

Phương trình vi phân

Bài 11 A

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

Chương IX

GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ CÁC BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN

§ 9.1 Bài toán Sturm-Liouville và Khai triển hàm riêng

- Bài toán Sturm – Liouville
- Khai triển hàm riêng

1. Đặt vấn đề

- Trong chương 8 ta thấy có nhiều bài toán giá trị biên khác nhau, song tất cả đều đưa về một dạng phương trình vi phân thường khi sử dụng phương pháp tách biến.

- Phương trình truyền nhiệt một chiều $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

khi cho các điều kiện biên khác nhau ta có các bài toán giá trị riêng khác nhau. Gọi $X_n(x)$ là các hàm riêng ứng với các giá trị riêng λ_n thì có nghiệm hình thức dạng chuỗi $u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t)$

ở đó c_n được chọn sao cho $u(x, 0) = \sum c_n T_n(0) X_n(x) = f(x)$.

Như vậy thực chất ta cần một khai triển hàm $f(x)$ theo các hàm riêng $X_n(x)$. Cách tìm khai triển này?

2. Bài toán Sturm-Liouville (Do hai nhà toán học người Pháp Charles Sturm (1803-1855) và Joseph Liouville (1809-1882) phát hiện ra vào những năm 1830).

Luôn biến đổi được phương trình bậc hai sau (sau khi nhân thêm một nhân tử thích hợp) $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$ về dạng

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

a) Bài toán Sturm-Liouville

Định nghĩa. Bài toán Sturm-Liouville là bài toán giá trị điểm đầu mút có dạng sau

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (a < x < b);$$

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

ở đó $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, tham số λ chính là giá trị riêng ta cần tìm.

Ví dụ 1. Ta có phương trình vi phân $y'' + \lambda y = 0$ là bài toán Sturm – Liouville với các điều kiện biên khác nhau

- $y(0) = y(L) = 0$: $p = 1$, $q = -1$, $r = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
- $y'(0) = y'(L) = 0$: $p = 1$, $q = -1$, $r = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$
- $y(0) = y'(L) = 0$: $p = 1$, $q = -1$, $r = 0$, $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$

Chú ý. Bài toán Sturm-Liouville luôn có một nghiệm tầm thường $y(x) \equiv 0$.

Định lý 1. Các giá trị riêng Sturm-Liouville

- Các hàm số $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$
- Biết $p(x) > 0$, $r(x) > 0$

Khi đó các giá trị riêng của bài toán Sturm-Liouville tạo thành một dãy tăng

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$$

và có $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$.

Nếu thêm $q(x) \geq 0$, ta có các giá trị riêng đều không âm.

- Bài toán Sturm-Liouville thoả mãn giả thuyết của Định lý 1 thì được gọi là chính quy; ngược lại sẽ là không chính quy.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị riêng và các hàm riêng tương ứng đối với bài toán Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < L);$$

$$y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

- Là bài toán Sturm-Liouville thoả mãn Định lý 1 với $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 1$ nên không tồn tại các giá trị riêng không âm.

- Khi $\lambda = 0$ có $y(x) = Ax + B$, từ các điều kiện $\begin{cases} y'(0) = A = 0 \\ y(L) = B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0 = B$

$\Rightarrow y = 0$ không phải là một giá trị riêng.

- Khi $\lambda = \alpha^2$, có

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$y'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x.$$

- Do $y'(0) = 0 = B \Rightarrow B = 0$, $y(L) = A \cos \alpha L = 0, \Rightarrow \alpha L = (2n-1)\frac{\pi}{2}$.

Nên có các giá trị riêng và các hàm riêng tương ứng là

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}; \quad y_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ví dụ 3. Tìm các giá trị riêng và hàm riêng tương ứng của bài toán Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < L);$$

$$y(0) = 0, \quad hy(L) + y'(L) = 0 \quad (h > 0).$$

- Là bài toán Sturm - Liouville thỏa mãn Định lý 1 với $\alpha_1 = \beta_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = h > 0$, nên sẽ không có giá trị riêng nhỏ hơn 0.

- Khi $\lambda = 0$ có $y(x) = Ax + B$, từ giả thiết $y(0) = B = 0$ nên

$$hy(L) + y'(L) = h.AL + A = A.(hL + 1) = 0,$$

$\Rightarrow A = 0$, do đó 0 không phải là giá trị riêng.

