Ứng dụng Graph để giải một số bài toán trong kì thi VNTST

Đinh Quang Huy

Kì thi VNTST được tổ chức hằng năm nhằm chọn ra đội tuyển học sinh giỏi toán của Việt Nam tham dự IMO. Trong đề bài của kì thi này thường có từ một đến hai bài tổ hợp khá khó và hay. Bài viết này của tôi xin nêu một cách giải ~~[illegible]~~ cho các bài toán đó - ứng dụng Graph.

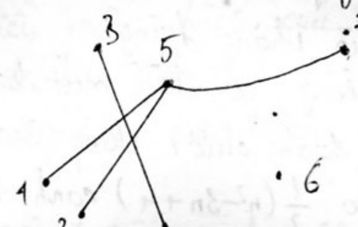
Trước hết, xin nêu sơ qua đ/nghĩa và một số khái niệm cơ bản của Grap hữu hạn.

I. Grap hữu hạn

1. Định nghĩa

- Một graph là một cặp $G = (V.E)$ thoả mãn $E \subseteq [V]^2$. Các phần tử của E là các tập con 2 phần tử của V. Để thuận tiện cho việc sử dụng ta thường giả sử $V \cap E = \phi$.
- Các phần tử của G được gọi là các đỉnh của graph G.
- Các phần tử của E được gọi là các cạnh của graph G.

VD:



Graph G có $V = \{1,2,\dots,7\}$ và tập hợp cạnh
$E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$.

2. Một số khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh: là số cạnh xuất phát từ đỉnh đó.
- dãy cạnh kế tiếp: Hai cạnh của một đồ thị cho trước được gọi là hai cạnh kề nhau nếu như chúng có một đỉnh chung. Một dãy m cạnh $e_i = (A_i, A_{i+1})$ với $i = 1, 2, \dots, m$ được gọi là một dãy cạnh nối tiếp.
- liên thông:
  + hai đỉnh của một đồ thị cho trước là liên thông với nhau nếu có một dãy cạnh kế tiếp nối chúng với nhau trong đồ thị đã cho.
  + một graph được gọi là liên thông nếu hai đỉnh bất kỳ của nó liên thông với nhau.
- đường đi trong graph: một dãy cạnh kế tiếp trong một graph cho trước được gọi là một đường đi nếu chúng không đi qua đỉnh nào của graph quá một lần.

- Chu trình của Graph: là một đường đi khép kín trong Graph.

II. Một số bài toán trong kì thi VNTST.

1. Bài toán 1 (VNTST 1995)

Trong không gian cho n điểm ($n \geq 4$) mà không có 4 điểm nào đồng phẳng và cho $\frac{1}{2}(n^2-3n+4)$ đoạn thẳng mà tất cả các đầu mút của chúng nằm trong số n điểm đã cho. Biết rằng có ít nhất 1 đoạn thẳng mà khi bỏ nó đi (vẫn giữ nguyên các đầu mút) thì sẽ tồn tại 2 điểm phân biệt mà không phải là 2 đầu mút của 1 đường gấp khúc nào. Hãy tìm số k lớn nhất sao cho có k đoạn thẳng tạo thành đường gấp khúc khép kín mà mỗi đỉnh của nó là mút của đúng 2 đoạn thẳng của đường gấp khúc đó.

Giải:

ta sẽ chứng minh giá trị lớn nhất của k là n-1

Do trong n điểm không có 4 điểm nào đồng phẳng nên trong n điểm đó cũng không có 3 điểm nào thẳng hàng

=) số các đoạn thẳng có đầu mút trong n điểm đã cho là: $\frac{n(n-1)}{2}$ (đoạn)

ta có thể chuyển bài toán dưới dạng Graph như sau:

Cho Graph bậc n có $\frac{1}{2}(n^2-3n+4)$ cạnh thoả mãn: tồn tại 1 cạnh mà không có chu trình nào đi qua nó. Tìm số k lớn nhất sao cho trong đồ thị có chu trình ~~độ~~ độ dài k.

