**zaizai**

Jun 12 2007, 07:58 AM

Gửi bài viết #1

Tiến sĩ diễn đàn toán

Nhóm: **Cộng Tác Viên**
Bài viết: 1.244
Tham gia: 26-August 05
Đến từ: Quảng Trị
Thành viên thứ 5.064
Blog cá nhân

## Bất đẳng thức Schur và kĩ thuật đổi biến theo các đa thức Viete

### Phần 1: Đa thức đối xứng 3 biến:

Bất đẳng thức đối xứng 3 biến là một dạng rất thú vị và thường xuất hiện trong các k" thi Olympic. Ta có thể định nghĩa về đa thức đối xứng 3 biến như sau:

Đa thức $F(a,b,c)$ với bộ 3 biến thực a,b,c được hiểu là hàm số có dạng:

$$F(a,b,c)=\sum_{s=0}^{N} M_s(a,b,c)$$

Trong đó:

$$M_s(a,b,c)=\sum_{i+j+k=s} T_{ijk}a^ib^jc^k$$

Với $i,j,k\in\mathbb{N}$

Ta định nghĩa đa thức đối xứng 3 biến như sau:

Nếu $F(a,b,c)=F'(a',b',c')$

Trong đó $(a',b',c')$ là một hoán vị tùy ý của $(a,b,c)$ th" ta gọi $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng.

### Phần 2: Các đa thức đối xứng Viete:

Ta định nghĩa các đa thức đối xứng Viete trong lớp các bài toán bao g?"m 3 biến số là các đang thức có dạng:

$$p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$$

**Định lí:**

Mọi đa thức đối xứng $F(a,b,c)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng các đa thức đối xứng Viete.

Đây là 1 định lí đại số rất cơ bản và quan trọng. Phép chứng minh xin ko được nêu ra ở đây. Bạn có thể tham khảo từ rất nhiều trong các tài liệu về Đa thức đại số.

### Phần 3. Làm quen với bất đẳng thức Schur:

Có thể rất nhiều bạn đã quá quen thuộc với bất đẳng thức này cũng với phép chứng minh chỉ g?"m 2 dòng cho nó. Tuy nhiên trong bài viết này chúng ta sẽ đưa ra một phép chứng minh "lạ mắt" hơn 1 tí. Đôi khi nó cũng là một việc làm rất

**Phần 3, Làm quen với bất đẳng thức Schur:**

Có thể rất nhiều bạn đã quá quen thuộc với bất đẳng thức này cũng với phép chứng minh chỉ g?"m 2 dòng cho nó. Tuy nhiên trong bài viết này chúng ta sẽ đưa ra một phép chứng minh "lạ mắt" hơn 1 tí. Đôi khi nó cũng là một việc làm rất thú vị:

*Định lí schur:*

Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Khi đó với mọi $r\geq 0$ th"

$$\boxed{a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0}$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b$ và $c=0$ cùng các hoán vị của nó.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\geq b\geq c$

Ta có :

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum a^r[(a-b)^2+(a-c)^2-(b-c)^2]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (b-c)^2(c^r+b^r-a^r)\geq 0$$

Bất đẳng thức đã qui về dạng chính tắc với:

$$S_a=c^r+b^r-a^r$$

$$S_b=a^r+c^r-b^r$$

$$S_c=a^r+b^r-c^r$$

Dễ thấy ta có $S_b,S_c\geq 0$ . Ta cần chứng minh $S_c+S_a\geq 0$

Thật vậy ta có $S_c+S_a=2b^r\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b$ và $c=0$ cùng các hoán vị của nó.

**Phần 4, Làm mạnh bất đẳng thức Schur và ứng dụng của nó:**

Trước khi đi vào phần chính của kĩ thuật này, chúng ta hãy cùng tản mạn với bất đẳng thức Schur bằng việc phát biểu và chứng minh trường hợp mạnh hơn của nó trong trường hợp $r=1$.

Như các bạn đã biết với $r=1$ th" bất đẳng thức Schur có dạng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(c+b)+ca(c+a)$$

Và xuất phát từ ý tưởng làm mạnh bài toán ta sẽ suy nghĩ ngay tới bất đẳng thức

$2(a^2+b^2)\geq (a+b)^2$ suy ra $\sqrt{2(a^2+b^2)}\geq a+b$

Bây giờ là bước 2, làm mạnh theo những g" đã định hướng ta chứng minh bất đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(c^2+b^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}$$

Lời giải:

Bây giờ là bước 2, làm mạnh theo những g" đã định hướng ta chứng minh bất đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(c^2+b^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(a+c)$$

$$-ab(\sqrt{2(a^2+b^2)}-a-b)-bc(\sqrt{2(b^2+c^2)}-b-c)-ca(\sqrt{2(c^2+a^2)}-c-a)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b-c)(a-b)^2+(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2}{2}$$

$$-\frac{ab(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}-\frac{bc(b-c)^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c}-\frac{ca(c-a)^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+c+a}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum(a-b)^2[(a+b-c)-\frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}]\geq 0$$

Như vậy bước biến đổi về dạng chính tắc đã thành công. Ta chuyển sang bước đánh giá.

