

ĐỊNH LÝ CEVA VÀ MENELAUS

Dựa Theo Bài Của Titu Andreescu và Zuming Feng
Trong 103 Geometry Problems

Quy ước: $P = AB \cap CD$ để ký hiệu P là giao điểm của AB và CD . Nếu các điểm A, B, C thẳng hàng, ta quy ước dấu $\frac{AB}{BC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ (vì vậy nếu B nằm giữa A và C thì $\frac{AB}{BC} > 0$, ngược lại $\frac{AB}{BC} < 0$)

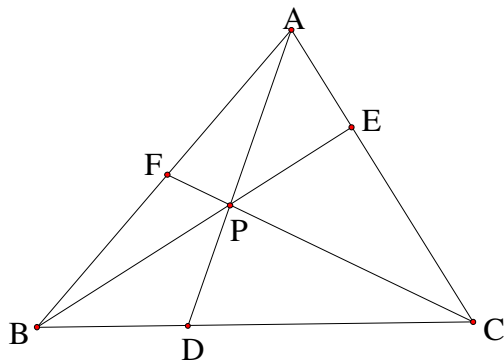
1. Định Lý Ceva*

Cho tam giác ABC . D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB . Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương:

1.1 AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

$$1.2 \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle DAB} \cdot \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle ECB} \cdot \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle FCA} = 1.$$

$$1.3 \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$



Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh rằng 1.1 dẫn đến 1.2, 1.2 dẫn đến 1.3, và 1.3 dẫn đến 1.1.

Giả sử 1.1 đúng. Gọi P là giao điểm của AD, BE, CF . Theo định lý hàm số sin trong tam giác APB , ta

$$\text{có: } \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle DAB} = \frac{\sin \angle ABP}{\sin \angle BAP} = \frac{AP}{BP}. (1)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle ECB} = \frac{BP}{CP}; (2)$$

$$\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle FCA} = \frac{CP}{AP}. (3)$$

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được 1.2.

Giả sử 1.2 đúng. Theo định lý hàm sin trong tam giác ABD và tam giác ACD ta

$$\text{có: } \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{DB}; \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{CA}. \text{ Do đó:}$$

$$\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle ADC} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{CD}{DB}. (\angle BDA + \angle ADC = 180^\circ) (4)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle FCA} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{BF}{FA}. (5)$$

$$\frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle EBC} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AE}{EC}. (6)$$

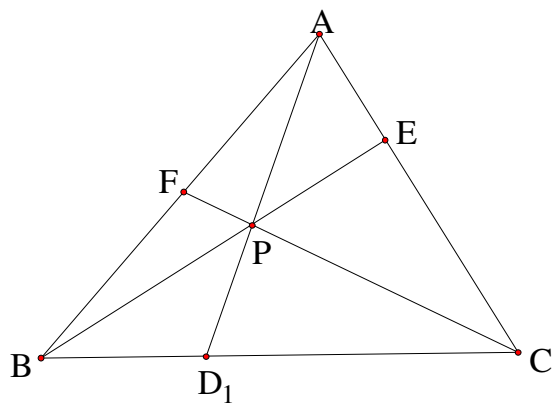
Nhân từng vế của (4), (5), (6) ta được 1.3.

Giả sử 1.3 đúng, ta gọi

$$P = CF \cap BE, D_1 = AP \cap BC.$$

Theo 1.1 và 1.2, ta có:

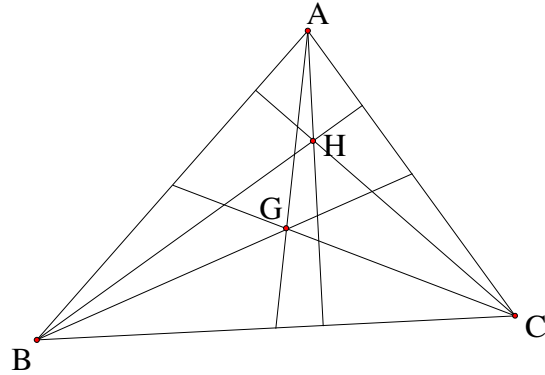
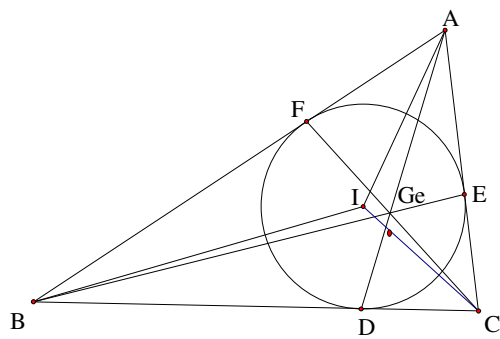
$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD_1}{D_1B} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1 \text{ hay: } \frac{CD_1}{D_1B} = \frac{CD}{DB}. \text{ Do đó: } D \equiv D_1.$$



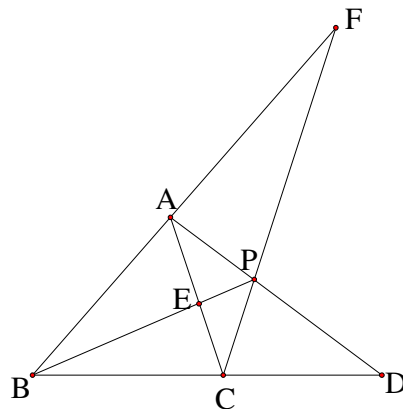
Nhận xét.

*Ceva (1647-1734): nhà toán học Ý

Với định lý Ceva, ta có thể chứng minh được các đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác trong của tam giác đồng quy tại một điểm. Các điểm đó lần lượt là trọng tâm (G), trực tâm (H), tâm đường tròn nội tiếp tam giác (I). Nếu đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt AB, BC, AC lần lượt tại F, D, E . Khi đó, ta có: $AE = AF, BF = BD, CD = CF$. Bằng định lý Ceva, ta chứng minh được AD, BE, CF đồng quy tại một điểm, điểm đó gọi là điểm **Gergonne (Ge)** của tam giác ABC (hình dưới).



Lưu ý: Định lý Ceva có thể được suy rộng bởi những giao điểm nằm ngoài tam giác ABC mà không nhất thiết phải nằm trong nó. Vì vậy, các điểm D, E, F có thể nằm ngoài các cạnh BC, CA, AB như hình bên.



Ví dụ sau sẽ cho thấy rõ ứng dụng của định lý Ceva.

Bài toán. [IMO 2001 Short List] Cho điểm A_1 là tâm của hình vuông nội tiếp tam giác nhọn ABC có hai đỉnh nằm trên cạnh BC . Định nghĩa tương tự với các điểm B_1, C_1 . Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Lời giải:

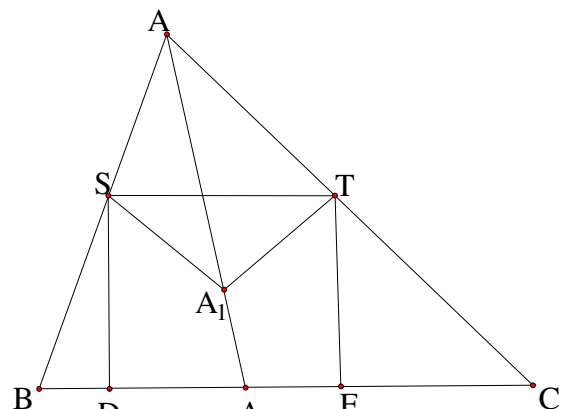
Gọi A_2 là giao điểm của AA_1 và BC . B_2 và C_2 được xác định tương tự.

Theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{\sin \angle SAA_1}{\sin \angle A_1SA} \text{ hay } \frac{SA_1}{AA_1} = \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin (45^\circ + \angle B)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{TA_1}{AA_1} = \frac{\sin \angle CAA_2}{\sin (45^\circ + \angle C)} \text{ hay}$$

$$\frac{AA_1}{TA_1} = \frac{\sin (45^\circ + \angle C)}{\sin \angle CAA_2}$$



Do đó, ta được:
$$\frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle CAA_2} \cdot \frac{\sin(45^\circ + \angle C)}{\sin(45^\circ + \angle B)} = \frac{AA_1}{TA_1} \cdot \frac{SA_1}{AA_1} = 1. (1)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng được:

$$\frac{\sin \angle BCC_2}{\sin \angle ACA_2} \cdot \frac{\sin(45^\circ + \angle B)}{\sin(45^\circ + \angle A)} = 1. (2)$$

$$\frac{\sin \angle ABB_2}{\sin \angle CBB_2} \cdot \frac{\sin(45^\circ + \angle A)}{\sin(45^\circ + \angle C)} = 1. (3)$$

Nhân từng vế của (1), (2), (3) kết hợp định lý Ceva ta được điều cần chứng minh.

Bài tập áp dụng:

1. Qua các điểm A và D nằm trên đường tròn kẻ các đường tiếp tuyến, chúng cắt nhau tại điểm S . Trên cung AD lấy các điểm A và C . Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại điểm P , các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O . Chứng minh rằng đường thẳng PQ chứa điểm O .

2. Trên các cạnh của tam giác ABC về phía ngoài ta dựng các hình vuông. A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh của các hình vuông nằm đối nhau với các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

3. Chứng minh các đường cao, đường trung tuyến, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đồng quy tại một điểm.

4. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đối xứng với các đường thẳng đó qua các đường phân giác tương ứng, cũng đồng quy.

2. Định Lý Menelaus*

Cho tam giác ABC . Các điểm H, F, G lần lượt nằm trên AB, BC, CA . Khi đó:

$$M, N, P \text{ thẳng hàng khi và chỉ khi } \frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = -1.$$

Chứng minh:

➤ Phần thuận:

Sử dụng định lý sin trong các tam giác AGH, BFH, CGF , ta được:

$$\frac{AH}{GA} = \frac{\sin \angle AGH}{\sin \angle AHG}; \frac{BF}{HB} = \frac{\sin \angle BHF}{\sin \angle HFB}; \frac{CG}{FC} = \frac{\sin \angle GFC}{\sin \angle CGF}.$$

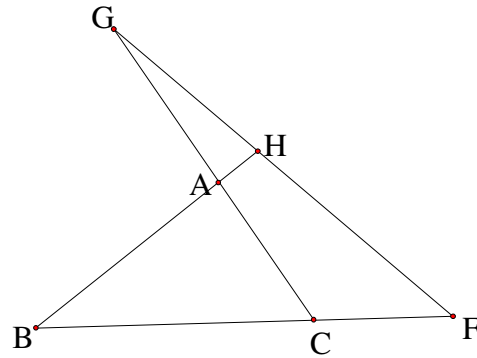
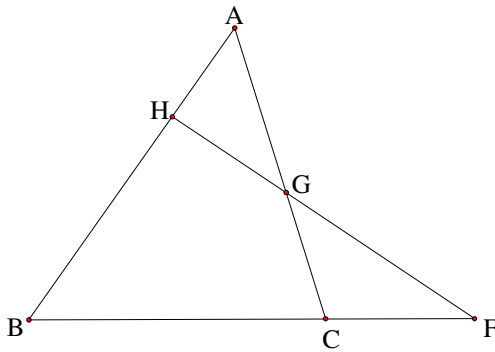
(với lưu ý rằng $\sin \angle AGH = \sin \angle CGF; \sin \angle AHG = \sin \angle BHF; \sin \angle HFB = \sin \angle GFC$)

Nhân từng vế ta được điều phải chứng minh.