*) Vì Graph có n đỉnh nên $k \leq n$. Ta sẽ chứng minh $k < n$

thật vậy, giả sử $k = n$, tức là có một chu trình đi qua tất cả các đỉnh của Graph. Xét ~~đỉnh~~ cạnh AB bất kỳ thuộc Graph thì do có 1 chu trình đi qua cả n đỉnh nên có ít nhất 1 chu trình đi qua cạnh AB (mâu thuẫn với giả thiết là ~~cho~~ có 1 cạnh mà k° có chu trình nào đi qua nó) =) loại

Vậy $k \leq n$.

*) Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng trong Graph tồn tại một chu trình có độ dài n.

Gọi G' là tập hợp tất cả các cạnh có 2 đầu mút trong số n đ nhưng không thuộc Graph G =) số cạnh của G' là:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}(n^2-3n+4) = n-2 \text{ (cạnh)} \quad (1)$$

Giả sử ~~AB~~ AB là 1 cạnh của Graph G mà không có 1 chu trình nào đi qua AB. Khi đó, xét C là 1 đỉnh bất kỳ trong số (n-2) đỉnh còn lại =) C sẽ kề với nhiều nhất là 1 trong 2 đỉnh A, B (vì nếu C kề với cả hai đỉnh thì có chu trình ABCA đi qua cạnh AB, vô lý).

=) C sẽ không kề với 1 trong 2 đỉnh A, B. đoạn thẳng tạo bởi đỉnh đó với C sẽ là 1 phần tử của G'.

=) số cạnh của G' sẽ ~~lớn hơn~~ ≥ $(n-2)$ (2)

(1)(2) =) một đỉnh bất kỳ trong $(n-2)$ đỉnh còn lại sẽ không kề với đúng 1 trong 2 đỉnh A, B và 2 đỉnh bất kỳ trong $n-2$ đỉnh này sẽ kề với nhau.

Dễ thấy rằng $n=4$ thì bài toán thoả mãn.

Xét $n \geq 5$, vì tổng bậc của A, B là n =) tồn tại 1 trong 2 đỉnh A, B kề với 2 đỉnh trong số $(n-2)$ đỉnh còn lại. Giả sử A kề với C, D. Khi đó, nếu $(n-4)$ đỉnh còn lại là $A_1, A_2, \dots, A_{n-4}$ thì trong Graph G có chu trình độ dài $n-1$ là $ACA_1A_2\dots A_{n-4}DA$ (vì $C, A_1, A_2, \dots, A_{n-4}, D$ đôi một kề nhau).

Vậy trong đồ thị luôn có chu trình độ dài $n-1$

Do đó, số $k = n-1$ chính là số cần tìm.

Bài toán được giải xong.

*) ta có thể nhận thấy rằng, nếu để đề bài ở dạng "bình thường" thì thật khó khăn để tìm ra một cách nhìn thật đúng đắn cho bài toán. Nhưng khi chuyển sang ngôn ngữ Graph thì ta sẽ có một giả thiết thật ngắn gọn đồng thời cho ~~phép~~ ta một cái nhìn bao quát cho toàn bài. Từ đó, ta có dám sẽ tìm ra được những điều "mấu chốt" của bài (mà có thể bị "tung hoả mù" bởi những giả thuyết rất lòng bong đấu!)

Sau đây, ta sẽ tiếp tục với 1 bài khác trong kì thi VNTST 1996.

2. Bài toán 2:

Người ta muốn mời 1 số em học sinh tới dự 1 buổi gặp mặt mà trong số đó mỗi em chưa quen với ít nhất 56 em khác, và với mỗi cặp 2 em chưa quen nhau đều tồn tại 1 em quen với cả 2 em đó. Hỏi số học sinh được mời tham dự buổi gặp mặt có thể là 65 em được không?

Giải:

ta chứng minh câu trả lời là "không thể"

Thật vậy, giả sử phản chứng rằng "có thể"

Bài toán có thể chuyển về đồ thị:

mỗi học sinh ứng với 1 đỉnh của đồ thị G gồm 65 đỉnh, 2 học sinh quen nhau ứng với 1 cạnh của đồ thị

Vì mỗi học sinh có ít nhất 56 học sinh không quen với học sinh ấy

=) mỗi đỉnh của G có bậc không quá 8.