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$

Ta có:

$$S_c=(a+b-c)-\frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}=\frac{(a+b-c)(\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b)-2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}$$

$$\geq \frac{2(a+b-c)(a+b)-2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}\geq 0$$

(do $a+b\geq a$ và $a+b-c\geq b$ )

Tương tự ta dễ dàng chứng minh $S_b\geq 0$ và dẫn đến

$S_b+S_c\geq 0$ bây giờ ta cần chứng minh:

$$S_a+S_c=2b-\frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}-\frac{2bc}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c}$$

$$\geq 2b[1-\frac{a}{2(a+b)}-\frac{c}{2(b+c)}]=b[\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c})]\geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b$ và $c=0$ cùng các hoán vị của nó.

**Phần 5: Kĩ thuật đổi biến theo các đa thức đối xứng Viete**

Phần này là mục tiêu và cũng là nội dung chính của bài viết. Tư tưởng của kĩ thuật này chắc hẳn chỉ nh"n vào chúng ta cũng dễ dàng nhận ra nó g?"m 2 bước:

+ Đổi biến một bất đẳng thức đối xứng 3 biến về dạng các đa thức Viete.

+ Sử dụng định lí Schur để chứng minh bất đẳng thức sau khi đã đổi biến.

Dễ dàng biểu diễn các trường hợp của bất đẳng thức schur theo 3 biến p,q,r

Với trường hợp lũy thừa là 0 th":

Dễ dàng biểu diễn các trường hợp của bất đẳng thức schur theo 3 biến p,q,r

Với trường hợp lũy thừa là 0 th":

$a^0(a-b)(a-c)+b^0(b-c)(b-a)+c^0(c-a)(c-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow pq-9r\geq 0$

Với trường hợp lũy thừa là 1 th":

$a^1(a-b)(a-c)+b^1(b-c)(b-a)+c^1(c-a)(c-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow p^3-4qp+9r\geq 0$

Với trường hợp lũy thừa là 2 th":

$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0$

**Bất đẳng thức phụ:**

$p^2\geq 3q, p^3\geq 27r, q^2\geq 3pr, 2p^3+9r\geq 7pq$

$p^2q+3pr\geq 4q^2$

$p^2q\geq 3pr+2q^2$

$p^4+3q^2\geq 4p^2a, p^3r+q^3\geq 6pqr$

..............

Còn rất nhiều bất đẳng thức phụ dạng này các bạn hoàn toàn có thể dùng SOS để chứng minh nó.

Để đổi biến 1 bất đẳng thức đối xứng về dạng các đa thức đối xứng Viete ta cần nắm các hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$

$(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)+(c+a)(b+c)=p^2+q$

$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr$

$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=q^3-3pqr+3r^2$

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r$

$a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$

$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)=p^2q-2q^2-pr$

..............

Chúng ta có thể dễ dàng thiết lập và t"m ra nhiều hằng đẳng thức nữa. Trên đây là những hằng đẳng thức cho các đa thức bậc thấp hơn 4.

**Phần 6: Ứng dụng**

**Phần 6: Ứng dụng**

**Bài toán:**[ZaiZai]
Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$ . Chứng minh rằng:
$3(a^2+b^2+c^2)+abc\geq 10$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$3p^2-6q+r\geq 10$
$\leftrightarrow 3p^2-7q-6\geq 0$
Theo bất đẳng thức Schur ta có $q\leq\frac{36+p^3}{4p+9}$
$\leftrightarrow 3p^2-7\frac{36+p^3}{4p+9}-6\geq 0$
$\leftrightarrow 5p^3+27p^2-24p-306\geq 0$
$\leftrightarrow \frac{(p-3)(5p^2+42p+102)}{4p+9}\geq 0$
Điều này hiển nhiên đúng do $p\geq 3$ và $5p^2+42p+102\geq 0$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

**Bài toán 2:**[Balkan Contest]
Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$
$2(a^2+b^2+c^2)+12\geq 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$