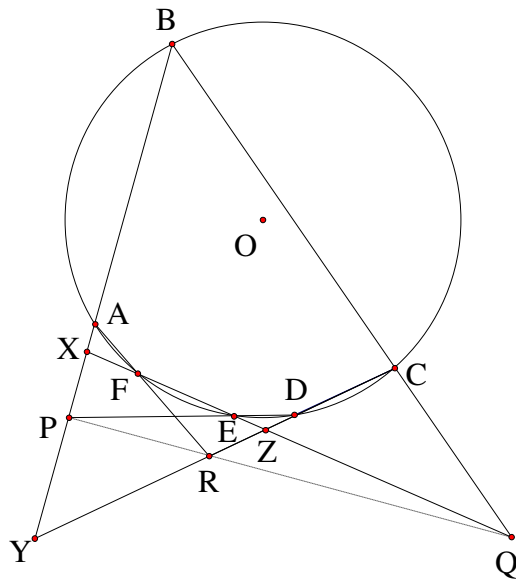
➤ Phần đảo: Gọi $F' = GH \cap BC$. Hoàn toàn tương tự ta có được:

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF'}{F'C} \cdot \frac{CG}{GA} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} (= -1) \text{ hay } \frac{BF'}{F'C} = \frac{BF}{FC}, \text{ suy ra } F \equiv F'.$$

*Menelaus: nhà toán học cổ Hi Lạp (thế kỷ I sau công nguyên)



Nhận xét. Định lý Menelaus có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Nhiều định lý nổi tiếng được chứng minh một cách dễ dàng nhờ định lý Menelaus như định lý Ceva, Pascal, Desargues (sẽ được nêu ở phần bài tập dưới đây).



Ví dụ [Định lý Pascal].

Cho A, B, C, D, E, F là các điểm nằm trên một đường tròn (có thể ko xếp theo thứ tự như trên). Gọi $P = AB \cap DE, Q = BC \cap EF, R = CD \cap FA$. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi $X = EF \cap AB, Y = AB \cap CD, Z = CD \cap EF$.

Áp dụng định lý Menelaus cho BC, DE, FA (đối với tam giác XYZ), ta có:

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} = \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZE}{EX} = \frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = (-1). \text{ Do}$$

đó: $\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YR}{RZ} = -1$. Theo định lý Menelaus ta được P, Q, R thẳng hàng.

Bài tập áp dụng:

1. Điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC , A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC, CA, AB . Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.
2. Trong tam giác vuông ABC kẻ đường cao CK từ đỉnh của góc vuông C , còn trong tam giác ACK kẻ đường phân giác CE . D là trung điểm của đoạn AC , F là giao điểm của các đường thẳng DE và CK . Chứng minh $BF \parallel CE$.
3. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm O . Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng AB và A_1B_1 , BC và B_1C_1 , CA và C_1A_1 nằm trên một đường thẳng.
4. [Định lý Desargues] Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm O , thì các điểm P, Q, R thẳng hàng, trong đó $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$.

ĐƯỜNG THẲNG SIMSON.

Bài toán:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc đường tròn (O) . Gọi A' , B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC , CA , AB . Chứng minh rằng A' , B' , C' thuộc một đường thẳng. Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng **Simson** ứng với điểm M của tam giác ABC .

Lời giải:

Nếu M trùng vào một đỉnh nào đó của tam giác ABC thì ta được điều phải chứng minh.

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung BC (cung không chứa A).

Hai điểm B' và C' nằm về hai phía của đường thẳng BC . Vậy A' , B' , C' thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BA'C' = \angle CA'B'$.

Ta có:

$$\angle BA'C' = \angle BMC', \quad \angle CA'B' = \angle CMB'$$

Mặt khác:

$$\angle BMC' = \angle CMB' \quad (\text{vì } \angle BMC = 180^\circ - \angle BAC = \angle C'MB')$$

Nên $\angle BA'C' = \angle CA'B'$.

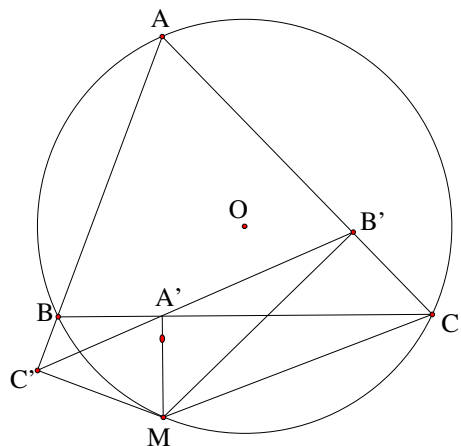
Như vậy, ta đã chứng minh xong tính chất kể trên của đường thẳng **Simson**, sau đây là một số ví dụ áp dụng cụ thể:

Ví dụ 1.

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung nhỏ BC , hạ MB' vuông góc với AC , MC' vuông góc với AB . Tìm vị trí của M để $B'C'$ lớn nhất.

Lời giải.

Như vậy, với đề bài như trên, khi lấy MB' vuông góc với AC , MC' vuông góc với AB , ta thấy được “dáng dấp” của đường thẳng Simson. Điều còn lại cần thiết chính là hạ MA' vuông góc với BC . Khi đó A' , B' , C' thẳng hàng.



$$\text{Khi đó: } \angle A'C'M = \angle A'BM ;$$

$$\angle A'B'M = \angle A'CM$$

Suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle MCB$.

$$\text{Nên: } \frac{B'C'}{BC} = \frac{MC'}{BM} \leq 1 \Rightarrow B'C' \leq BC .$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $B' \equiv C$ và $C' \equiv B$.

$\Leftrightarrow M$ và A đối xứng nhau qua tâm đường tròn (O) .

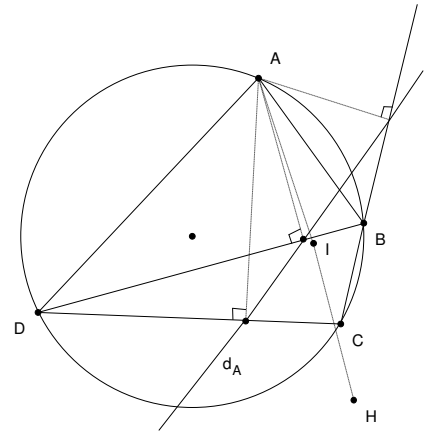
Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi d_A là đường thẳng Simson của tam giác BDC ứng với điểm A . Các đường thẳng d_B, d_C, d_D được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng bốn đường thẳng này đồng qui.

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh được các đoạn thẳng nối mỗi điểm trong số các điểm A, B, C, D với trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại có cùng trung điểm I .

Khi đó, ta cũng chứng minh được các đường thẳng Simson đang xét cùng đi qua I .



Bài 3.

Cho đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B (hai điểm nằm về 2 phía của AB). Một đường thẳng Δ thay đổi qua A cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C và D khác A (A nằm giữa D và C). Tiếp tuyến tại C của (O_1) và tiếp tuyến tại D của (O_2) cắt nhau tại T . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống các tiếp tuyến này.

a) Tìm vị trí Δ để BT lớn nhất.

b) Chứng minh PQ tiếp xúc với một đường tròn cố định.

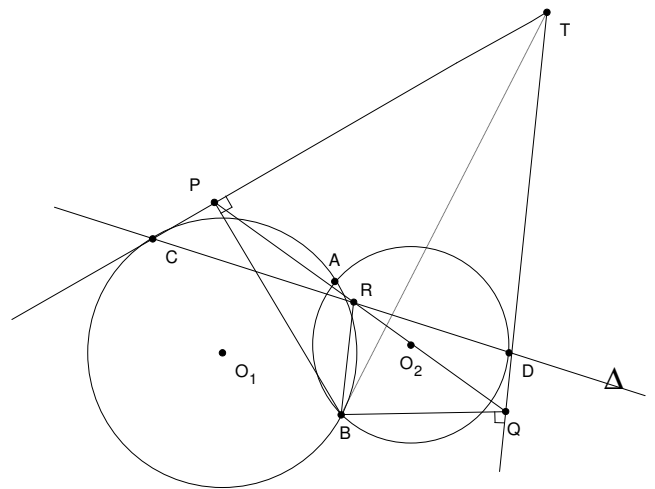
Lời giải.

Để thấy $BCTD$ là tứ giác nội tiếp, như vậy, tương tự như những gì đã làm ở các bài toán trước, ta sẽ thực hiện :

a) Hạ BR vuông góc với CD thì 3 điểm P, Q, R thẳng hàng.

Khi đó, ta chứng minh BT lớn nhất khi và chỉ khi BQ lớn nhất khi và chỉ khi D đối xứng B qua O_2 .

b) Ta cũng dễ dàng chứng minh được PQ tiếp xúc với đường tròn đường kính AB cố định.



DIỆN TÍCH TAM GIÁC THÙY TÚC

Dựa theo bài viết của Ivan Borsenco

Trong Toán học, Hình Học luôn giải quyết các bài toán với những kết quả chính xác và hấp dẫn. Bài viết sau đây trình bày về một trong những kết quả tuyệt đẹp trong bài toán hình học – Định lý Euler cho tam giác thùy túc và ứng dụng của nó. Chúng ta hãy bắt đầu với phép chứng minh định lý, sau đó cùng nhau thảo luận các Bài toán Olympiad.

Định nghĩa. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB . Tam giác $A_1B_1C_1$ được gọi là tam giác thùy túc của tam giác ABC ứng với điểm M .

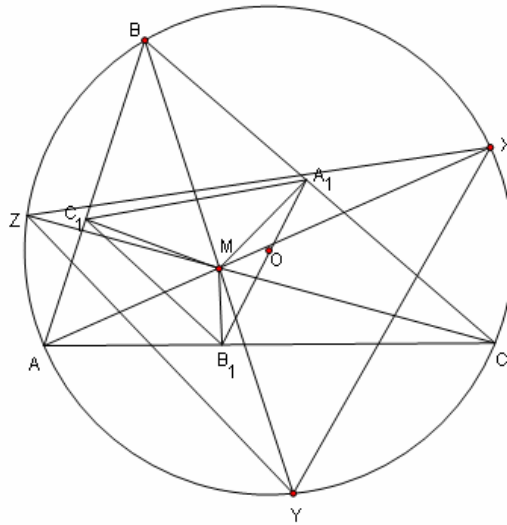
Định lý 1. Cho $C(O, R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác thùy túc của tam giác ABC ứng với điểm M .

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}.$$

Chứng minh. Đầu tiên ta để ý rằng $AB_1MC_1, BC_1MA_1, CA_1MB_1$ là những tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lý hàm Sin vào tam giác AB_1C_1 ta được $B_1C_1 = AM \sin \alpha$. Tương tự, ta được $A_1C_1 = BM \sin \beta$ và $B_1C_1 = CM \sin \gamma$ (Trong đó $\alpha = \angle BAC; \beta = \angle CBA; \gamma = \angle ACB$). Từ đó suy ra:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AM}{2R}, \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BM}{2R}, \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CM}{2R}.$$

Giả sử AM, BM, CM cắt đường tròn $C(O, R)$ tại X, Y, Z .



Ta có:

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1M + \angle MB_1C_1 = \angle A_1CM + \angle MAC_1 = \angle ZYB + \angle BYX = \angle ZYX.$$

Tương tự, $\angle B_1C_1A_1 = \angle YZX$ và $\angle C_1A_1B_1 = \angle YXZ$. Do đó, $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔXYZ và

$$\frac{A_1B_1}{XY} = \frac{R_{A_1B_1C_1}}{R}.$$

Mặt khác, ΔMAB đồng dạng với ΔMYX nên ta có $\frac{XY}{AB} = \frac{MX}{MB}$.

Từ các kết quả thu về ta được:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{R}{R_{A_1B_1C_1}} \cdot \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1}{AB \cdot BC \cdot AC} = \frac{MX}{MB} \cdot \frac{MA}{2R} \cdot \frac{MB}{2R} = \frac{MA \cdot MX}{4R^2} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}.$$

Từ đó ta có thể thấy biểu thức trên không phụ thuộc vào vị trí điểm M (kể cả trong hay ngoài đường tròn).

