b) và phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm $c^* \in (a, b)$. Với mỗi $x \in (a, b)$, $x \neq r$, kí hiệu I_x là khoảng mở giữa x và c^*. Giả sử rằng f lồi trên I_x nếu $f(x) > 0$, trong khi f lõm trên I_x nếu $f(x) < 0$.

Khi đó, mọi dãy Newton của f với điểm ban đầu $x_0 \in (a, b)$ bất kỳ nào cũng sẽ đều hội tụ về một nghiệm nào đó của phương trình $f(x) = 0$ trong (a, b)."

Để kết thúc phần này của bài viết, chúng ta có thể nhận thấy rằng nếu $f(x)$ là một đa thức với bậc ≥ 2 thì $f'(x)$ và $f''(x)$ là các đa thức khác 0 với bậc nhỏ hơn và, đặc biệt, chúng có hữu hạn nghiệm. Như vậy, đường thẳng thực có thể được chia thành một số hữu hạn các khoảng sao cho trong mỗi khoảng đó f' và f'' khác 0 và không đổi dấu. Cụ thể, với mỗi nghiệm c^* của phương trình $f(x) = 0$, chúng ta đều có thể tìm được các số thực $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho phép thu hẹp của f trên $[a, b]$ sẽ thỏa mãn các giả thiết của Kết quả 4.6). Bằng cách này, chúng ta có thể nhận thấy rằng phương pháp Newton luôn có thể áp dụng được cho các đa thức, miễn là chúng ta tránh xa những điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

[01]. Sudhir R.Ghorpade, Balmohan V.Limaye, A course in calculus and real analysis, ??/??/????.

[02]. Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán. Tập 1 – GIẢI TÍCH 1, ??/??/????.

[03]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích Tập I, ??/??/???.

[04]. Trương Phước Nhân, Phép tính giới hạn hàm một biến, 10/01/2023.

[05]. Trương Phước Nhân, Phép tính vi phân hàm một biến, 21/01/2023.