Bài 144.

Gọi n, k, p là các số nguyên dương sao cho $k \geq 2$ và $k(p + 1) \leq n$. Hãy xác định số các cách tô thành hai màu xanh đỏ cho n điểm được đánh dấu trên một đường tròn sao cho: có đúng k điểm được tô màu xanh, và bất kì đoạn cung nào có hai điểm đầu mút màu xanh nhưng không chứa điểm màu xanh nào khác bên trong cũng phải chứa ít nhất k điểm màu đỏ.

Bài 145.

Một kim tự tháp có đáy là một đa giác lồi 9 cạnh. Mỗi đường chéo của đáy và mỗi một trong các cạnh của các mặt bên được tô bằng màu đen hoặc trắng. Cả hai màu đều được sử dụng. (Các cạnh của mặt đáy không được tô màu.) Chứng minh rằng có 3 đoạn cùng màu tạo thành một tam giác.

Bài 146.

Phát biểu sau đây đúng hay sai?

"Trong không gian, cho n điểm màu đỏ, khi đó, ta luôn có thể đặt vào không gian đó $3n$ điểm màu xanh để cho bên trong mỗi tứ diện tạo thành bởi các điểm màu đỏ có ít nhất một điểm màu xanh."

Bài 147.

Trong hệ trục trực chuẩn của mặt phẳng, xét tất cả những điểm có toạ độ nguyên (x, y) thỏa mãn

$$1 \leq x \leq 19, 1 \leq y \leq 4.$$

Mỗi điểm được đánh dấu bằng một trong ba màu xanh lục, đỏ và xanh nước biển. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có hai cạnh song song với hai trục toạ độ sao cho bốn đỉnh của nó có cùng màu.

Bài 148.

Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô màu đen hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng 1.hoặc có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{3}$.

Bài 149.

Mỗi đỉnh của một đa diện có 3 cạnh. Có thể tô màu các cạnh bằng 3 màu, sao cho ba cạnh tại mỗi đỉnh có 3 màu khác nhau. Chứng minh rằng ta có thể gán cho mỗi đỉnh một số phức $z_i \neq 1$ để cho tích các số quanh mỗi mặt là bằng 1.

Bài 150.

Trong không gian, cho 9 điểm sao cho không có bất cứ hệ 4 điểm nào trong số đó đồng phẳng. Cứ hai điểm thì được nối một đoạn thẳng (cạnh), mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ, hoặc không tô gì cả.

Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho hễ có đúng n cạnh được tô màu thì tập hợp các cạnh được tô đó phải chứa một tam giác có cả 3 cạnh cùng màu.

Bài 151.

Trên một đường thẳng, có n điểm màu xanh và n điểm màu đỏ. Chứng minh rằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm cùng màu bé hơn hoặc bằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm khác màu.

Bài 152.

Có bao nhiêu cách tô màu đỏ cho 16 khối lập phương đơn vị của khối lập phương $4 \times 4 \times 4$, sao cho mỗi khối $1 \times 1 \times 4$

(và mỗi khối $1 \times 4 \times 1$ hay $4 \times 1 \times 1$) có chứa đúng một khối lập phương đơn vị màu đỏ ?

Bài 153.

Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác này cũng như mỗi cạnh trong 25 cạnh A_iB_j (i, j = 1,...,5) đều được tô màu đỏ hoặc xanh. Biết rằng bất kì tam giác nào tạo thành từ 3 đỉnh của lăng trụ mà cả 3 cạnh đều được tô màu thì phải có 2 cạnh có màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của hai ngũ giác (ở đáy trên và đáy dưới) đều có cùng một màu.

Bài 154.

Trong mặt phẳng, cho 2 điểm phân biệt O và A. Với mọi điểm X (khác O) trong mặt phẳng này, ta kí hiệu a(X) là số đo của góc giữa OA và OX, tính từ OA, theo chiều ngược kim đồng hồ, $0 \le a(X) \le 2\pi$. Gọi C(X) là đường tròn tâm O bán kính $OX + \dfrac{a(X)}{OX}$.

Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong một số hữu hạn các màu sắc khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm Y mà $a(Y) > 0$ sao cho tồn tại một điểm trên biên (trên chu vi) của đường tròn C(Y) có cùng màu với Y.

Bài 155.