Hệ quả 1: Nếu M nằm trên đường tròn, hình chiếu của M lên các cạnh tam giác sẽ thẳng hàng (Định lý Simson).

Một định lý nữa mà chúng tôi muốn giới thiệu (không chứng minh) đến bạn đọc là **định lý Lagrange** nổi tiếng.

Định lý 2 Cho tam giác ABC và điểm M thỏa hệ thức $u\overrightarrow{MA} + v\overrightarrow{MB} + w\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Với một điểm P bất kỳ nằm trong $mp(ABC)$. Ta được:

$$u.PA^2 + v.PB^2 + w.PC^2 = (u + v + w)PM^2 + \frac{vwa^2 + uwb^2 + uvc^2}{u + v + w}.$$

Cách chứng minh có thể tìm thấy khi áp dụng Định lý Stewart một số lần. Định lý này có một hệ quả rất hay khi P trùng với tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó, ta được:

$$R^2 - OM^2 = \frac{vwa^2 + uwb^2 + uvc^2}{(u + v + w)^2}.$$

Từ hệ quả này kết hợp định lý Euler cho tam giác thùy túc, ta được định lý sau:

Định lý 3: Cho M là điểm nằm trong mặt phẳng tam giác ABC , với khối tâm là (u, v, w) . Ký hiệu A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên các cạnh tam giác. Ta được:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{vwa^2 + uwb^2 + uvc^2}{4R^2(u + v + w)^2}.$$

Từ kết quả trên chúng ta có thể thấy **Định lý 1** và **Định lý 3** đã đưa chúng ta nhận thức phần nào về diện tích tam giác thùy túc. **Định lý Euler** về diện tích tam giác thùy túc thật sự là một công cụ tiện ích cho việc giải các bài toán hình học. Ứng dụng đầu tiên mà chúng tôi sắp giới thiệu sau đây nói về những điểm **Brocard**.

Định nghĩa điểm Brocard: Trong tam giác ABC , đường tròn qua A và tiếp xúc với BC tại B , đường tròn qua B và tiếp xúc với AC tại C và đường tròn qua C tiếp xúc với AB tại A . Chúng cắt nhau tại một điểm, gọi là điểm *Brocard*. Một cách tổng quát, ta có hai điểm *Brocard*, điểm thứ hai xuất hiện khi ta quay ngược chiều kim đồng hồ sự tiếp xúc của các đường tròn.

Bài toán 1: Cho Ω_1 và Ω_2 là hai điểm *Brocard* của tam giác ABC . Chứng tỏ rằng $O\Omega_1 = O\Omega_2$, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

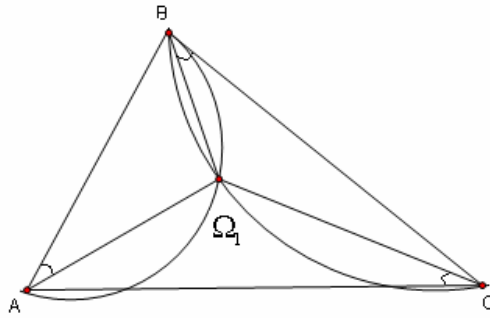
Hướng dẫn: Từ định nghĩa điểm *Brocard*, ta thấy:

$$\angle\Omega_1AB = \angle\Omega_1BC = \angle\Omega_1CA = w_1, \text{ tương tự } \angle\Omega_2BA = \angle\Omega_2AC = \angle\Omega_2CB = w_2. \text{ Ta đi chứng minh}$$

$$w_1 = w_2.$$

$$\text{Đề ý rằng } \frac{S_{B\Omega_1C}}{S_{ABC}} = \frac{B\Omega_1 \cdot BC \sin w_1}{AB \cdot BC \sin \beta} = \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \beta} \text{ và tương tự,}$$

$$\frac{S_{C\Omega_1A}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \gamma}, \frac{S_{A\Omega_1B}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \alpha}.$$



Cộng các diện tích ta được:

$$1 = \frac{S_{B\Omega_1C} + S_{C\Omega_2A} + S_{A\Omega_3B}}{S_{ABC}} = \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin^2 w_1}{\sin^2 \gamma} \quad \text{hay}$$

$$\frac{1}{\sin^2 w_1} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \quad (1)$$

Cách tính tương tự, ta cũng được

$$\frac{1}{\sin^2 w_2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $w_1 = w_2 = w$.

Ý tưởng cho cách chứng minh trên bắt nguồn từ Định lý Euler cho tam giác thùy túc. Để ý rằng Ω_1 và Ω_2 luôn nằm trong tam giác ABC , bởi vì mỗi nửa đường tròn như trên đều nằm ở miền trong ΔABC . Từ đó, Ω_1 và Ω_2 luôn nằm trong tam giác. Để chứng minh $O\Omega_1 = O\Omega_2$ ta chứng minh diện tích tam giác thùy túc của chúng bằng nhau. Nếu vậy, ta có $R^2 - O\Omega_1^2 = R^2 - O\Omega_2^2$. Từ đó suy ra $\Omega_1 = \Omega_2$.

Ký hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của Ω_1 lên các cạnh BC, CA, AB . Sau đó, sử dụng định lý hàm Sin mở rộng, ta được $A_1C_1 = B\Omega_1 \sin b$, vì $B\Omega_1$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BA_1\Omega_1C_1$. Cũng áp dụng định lý Sin vào tam giác $AB\Omega_1$ ta được:

$$\frac{B\Omega_1}{\sin w} = \frac{c}{\sin b}$$

Dẫn đến: $A_1C_1 = B\Omega_1 \sin b = c \sin w$.

Tương tự, ta có $B_1C_1 = b \sin w$ và $A_1B_1 = a \sin w$. Dễ dàng ta thấy tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng $\sin w$.

Từ $w_1 = w_2 = w$, ta kết luận được tam giác thùy túc chứa Ω_1 và Ω_2 có cùng diện tích. Suy ra $O\Omega_1 = O\Omega_2$.

Chú ý: Giao của các đường đối trung trong tam giác ký hiệu là K và được gọi là điểm *Lemoine*. Ta có thể chứng minh được $K\Omega_1 = K\Omega_2$. Hơn thế nữa, các điểm O, Ω_1, K, Ω_2 nằm trên đường tròn đường kính OK gọi là *đường tròn Brocard*. Chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu một bài toán thú vị khác sau đây:

Bài toán 2: Cho tam giác ABC , ký hiệu O, I, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$OI \leq OH.$$

Hướng dẫn: Nhiều cách chứng minh sẽ bắt đầu từ OI hay OH , nhưng chúng ta hãy chọn một hướng khác, đó là đặt diện tích tam giác thùy túc vào I và H . Một cách đơn giản, tâm đường tròn nội tiếp luôn nằm bên trong tam giác ABC , và nếu $OH \geq R$, ta được điều cần chứng minh. Vì vậy, giả sử $OH < R$. Điều đó dẫn đến tam giác ABC là tam giác nhọn. Để chứng minh $OI \leq OH$ ta có thể sử dụng định lý

Euler cho tam giác thùy túc và chứng minh diện tích tam giác thùy túc tâm I , S_I lớn hơn diện tích tam giác thùy túc tâm H , S_H . Từ đó, do $S_I \geq S_H$ nên $R^2 - OI^2 \geq R^2 - OH^2$ hay $OH \geq OI$.

Bây giờ chúng ta hãy tìm cả hai diện tích. Ký hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của H và A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của I lên BC, CA, AB . Ta có A_1, B_1, C_1 nằm trên đường tròn Euler bán kính $R/2$, từ đó:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{4R/2}.$$

Sử dụng định lý Sin, dễ dàng ta được $B_1C_1 = a \cos \alpha$, $A_1C_1 = b \cos \beta$, $A_1B_1 = c \cos \gamma$ và vì thế

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{abc \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{2R} = 2S \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Để tính diện tích tam giác $A_2B_2C_2$, để ý rằng:

$$S_{A_2B_2C_2} = S_{A_2IB_2} + S_{A_2IC_2} + S_{B_2IC_2} = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \frac{r^2(a+b+c)}{4R}.$$

$$\text{Mà } \frac{r}{4R} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \text{ Ta được: } S_{A_2B_2C_2} = 2S \frac{r}{4R} = 2S \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Từ đó đủ để chứng minh } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Bây giờ chúng ta hãy sử dụng *Bất Đẳng Thức Jensens* cho hàm lõm

$$f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \cos x.$$

$$\text{Từ đó: } f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq f(a) + f(b) + f(c).$$

$$\text{Vì vậy, } \ln\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right) \geq \ln(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma), \text{ và bài toán đã được giải quyết.}$$

Hai ví dụ kế tiếp để hướng dẫn giải một cách ngắn gọn một số bài toán Olympiad bằng cách sử dụng Định Lý Euler về tam giác thùy túc.

Bài toán 3 [Olympiad Toán Balkan].

Cho tam giác nhọn ABC . Ký hiệu A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của trọng tâm G lên các mặt của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{9} \leq \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn: Như chúng ta đã thấy, yêu cầu bài toán hướng chúng ta sử dụng trực tiếp định lý Euler về tam giác thùy túc. Áp dụng ngay ta được:

$$\frac{2}{9} \leq \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Bất đẳng thức bên phải luôn đúng. Ta đi chứng minh bất đẳng thức bên trái đúng. Nhớ lại biểu thức mà chúng ta đã biết

$$9OG^2 = OH^2 = R^2(1 - 8\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

Vì tam giác ABC nhọn nên ta có $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 0$, dẫn đến $8\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 0$.

$$\text{Vì vậy, } 9OG^2 \leq R^2 \text{ hay } OG^2 \leq \frac{R^2}{9}.$$

Đưa đến kết luận sau:

Bài toán 4. [Mathematical Reflections, Ivan Borsenco] Với điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC , xác định bộ ba (d_1, d_2, d_3) lần lượt là khoảng cách từ M đến cạnh BC, AC, AB . Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \geq r^3$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, nằm trong vòng tròn tâm O bán kính OI .

Lời giải.

Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB . Xét $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác thùy túc cho điểm M , ta có $\angle B_1MC_1 = 180 - \alpha, \angle A_1MC_1 = 180 - \beta, \angle A_1MB_1 = 180 - \gamma$, nên:

$$2S_{\Delta A_1B_1C_1} = 2S_1 = d_2 \cdot d_3 \cdot \sin \alpha + d_1 \cdot d_3 \cdot \sin \beta + d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \gamma$$

Viết gọn lại, ta được:

$$2S_{\Delta A_1B_1C_1} = 2S_1 = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{2R} \cdot \left(\frac{a}{d_1} + \frac{b}{d_2} + \frac{c}{d_3} \right).$$

Mà ta đã biết: $2S_{\Delta ABC} = 2S = a \cdot d_1 + b \cdot d_2 + c \cdot d_3$.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta được:

$$4S \cdot S_1 = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{2R} (a \cdot d_1 + b \cdot d_2 + c \cdot d_3) \cdot \left(\frac{a}{d_1} + \frac{b}{d_2} + \frac{c}{d_3} \right) \geq \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot (a+b+c)^2}{2R}$$

Sử dụng định lý Euler cho tam giác thùy túc, ta có:

$$\frac{4S^2 (R^2 - OM^2)}{4R^2} \geq \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot (a+b+c)^2}{2R} \geq \frac{r^3 \cdot (a+b+c)^2}{2R}.$$

Từ đây có thể suy ra $OI^2 = R^2 - 2Rr \geq OM^2$.

Vậy với mọi điểm M trong tập hợp, ta có $OM \leq OI$ (điều phải chứng minh).