- Nếu $\lambda = \alpha^2$, có $y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$.

- Từ giả thiết $y(0) = A = 0 \Rightarrow y(x) = B \sin \alpha x \Rightarrow y'(x) = B\alpha \cos \alpha x$.

- Từ giả thiết $hy(L) + y'(L) = 0 \Rightarrow hB \sin \alpha L + B\alpha \cos \alpha L = 0$.

- Với $B \neq 0$ có $\tan \alpha L = -\frac{\alpha}{h} = -\frac{\alpha L}{hL}$, nên có $\beta = \alpha L$ là nghiệm dương của phương trình $\tan x = -\frac{x}{hL}$, do đó có $\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{\beta_n^2}{L^2}$, $y_n(x) = \sin \alpha_n x = \sin \frac{\beta_n x}{L}$.

Ví dụ 4. Kiểm tra giá trị riêng và hàm riêng đối với bài toán Sturm - Liouville sau

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(L) = 0, \quad y_0(x) = 1 \quad \text{và} \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y_n(x) = \frac{1}{L} \cos n\pi x$$

- Thỏa bài toán Sturm - Liouville với $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$ nên theo định lý 1 không có giá trị riêng âm

- $\lambda = 0$, có phương trình $y'' = 0 \Rightarrow y = Ax + B$.

Từ giả thiết $y'(0) = 0 = A \Rightarrow y = B$, nhưng do giả thiết $y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ và $\lambda = 0$ không phải là giá trị riêng.

- $\lambda = \alpha^2 > 0$ có phương trình $y'' + \alpha^2 y = 0$, có nghiệm tổng quát:

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \Rightarrow y'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x$$

- Từ giả thiết: $y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ và $A \neq 0$ và từ $y'(L) = 0$ có:

$$-A\alpha \sin \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi \text{ hay } \lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

- Do đó có các hàm riêng tương ứng là $y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$

b) Các hàm riêng trực giao

Định nghĩa. Các hàm số $\phi(x)$ và $\psi(x)$ được gọi là trực giao trên đoạn $[a, b]$

với hàm trọng số $r(x)$ nếu $\int_a^b \phi(x) \psi(x) r(x) dx = 0$,

Định lý 2. Tính trực giao của các hàm riêng

- Giả sử các hàm p, q, r trong bài toán Sturm-Liouville thỏa mãn định lý 1
- Có $y_i(x)$ và $y_j(x)$ là các hàm riêng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau λ_i và λ_j .

Khi đó ta có $\int_a^b y_i(x) y_j(x) r(x) dx = 0$.

c) Chuỗi các hàm riêng

- Giả sử $f(x)$ biểu diễn thành chuỗi hàm riêng trong khoảng $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \text{ ở đó } c_n = \frac{\int_a^b f(x) y_n(x) r(x) dx}{\int_a^b [y_n(x)]^2 r(x) dx}$$

Ví dụ 5. Tìm hàm riêng của bài toán Sturm-Liouville sau

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < \pi);$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

- Có các hàm riêng là $y_n = \sin nx$ và do $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2}$ nên có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{ở đó } c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

Định lí 3. Sự hội tụ của chuỗi các hàm riêng

- Cho các hàm riêng $y_1, y_2, y_3, \dots$ của bài toán Sturm–Liouville chính quy trên đoạn $[a, b]$
- Biết $f(x)$ trơn từng khúc trên đoạn $[a, b]$

Khi đó chuỗi hàm riêng $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = f(x)$, $a < x < b$ nếu $f(x)$ liên tục, còn nếu

$$f(x) \text{ không liên tục tại } x \text{ thì có } \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

Ví dụ 6. Hãy biểu diễn hàm số $f(x) = A$ (A là hằng số) với $0 < x < 1$ dưới dạng chuỗi các hàm riêng của bài toán Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \quad (0 < x < 1); \\ y(0) &= 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0 \end{aligned}$$

- Là bài toán Sturm-Liouville của Ví dụ 3 với $L = 1$ và $h = \frac{1}{2}$, các hàm riêng: $y_n(x) = \sin \beta_n x$ trong đó β_n là hàm dương của phương trình $\tan x = -2x$.