Cho n là một số tự nhiên, k là một số nguyên nguyên tố với n; $1 \le k \le n-1$, M là tập hợp $\{1,2,...,n-1\}$. Mỗi phần tử của M được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc xanh.

Ta giả sử :

a) với mọi i thuộc M, i và n - i có cùng màu ;

b) với mọi i thuộc M, $i \neq k$, i và $|i-k|$ có cùng màu.

Chứng minh rằng tất cả các phần tử của M đều có cùng màu.

Bài 156.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên. Hỏi rằng, có phải ta luôn luôn có thể tô màu đỏ một số điểm của tập hợp này, và số còn lại được tô màu xanh, sao cho với bất kì đường thẳng L nào song song với một trong hai trục tọa độ thì sự khác nhau (về giá trị tuyệt đối) của số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ trên L sẽ không lớn hơn 1 ? Hãy chứng minh cho câu trả lời của bạn.

Bài 157.

Cho trong mặt phẳng các điểm có toạ độ nguyên, sao cho chúng là các đỉnh của những hình vuông đơn vị. Các hình vuông này được tô màu đen, trắng xen nhau như bàn cờ. Với mỗi cặp số nguyên dương (m, n), ta xét tam giác vuông có toạ độ 3 đỉnh là toạ độ nguyên, có hai cạnh góc vuông mà độ dài là m, n tương ứng nằm dọc theo cạnh của những cạnh hình vuông. Gọi S_1 là diện tích của phần được tô đen, S_2 là diện tích của phần được tô trắng của tam giác đó. Đặt $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Với mọi cặp số nguyên dương m, n cùng chẵn hoặc cùng lẻ, hãy tính $f(m,n)$.

b) Chứng minh rằng $f(m,n) \leq \dfrac{\max(m,n)}{2}, \forall m,n$.

c) Chứng minh rằng không có hằng số C nào để

$$f(m,n) < C, \forall m,n.$$

Bài 158.

Tìm số nguyên dương bé nhất n ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất sau: với mọi cách tô thành hai màu cho n điểm khác nhau $A_1, A_2, ..., A_n$ trên một đường thẳng thỏa mãn $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = ... A_{n-1}A_n$, luôn tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i \leq 2j - i \leq n$) có cùng một màu.

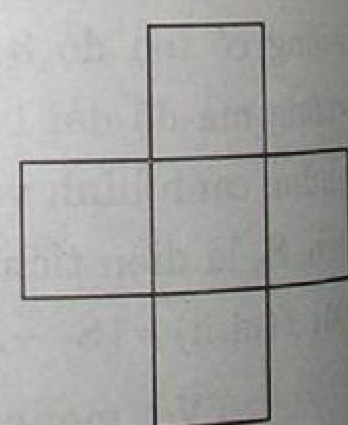
Bài 159.

Chia hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ($m > 1$, $n > 1$) thành mn ô vuông 1×1 bằng những đường thẳng song song với các cạnh. Ta tìm cách huỷ đi hai ô vuông, sau đó lấp đầy các ô còn lại của hình chữ nhật bằng các quân cờ domino 2×1. Hỏi có bao nhiêu cách như thế? (Ta hiểu quân cờ domino 2×1 là hình gồm hai ô trắng và đen.)

Bài 160.

Cho bảng vuông cỡ 7×7 có bốn ô vuông ở bốn góc của bảng bị xoá đi.

a) Hỏi số bé nhất các ô vuông cần tô màu đen là bao nhiêu để cho ta không thể nào thấy được bất cứ một hình chữ thập nào (gồm 5 ô vuông không màu - xem hình) trên bảng vuông đã cho?



b) Chứng minh rằng ta có thể viết các số nguyên lên các ô của bảng theo một cách nào đó để cho tổng các số nguyên trên mỗi hình chữ thập là một số âm, còn tổng tất cả các số nguyên trên toàn bộ bảng là một số dương.

Bài 161.

Các cạnh và đường chéo của một n-giác đều X được tô bằng k màu sao cho:

(i) Với mỗi màu a và hai đỉnh bất kì A, B của X thì hoặc là đoạn AB sẽ được tô màu a, hoặc là phải tồn tại một đỉnh C sao cho AC và BC cùng được tô màu a ;

(ii) Ba cạnh của mọi tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh nằm trong số các đỉnh của X đều được tô bằng nhiều nhất là hai màu.

Chứng minh rằng $k \leq 2$.