Định nghĩa cặp đường thẳng đẳng giác. Là hai đường thẳng cùng xuất phát từ đỉnh của một góc và đối xứng nhau qua đường phân giác của góc đó.

Định nghĩa hai điểm đẳng giác. Là hai điểm có đường thẳng nối chúng với mỗi đỉnh của tam giác là những cặp đường đẳng giác.

Bài toán 5. [Ivan Borsenco đề nghị]

Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC và khối tâm là $(x; y; z)$. Gọi R_M là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác thùy túc của điểm M . Chứng minh rằng:

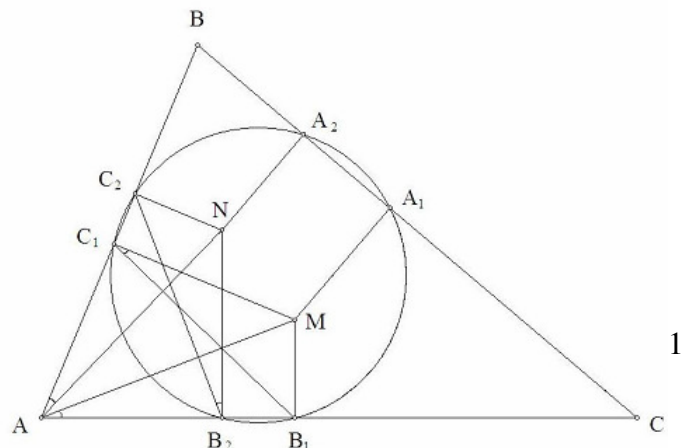
$$\sqrt{(x+y+z) \cdot \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right)} \geq 6\sqrt{3} \cdot R_M.$$

Lời giải.

Kí hiệu N là điểm đẳng giác của điểm M . Chúng ta cần 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1: Nếu $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là 2 tam giác thùy túc của 2 điểm đẳng giác điểm M và N thì 6 điểm này nằm trên một vòng tròn.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $B_1B_2C_1C_2$ là một tứ giác nội tiếp. Đặt $\angle BAM = \angle CAN = \phi$. Và bởi vì AB_1MC_1 nội tiếp, nên:



$$\angle AB_1C_1 = 90^\circ - \angle C_1B_1C_2 = 90^\circ - \angle C_1AM = 90^\circ - \phi.$$

Tương tự, vì AB_2NC_2 nên ta có:

$$\angle AC_2B_2 = 90^\circ - \angle B_1C_2B_2 = 90^\circ - \angle B_2AN = 90^\circ - \phi$$

Do đó $\angle AB_1C_1 = \angle AC_2B_2$ nên $B_1B_2C_2C_1$ là một tứ giác nội tiếp. Cứ thế ta thu được rằng $A_1A_2B_2B_1$ và $A_1A_2C_2C_1$ cũng là tứ giác nội tiếp. Xét 3 đường tròn ngoại tiếp tứ giác, nếu chúng không trùng nhau thì chúng có một tâm đẳng phương, đó là điểm giao nhau của 3 trục đẳng phương. Tuy nhiên một điều trái ngược là chúng ta có thể thấy rằng những trục đẳng phương này, tức các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 , tạo thành một tam giác, đặt tên là ABC . Điều này chứng tỏ, các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên cùng 1 đường tròn.

Bổ đề 2: Nếu M, N là hai điểm đẳng giác, thì ta luôn có:

$$\frac{AM \cdot AN}{bc} + \frac{BM \cdot BN}{ac} + \frac{CM \cdot CN}{ab} = 1.$$

Chứng minh. Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác thù tặc của điểm M . Dễ dàng chứng minh được rằng

$B_1C_1 \perp AN$. Vậy diện tích của tứ giác AB_1NC_1 được tính theo công thức $\frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot AN$. Vì

$B_1C_1 = AM \cdot \sin \alpha$, chúng ta được $S_{AB_1NC_1} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin \alpha$. Tương tự, ta tìm được rằng

$$S_{BC_1NA_1} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BN \cdot \sin \beta \text{ và } S_{CA_1NB_1} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot CN \cdot \sin \gamma$$

Từ trên, ta suy ra: $S_{ABC} = S_{AB_1NC_1} + S_{BC_1NA_1} + S_{CA_1NB_1}$

Hay: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (AM \cdot AN \cdot \sin \alpha + BM \cdot BN \cdot \sin \beta + CM \cdot CN \cdot \sin \gamma)$

Sử dụng Định lý hàm Sin, ta được điều cần chứng minh:

$$\frac{AM \cdot AN}{bc} + \frac{BM \cdot BN}{ac} + \frac{CM \cdot CN}{ab} = 1.$$

Quay trở lại Bài toán. Áp dụng BĐT AM-GM vào bổ đề 2, ta được:

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{27} \left(\frac{AM \cdot AN}{bc} + \frac{BM \cdot BN}{ac} + \frac{CM \cdot CN}{ab} \right)^3 \geq \frac{AM \cdot AN \cdot BM \cdot BN \cdot CM \cdot CN}{a^2 b^2 c^2}$$

Lại có:

$$AM_1 = \frac{B_1C_1}{\sin \alpha}, BM_1 = \frac{A_1C_1}{\sin \beta}, CM_1 = \frac{A_1B_1}{\sin \gamma}, AN = \frac{B_2C_2}{\sin \alpha}, BN = \frac{A_2C_2}{\sin \beta}, CN = \frac{A_2B_2}{\sin \gamma}$$

Ta thu được:

$$\frac{1}{27} \geq \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1 \cdot B_2C_2 \cdot A_2C_2 \cdot A_2B_2}{a^2 b^2 c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}$$

Vì $a^2 b^2 c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma = \frac{4S^4}{R^2}$, nên:

$$\frac{1}{27} \geq \frac{4R^2}{S^4} \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_2B_2 \cdot B_2C_2 \cdot A_2C_2$$

Sử dụng bổ đề 1 và Định lý Euler cho diện tích của tam giác thù tặc, ta có:

$$A_1B_1.B_1C_1.A_1C_1 = 4R_M \cdot \frac{R^2 - OM^2}{4R^2} \cdot S$$

$$A_2B_2.B_2C_2.A_2C_2 = 4R_M \cdot \frac{R^2 - ON^2}{4R^2} \cdot S$$

Vậy:

$$\frac{1}{27} \geq \frac{R_M^2 (R^2 - OM^2)(R^2 - ON^2)}{4R^2 \cdot S^2} \quad (1)$$

Bước tiếp theo là sử dụng Định lý 3 cho điểm M và điểm đẳng giác liên hợp của nó:

$$R^2 - OM^2 = \frac{yza^2 + xzb^2 + xyc^2}{(x + y + z)^2} = \frac{xyz \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right)}{(x + y + z)^2} \quad (2)$$

Điểm đẳng giác của M là N , suy ra N thỏa hệ thức $\frac{a^2}{x} \overrightarrow{NA} + \frac{b^2}{y} \overrightarrow{NB} + \frac{c^2}{z} \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Vậy

$$R^2 - ON^2 = \frac{a^2b^2c^2 \cdot xyz \cdot (x + y + z)}{(yza^2 + xzb^2 + xyc^2)^2} = \frac{a^2b^2c^2 \cdot (x + y + z)}{xyz \cdot \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có:

$$\frac{1}{27} \geq \frac{R_M^2 \cdot a^2b^2c^2}{4R^2 \cdot S^2 \cdot (x + y + z) \cdot \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right)}.$$

Cuối cùng, ta thu được:

$$\sqrt{(x + y + z) \cdot \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right)} \geq 6\sqrt{3} \cdot R_M.$$

ĐỊNH LÝ PTOLEMY

Dựa theo bài của Zaizai
Trên diễn đàn toán học

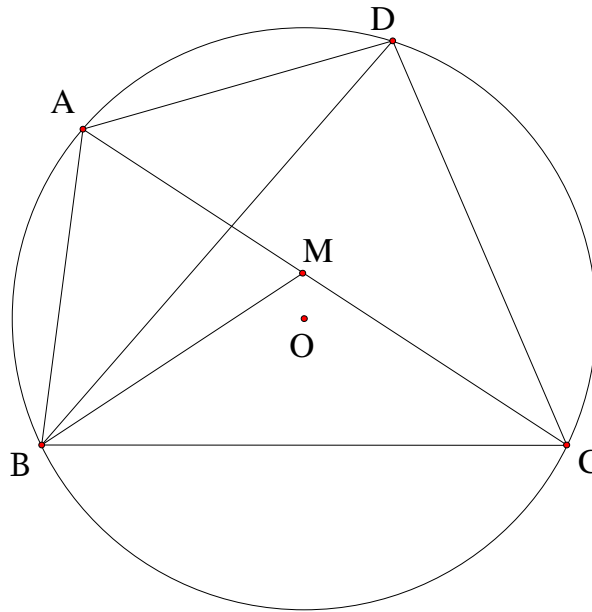
1. Mở đầu.

Hình học là một trong những lĩnh vực toán học mang lại cho người yêu toán nhiều điều thú vị nhất và khó khăn nhất. Nó đòi hỏi ta phải có những suy nghĩ sáng tạo và tinh tế. Trong lĩnh vực này cũng xuất hiện không ít những định lý, phương pháp nhằm nâng cao tính hiệu quả trong quá trình giải quyết các bài toán, giúp ta chinh phục những đỉnh núi ngò ghè và hiểm trở. Trong bài viết này xin giới thiệu đến các bạn một vài điều cơ bản nhất về định lý Ptolemy trong việc chứng minh các đặc tính của hình học phẳng.

2. Nội dung - Lí thuyết:

2.1. Định thức Ptolemy:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Khi đó $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$



Chứng minh.

Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\angle ABD = \angle MBC$.

Khi đó xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có: $\angle ABD = \angle MBC$, $\angle ABD = \angle MCB$.

Nên $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle MBC$ (g.g).

Do đó ta có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = BD \cdot MC \quad (1). \text{ Lại có } \frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \text{ và } \angle ABM = \angle DBC$$

$$\text{Nên } \triangle ABM \sim \triangle DBC \text{ (g.g). Suy ra } \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CD} \text{ hay } AB \cdot CD = AM \cdot BD \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot MC + AM \cdot BD = AC \cdot BD$.

Vậy đẳng thức Ptolemy được chứng minh.

2.2. Bất đẳng thức Ptolemy.

Đây có thể coi là định lý Ptolemy mở rộng bởi vì nó không giới hạn trong lớp tứ giác nội tiếp.

Định lý: Cho tứ giác $ABCD$. Khi đó $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Chứng minh.

Trong $\angle ABC$ lấy điểm M sao cho:

$$\angle ABD = \angle MBC, \angle ADB = \angle MCB$$

Để dàng chứng minh:

$$\triangle BAD \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD \cdot CM = AD \cdot CB$$

Cũng từ kết luận trên suy ra:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BD}{BC}, \angle ABM = \angle DBC$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle DBC (c.g.c) \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB \cdot DC = BD \cdot AM.$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác và các điều trên ta có:

$$AD \cdot BC + AD \cdot DC = BD(AM + CM) \geq BD \cdot AC$$

Vậy định lý Ptolemy mở rộng đã được chứng minh.

3, Ứng dụng của định lý Ptolemy.

Mở đầu cho phần này chúng ta sẽ đến với 1 ví dụ điển hình và cơ bản về việc ứng dụng định lý Ptolemy.

Bài toán 1. [Đề thi vào trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị, 2005-2006] Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng $a (a > 0)$. Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho $AQ \cdot BP = a^2$. Gọi M là giao điểm của BQ và AP . Chứng minh rằng $AM + MC = BM$.

Chứng minh.

Từ giả thiết $AQ \cdot BP = a^2$ suy ra $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP}$.