Với mỗi cặp 2 em chưa quen nhau có 1 em quen với cả 2 em đó

=) 2 đỉnh không kề nhau bất kỳ của G đều có 1 đỉnh thứ 3 kề đỉnh với 2 đỉnh ấy ta chứng minh: bậc của tất cả các đỉnh của G đều bằng 8.

Thật vậy, giả sử trong 65 đỉnh của G có 1 đỉnh A bậc ≤ 7

$\Rightarrow$ số đỉnh không kề với A ≥ 57

mỗi đỉnh không kề với A đều có 1 đỉnh kề với cả đỉnh ấy và A

số đỉnh kề với A ≤ 7 $\Rightarrow$ theo nguyên lý Dirichlê thì $\exists$ 1 đỉnh kề với A có bậc $\ge \frac{57}{7} > 8$ (vô lý)

Vậy bậc mỗi đỉnh trong G bằng 8.

Ta lấy trong 65 đỉnh của G 1 đỉnh bất kỳ A và 8 đỉnh kề với nó là $A_1, A_2, \dots, A_8$. Kí hiệu V_i $(i = \overline{1,8})$ là tập hợp các đỉnh kề với A_i (khác A)

Ta chứng minh: các V_i đôi một rời nhau.

Tô màu các cạnh của đồ thị bằng màu đỏ, các cạnh không được nối tô màu xanh. Như vậy, với 1 cạnh xanh có ít nhất 1 tam giác XĐĐ (có 2 cạnh đỏ và 1 cạnh xanh)

Số cạnh xanh là $\frac{65.64}{2} - \frac{65.8}{2} = 65.28 \Rightarrow$ có ≥ 65.28 tam giác XĐĐ (1)

Mặt khác, cứ mỗi đỉnh A của G có nhiều nhất là C_8^2 tam giác XĐĐ đỉnh đối diện với cạnh xanh là A $\Rightarrow$ có $65.C_8^2 = 65.28$ tam giác (2)

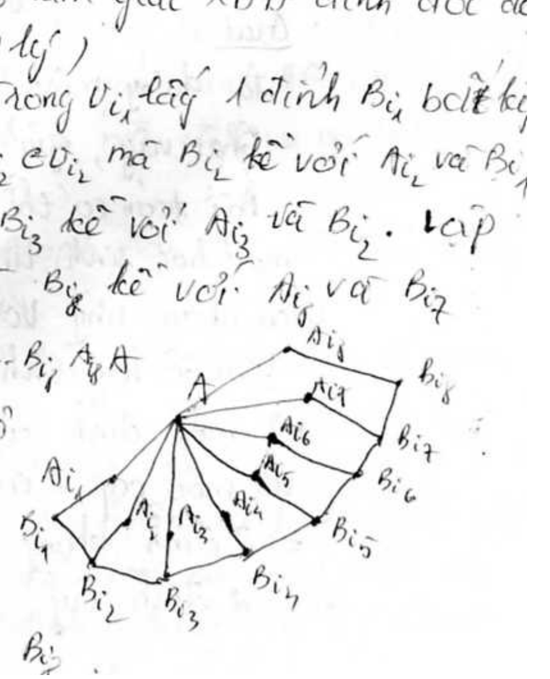
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ cứ 1 cạnh xanh có duy nhất 1 tam giác XĐĐ

Nếu $\exists\, i, j \in \{1, \dots, 8\}, i \ne j$ mà $V_i \cap V_j \ne \emptyset \Rightarrow \exists$ 1 đỉnh B kề với cả A_i, A_j $B \ne A \Rightarrow$ ứng với cạnh xanh A_iA_j này có 2 tam giác XĐĐ là AA_iA_j và BA_iA_j (mâu thuẫn)

Vậy các V_i đôi một rời nhau. Nhận thấy A_i và A_j không kề nhau $(i, j \in \{1, \dots, 8\})$ vì nếu kề nhau thì qua A có $< C_8^2$ tam giác XĐĐ đỉnh đối diện cạnh X là A $\Rightarrow$ có $< 65.C_8^2$ tam giác XĐĐ (vô lý)