Bài 162.

Tô màu các đỉnh của một đa giác đều 12 cạnh bằng hai màu khác nhau. Hãy tìm số tất cả các cách tô màu như thế sao cho không có đa giác đều nào có các đỉnh cùng màu.

Bài 163.

Cho số nguyên lẻ $n \geq 3$ và số nguyên m, với $m \geq n^2 - n + 1$. Cho dãy các đa giác $P_1, P_2, \ldots, P_m$ được xác định như sau:

(i) P_1 là đa giác đều n đỉnh.

(ii) Với $k > 1$, P_k là đa giác đều mà các đỉnh của nó là trung điểm các cạnh của đa giác P_{k-1}.

Hãy xác định (và chứng minh) số màu lớn nhất có thể được dùng để tô tất cả các đỉnh của đa giác này sao cho với mọi cách tô bằng số màu đó, luôn có thể tìm được 4 đỉnh A, B, C, D có cùng màu và chúng tạo thành một hình thang cân (có thể suy biến thành 4 đỉnh cùng nằm trên một đường thẳng), và bốn đỉnh đó không cùng nằm trên một đường thẳng đi qua tâm của P_1.

Bài 164.

Trong cùng một mặt phẳng, cho hai đa giác đều n cạnh S và T bằng nhau, với $n \geq 3$, sao cho chúng giao nhau và phần giao ($S \cap T$) là một đa giác $2n$ đỉnh. Các cạnh của S được tô màu đỏ, còn các cạnh của T được tô màu xanh. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh màu xanh của đa giác $S \cap T$ bằng tổng độ dài các cạnh màu đỏ của nó.

Bài 165.

Cho mười điểm được đánh dấu sẵn trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng. Mỗi cặp điểm được nối bởi một đoạn thẳng. Mỗi đoạn này được tô bởi một trong k màu, sao cho với bất kì k điểm nào trong mười điểm đó cũng sẽ tồn tại k đoạn mà mỗi đoạn nối hai trong k điểm ấy và không có hai đoạn nào được tô cùng màu. Xác định tất cả các số nguyên k, $1 \leq k \leq 10$ để điều đó có thể xảy ra.

Bài 166.

Trong một hệ thống xe điện ngầm, có n đường dưới mặt đất (với $n > 4$, giả sử mỗi đường là một đường thẳng). Tại mỗi trạm, có nhiều nhất ba con đường gặp nhau. Với hai con đường bất kì, tồn tại một đường thứ ba sao cho từ mỗi đường có thể đi đến được con đường thứ ba này. Chứng minh rằng số trạm xe điện ngầm ít nhất là bằng

$$\frac{5}{6}(n-5).$$

4 MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐỒ THỊ

Bài 167.

Chứng minh rằng một đồ thị n đỉnh và k cạnh thì sẽ có ít nhất $\frac{k(4k-n^2)}{3n}$ tam giác.

Bài 168.

Một tập hợp gồm 1990 người được chia thành các tập con rời nhau sao cho:

1. Không người nào trong một tập con quen biết tất cả các người nằm trong tập con đó;

2. Trong nhóm 3 người bất kì thuộc cùng một tập con, luôn tồn tại ít nhất 2 người không quen biết nhau;

3. Với bất kì một nhóm 2 người nào trong một tập con mà không quen biết lẫn nhau, tồn tại đúng một người trong cùng tập con đó quen biết cả hai người này.

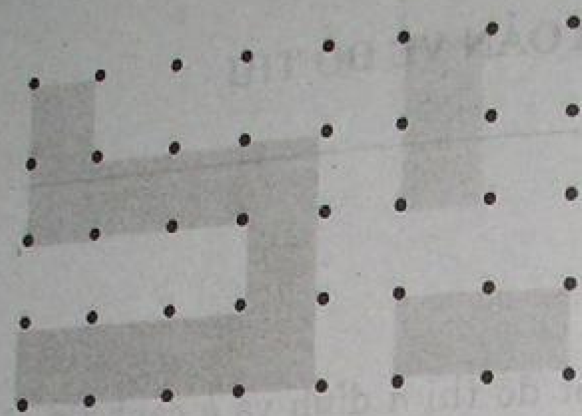
(a) Chứng minh rằng trong mỗi tập con, mỗi người đều có cùng một số người quen biết.

(b) Tìm số lớn nhất các tập con có thể chia được.

