

Câu I (2 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 7$ (1)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
- 2) Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - 9$ tiếp xúc với đồ thị hàm số (1).

Câu II (2 điểm).

1) Giải phương trình: $\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

2) Giải hệ:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

Câu III (3 điểm).

- 1) Trong không gian với hệ trục Oxyz cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình;

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{và điểm } I(0;3; -1). \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua } I \text{ cắt } d_1$$

tại A và cắt d_2 tại B. Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}.$

- 2) Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $DA = DB = DC$. Biết rằng DBC là tam giác vuông.

a) Tính thể tích tứ diện ABCD

b) Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[B, AD, C]$. Tính $\cos \varphi.$

Câu IV (2 điểm).

1) Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + 4 \sin x - \cos 2x} dx$

- 2) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm thực

$$3^{\log_{16}(x+1)} + 3^{\log_{16}(x-1)} = 2\sqrt{x}.$$

Câu V (1 điểm). Giải phương trình

$$2^{\cos(\frac{11\pi}{4} - x)} = \tan x.$$

Hướng dẫn:

Câu I.

3) Đường thẳng tiếp xúc đồ thị $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} x^4 - 8x^2 + 7 = mx - 9(1) \\ 4x^3 - 16x = m(2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) được: $3x^4 - 8x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Thay $x = \pm 2$ vào (2) được $m=0$.

Câu II.

1) ĐK: $\cos x \neq 0$. Phương trình được biến đổi thành:

$$\cos^2 x \cdot \tan x \cdot (\tan x + 1) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) \Leftrightarrow \sin x (\sin x + \cos x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \end{cases}$$

2) ĐK: $x, y \geq 1/2$. Từ hệ suy ra: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} (1)$.

. Nếu $x > y$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{y}}$ và $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ suy ra VT(1) < VP(1). Không thỏa mãn!

. Nếu $x < y$ tương tự cũng không thỏa mãn. Từ đó $x=y$. Thế vào một phương trình của hệ được: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x=1$. Hệ cho nghiệm: $(x; y) = (1; 1)$.

Câu III.

1) A thuộc $d_1 \Leftrightarrow A(-1+2t; 1; t)$; B thuộc $d_2 \Leftrightarrow B(-1-2s; -1+s; 3-s)$.

$\vec{IA} = (-1+2t; -2; 1+t)$; $\vec{IB} = (-1-2s; -4+s; 4-s)$ là hai véc tơ cùng phương nên

$\vec{IA} = k \cdot \vec{IB}$ từ đó giải ra được $t = 1$; $s = -2$; $k = 1/3$. Vậy: $IA/IB = 1/3$.

2) a) Gọi O là hình chiếu vuông góc của D lên mp(ABC) $\rightarrow$ O là trung điểm BC.

ΔDBC vuông cân tại D nên $DO = \frac{1}{2} BC = a$. Vậy: $V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot DO \cdot dt(ABC) = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

b) Kéo dài CD cắt đường thẳng vuông góc với (ABC) tại B ở S. Ta có $BS = 2a$; $DC = a\sqrt{2}$; $AD = a\sqrt{2}$ và là trung tuyến của tam giác SAC. Gọi $\varphi = \angle B, AD, C$. Kẻ

$BH \perp SA \rightarrow BH \perp (SAC)$. Kẻ $HE \perp AD \rightarrow BE \perp AD$. Khi đó $\varphi = 180^\circ - \angle BEH$. Tính

được: $\tan \angle BEH = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; $\cos^2 \angle BEH = 3/15$. Vậy: $\cos \varphi = -\sqrt{\frac{3}{15}}$.

Câu IV. 1) $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$. 2) ĐK: $x > 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow (x+1)^{\log_{16} 3} + (x-1)^{\log_{16} 3} = 2\sqrt{x} (*)$. Vì $0 < \log_{16} 3 < 1/2$ nên

VT(*) $\leq 2 \left[\frac{(x+1) + (x-1)}{2} \right]^{\log_{16} 3} = 2 \cdot x^{\log_{16} 3} < 2\sqrt{x} = VP(*)$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu V. ĐK: $\cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} (1)$. Do vế trái (1) dương nên $\sin x$ và $\cos x$ cùng thuộc $(-1; 0)$

hoặc $(0; 1)$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}}{t}$ có đạo hàm $f'(t) = \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}}{\sqrt{2}t^2}(t \ln t - \sqrt{2}) < 0$.

Từ đó phương trình $\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.