Giả sử $(i_1, \dots, i_8)$ là 1 hoán vị của $\{1, 2, \dots, 8\}$. Trong V_{i_1} lấy 1 đỉnh B_{i_1} bất kỳ $(i_1 \in \{1, 2, \dots, 8\})$. Do B_{i_1} và A_{i_2} không kề nhau $\Rightarrow \exists B_{i_2} \in V_{i_2}$ mà B_{i_2} kề với A_{i_2} và B_{i_1}. Do B_{i_2} và A_{i_3} không kề nhau $\Rightarrow \exists B_{i_3} \in V_{i_3}$ mà B_{i_3} kề với A_{i_3} và B_{i_2}. Lập luận cứ tiếp tục như vậy ta được: $\exists B_{i_8} \in V_{i_8}$ mà B_{i_8} kề với A_{i_8} và B_{i_7}

$\Rightarrow$ có 1 chu trình đỏ dài 11 qua A là: $AA_{i_1}B_{i_1}B_{i_2}\dots B_{i_8}A_{i_8}A$



Số chu trình đỏ dài 11 qua A bằng số xích đỏ dài 8 $B_{i_1}B_{i_2}\dots B_{i_8}$ mà mỗi đỉnh $B_{i_j} \in V_{i_j}$

có 8.7 cách chọn B_{i_1}, ứng với nó có 7 cách chọn B_{i_2}

6 cách chọn B_{i_3}..., 2 cách chọn B_{i_7} và 1 cách chọn B_{i_8}.

$\Rightarrow$ số xích đơn độ dài 7 là: $8.7.7.6\ldots 2.1 = 7.8!$

$\Rightarrow$ số chu trình độ dài 11 qua A là $7.8!$

Vì A là 1 đỉnh bất kỳ trong G, G có 65 đỉnh, các đỉnh có vai trò như nhau $\Rightarrow$ số chu trình trong G là $\frac{65.7.8!}{11}$ chu trình độ dài 11

Mặt khác $\frac{65.7.8!}{11} \notin \mathbb{Z}$ (vô lý)

Điều vô lý này chứng tỏ giả sử là sai, suy ra số học sinh không thể là 65 em

Bài toán được giải xong.

*) Một cách tương tự ta có thể giải được bài toán tổng quát sau:

TQ: cho 2 số nguyên dương k, n.

Người ta muốn mời 1 số em học sinh tới dự 1 buổi gặp mặt mà trong số đó mỗi em chưa quen với ít nhất n ($kn+1$) em khác và với mỗi cặp 2 em chưa quen nhau đều tồn tại k em quen với cả 2 em đó.

CMR: số học sinh không phải là $(n+1)(kn+1)$ em.

3. Bài toán 3: (VNTST 1998)

Trong một cuộc họp có $n \geq 10$ người, trong đó mỗi người quen với ít nhất là $\left[\frac{n+2}{3}\right]$ người khác.

Biết rằng ~~có thể xếp~~ với 2 người không quen nhau bất kỳ A, B đều tồn tại ~~k người~~ $k \in \mathbb{N}^*$ và k người $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sao cho A_i quen với A_{i+1} $\forall i = 0, 1, \ldots, k$ ($A_0 \equiv A$, $A_{k+1} \equiv B$) và không thể xếp n người đó trên 1 đường thẳng sao cho 2 người kề nhau bất kỳ quen nhau.

CMR: có thể chia n người đó thành 2 nhóm sao cho:

- Nhóm thứ 1 có thể xếp thành 1 bàn tròn sao cho người bất kỳ luôn ngồi cạnh người mình quen
- Những người ở nhóm 2 thì đôi một không quen nhau.

Giải:

Bài toán có thể chuyển về đồ thị.

mỗi người sẽ ứng với 1 đỉnh của đồ thị G liên thông, 2 người quen nhau sẽ ứng với 1 cạnh của graph.

Gọi $A_0A_1\ldots A_k$ là con đường có độ dài lớn nhất trong graph. Bây giờ ta đặt

$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}\}$ là các đỉnh kề với A_0

$Y = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_p}\}$ là các đỉnh kề với A_k.

Đặt $X^- = \{A_{i_1-1}, A_{i_2-1}, \ldots, A_{i_p-1}\}$, $Y^+ = \{A_{j_1+1}, A_{j_2+1}, \ldots, A_{j_q+1}\}$

Theo giả thiết ta có: tồn tại đỉnh A không thuộc con đường trên. Gọi Z là tập hợp các đỉnh kề với A.

ta có: $|X^-| + |Y^+| + |Z| \geq 3\left[\frac{n+2}{3}\right] > n$.