Chú ý: Ta giả thiết rằng nếu A quen biết B thì B cũng sẽ quen biết A. Ta cũng hiểu rằng mỗi người thì có *quen biết* với chính họ.

Bài 169.

Trên một hình chữ nhật có kẻ ô, hãy chứng tỏ rằng một đường đi xuất phát từ góc phía tây bắc, đi xuyên qua mỗi điểm mắc lưới trên hình chữ nhật kẻ ô đúng một lần, và kết thúc tại góc phía đông nam, thì đường đi đó sẽ chia hình chữ nhật kẻ ô thành hai nửa bằng nhau mà:



(a) một nửa thì mở ra ở hướng bắc hoặc đông (tức là tại đó đường đi không khép kín);

(b) nửa còn lại mở ra ở hướng nam hoặc tây.

(Đồ thị trên chỉ ra một đường dẫn thoả mãn điều kiện của bài toán cho hình chữ nhật kẻ ô 5×8. Miền được tô đen là miền mở ra ở hướng bắc hoặc đông và miền còn lại thì mở ra ở hướng nam hoặc tây.)

Bài 170.

Gọi G là một đồ thị có 9 đỉnh. Giả sử rằng với 5 điểm bất kì của G, luôn tồn tại ít nhất 2 cạnh mà các đầu mút nằm trong 5 đỉnh đó. Tìm số bé nhất các cạnh của G.

Bài 171.

Gọi G là đồ thị liên thông đơn giản có $2p$ đỉnh (p là số nguyên dương), nhưng G không chứa tam giác nào. Chứng tỏ rằng số các cạnh $\# E$ của đồ thị này thoả mãn $\# E \leq p^2$.

Bài 172.

Cho một đồ thị, ta tô các đỉnh bằng một trong hai màu. Ta gọi một cách tô màu là *chấp nhận được* nếu như hai đỉnh kề nhau bất kì thì có màu khác nhau. Chứng minh rằng, một cách tô màu là *chấp nhận được* khi và chỉ khi mọi dãy cạnh kế tiếp khép kín có một số chẵn cạnh.

Bài 173.

Cho một đồ thị G, ta gọi

$$\chi_G = \min\{\, k\text{: có thể tô } G \text{ bằng } k \text{ màu}\,\},$$

$$\Delta_G = \max\{\text{bậc của các đỉnh của } G\}.$$

(a) Chứng minh rằng với mọi đồ thị liên thông đơn G, ta có $\chi_G \le \Delta_G + 1$.

(b) Một đồ thị được gọi là đều nếu mọi đỉnh của nó đều có cùng bậc. Chứng minh rằng nếu G là một đồ thị liên thông đơn và không đều thì ta có $\chi_G \le \Delta_G$.

Bài 174.

Tìm số n bé nhất, với n > 4, sao cho với n điểm, có thể tạo một đồ thị thoả mãn tính chất: không có tam giác nào trong đồ thị này và với mọi cặp hai điểm không được nối với nhau (không tạo thành cạnh), có đúng hai điểm mà mỗi điểm nối được với cả hai điểm đó.

Bài 175.

Cho G là một *đồ thị liên thông* gồm k cạnh. Chứng minh rằng có thể đánh số các cạnh bằng tất cả các số 1, 2, 3, ..., k sao cho tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng 1.

Bài 176.

Ta gọi một *hội-S* là một tập hợp S người sao cho mỗi cặp hai người nào trong họ cũng có quen nhau.

Trong một buổi tiệc, cứ hai hội-3 thì có chung một người, và không có hội-5 nào trong buổi tiệc này. Chứng minh rằng trong buổi tiệc đó có hai người (hoặc ít hơn) mà khi họ rời đi thì sẽ không còn lại một hội-3 nào cả.

Bài 177.

Hãy xác định số nguyên bé nhất k để tồn tại một đồ thị 25 đỉnh thoả mãn điều kiện: mỗi đỉnh kề với đúng k đỉnh khác, và với bất kì hai đỉnh nào không kề nhau, tồn tại một đỉnh thứ ba kề với cả hai đỉnh đó.

Chú ý :

Ta gọi *đồ thị* (graph) G là một tập hợp các điểm, được gọi là đỉnh, cùng với tập hợp các cạnh nối một số cặp đỉnh phân biệt với nhau.