Xét $\triangle ABQ$ và $\triangle BPA$ có:

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP} (gt) \text{ và } \angle BAQ = \angle ABP$$

Suy ra $\triangle ABQ \sim \triangle BPA (c.g.c)$

$$\Rightarrow \angle ABQ = \angle APB \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \angle ABQ + \angle MBP = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra được

$$\angle BMP = 180^\circ - \angle MBP - \angle MPB = 120^\circ \Rightarrow \angle AMB = 180^\circ - \angle BMP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \angle ACB.$$

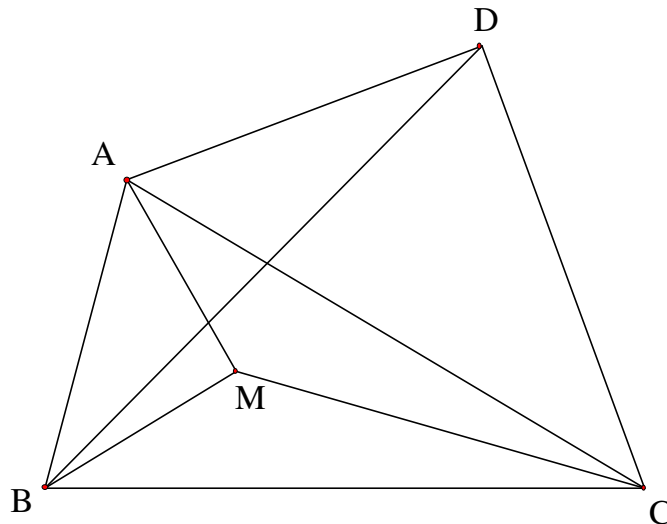
Suy ra tứ giác $AMCB$ nội tiếp được đường tròn.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $AMCB$ nội tiếp và giả thiết $AB = BC = CA$.

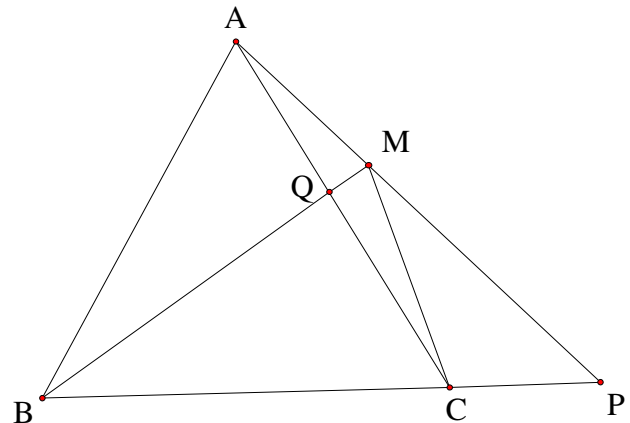
$$\text{Ta có } AB \cdot MC + BC \cdot AM = BM \cdot AC \Rightarrow AM + MC = BM \quad (\text{đpcm}).$$

Đây là 1 bài toán khá dễ và tất nhiên cách giải này không được đơn giản lắm. Vì nếu muốn sử dụng đẳng thức Ptolemy trong 1 kì thi thì có lẽ phải chứng minh nó dưới dạng bổ đề. Nhưng điều chú ý ở đây là ta chẳng cần phải suy nghĩ nhiều khi dùng cách trên trong khi đó nếu dùng cách khác thì lời giải có khi lại không mang về tường minh.

Bài toán 2. [Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham dự IMO 2000] Tam giác ABC vuông có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC , E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm



giác



A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $AQ + CQ = BP$

Chứng minh.

Xét các tứ giác nội tiếp $ABCQ$ và $BEPD$ ta có:

$$\angle CAQ = \angle CBQ = \angle DEP$$

(cùng chắn các cung tròn)

$$\text{Mặt khác } \angle AQC = 180^\circ - \angle ABC = \angle EPD$$

Xét $\triangle AQC$ và $\triangle EPD$ có:

$$\angle AQC = \angle EPD,$$

$$\angle CAQ = \angle DEP \Rightarrow \triangle AQC \sim \triangle EPD$$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{EP} = \frac{CA}{ED} \Rightarrow AQ \cdot ED = EP \cdot CA = EP \cdot BD \quad (1)$$

(do $AC = BD$)

$$\frac{AC}{ED} = \frac{QC}{PD} \Rightarrow ED \cdot QC = AC \cdot PD = BE \cdot PD \quad (2)$$

(do $AC = BE$)

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $BEPD$ ta có:

$$EP \cdot BD + BE \cdot PD = ED \cdot BP \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$AQ \cdot ED + QC \cdot ED = ED \cdot BP \Rightarrow AQ + QC = BP \quad (\text{đpcm}).$$

Có thể thấy rằng bài 1 là tư tưởng đơn giản để ta xây dựng cách giải của bài 2. Tức là dựa vào các đại lượng trong tam giác bằng nhau theo giả thiết ta sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra các tỉ số liên quan và sử dụng phép thế để suy ra điều phải chứng minh. Cách làm này tỏ ra khá là hiệu quả và minh họa rõ ràng qua 2 ví dụ mà zaizai đã nêu ở trên. Để làm rõ hơn phương pháp chúng ta sẽ cùng nhau đến với việc chứng minh 1 định lý bằng chính Ptolemy.

Bài toán 3. [Định lý Carnot] Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r) . Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$x + y + z = R + r$$

Chứng minh.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Giả sử

$$x = OM, \quad y = ON, \quad z = OP, \quad BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c.$$

Tứ giác $OMBP$ nội tiếp, theo đẳng thức Ptolemy ta có:

$$OB \cdot PM = OP \cdot MB + OM \cdot PB$$

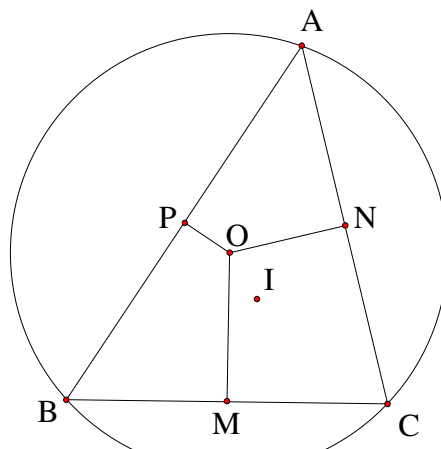
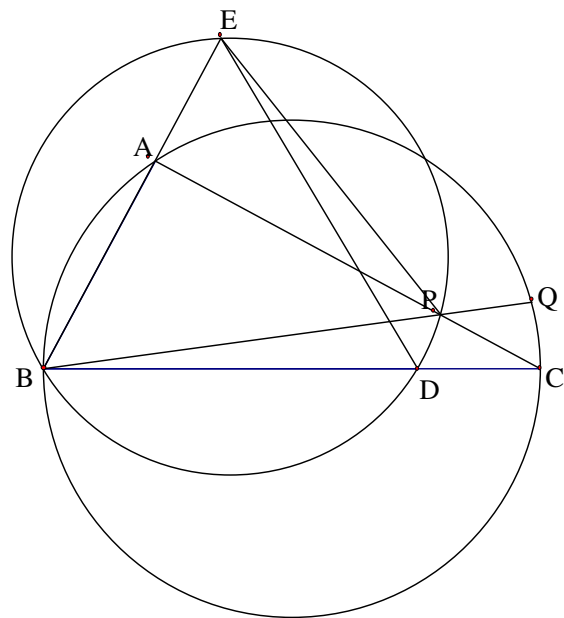
$$\text{Do đó: } R \cdot \frac{b}{2} = z \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{c}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có :

$$R \cdot \frac{c}{2} = y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2} \quad (2)$$

$$R \cdot \frac{a}{2} = y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} \quad (3)$$

Mặt khác:



$$r\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} =$$

$$= x \cdot \frac{a}{2} + y \cdot \frac{b}{2} + z \cdot \frac{c}{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có:

$$(R+r)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = (x+y+z)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+r = x+y+z$$

Đây là một định lý khá quen thuộc và cách chứng minh khá đơn giản. Ứng dụng của định lý này như đã nói là dùng nhiều trong tính toán các đại lượng trong tam giác. Đối với trường hợp tam giác đó không nhọn thì cách phát biểu của định lý cũng có sự thay đổi.

Bài toán 4. [Thi HSG các vùng của Miền, năm 1987] Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng a, b, c, d và các đường chéo bằng p, q . Chứng minh rằng

$$pq \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.$$

Lời giải.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp thì $ac + bd = pq$

Vậy ta cần chứng minh $p^2 q^2 = (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Bất đẳng thức này chính là một bất đẳng thức rất quen thuộc mà có lẽ ai cũng biết đó là BĐT Cauchy-Schwarz. Vậy bài toán được chứng minh.

Một lời giải đẹp và vô cùng gọn nhẹ cho 1 bài toán tưởng chừng như là khó. Ý tưởng ở đây là đưa bất đẳng thức cần chứng minh về 1 dạng đơn giản hơn và thuần đại số hơn.

Thật thú vị là bất đẳng thức đó lại là BĐT Cauchy-Schwarz.

Bài toán 5. Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho $AB + AC$ lớn nhất.

Lời giải.

Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC .

Đặt $DB = DC = a$ không đổi. Theo định lý Ptolemy ta có:

$$AD \cdot BC = AB \cdot DC + AC \cdot BD = a(AB + AC) \Rightarrow AB + AC = \frac{BC}{a} \cdot AD$$

Do BC và a không đổi nên $AB + AC$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

4. Bài tập.

Bài toán 4.1. [CMO 1988, Trung Quốc] Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm (O) và bán kính R . Các tia AB, BC, CD, DA cắt $(O, 2R)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng:

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'A' \geq 2(AB + BC + CD + DA)$$

Bài toán 4.2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn của BC đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 4.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O') . Chứng minh rằng $BB' \cdot AC = AA' \cdot BC + CC' \cdot AB$

Bài toán 4.4. Cho lục giác $ABCDEF$ có các cạnh có độ dài nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong ba đường chéo AD, BE, CF có ít nhất một đường chéo có độ dài nhỏ hơn 2.

Bài toán 4.5. Cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính của đường tròn này gấp đôi bán kính của đường tròn kia. $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA lần lượt cắt đường tròn lớn tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng: Chu vi tứ giác $A'B'C'D'$ lớn hơn 2 lần chu vi tứ giác $ABCD$.

ĐỊNH LÝ PTOLEMY MỞ RỘNG

Dựa theo bài của Dương Châu Đình

1. Định lý Ptolemy mở rộng. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (O_1) thay đổi luôn tiếp xúc với $\widehat{BC}$ (không chứa A). Gọi AA', BB', CC' lần lượt là các tiếp tuyến từ A, B, C đến đường tròn (O_1) , thì ta có hệ thức sau

$$BC.AA' = CA.BB' + AB.CC'.$$

Chứng minh.

Xét trường hợp (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau (trường hợp tiếp xúc trong chứng minh tương tự).

Giả sử M là tiếp điểm của (O) và (O') . MA, MB, MC theo thứ tự cắt (O') tại X, Y, Z .

Lúc đó $YZ \parallel BC, XZ \parallel AC, XY \parallel AB$. Theo định lý Thalès ta có

$$\frac{AX}{AM} = \frac{BY}{BM} = \frac{CZ}{CM} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } AA'^2 = AM.AX, BB'^2 = BM.BY, CC'^2 = CM.CZ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{AA'^2}{AM^2} = \frac{BB'^2}{BM^2} = \frac{CC'^2}{CM^2} \text{ hay } \frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CM}$$

Từ định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $MCAB$ thu được $BC.MA = CA.MB + AB.MC$

Do đó $BC.AA' = CA.BB' + AB.CC'$.