+) Nếu tồn tại A_m mà $A_m \in X^- \cap Z$ thì ta có con đường $AA_m \ldots A_1 A_{m+1} \ldots A_k$ có độ dài lớn hơn $k+1$ (vô lý)

$\Rightarrow |X^- \cap Z| = 0$

hoàn toàn tương tự ta cũng có: $|Z \cap Y^+| = 0$.

Do đó $|X^- \cap Y^+| \geq 1$. Giả sử $A_m \in X^- \cap Y^+$

Khi đó, chu trình $A_1 A_2 \ldots A_{m-1} A_k A_{k-1} \ldots A_{m+1} A_1$ có độ dài $k+1$. Hay ta có kết luận chu trình có độ dài lớn nhất không ngắn hơn con đường có độ dài lớn nhất (*).

Giả sử kết luận của đề bài là không đúng. Xét chu trình C có độ dài lớn nhất. Theo giả thiết, tồn tại 1 số đỉnh không nằm trên C.

Bây giờ ta xét tập $T = \{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}\}$ là các đỉnh không nằm trên C. Nếu tồn tại 1 đỉnh $B \in T$ mà B không kề với đỉnh nào của C. Mà G là liên thông nên suy ra có 1 con đường có độ dài không ngắn hơn 2 nối nó với C. Do đó ta thu được con đường có độ dài $> C$. (mâu thuẫn (*))

$\Rightarrow$ mọi đỉnh B_{i_j} đều kề với ít nhất 1 đỉnh thuộc C

Khi đó, nếu có 2 đỉnh B_{i_m} và $B_{i_n} \in T$ mà kề nhau thì ta sẽ thu được chu trình có độ dài $> C$ (mâu thuẫn với gt C có độ dài lớn nhất)

$\Rightarrow$ mọi đỉnh B_{i_j} đều không kề nhau.

Xét nhóm thứ 1 là các đỉnh $\in C$, còn nhóm thứ 2 là các đỉnh $\in T$ thì 2 nhóm đó thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

*) Nhận xét: Ngoài cách giải ngắn gọn trên, ta còn có một cách giải khác bằng cách áp dụng định lý sau:

- Định lý Posa: G là đồ thị đơn với n đỉnh ($n \geq 3$). Giả sử với mỗi số $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ta có không quá $k-1$ đỉnh có bậc không lớn hơn k, và trong trường hợp n là số lẻ, ta có không quá $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$. Khi đó G có 1 chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh của 1 đồ thị cho trước).

Chứng minh của định lý và cách giải 2 cho bài toán trên xin để dành cho bạn đọc

4. Bài toán 4 (VNTST 2001)

Trong 1 câu lạc bộ có 42 thành viên. Biết rằng trong 31 thành viên bất kỳ của câu lạc bộ luôn có ít nhất 1 đôi nam - nữ quen nhau. Chứng minh rằng: ta luôn có thể chọn ra từ 42 thành viên của câu lạc bộ 12 đôi nam - nữ quen biết nhau.

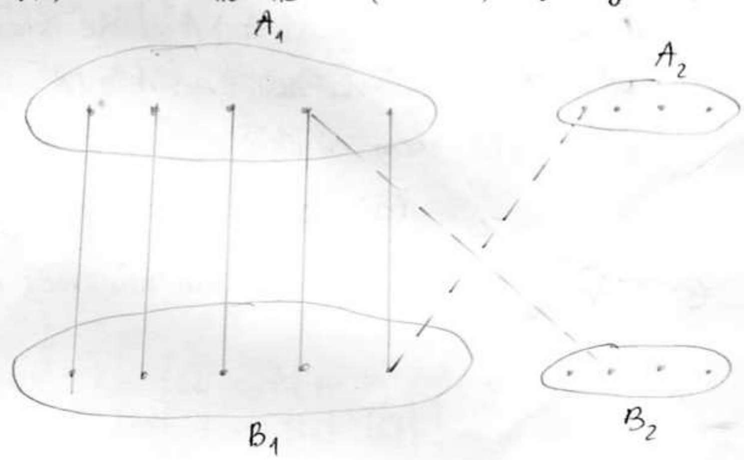
Giải:

Gọi k là số cặp nam - nữ quen nhau lớn nhất có thể chọn ra từ câu lạc bộ sao cho không có cặp nào có thành viên chung.