Ta viết bất đẳng thức lại dưới dạng:
$2(p^2-2q)+12\geq 3p+3q$

Theo bất đẳng thức schur ta có: $q\leq\frac{p^3+9}{4p}$
Từ đó ta phải chứng minh:
$2p^2-3p-\frac{7(p^3+9)}{4p}+12\geq 0$
$\leftrightarrow \frac{(p-3)(p^2-9p+21}{4p}\geq 0$
Điều này hiển nhiên đúng v" $p\geq 3$ (by Am-GM) và $p^2-9p+21=(p-\frac{9}{4})^2+\frac{3}{4}\geq 0$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

**Bài toán 3:**[Vasile Cirtoaje]

**Bài toán 3:**[Vasile Cirtoaje]

Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3}{a+b+c}$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{p^2+q}{pq-r}\geq\frac{p}{2q}+\frac{3}{p}$$

$$\leftrightarrow\frac{p^2+3}{3p-r}\geq\frac{p}{6}+\frac{3}{p}$$

Từ đó biến đổi biểu thức ta cần phải chứng minh:

$$(p^2+3)6p-p^2(3p-r)-18(3p-r)\geq 0$$

$$\leftrightarrow 3p^3+p^2r-36p+18r\geq 0$$

Lại có theo bất đẳng thức Schur th" :

$$p^3-4pq+9r\geq 0\leftrightarrow p^3-12p+9r\geq 0$$

Ta có:

$$\leftrightarrow 3p^3+p^2r-36p+18r\geq 0$$

$$\leftrightarrow 3(p^3-12p+9r)+r(p^2-9)\geq 0$$

Mặt khác ta lại có:

$$r(p^2-9)\geq 0\leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$$

Bài toán được chứng minh.

**Bài toán 4:**[Phạm Kim Hùng]

Chứng minh rằng nếu $a,b,c$ là các số thực không âm và $k\geq 3$ th"

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{k}{a+b+c}\geq\frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lời giải: [tanpham]

Ta cần chứng minh :

$$\frac{p^2+q}{pq-r}+\frac{k}{q}\geq\frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}$$

Dễ thấy :

$$\frac{p^2+q}{pq-r}+\frac{k}{q}\geq\frac{p^2+q}{pq}+\frac{k}{q}=\frac{p}{q}+\frac{k+1}{p}\geq\frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}$$

Đúng theo AM-GM !

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ với bộ số:

$(\frac{k-1+\sqrt{k^2-2k-3}}{2}a,a,0)$ và $(\frac{k-1-\sqrt{k^2-2k-3}}{2}a,a,0)$

**Bài toán 5:**[Phạm Kim Hùng]

**Bài toán 5:**[Phạm Kim Hùng]
Chứng minh rằng nếu $a,b,c$ là các số thực không âm th":
$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geq 4$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawz ta có:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}$$
$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}$$
Chúng ta cần chứng minh:
$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 4$$
Theo bất đẳng thức schur ta có: $p^3-4pq+9r\geq 0$. Chuẩn hóa $r=abc=1$ khi đó ta có bất đẳng thức tương đương với:
$$\frac{p^2}{q}+\frac{3}{p}\geq 4 \leftrightarrow p^3+3q\geq 4pq \leftrightarrow (p^3-4qp+9r)+(3q-9r)\geq 0$$
Điều này hiển nhiên đúng v":
$p^3-4pq+9r\geq 0$ và $3q\geq 9r$
Lại có
$$3q=3(ab+bc+ca)\geq 9\sqrt[3]{(abc)^2}=9=9r \leftrightarrow 3q\geq 9r$$

**Bài toán 6:**[ZaiZai]
Chứng minh rằng nếu $a,b,c$ là các số thực không âm
$$\frac{27}{2}\geq 4(ab+bc+ca)+\frac{a^2b^2}{a+b}+\frac{b^2c^2}{b+c}+\frac{c^2a^2}{c+a}$$

Có thể dùng SOS hoặc SS sau khi đ?"ng bậc hóa chúng, tuy nhiên có thể giải quyết đơn giản chỉ bằng schur. Thử ghi ra phát coi
Ta đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$. Dễ dàng đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng các biểu thức Viet trên:
$$\frac{27}{2}\geq 4q+\frac{q^3-6pr+3r^2}{3q-r}$$
Đến đây sử dụng 2 nhận xét theo schur th":
$r\leq\frac{q}{3}$ và $r\geq\frac{4q-9}{3}$
Từ đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$6q(9-3q)(q+2)\geq 0$
Cái này hiển nhiên đúng do:

Từ đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$6q(9-3q)(q+2)\geq 0$
Cái này hiển nhiên đúng do:
$9-3q=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

**Bài toán 7:**[Võ Quốc Bá Cẩn]
Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$. T"m hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau là đúng:
$a+b+c+kabc\geq k+3$