$$\text{• Từ đó ta có các hệ số trong chuỗi cần tìm là } c_n = \frac{\int_0^1 A \sin \beta_n x \, dx}{\int_0^1 \sin^2 \beta_n x \, dx}.$$

$$\text{• Mặt khác có } \int_0^1 A \sin \beta_n x \, dx = \frac{A}{\beta_n} (1 - \cos \beta_n)$$

$$\int_0^1 \sin^2 \beta_n x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\beta_n x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2\beta_n} \sin 2\beta_n x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \beta_n \cos \beta_n}{\beta_n} \right).$$

- Do các giá trị riêng thoả mãn phương trình $\tan x = -\frac{x}{hL}$, nên có $\frac{\sin \beta_n}{\beta_n} = -\frac{\cos \beta_n}{\frac{1}{2}}$, vì vậy

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \beta_n \cos \beta_n}{\beta_n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{-\cos \beta_n \cdot \cos \beta_n}{\frac{1}{2} \cdot 1} \right) = \frac{1}{2} (1 + 2 \cos^2 \beta_n)$$

- Có chuỗi hàm riêng cần tìm là $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(1 - \cos \beta_n)}{\beta_n(1 + 2 \cos^2 \beta_n)} \sin \beta_n x$.

Chú ý. Các dạng toán cơ bản của mục này là

1. Kiểm tra các giá trị riêng, hàm riêng của bài toán Sturm – Liouville: các bài 1 – 5 trang 409
2. Biểu diễn hàm $f(x)$ bằng chuỗi hàm riêng của bài toán Sturm – Liouville: các bài 7, 8, 9, 10 trang 410.

§ 9.3 Nghiệm tuần hoàn ổn định và tần số tự nhiên

- Dao động cùng biến, cộng hưởng
- Tần số tự nhiên
- Dao động nhiệt độ dưới mặt đất

1. Tần số tự nhiên

- Mục 8.6 đã cho nghiệm của bài toán dây rung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right); \quad (1.1)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$y(x, 0) = f(x), \quad t_t(x, 0) = g(x) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{là } y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{L} + B_n \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} - \gamma_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Nghiệm trên mô tả các độ rung *tự do* của dây có chiều dài L , tỷ trọng tuyến tính ρ dưới độ căng T và có tần số tự nhiên (vòng quay) của độ rung là

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Các dao động cưỡng bức và Cộng hưởng

- Giả sử có một lực tuần hoàn bên ngoài $F(t) = F_0 \cos \omega t$ tác động đều lên sợi dây theo chiều dài của nó. Khi đó từ mục 8.6, sự dịch chuyển $y(x, t)$ của dây sẽ thoả mãn phương trình đạo hàm riêng không thuần

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_0 \cos \omega t \quad (2.1)$$

$$\text{với điều kiện biên } y(0, t) = y(L, t) = y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0 \quad (2.2)$$

- Nếu có nghiệm riêng $y_p(x, t)$ của phương trình (2.1) thoả mãn $y(0, t) = y(L, t) = 0$ và sau đó tìm nghiệm $y_c(x, t)$ như (1.4) thoả mãn các điều kiện (1.2), (1.3) với $f(x) = -y_p(x, 0)$, $g(x) = -D_t y_p(x, 0)$ thì rõ ràng $y(x, t) = y_c(x, t) + y_p(x, t)$ cũng là nghiệm của (2.1), (2.2).

- Ta tìm $y_p(x, t)$ như sau. Kiểm tra các thành phần của (2.1) dự đoán

$$y_p(x, t) = X(x) \cos \omega t \quad (2.3)$$

Thay vào (2.1) ta có $a^2 X'' + \omega^2 X = -F_0$

- Từ giả thiết $X(0) = 0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{\omega^2}$

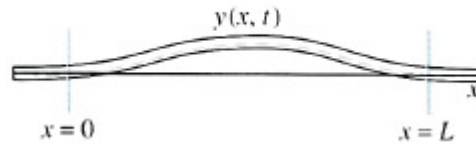
Từ giả thiết $X(L) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (2.4)

- Giả sử tần số ω của lực tuần hoàn bên ngoài không bằng bất kỳ một tần số tự nhiên nào $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$ của dây, do đó $\sin\left(\frac{\omega L}{a}\right) \neq 0$, từ (2.4) ta giải ra B , và có