Bậc của một đỉnh A là số cạnh nối vào A trong đồ thị.

Hai đỉnh được gọi là kề nhau *nếu có một cạnh nối chúng với nhau.*

Mỗi cặp đỉnh thuộc không quá một cạnh. Đồ thị G được gọi là *liên thông* (connected graph) nếu với mỗi cặp đỉnh phân biệt x, y đều tồn tại một dãy các đỉnh

$$x = v_o, v_1, \ldots, v_m = y$$

sao cho mỗi cặp v_i, v_{i+1} $(0 \leq i < m)$ đều được nối bởi một cạnh của đồ thị G.

5

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

Bài 178.

Có 1999 tách uống trà đặt trên một bàn, lúc đầu, tất cả đều được đặt ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho 100 tách trong chúng lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể nào làm cho tất cả đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời hai câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

Bài 179.

Trong một cuộc thi đấu thể thao, mỗi đấu thủ thi đấu với mọi đấu thủ khác. Mỗi lượt chơi, kết quả sẽ là thắng hoặc bại. Giải thưởng sẽ được trao cho đấu thủ X nào đạt được tiêu chuẩn sau: với mỗi đấu thủ Z nào thắng X, phải có một đấu thủ Y sao cho X thắng Y và Y thắng Z. Chỉ có một giải thưởng được trao mà thôi. Chứng minh rằng người đoạt giải phải thắng tất cả các trận.

Bài 180.

Một bàn billiards hình chữ nhật ABCD có AB = 150 cm và BC = 205 cm. Có bốn lỗ nằm ở bốn góc. Một quả bi nằm ở góc A được đánh mạnh cho di chuyển theo hướng hợp với cạnh bàn một góc 45^0 và di chuyển rời xa lỗ A. Mỗi khi chạm vào cạnh bàn, bi lập tức dội lại. Quả bi sẽ chuyển động ra sao (rơi vào lỗ nào) ?

Bài 181.

Trong sảnh đường của toà nhà Quốc hội, có 10 hàng ghế và mỗi hàng 10 chỗ. Có tất cả 100 nghị sĩ đến dự và họ có các mức lương khác nhau từng đôi một. Mỗi người trong 100 nghị sĩ đó hỏi những người lân cận của mình xem thử mức lương của họ ra sao (người đó hỏi người kế bên trái, phải, trước mặt, sau lưng - nếu vị trí ngồi của người đó thích hợp, tức là, người đó hỏi nhiều nhất là 4 người lân cận). Họ ghen tị với người khác, bởi vì một nghị sĩ chỉ hài lòng với mức lương của mình nếu như có không quá một người trong số các người ngồi lân cận kể trên có mức lương hơn anh ta. Hỏi số lớn nhất các nghị sĩ thỏa mãn với mức lương của mình là bao nhiêu?

Bài 182.

Hai học sinh A và B chơi một trò chơi như sau: mỗi người viết một số nguyên lên giấy rồi đưa cho trọng tài. Lúc đó, trọng tài sẽ viết 2 số nguyên lên bảng, trong đó có một số là tổng của 2 số nguyên mà A và B đã đưa. Rồi trọng tài hỏi A: "Anh có thể nói số nguyên bạn kia viết được không?". Nếu A trả lời *không* thì trọng tài sẽ hỏi lại câu đó với B. Nếu B trả lời *không* thì trọng tài sẽ hỏi lại câu đó với A, ... , và tiếp tục như thế. Giả sử rằng cả A lẫn B đều là các học sinh thông minh và thành thực.

Chứng minh rằng sau một số hữu hạn câu hỏi như thế thì phải có một học sinh trả lời rằng *có biết*.

Bài 183.

Trên một bảng vuông 5×5 ô, hai người chơi trò chơi thay nhau đánh số lên các ô trống. Người thứ nhất luôn đánh số 1, còn người thứ hai luôn đánh số 0. Mỗi lượt, mỗi người đánh một số, cho đến khi không còn ô để đánh nữa. Sau đó, họ tính tổng các số trên các hình vuông 3×3 (trong bảng vuông 5×5 ô đó). Gọi A là số lớn nhất trong các tổng này. Hỏi người thứ nhất có thể làm cho A lớn đến bao nhiêu, bất chấp người thứ hai đánh như thế nào?

Bài 184.