Dễ dàng dự đoán $k=3$ là hằng số tốt nhất. Như vậy ta cần chứng minh:
$p+3r\geq 6$ hay $2p-q\geq 3$
Nếu $p\geq 6$ th" ta có điều phải chứng minh. Giả sử ngược lại $p\in[3;6]$ . Khi đó ta xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $p^2\geq 4q$ ta có:
$2p-q\geq 2p-\frac{p^2}{4}=\frac{(p-2)(6-p)}{4}+3\geq 3$

+ Trường hợp 2: $p^2\leq 4q$ ta có:
$27=3q+18r\geq 3q^2+2p(4q-p^2)$
Từ đó suy ra:
$2p-q\geq 2p-\frac{2p^3+27}{8p+3}\geq 3$
Thật vậy v" điều này tương đương với:
$(p+1)(p-3)(p-6)\leq 0$
Điều này hiển nhiên đúng.

**Bài toán 8:**[Phạm Kim Hùng]
Chứng minh với các số thực không âm $a,b,c$ th"
$(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)\geq(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$. Khi đó ta có biểu thức cần chứng minh tương đương với:
$(p^4-4p^2q+2q^2+4pr)q\geq(p^2-2q)(q^2-2pr)$
Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$. Khi đó ta cần chứng minh:
$p^4-4p^2+2+4pr\geq p^2-2p^3r-2+4pr$
Điều này tương đương với:

Điều này tương đương với:
$(p^4-5p^2+4+6pr)+(2p^3r-6pr)\geq 0$
Khi đó ta có, theo bất đẳng thức Schur bậc 4:
$(p^4-5p^2+4+6pr)\geq 0$
Lại có:
$2p^3r-6pr=2pr(p^2-3)\geq 0$
Điều này hiển nhiên đúng v" ta có:
$p^2-3=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

**Bài toán 9:**[ZaiZai]
Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}+1\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Ta có
$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)=2+a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3+a^3+b^3+c^3$
Sử dụng kết quả
$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3$
$a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3=q^3-3pq+3$
Ta có
$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)=p^3-3pq+q^3-3pq+8$
BDT đưa về
$p^3-3pq+q^3-3pq+8\geq (q-1)^3$
$\Leftrightarrow p^3+3q^2+9\geq 6pq+3q$
Xét các trường hợp
Nếu $q\geq p$ th" theo schur có $p^3+9\geq 4pq$
BDT thành $3q^2\geq 3q+2pq$
Do $q\geq p$ nên BDT thành $q^2\geq 3q$ (đúng)
Nếu $p\geq q$ th" BDT thành
$p^3+3q^2+9q+9\geq 6pq+12q$
AM-GM có
$p^3+3q^2+9q\geq 9pq$
cần có $9pq+9\geq 6pq+12q$
$\Leftrightarrow pq+3\geq 4q$
do $p\geq q$ nên $pq+3\geq q^2+3\geq 4q$ (Điều này đúng do $p\geq 3$)

**zaizai** | Jun 30 2007, 09:50 AM | Gửi bài viết #2


Tiến sĩ diễn đàn toán

Nhóm: Cộng Tác Viên
Bài viết: 1.244
Tham gia: 26-August 05
Đến từ: Quảng Trị
Thành viên thứ 5.064
Blog cá nhân

Các ví dụ trên khá là đơn giản và dễ hiểu. Sau đây là một số bài toán dành cho việc luyện tập

**Bài toán 1:** [hungkhtn + zaizai]
Cho $a,b,c$ là các số thực thỏa mãn $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng:
$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\ge 9(ab+bc+ca)$

**Bài toán 2:**
Cho $a,b,c$ là các số thực dương . Chứng minh rằng:
$2(1+abc)+\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\ge(1+a)(1+b)(1+c)$

**Bài toán 3:**
Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:
$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le 1$

**Bài toán 4:**
Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ac}\le 1$

**Bài toán 5:**
Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:
$21+18abc\ge 13(ab+bc+ca)$

Còn rất nhiều bài toán có thể giải theo kĩ thuật này, đôi khi nó là một công cụ khá hiệu quả và đơn giản ... dù đây là một kĩ thuật ko quá mạnh nhưng nó thật sự có những nét độc đáo riêng Một lượng lớn bài tập ko thể nêu ra hết được ... hi vọng các bạn sẽ tiếp tục bổ sung các bài toán đặc sắc hơn

bài viết được **zaizai** chỉnh sửa vào lúc Jun 30 2007, 09:52 AM

--------------------

Blog của H, nơi chia sẽ cảm xúc mọi ngày :)
http://zaizaivn.net