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2} \left(\cos \frac{\omega x}{a} - 1 \right) - \frac{F_0 [\cos(\omega L / a) - 1]}{\omega^2 \sin(\omega L / a)} \sin \frac{\omega x}{a}$$

- Thay vào (2.3) ta có $y_p(x, t)$ cần tìm.
- Dây rung là đặc trưng của các hệ thống liên tục có một dãy vô hạn các tần số rung tự nhiên. Khi một lực tuần hoàn bên ngoài tác động lên hệ các độ rung cộng hưởng có sức công phá mạnh có thể xảy ra nếu tần số bắt buộc gần tới một trong những tần số tự nhiên của hệ thống này. Do đó thiết kế kết cấu đúng cần tránh các độ rung cộng hưởng như vậy.

3. Tần số tự nhiên của dầm



Hình 9.3.1. Một thanh chấn bị giữ chặt ở hai đầu

- Hình 9.3.1 cho thấy một thanh dầm đồng chất có chiều dài L , tỷ trọng tuyến ρ và môđun Young E , bị giữ chặt ở hai đầu. Đối với $0 < x < L$ và $t > 0$, hàm lệch $y(x, t)$ thỏa mãn phương trình bậc bốn

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^4 = \frac{EI}{\rho} \right) \quad (3.1)$$

đã được đề cập trong Mục 9.2; I là mômen quán tính của mặt cắt dầm xung quanh trục ngang đối xứng với nó. Bởi vì cả sự dịch chuyển và độ dốc bằng 0 ở mỗi đầu cố định nên các điều kiện điểm cuối là

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0 \text{ và } y(L, t) = y_x(L, t) = 0$$

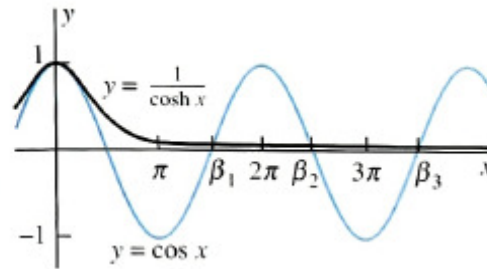
- Ta cần tìm các tần số tự nhiên của độ rung của dầm, đó là các giá trị ω để phương trình (3.1) có nghiệm không tầm thường dạng $y(x, t) = X(x)\cos(\omega t - \gamma)$

- Thế vào (3.1) có $X^{(4)} - \frac{\omega^2}{a^4} X = 0$

- Đặt $\alpha^4 = \frac{\omega^2}{a^4}$, phương trình trên có nghiệm tổng quát là

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$$

thoả mãn điều kiện biên dẫn đến phương trình $\cosh x \cos x = 1$

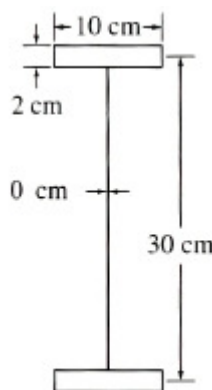


Hình 9.3.2. Các nghiệm của $\cosh x \cos x = 1$

- Từ Hình 9.3.2 ta thấy phương trình này có dãy tăng các nghiệm dương $\{\beta_n\}_1^\infty$
- Mặt khác $\omega = \alpha^2 a^2 = \frac{\beta^2 a^2}{L^2}$ và $a^2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ nên các tần số rung tự nhiên vòng tròn của dầm có các đầu bị giữ chặt là

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (\text{radian/giây}), n = 1, 2, 3, \dots$$

Ví dụ 1. Giả sử cấu kiện cơ bản của một cây cầu là một thanh dầm I bằng thép dài 120 feet có mặt cắt được chỉ rõ trong Hình 9.3.3, mômen quán tính $I = 9000 \text{ cm}^4$.