Có n + 1 vị trí cố định được xếp thành một hàng, được đánh số từ 0 đến n, thứ tự tăng dần từ phải sang trái. Ta lấy các tấm thẻ có ghi số từ 0 đến n lên đó, xáo trộn rồi chia thẻ một cách ngẫu nhiên lên n + 1 vị trí nói trên, mỗi thẻ một vị trí. Mục đích của trò chơi là làm sao để tấm thẻ mang số i nằm ở vị trí thứ i, với $0 \le i \le n$. Nếu như điều này không xảy ra, ta thực hiện một nước đi như sau. Trước hết, xác định số k nhỏ nhất mà tấm thẻ mang số h được đặt lên đó, với h > k. Sau đó, ta lấy tấm thẻ h này đi, chuyển tất cả các tấm thẻ từ vị trí thứ (k+1) cho đến tấm thẻ ở vị trí h dịch sang bên phải một đơn vị. Khi đó, vị trí h sẽ trống, và ta lấy tấm thẻ h đặt vào vị trí h. Các nước đi này tiếp tục cho đến khi nào đạt được mục đích như đã nói trên thì trò chơi kết thúc.

a) Chứng minh rằng trò chơi kết thúc sau không quá $2^n - 1$ nước đi.

b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một cấu hình ban đầu (tức cách chia thẻ lên các vị trí) để cho trò chơi kết thúc sau đúng $2^n - 1$ nước đi.

Bài 185.

Có 18 người tham gia một cuộc thi đấu gồm 17 vòng đấu. Mỗi vòng có 9 trận thi đấu và trong mỗi vòng, mỗi đấu thủ tham gia một trận. Mỗi người đều thi đấu với người khác đúng một trận trong suốt cuộc thi đấu. Tìm số n lớn nhất sao cho nếu có xếp lại cuộc thi đấu (*theo nguyên tắc trên*) ta vẫn có thể tìm được 4 người trong số 18 người tham gia, mà họ chỉ chơi đúng một trận vào lúc kết thúc vòng đấu thứ n.

Bài 186.

Có 1994 cô gái ngồi quanh một bàn tròn, họ chơi chung một cỗ bài gồm n lá. Ban đầu, một cô giữ tất cả các lá bài. Cứ mỗi nước đi, nếu có ít nhất một cô gái giữ tối thiểu 2 lá bài, thì một trong các cô gái này phải chuyển 1 lá cho một trong hai người bên cạnh cô ấy. Trò chơi kết thúc khi và chỉ khi mỗi cô gái chỉ giữ nhiều nhất 1 lá bài.

a) Chứng minh rằng nếu $n \geq 1994$ thì trò chơi không thể nào kết thúc được.

b) Chứng minh rằng nếu $n < 1994$ thì trò chơi bắt buộc phải kết thúc.

Bài 187.

Một bàn cờ đam các ô trắng đen xen kẽ, gồm $2k \times 2k$ ô. Hỏi sau khi di chuyển các ô trắng đen của bàn cờ đam này, có thể dùng các quân cờ domino 2×1 ô để lấp đầy nó được không?

Bài 188.

Trong thành phố A, có n cô gái và n chàng trai, và mỗi cô gái đều quen biết các chàng trai.

Trong thành phố B, có n cô gái $g_1, g_2, \ldots g_n$ và $2n - 1$ chàng trai $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}$. Cô gái g_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, chỉ quen biết các chàng trai $b_1, b_2, ..., b_{2i-1}$ và không quen biết các chàng trai khác.

Với mọi r = 1, 2, ..., n, ta kí hiệu A(r), B(r) lần lượt là số các cách thức khác nhau để r cô gái từ thành phố A và thành phố B, có thể khiêu vũ với r chàng trai từ thành phố của chính họ, tạo thành r cặp, mỗi cô gái với một chàng trai mà cô ấy quen biết.

Chứng minh rằng A(r) = B(r) với mỗi r = 1, 2,..., n.

Bài 189.

Các tấm thẻ có ghi số từ 1 đến 9 được sắp xếp ngẫu nhiên thành hàng. Trong mỗi nước cờ, ta có thể chọn một khối tùy ý các tấm thẻ liên tiếp sao cho số ghi trên chúng là theo thứ tự tăng dần hay giảm dần rồi xáo lộn vòng chúng. Chẳng hạn, $91\underline{653}2748$ có thể xáo đổi thành $91\underline{356}2748$. Chứng minh rằng trong không quá 12 nước cờ, ta có thể sắp xếp 9 tấm thẻ này sao cho số của chúng được sắp theo thứ tự tăng dần hay giảm dần.