2. Các bài toán ứng dụng.

Bài toán 2.1. Cho 2 đường tròn tiếp xúc nhau, ở đường tròn lớn vẽ tam giác đều nội tiếp. Từ các đỉnh của tam giác kẻ các tiếp tuyến tới đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng độ dài một trong ba tiếp tuyến đó bằng tổng hai tiếp tuyến còn lại.

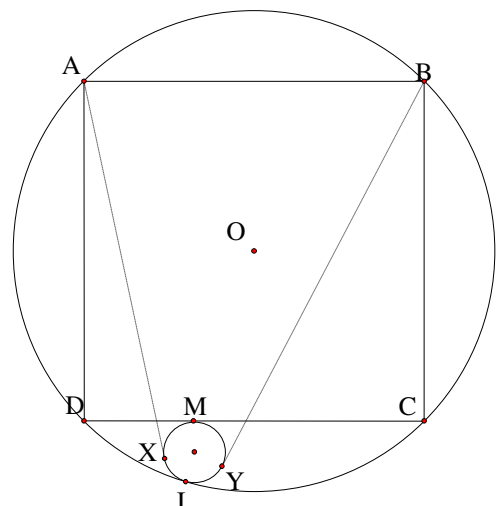
Lời giải.

Coi rằng đường tròn nhỏ tiếp xúc với $\widehat{BC}$ (không chứa A) và đặt l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường tiếp tuyến kẻ từ A, B, C đến đường tròn nhỏ.

Từ định lý Ptolemy mở rộng ta có

$$al_a = bl_b + cl_c \Rightarrow l_a = l_b + l_c.$$

Bài toán 2.2. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn thay đổi tiếp xúc với đoạn CD và cung nhỏ CD , kẻ tiếp tuyến AX, BY với đường tròn này. Chứng minh rằng $AX + BY$ không đổi.



Lời giải.

Không mất tính tổng quát, coi rằng hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 1. Từ đó dễ dàng suy ra $AC = BD = \sqrt{2}$.

Áp dụng định lý với các tam giác ACD và BCD, ta được

$$\begin{cases} CD \cdot AX = AD \cdot CM + AC \cdot DM \\ CD \cdot BY = BC \cdot DM + BD \cdot CM \end{cases} \quad \text{. Cộng hai đẳng thức này, suy ra}$$

$$AX + BY = 1 + \sqrt{2}.$$

Bài toán 2.3. $\triangle ABC$ ($AB < BC$) nội tiếp đường tròn (O) . Trên cạnh AC lấy điểm B_1 , sao cho $BB_1 = BA = c$. Gọi R là bán kính đường tròn (O_1) tiếp xúc BB_1, B_1C và cung nhỏ BC (Không chứa A) và r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle BB_1C$. Chứng minh rằng $R = r$.

Lời giải.

Giả sử đường tròn (O_1) tiếp xúc với BB_1, B_1C lần lượt tại M, N .

Đặt $B_1M = x = B_1N$ ($0 < x < c$).

$$\text{Suy ra } \begin{cases} l_a = AM = x + 2c \cdot \cos A \\ l_b = BN = c - x \\ l_c = CM = b - x - 2c \cdot \cos A \end{cases}.$$

Áp dụng định lý, ta được

$$al_a = bl_b + cl_c \text{ hay}$$

$$x(x + 2c \cdot \cos A) = b(c - x) + c(b - x - 2c \cdot \cos A)$$

$$\text{Suy ra } (a + b + c)x = 2(bc - c^2 \cdot \cos A - ac \cdot \cos A).$$

Gọi y là độ dài tiếp tuyến từ B_1 tới đường tròn nội tiếp $\triangle BB_1C$.

$$\text{Thế thì ta có } y = \frac{1}{2}(BB_1 + B_1C - BC) = \frac{1}{2}(c + (b - 2c \cdot \cos A) - a)$$

Lại có

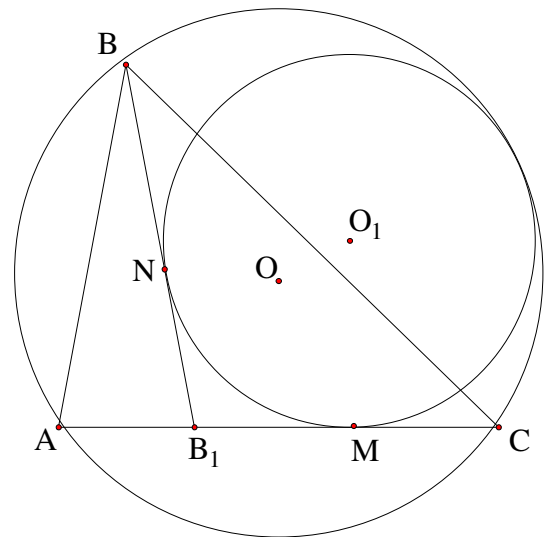
$$R = 2r \Leftrightarrow x = 2y \Leftrightarrow 2(bc - c^2 \cdot \cos A - ac \cdot \cos A) = (a + b + c)(c + b - 2c \cdot \cos A - a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2bc = (b + c)^2 - a^2 - 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Từ đây ta được điều phải chứng minh.

3. Bài tập.

3.1. [TH&TT bài T8/369] Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và có độ dài các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ (không chứa A), $\widehat{CA}$ (không chứa B), $\widehat{AB}$ (không chứa C). Vẽ các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ theo thứ tự có đường kính là A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Chứng minh bất đẳng thức



$$P_{A/(O_1)} + P_{B/(O_2)} + P_{C/(O_3)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

3.2. [TH&TT bài T11/359] Cho ΔABC . Đường tròn (O_1) nằm trong tam giác và tiếp xúc với các cạnh AB, AC . Đường tròn (O_2) đi qua B, C và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1) tại T . Chứng minh rằng đường phân giác của góc BTC đi qua tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC .

MỘT TỈ SỐ VÀ ỨNG DỤNG

Dựa theo bài của Son Hong Ta
Trên Mathematical reflections 2 (2008)

Trong bài “Định lý Ptolemy mở rộng” ta đã thấy một tính chất thú vị đối với hai đường tròn tiếp xúc nhau, ở bài này ta tiếp tục tìm hiểu thêm về một tính chất khác đối với hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và sự ứng dụng của tính chất này.

Bổ đề. Cho A và B là hai điểm nằm trên đường tròn γ . Một đường tròn ρ tiếp xúc trong với γ tại T . Gọi AE và BF là hai tiếp tuyến kẻ từ A và B đến

ρ . Thì ta có $\frac{TA}{TB} = \frac{AE}{BF}$.

Lời giải. Gọi A_1 và B_1 là giao điểm thứ hai của TA, TB với ρ . Chúng ta biết rằng A_1B_1 song song với AB . Vì thế ta có,

$$\left(\frac{AE}{TA_1}\right)^2 = \frac{AA_1 \cdot AT}{A_1T \cdot A_1T} = \frac{BB_1 \cdot BT}{B_1T \cdot B_1T} = \left(\frac{BF}{TB_1}\right)^2.$$

Suy ra $\frac{AE}{TA_1} = \frac{BF}{TB_1} \Rightarrow \frac{AE}{BF} = \frac{TA_1}{TB_1} = \frac{TA}{TB}$, đây chính là điều

phải chứng minh.

Để minh họa cho bổ đề này, chúng ta sẽ đến với một vài ví dụ. Bài toán sau đây của Nguyễn Minh Hà, trong tạp chí toán học và tuổi trẻ (2007).

Bài toán 1. Cho Ω là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và D là tiếp điểm của đường tròn $\rho(I)$ nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC . Chứng minh rằng $\angle ATI = 90^\circ$.

Lời giải. Gọi E và F lần lượt là hai tiếp điểm của đường tròn $\rho(I)$ với cạnh CA và AB . Theo bổ đề trên ta có,

$$\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}.$$

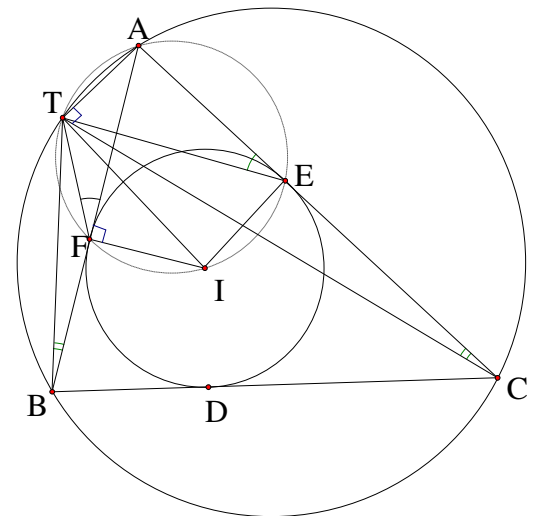
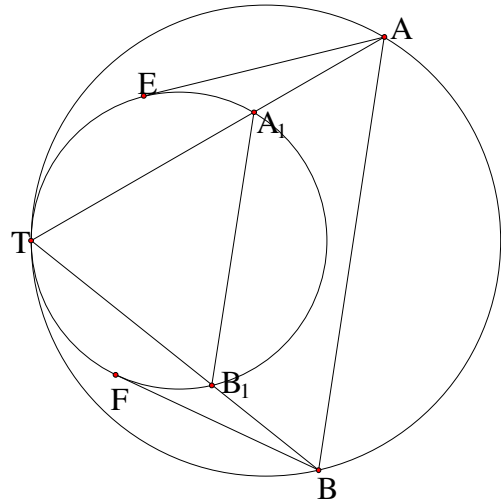
Vì vậy tam giác TBF và TCE đồng dạng. Suy ra $\angle TFA = \angle TEA$, có nghĩa là A, I, E, F, T cùng nằm trên một đường tròn.

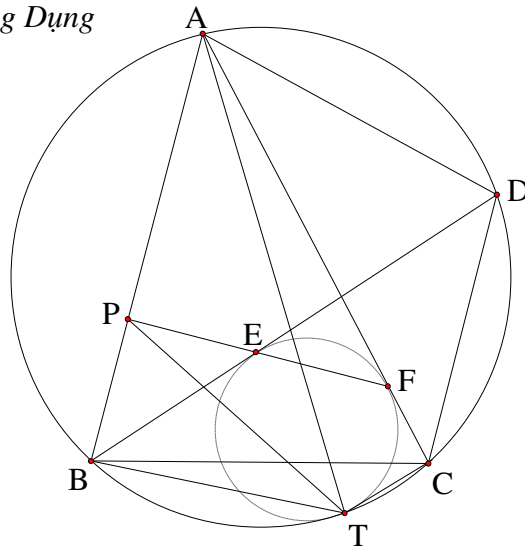
Vậy $\angle ATI = \angle AFI = 90^\circ$.

Bài toán 2. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn Ω . Cho ω là đường tròn tiếp xúc trong với Ω tại T , và tiếp xúc với BD, AC tại E, F . Gọi P là giao điểm của EF với AB . Chứng minh rằng TP là đường phân giác trong của góc $\angle ATB$.

Lời giải. Từ bổ đề, chúng ta có được $\frac{AT}{BT} = \frac{AF}{BE}$, vì vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu ta có

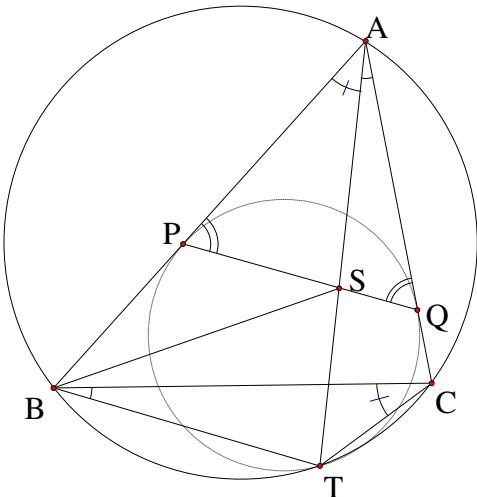
$$\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{PB}.$$





Chú ý rằng $\angle PEB = \angle AFP$, và từ định lý hàm sin đối với hai tam giác APF, BPE , chúng ta có được $\frac{AP}{AF} = \frac{\sin \angle AFP}{\sin \angle APF} = \frac{\sin \angle BEP}{\sin \angle BPE} = \frac{BP}{BE}$.