Hình 9.3.3. Một xà lý tưởng

- Nếu chúng ta thay thế các giá trị

$$L = (120 \text{ ft}) \left(30.48 \frac{\text{cm}}{\text{ft}} \right), \quad \rho = \left(7.75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) (40 \text{ cm}^2), \quad E = 2 \times 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

và các giá trị của β_1 và β_2 vào trong phương trình (19), chúng ta thấy rằng hai tần số tự nhiên thấp nhất của dầm là

$$\omega_1 \approx 12.74 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \left(122 \frac{\text{vòng}}{\text{min}} \right), \quad \omega_2 \approx 35.13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \left(335 \frac{\text{vòng}}{\text{min}} \right)$$

- Khi một đại đội lính hành quân khoảng 120 bước/phút tiếp cận cây cầu này, cần thận trọng giảm nhẹ bước chân trước khi đi qua vì đôi khi cầu sập do những chấn động cộng hưởng.

- Nhớ lại thảm họa của khách sạn Kansas City ngày 17/07/1981, một cây cầu trên không đầy diễn viên múa bị sập đổ. Các nhà nghiên cứu cho rằng sự chuyển động đồng nhịp của các diễn viên này đã gây nên những chấn động cộng hưởng có sức tàn phá đối với các thanh dầm thép I đỡ cây cầu.

Ví dụ 2. Một thanh chấn đồng chất có chiều dài L được làm bằng vật liệu có tỉ trọng δ và mô đun Young E . Thay $U(x, t) = X(x)\cos\omega t$ trong $\delta U_{tt} = EU_{xx}$ để tìm tần số tự nhiên của dao động dọc của thanh chấn, thỏa mãn 2 điều kiện đã cho tại 2 đầu mút là $x = 0$ và $x = L$.

- Có phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $a^2 = \frac{E}{\delta}$ là:

thay $U(x, t) = X(x)\cos\omega t$ có $a^2 X'' + \omega^2 X = 0$

có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cos\frac{\omega x}{a} + B\sin\frac{\omega x}{a}$

$X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow A = 0$ và $X(x) = B\sin\frac{\omega x}{a}$ và từ $X(L) = 0 \Rightarrow \sin\frac{\omega L}{a} = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{a} = n\pi$.

- Tần số tự nhiên của dao động dọc là $\omega_n = \frac{n\pi a}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\delta}}$.

Ví dụ 3. Tìm tần số tự nhiên của dao động ngang của dầm đồng chất biết đầu tại $x = 0$ cố định, đầu tại $x = L$ được lắp bản lề, phương trình tần số là $\tan hx = \tan x$.

- Thay $y(x, t) = X(x)\cos\omega t$ vào: $y_{tt} + a^4 y_{xxxx} = 0$, $a^4 = \frac{EI}{\rho}$

nhận được phương trình $a^4 X^{(4)} - \omega^2 X = 0$

có nghiệm tổng quát $X(x) = A\cosh\frac{\theta x}{a} + B\sinh\frac{\theta x}{a} + C\cos\frac{\theta x}{a} + D\sin\frac{\theta x}{a}$, $\theta = \sqrt{\omega}$

$y(0, t) = y_x(0, t) = 0$, $y(L, t) = y_{xx}(L, t) = 0$

- Từ các điều kiện trên ta có $X(0) = X'(0)$, $X(L) = X''(L) = 0$ và có

$$\lambda_n = \frac{\omega_n^2}{a^4} = \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^4$$

ở đó β_n là nghiệm dương của phương trình $\tanh x = \tan x$

- Tần số tự nhiên đối với dao động ngang của dầm là $\omega_n = \left(\frac{\beta_n}{L}\right)^2 a^2 = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$

4. Dao động nhiệt độ dưới mặt đất

- Giả sử nhiệt độ dưới mặt đất ở một vị trí đặc biệt là hàm số $u(x, t)$ của thời gian t và độ sâu x dưới bề mặt. Như vậy u thỏa mãn phương trình nhiệt $u_t = k u_{xx}$, với k là sự khuếch tán nhiệt của đất.
- Sự thay đổi định kỳ theo mùa của các nhiệt độ bề mặt trung bình hàng tháng, với nhiệt độ tối đa vào giữa mùa hè (tháng 7 ở bán cầu bắc) và nhiệt độ tối thiểu vào giữa mùa đông (tháng Một) là rất gần với sự dao động sin hay cosin. Do đó chúng ta sẽ giả sử rằng

$$u(0, t) = T_0 + A_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

trong đó lấy $t = 0$ vào giữa mùa hè.