Giả sử phản chứng rằng $k \leq 11$.

Ta chuyển bài toán về đồ thị: Xét đồ thị lưỡng phân G với A là tập đỉnh (tương ứng với các thành viên nữ) và B là tập đỉnh tương ứng với các thành viên nam, 2 người nam - nữ quen nhau ứng với 1 cạnh của G

Giả sử k đôi nam - nữ quen nhau sao cho không cặp nào có thành viên chung là $(a_1, b_1); (a_2, b_2); \ldots; (a_k, b_k)$ ($k \leq 11$, $a_i \neq a_j$; $b_i \neq b_j$)



Gọi $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $A_2 = A \setminus A_1$

$B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, $B_2 = A \setminus B_1$

Do $k \leq 11$ nên dù bỏ đi bất kì k đỉnh nào của đồ thị (và các cạnh tương ứng với nó) thì trong đồ thị còn lại vẫn còn ít nhất 1 cạnh.

Tô k cặp cạnh $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ bằng màu đỏ, các cạnh còn lại tô màu xanh.

Bỏ đi k đỉnh $a_1, a_2, \ldots, a_k$, đồ thị còn lại có ít nhất 1 cạnh, đó là cạnh màu xanh nối 1 đỉnh của A_2 với 1 đỉnh của B_1 (vì các đỉnh của A_2 và B_2 đôi một không được nối với nhau)

Tương tự: có 1 cạnh màu xanh nối giữa 1 đỉnh của A_1 với 1 đỉnh của B_2

Nhận thấy, không tồn tại 1 đường đi đan màu nối 1 đỉnh của A_2 và 1 đỉnh của B_2 (vì nếu không sẽ có $k+1$ cặp cạnh đôi một không có đỉnh chung, trái với tính lớn nhất của k, vô lý)

Xây dựng tập A^* là tập con của tập đỉnh G, $|A^*| = k$ như sau:

• Chọn vào A^* đỉnh a_i nếu có đường đan màu đi từ a_i đến đỉnh của B_2. Nếu không tồn tại 1 đường đan màu như vậy, ta chọn b_i.

Vậy $|A^*| = k$.

Bỏ đi k đỉnh của A^* và các cạnh nối với chúng. Ta chứng minh trong đồ thị còn lại không còn cạnh nào. Thật vậy, giả sử còn lại 1 cạnh.

- Cạnh này không thể nối 1 đỉnh của A_2 và 1 đỉnh của B_2 và không thể nối 1 đỉnh của A_1 với 1 đỉnh của B_2 (vì 1 cạnh cũng là 1 đg đi đan màu)
- Nếu cạnh này nối 1 đỉnh b_1 của B_1 và 1 đỉnh C thuộc B_2. Như vậy a_1, b_1 bỏ
  $\Rightarrow \exists$ 1 đường đi đan màu từ a_1 tới 1 đỉnh d thuộc B_2
  $\Rightarrow$ có 1 đường đi đan màu từ $C \in A_2$ đến $d \in B_2$ (vô lý)
- Nếu cạnh này nối a_i của A_1 với b_j của B_1 $(i \neq j)$
  $\Rightarrow$ không có 1 đường đi đan màu từ a_j đến 1 đỉnh thuộc B_2 (vì a_j, b_j bỏ và có 1 đường đi đan màu từ a_i đến 1 đỉnh thuộc B_2

Nhưng vì a_i và b_j kề nhau $\Rightarrow$ có 1 đường đi đan màu từ a_j đến 1 đỉnh thuộc B_2 (vô lý)

Vậy đồ thị còn lại $(G \setminus A^*)$ sẽ không có cạnh nào (trái với g thiết)

Vậy điều giả sử là sai $\Rightarrow k \geq 12$.

$\Rightarrow$ có thể chọn 12 đôi nam - nữ quen nhau.

Bài toán đã được giải xong.

④ Để thay cho lời kết, tôi xin nêu một số bài toán tổ hợp khác