Bài 190.

Một đống sỏi được đặt trong một cột thẳng đứng. Sự bài trí này được bổ sung theo các quy tắc sau. Một hòn sỏi có thể được dịch chuyển nếu nó ở ngay trên đỉnh của một cột mà cột này chứa sỏi nhiều hơn cột ở ngay bên phải nó ít nhất hai hòn sỏi. (Nếu không có hòn sỏi nào ở phía bên phải thì ta coi như đó là một cột có 0 hòn sỏi.) Tại mỗi nước đi, ta chọn một hòn sỏi từ trong các hòn sỏi có thể dịch chuyển (nếu có nhiều hòn sỏi như thế) và đặt nó ngay đỉnh của cột ở sát bên phải. Nếu không còn có hòn sỏi nào có thể dịch chuyển được thì bài trí lúc ấy được gọi là *bài trí cuối cùng*. Với mỗi n, hãy chứng minh rằng, ở mỗi nước đi, dù chọn lựa cách nào đi nữa, thì bài trí cuối cùng có được là duy nhất. Hãy biểu diễn sự bài trí này theo n.

Bài 191.

Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm. Bài thi gồm 5 câu, mỗi câu có 4 cách trả lời khác nhau và mỗi học sinh phải chọn một trong 4 cách đó. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho có một kiểu làm bài nào đó của các học sinh thoả mãn: với n học sinh bất kì chọn ra, ta có thể tìm được trong nhóm n học sinh này 4 người mà bất cứ hai người nào trong số 4 người đó cũng phải có ít nhất hai câu trả lời khác nhau.

Bài 192.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tuỳ ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

Bài 193.

Có 99 trạm không gian mà mỗi cặp trạm này được nối với nhau bằng một *đường liên lạc*. Có 99 đường liên lạc hai chiều, các đường liên lạc còn lại chỉ một chiều thôi. Ta nói rằng một nhóm gồm 4 trạm không gian *liên thông với nhau* nếu ta có thể liên lạc với bất cứ trạm nào trong nhóm từ một trong 3 trạm còn lại của nhóm bằng cách chỉ cần sử dụng 6 đường liên lạc trong nhóm này mà không cần phải sử dụng các đường khác. Hãy xác định số lớn nhất các nhóm liên thông nhau.

chứng minh rằng, ở mỗi nước đi, dù chọn lựa cách nào đi nữa, thì bài trí cuối cùng có được là duy nhất. Hãy biểu diễn sự bài trí này theo n.

Bài 191.

Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm. Bài thi gồm 5 câu, mỗi câu có 4 cách trả lời khác nhau và mỗi học sinh phải chọn một trong 4 cách đó. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho có một kiểu làm bài nào đó của các học sinh thoả mãn: với n học sinh bất kì chọn ra, ta có thể tìm được trong nhóm n học sinh này 4 người mà bất cứ hai người nào trong số 4 người đó cũng phải có ít nhất hai câu trả lời khác nhau.

Bài 192.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tuỳ ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

Bài 193.

Có 99 trạm không gian mà mỗi cặp trạm này được nối với nhau bằng một *đường liên lạc*. Có 99 đường liên lạc hai chiều, các đường liên lạc còn lại chỉ một chiều thôi. Ta nói rằng một nhóm gồm 4 trạm không gian *liên thông với nhau* nếu ta có thể liên lạc với bất cứ trạm nào trong nhóm từ một trong 3 trạm còn lại của nhóm bằng cách chỉ cần sử dụng 6 đường liên lạc trong nhóm này mà không cần phải sử dụng các đường khác. Hãy xác định số lớn nhất các nhóm liên thông nhau.

Bài 194.

Một cuộc thi đấu cặp được tổ chức như sau. Mỗi đấu thủ có thể đấu cho một hoặc hai cặp. Hai cặp bất kì sẽ đấu với nhau nhiều nhất là một trận, nhưng hễ hai cặp nào có cầu thủ chung thì sẽ không đấu với nhau. Xét tập hợp $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ gồm các số nguyên dương phân biệt, hãy tìm số bé nhất các đấu thủ để trong cuộc thi đấu này người ta có thể sắp xếp các cầu thủ sao cho

(1) số trận đấu mà mỗi đấu thủ tham gia là một trong các số a_i, và

(2) với mọi a_i cho trước, có thể tìm được ít nhất một đấu thủ đã tham gia đúng a_i trận đấu.