Vì vậy, ta được $\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{PB}$, suy ra điều phải chứng minh.



Sau đây là toán từ “Moldovan Team Selection” năm 2007.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn ω tiếp xúc trong với Ω tại T , và với cạnh AB, AC ở P, Q . Gọi S là giao điểm của AT với PQ . Chứng minh rằng $\angle SBA = \angle SCA$.

Lời giải.

Dùng bổ đề, ta có

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{BT}{CT} = \frac{\sin \angle BCT}{\sin \angle CBT} = \frac{\sin \angle BAT}{\sin \angle CAT} = \frac{PS}{QS}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra hai tam giác BPS và CQS đồng dạng.

Vì vậy $\angle SBA = \angle SCA$.

Bài toán 4. Cho đường tròn (O) có dây cung AB . Gọi $(O_1), (O_2)$ là hai đường tròn tiếp xúc trong với (O) và AB . Gọi giao điểm giữa $(O_1), (O_2)$ là M, N . Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm cung AB (không chứa M, N).

Lời giải. Gọi P và Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O_1) với (O) và AB . R và S lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O_2) với (O) và AB . Cho T là trung điểm của cung AB (không chứa M, N).

Áp dụng bổ đề đối với hai đường tròn $(O), (O_1)$ và hai điểm A, B với hai tiếp tuyến AQ, BQ tới đường tròn (O_1) , thì chúng ta có

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}.$$

Điều này có nghĩa là PQ đi qua T .

Tương tự, RS cũng đi qua T .

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \angle PQA &= \angle QTA + \angle QAT = \\ &= \angle PRA + \angle ART = \angle PRS, \end{aligned}$$

Nên bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn và gọi nó là đường tròn (O_3) .

Chú ý rằng PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_3) , RS là trục đẳng phương của (O_2) và (O_3) , còn MN là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) . Vì vậy ba đường thẳng PQ, RS, MN sẽ đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn này.

Vậy ta suy ra được MN sẽ đi qua T .

Chúng ta sẽ tiếp tục với một bài toán trong “MOSP Tests” năm 2007.

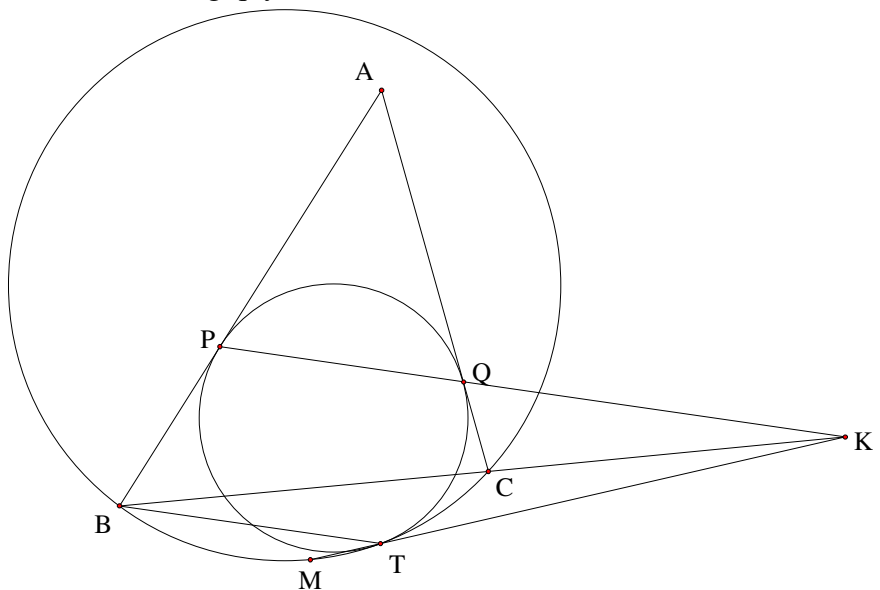
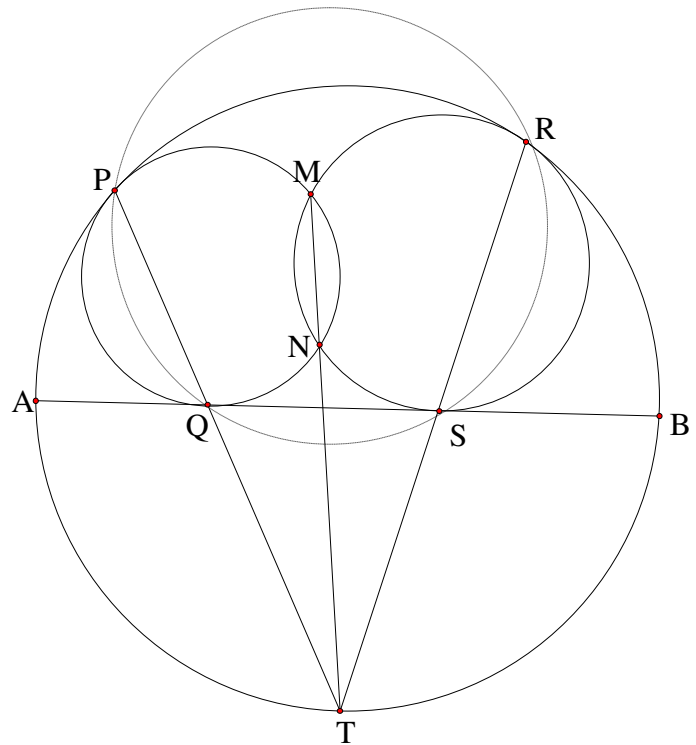
Bài toán 5. Cho tam giác ABC . Đường tròn ω đi qua B, C . Đường tròn ω_1 tiếp xúc trong với ω và hai cạnh AB, AC lần lượt tại T, P, Q . Gọi M là trung điểm của cung BC (chứa T) của đường tròn ω . Chứng minh rằng ba đường thẳng PQ, BC, MT đồng quy.

Lời giải.

Gọi $K = PQ \cap BC$ và $K' = MT \cap BC$. Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ABC , ta được

$$\begin{aligned} \frac{KB}{KC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{PA}{PB} &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{KB}{KC} &= \frac{BP}{CQ}. \end{aligned}$$

Mặt khác, M là trung điểm của cung BC (chứa T) của ω nên MT là đường phân giác ngoài của góc $\angle BTC$. Vì vậy, bài toán sẽ được chứng minh nếu ta



có $\frac{BP}{CQ} = \frac{TB}{TC}$. Nhưng điều này đúng theo bổ đề, nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6. Cho $(O_1), (O_2)$ là hai đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại M, N . Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn này cắt (O) ở bốn điểm. Gọi B và C là hai trong bốn điểm trên sao cho B và C nằm cùng phía với O_1O_2 . Chứng minh rằng BC song song với một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O_1), (O_2)$.

Lời giải. Vẽ hai tiếp tuyến chung trong GH, KL của $(O_1), (O_2)$ sao cho G, L nằm trên (O_1) và K, H nằm trên (O_2) . Gọi EF là tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$ sao cho E, B nằm cùng phía so với O_1O_2 . P, Q là giao điểm của EF với (O) . Giờ đây ta chỉ cần chứng minh BC song song với PQ . Gọi A là trung điểm cung PQ không chứa M, N . Vẽ hai tiếp tuyến AX, AY đến đường tròn $(O_1), (O_2)$ ($X \in (O_1), Y \in (O_2)$). Trong bài toán 4 ta đã chứng minh được rằng A, E, M thẳng hàng; A, F, N thẳng hàng, và $MEFN$ là tứ giác nội tiếp. Vì vậy,

$$AX^2 = AE \cdot AM = AF \cdot AN = AY^2$$

hay $AX = AY$.

Theo bổ đề ta có, $\frac{MA}{AX} = \frac{MB}{BG} = \frac{MC}{CL}$.

Mặt khác theo định lý Ptolemy, ta được

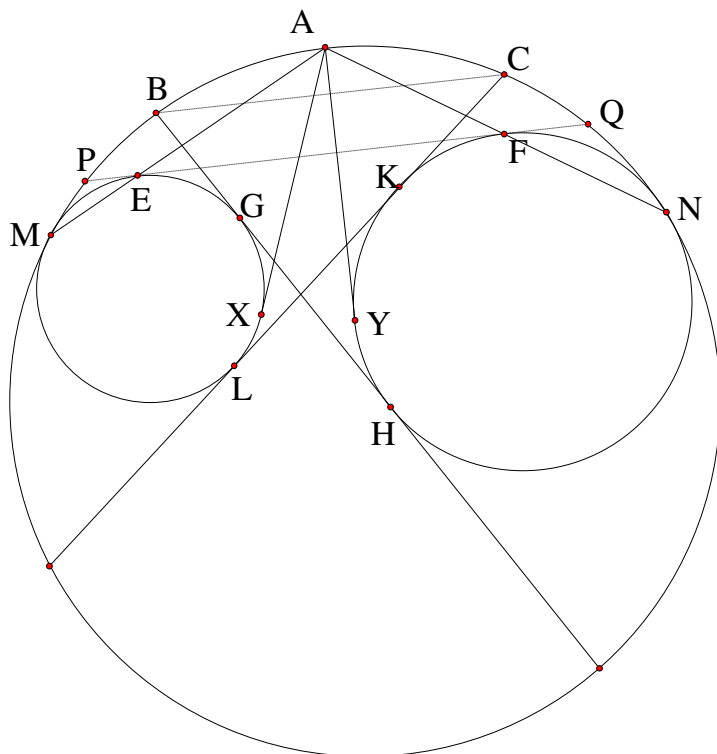
$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB,$$

Suy ra $AX \cdot BC = BG \cdot AC + CL \cdot AB$.

Tương tự ta cũng có $AY \cdot BC = BH \cdot AC + CK \cdot AB$.

Nên $AC \cdot (BH - BG) = AB \cdot (CL - CK)$, hay $AC \cdot GH = AB \cdot KL$, suy ra $AC = AB$. Điều này có nghĩa là A là trung điểm cung BC của đường tròn (O) .

Vì vậy $BC \parallel PQ$.

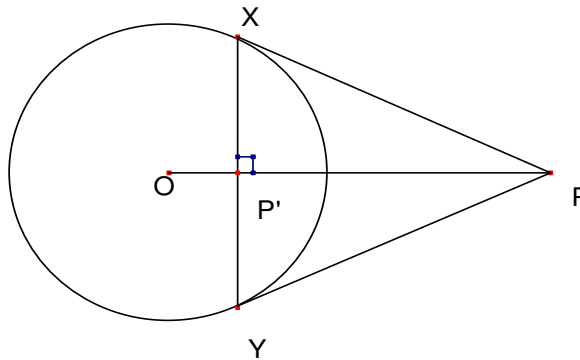


CỰC VÀ ĐỐI CỰC

Dựa theo bài viết của Kin Y.Li
Trên tạp chí toán Hồng Kông

1.1. Định nghĩa:

Cho đường tròn (C) tâm O bán kính r , một điểm P ở ngoài (C) . Trên OP lấy P' sao cho $OP \cdot OP' = r^2$. Ta nói: đối cực của P là đường thẳng d vuông góc với OP tại P' . Ngược lại, với mọi đường thẳng d không qua tâm O , ta nói P là cực của đường thẳng d .



