

II: TOÁN (cho mọi thí sinh)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I: Tìm các giá trị nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$(y + 2)x^2 + 1 = y^2$$

Câu II: 1) Giải phương trình :

$$\sqrt{x(3x + 1)} - \sqrt{x(x - 1)} = 2\sqrt{x^2}$$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu III: Cho nửa vòng tròn đường kính $AB = 2a$. Trên đoạn AB lấy điểm M . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa vòng tròn, ta kẻ 2 tia Mx và My sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy} = 30^\circ$. Tia Mx cắt nửa vòng tròn ở E , tia My cắt nửa vòng tròn ở F . Kẻ EE', FF' vuông góc xuống AB .

1) Cho $AM = \frac{a}{2}$, tính diện tích hình thang vuông $EE'F'F$ theo a .

2) Khi điểm M di động trên AB , chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một vòng tròn cố định.

Câu IV: Giả sử x, y, z là các số thực khác không thỏa mãn hệ đẳng thức :

$$\begin{cases} x(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + y(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}) + z(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Câu V: Với x, y, z là những số thực dương, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$