Bài 195.

Trong một cuộc thi đấu thể thao, tổng số huy chương là m, được phát trong n ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất, người ta phát 1 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát 2 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Những ngày còn lại được tiếp tục và tương tự như thế. Ngày sau cùng, còn lại n huy chương để phát. Hỏi có tất cả bao nhiêu huy chương được thưởng và đã phát trong bao nhiêu ngày?

Bài 196.

Ba người cùng tham gia một trò chơi như sau. Có 3 tấm thẻ, trên mỗi thẻ có ghi một số nguyên dương (3 số khác nhau). Cứ mỗi một lượt chia, mỗi đấu thủ nhận ngẫu nhiên một tấm thẻ và ghi nhận con số trên tấm thẻ đó. Sau hai hay nhiều hơn các lượt chia, một người nhận được 20 điểm (tổng số), người thứ hai 10 điểm và người thứ ba 9 điểm. Biết rằng khi đến lượt chia cuối cùng, người nhận được 10 điểm nói trên đã nhận được tấm thẻ có số điểm lớn nhất. Hỏi, ở lượt chia đầu tiên, ai nhận được số điểm ở giữa hai người khác?

Bài 197.

Cho trước một số nguyên $n_o > 1$ khởi đầu. Hai người A và B chơi một trò chơi, họ luân phiên chọn các số nguyên $n_1, n_2, n_3, \ldots$ theo quy luật như sau: Trước tiên, A chọn n_1 thỏa mãn điều kiện $n_o \le n_1 \le n_o^2$. Sau đó, B chọn n_2 sao cho

$$\frac{n_1}{n_2} = p^r,$$

với p nguyên tố và r là số nguyên ≥ 1.

Tổng quát, ta có trình tự tiếp theo:

Nếu biết n_{2k} là số nguyên vừa được B chọn thì A chọn số nguyên tùy ý n_{2k+1} nào đó thỏa mãn điều kiện

$$n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2.$$

Nếu biết A chọn n_{2k+1} thì B sẽ chọn số nguyên tùy ý n_{2k+2} nào đó sao cho

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r,$$

với p nguyên tố và r là số nguyên ≥ 1.

A thắng cuộc nếu A có thể chọn được số 1990, B thắng cuộc nếu B có thể chọn được số 1.

Hỏi với các giá trị nào của n_0 thì:

a) A có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?

b) B có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?

c) Không ai có thể thắng cuộc?

Bài 198.

Ivan và Peter thay nhau viết các chữ số 0 hoặc 1 cho đến khi mỗi người viết được 2001 chữ số. Peter sẽ là người thắng cuộc nếu như anh ta viết được một số trong biểu diễn nhị phân sao cho số đó không thể viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng Peter có chiến lược để bảo đảm thắng cuộc.

Bài 199.

Cho n điểm liên tiếp nằm trên một đường tròn, kí hiệu $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 3$). Đầu tiên, ta viết số 1 tại vị trí điểm A_1 và viết số 0 tại tất cả các điểm còn lại. Ta tiến hành một động tác như sau (tạm gọi là một *nước đi* tác động ở vị trí A_i): chọn một điểm A_i mà tại đó có viết số 1, sau đó, thay các số a, b, c đã viết tại các điểm A_{i-1}, A_i, A_{i+1} bởi các số tương ứng $1 - a$, $1 - b$ và $1 - c$. (Ở đây, ta hiểu A_0 chính là điểm A_n và A_{n+1} chính là điểm A_1.)

a) Nếu $n = 1999$, có thể nào sau một số hữu hạn các nước đi ta nhận được số 0 tại tất cả các điểm hay không?

b) Tìm tất cả các giá trị của n sao cho không thể nhận được số 0 tại tất cả các điểm sau một số hữu hạn các nước đi.

Bài 200.

Trên một bàn cờ có vô hạn ô người ta quy ước một trò chơi như sau: Đầu tiên, n^2 mảnh được sắp xếp thành một khối $n \times n$ các hình vuông kề nhau, mỗi mảnh đặt trên một hình vuông. Một lần di chuyển (*một nước đi*) tức là một lần