- Nếu nhiệt độ tại độ sâu cố định cũng thay đổi theo chu kỳ với t .
- Đặt $U(x, t) = u(x, t) - T_0$ thì có nghiệm tuần hoàn

$$U(x, t) = A(x) \cos(\omega t - \gamma) \quad (4.2)$$

của bài toán

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (x > 0, \quad t > 0), \quad (4.3)$$

$$U(0, t) = A_0 \cos \omega t \quad (4.4)$$

Sử dụng phép tách biến $\tilde{U}(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, có phần thực là nghiệm cần tìm

- Thay nghiệm này vào (4.3), (4.4) có $X'' - \alpha^2 X = 0$

$$\text{ở đó } \alpha = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{k}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}$$

- phương trình này có nghiệm tổng quát

$$X(x) = A \exp\left(-(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right) + B \exp\left(+ (1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right)$$

Theo giả thiết có $X(0) = A_0$ nên có $X(x) = A_0 \exp\left(-(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right)$

- Nghiệm cần tìm là

$$U(x, t) = \text{Re } \tilde{U}(x, t) = A_0 \exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right) \cos\left(\omega t - x\sqrt{\omega/2k}\right) \quad (4.5)$$

- Như vậy biên độ $A(x)$ của nhiệt độ hàng năm giảm xuống theo hàm mũ như là một hàm của độ sâu x

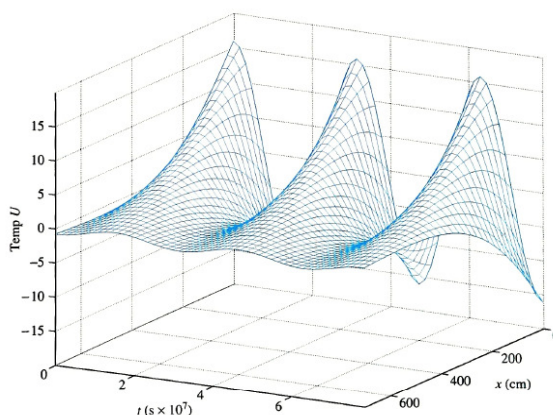
$$A(x) = A_0 \exp(-x\sqrt{\omega/2k}) \quad (4.6)$$

Hơn nữa, có một sự chậm pha $\gamma(x) = x\sqrt{\omega/2k}$ ở độ sâu x .

Ví dụ 4. Cho $\sqrt{\omega/2k} \approx 0,00446 \text{ cm}^{-1}$, $A(x) = \frac{1}{2}A_0$, $x \approx 155,30 \text{ cm} \approx 5,10 \text{ feet}$.

Khi đó nếu $A_0 = 16^\circ$ từ (4.6) thì ở độ sâu khoảng 20 feet, biên độ của sự thay đổi nhiệt độ hàng năm chỉ là 1° .

Ví dụ 5. Từ (4.5) cho sự thay đổi hoàn toàn của các mùa khi $\gamma(x) = x\sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \pi$ ở độ sâu $x = 704,39 \text{ cm} \approx 33,11 \text{ feet}$.



Hình 9.3.4. Đồ thị hàm nhiệt độ $U(x, t)$ trong phương trình (29)

- Hình 9.3.4 cho thấy đồ thị $U = U(x, t)$ đối với $0 \leq x \leq X$, $0 \leq t \leq T$, trong đó X tương ứng với 23 feet theo centimet và T đến 2,5 năm theo giây.
- Có thể kiểm tra cạnh phải của đồ thị xem là nhiệt độ ở độ sâu 23 feet có tối đa khi nhiệt độ bề mặt tối thiểu không?

Chú ý. Dạng toán cơ bản của mục này là tìm tần số tự nhiên đối với các dao động dọc và ngang của dầm: các bài 1 – 6 (trang 433); 8 – 14 (trang 434)

Ghi nhớ

- Tuần này có bài kiểm tra thứ 2 một tiết (vào tiết sau) đối với các lớp có giờ bài tập vào thứ 4, 5, 6 với nội dung là: Chương 4, chương 5 và các mục 6.1, 6.2
- Buổi sau giờ lý thuyết học mục: 9.4
- Tuần sau giờ bài tập làm bài tập lẻ các mục: 6.4, 7.1 và 7.2.