1.2. Tính chất:

1. Với điểm P ở ngoài (O, r) , từ P kẻ 2 tiếp tuyến PX, PY của (O, r) . Gọi P' là giao điểm của XY và OP . Ta có $OP \perp XY$. Khi đó ta nói đối cực d của điểm P là đường XY . Ngược lại, với hai điểm phân biệt X, Y trên đường tròn (O, r) , cực của XY là điểm P (điểm giao nhau của hai tiếp tuyến tại X, Y của (O, r)). Điểm P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng XY và $\angle OXP = \angle OYP = 90^\circ$.

2. [Định lý La Hire]. Cho x, y lần lượt là đối cực của X, Y , ta có $X \in y \Leftrightarrow Y \in x$.

• Chứng minh. Gọi X', Y' là các điểm lần lượt nằm trên OX, OY và thỏa mãn điều kiện $OX \cdot OX' = r^2 = OY \cdot OY'$. Suy ra bốn điểm X, X', Y, Y' cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra

$$X \text{ thuộc } y \Leftrightarrow \angle XY'Y = 90^\circ \Leftrightarrow \angle XX'Y = 90^\circ \Leftrightarrow Y \text{ thuộc } x.$$

3. Cho x, y, z lần lượt là đối cực của ba điểm phân biệt X, Y, Z , ta có $Z = x \cap y \Leftrightarrow z \equiv XY$.

• Chứng minh. Sử dụng định lý La Hire, ta có $Z = x \cap y \Leftrightarrow X \text{ thuộc } z \text{ và } Y \text{ thuộc } z \Leftrightarrow z = XY$.

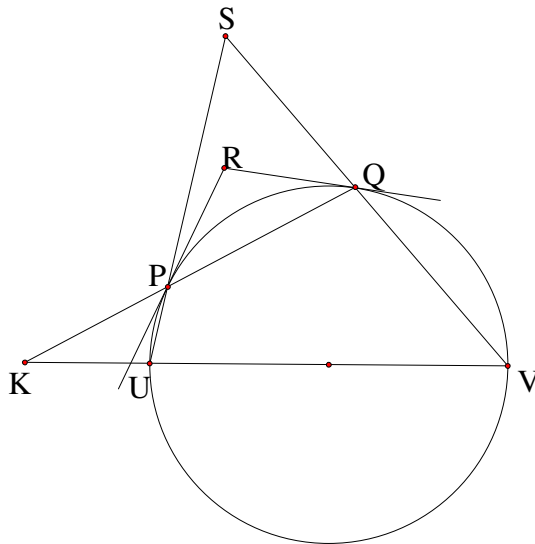
4. Cho W, X, Y, Z nằm trên (O, r) . Đối cực p của $P = XY \cap WZ$ là đường thẳng qua điểm $Q = WX \cap ZY$ và $R = XZ \cap YW$.

• *Chứng minh:* lấy S, T lần lượt là cực của $s = XY, t = WZ, P = s \cap t$. Sử dụng tính chất (3.), $S = x \cap y, T = w \cap z$ và $p = ST$. Với lục giác $WXXZYY$, ta có: $Q = WX \cap ZY, S = XX \cap YY, R = XZ \cap YW$.

Ở đây XX là tiếp tuyến tại X . Áp dụng định lý Pascal (Xem bài “Định lý Ceva và Menelaus”), ta có S, Q, R cùng thuộc một đường thẳng. Tương tự đối với lục giác $XWWYZZ$, ta thấy Q, T, R cùng thuộc một đường thẳng. Từ đó ta suy ra được $p = ST = QR$.

Một số ví dụ ứng dụng các tính chất cực - đối cực:

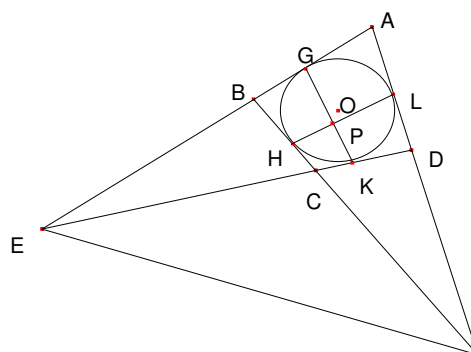
1.3.1 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính UV . P, Q là hai điểm thuộc nửa đường tròn đó sao cho $UP < UQ$. R là giao điểm của hai tiếp tuyến của nửa đường tròn tại P, Q và S là giao điểm của UP và VQ . Chứng minh rằng $RS \perp UV$.



Hướng giải

Lấy $K = PQ \cap UV$. Theo tính chất (4.) ta có đường đối cực của K đi qua điểm S . Hai tiếp tuyến của nửa đường tròn tại P và Q cắt nhau tại R nên đối cực của R là PQ . Từ điểm K trên PQ , áp dụng định lý La Hire, ta có R nằm trên đường đối cực của K , do đó đối cực của K là đường RS và K thuộc đường thẳng chứa đường kính UV nên ta có $RS \perp UV$.

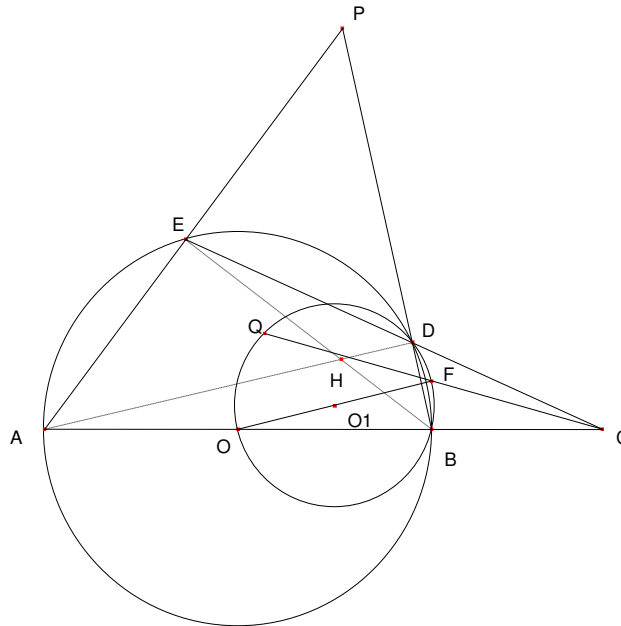
1.3.2 Cho tứ giác $ABCD$ và đường tròn (O, r) nội tiếp tứ giác. Gọi G, H, K, L lần lượt là tiếp điểm của AB, BC, CD, DA với (O) . Kéo dài AB, CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, GK và HL cắt nhau tại P . Chứng minh rằng $OP \perp EF$.



Hướng giải.

Sử dụng tính chất 1 về cực và đối cực, ta có đối cực của hai điểm phân biệt E, F lần lượt là GK và HL . Lại có GK cắt HL tại P . Áp dụng tính chất 3 ta có đối cực của P là EF . Theo định nghĩa về đối cực ta có $OP \perp EF$.

1.3.3 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . C là một điểm nằm ngoài đường tròn. Từ C vẽ cát tuyến cắt (O) theo thứ tự tại D, E . Gọi (O_1) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD có đường kính OF . Chứng minh bốn điểm O, A, E, G cùng thuộc một đường tròn.



Hướng giải.

Kéo dài AE cắt BD tại P , theo tính chất 4 ta có đối cực của P với đường tròn tâm O là đường thẳng qua C và H với H là giao điểm của AD và EB . Ta có $OP \perp CH$. Lấy Q là giao điểm của OP và CH .

Lại có $\angle PQH = \angle PDH = \angle PEH = 90^\circ$, nên P, E, Q, H, D cùng thuộc một đường tròn, mà $\angle PQD = \angle PED = \angle DBO$, nên Q, D, P, O cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó ta suy ra Q trùng G , và đây là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD và đường tròn đường kính OC .

Vì $P = BD \cap OG \Rightarrow PE.PA = PD.PB = PG.PO$ nên O, A, E, G cùng thuộc một đường tròn.

1.3.4 Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . AB, AC, BC tiếp xúc (I) lần lượt tại M, L, K . Đường thẳng qua B song song với MK cắt LM, LK lần lượt tại R và S . Chứng minh tam giác RIS là tam giác nhọn.

Hướng giải.

Ta có đối cực của các điểm B, K, L, M lần lượt là MK, BC, CA, AB . Lại có $B' = IB \cap MK$

Vì $B' \in MK \Rightarrow B$ thuộc đường đối cực của B' (Định lý La Hire)

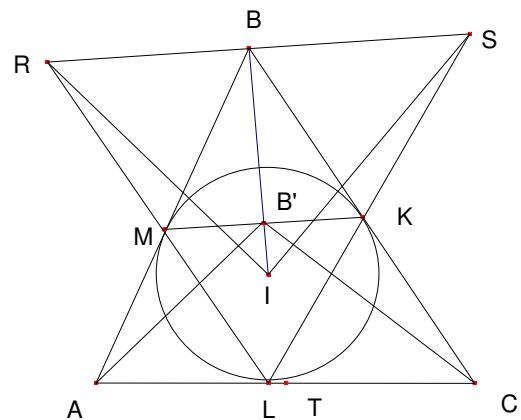
$\Rightarrow MK \perp RS \Rightarrow$ đối cực của B' là $RS \Rightarrow R, B, S$ thẳng hàng và các đường đối cực của chúng đồng quy tại B' .

Lại có, các đường đối cực của K, L cắt nhau tại C và L, K, S thẳng hàng nên đối cực của ba điểm L, K, S đồng quy tại C . Từ đó ta suy ra đối cực của S là $B'C$ và ta cũng có được $IR \perp B'A$, và $\widehat{RIS} = 180^\circ - \angle AB'C$.

Gọi T là trung điểm của AC , ta có:

$$2\overrightarrow{B'T} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'A} = (\overrightarrow{B'K} + \overrightarrow{KC}) + (\overrightarrow{B'M} + \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{MA}$$

Vì $\overrightarrow{KC}$ không song song $\overrightarrow{MA}$, $B'T < \frac{KC + MA}{2} = \frac{CL + AL}{2} = \frac{AC}{2}$ nên B' nằm trong đường tròn đường kính $AC \Rightarrow \angle AB'C > 90^\circ \Rightarrow \angle RIS < 90^\circ \Rightarrow \Delta RIS$ là tam giác nhọn.



1.3. Một số bài tập áp dụng:

1.4.1 [Australian-Polish 98] Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F thuộc một đường tròn sao cho các tiếp tuyến tại A và D , đường BF, CE đồng quy. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, EF hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

1.4.2 Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . K là một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng EF . BK, CK cắt AC, AB lần lượt tại E', F' . Chứng minh rằng $E'F'$ tiếp xúc với (I).

1.4.3 Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . AN, AP cắt (O) tại E, F . Chứng minh rằng ME, QF, AC đồng quy.

1.4.4 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . AC cắt BD tại I . $(AOB), (COD)$ cắt nhau tại điểm L khác O . Chứng minh rằng $\angle ILO = 90^\circ$.

1.4.5 Cho tam giác ABC . Đường tròn đường kính AB cắt CA, CB tại P, Q . Các tiếp tuyến tại P, Q với đường tròn này cắt nhau tại R . Chứng minh rằng $CR \perp AB$.

1.4.6 Cho tam giác ABC . BB', CC' là các đường cao. E, F là trung điểm của AC, AB . EF cắt $B'C'$ tại K . Chứng minh rằng AK vuông góc với đường thẳng Ôle của tam giác ABC .

1.4.7 Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với EF, FD, DE lần lượt tại M, N, P . Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy.

1.4.8 [Bài toán Stanley-Rabinowitz] Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . P là 1 điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt (I) lần lượt tại X, Y, Z . Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.