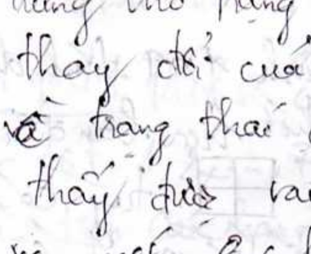
Tổ hợp - rời rạc là 1 dạng toán khó nhưng luôn có sức cuốn hút, một phần vì đa số đều được phát biểu - hoặc có thể phát biểu dưới dạng các vấn đề gần gũi với cuộc sống; và cũng bởi mỗi bài toán cần có một cách nhìn nhận riêng hết sức độc đáo. Trong bài viết này chúng ta sẽ xem xét các bài toán có sử dụng màu tô để có cái nhìn rõ nét hơn về 2 dạng toán tổ hợp phổ biến.

A - Màu tô và bất biến.

Trước hết xin nhắc lại khái niệm bất biến. Đó là đại lượng đặc trưng cho trạng thái của hệ khảo sát và bảo toàn qua các lần thay đổi của hệ. Nhờ sự bảo toàn này ta có thể kết luận về trạng thái cần khảo sát sau một số lần thay đổi. Để thấy được vai trò của màu tô với bất biến, ta sẽ lần lượt xem xét các bài toán sau:

Bài toán 1: Có một miếng pho mát hình lập phương 3x3. Một con chuột muốn ăn hết miếng pho mát đó bằng cách ăn từng hình lập phương đơn vị kề nhau. Hỏi nó có thể ăn miếng pho mát ở tâm khối lập phương sau cùng hay không nếu bắt đầu từ 1 góc?

Lời giải: Tô màu khối lp như hình vẽ. 2 hình lp đv cạnh nhau có màu khác nhau. Từ đó suy ra rằng sau khi ăn 1 số lẻ hình lp đơn vị thì chuột phải ăn ~~t~~ miếng cuối cùng & miếng đầu tiên chuột ăn phải có cùng màu.



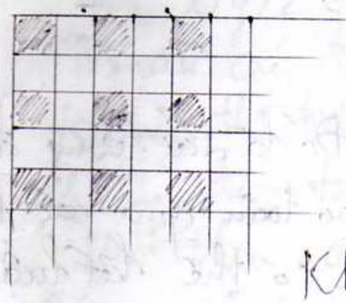
Tuy nhiên miếng trung tâm và miếng ở góc có màu khác nhau nên ở lần ăn sau 27 lần ăn chuột không thể ăn miếng trung tâm được - Hay nó không thể ăn miếng đó sau cùng được.

Bài toán này khá dễ và với cách giải hoàn toàn tương tự thì có thể kết luận trong TH lập phương n x n. Bất biến ở đây, có thể nhận ra ngay, đó là màu sắc của hình lập sau một số lẻ lần ăn. Bài toán dưới đây khó hơn 1 chút

- Bài toán 2:

Một hcn được lát khít bởi các hình 1×4 và 2×2. Nếu bỏ 1 hình 1×4 và thay bởi 1 hình 2×2 ta có thể sắp xếp lại để lát khít hcn ban đầu hay không?

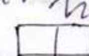
Lời giải:



Tô màu hcn như hình vẽ. Mỗi hình vuông 2×2 phủ đúng 1 ô đen còn mỗi hcn 1×4 phủ đúng 2 ô đen hoặc không phủ ô đen nào

$\Rightarrow$ Số ô đen của bảng là chẵn/lẻ tuỳ thuộc tính chẵn lẻ của số hình vuông 2×2

Khi thay một hình 2×2 bởi 1 hình 1×4 tính chẵn lẻ của số ô đen thay đổi nên ta ko thể lát khít hcn ban đầu được

Như ta đã thấy các hình  và  tuy có cùng diện tích nhưng hình dạng lại khác nhau, dẫn tới việc chúng không thể thay thế được cho nhau. Tuy vậy, để đi đến kết luận chính xác, ta phải dùng tới màu tô ~~để~~ mới nhận ra được bất biến mấu chốt. Và sẽ không có gì quá đáng khi nói rằng việc sử dụng màu tô ở bài toán này là 1 điều không thể thiếu bỏ qua

Vai trò của màu tô ở 2 bài toán dưới đây có nhiều nét tương đồng với bài toán trên, mặc dù nó chỉ xét hình các miếng ghép có 1 hình dạng nhưng chắc chắn là khó hơn BT1 và bất ngờ không kém BT2, hi vọng bạn đọc sẽ có được những giây phút thú vị khi tự mình tìm ra lời giải (không hề khó) của chúng:

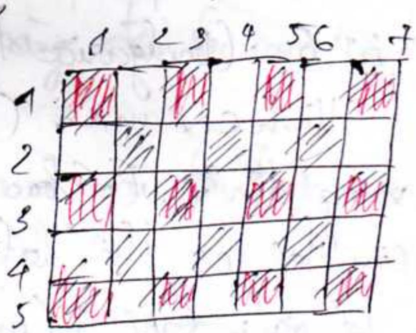
BT3: Cho 1 bảng vuông 10×10 và đủ nhiều hình CN 1×4. Hỏi có thể phủ kín bảng vuông đã cho bởi các hình CN này không nếu 2 hcn bất kì không chồng lên nhau?

BT4: Hỏi như BT3 nhưng thay bảng 10×10 bằng bảng 12×12 và các miếng ghép có kích thước 1×3.

~~Bài toán mà ta xét là một bài thi Olympic toán QT 2004 tại Hi Lạp. Đây là bài khó nhất của đề thi năm đó (Điểm TB của đội VN là 2,17)~~

Đôi khi để làm xuất hiện bất biến có lợi cho việc giải quyết bài toán, ta không chỉ cần đến màu tô mà phải kết hợp thêm các yếu tố khác (thường là việc đánh số) Màu tô ở đây thiên về vai trò diễn đạt ý tưởng của lời giải. BT sau sẽ cho thấy điều này

<u>BT5</u> (Russia 96) Hỏi 1 hcN 5x7 có thể lát bởi các hình chữ L phủ vài lớp sao cho mỗi ô của bảng được phủ bởi cùng 1 số hình chữ L? / Câu trả lời là không thể



<u>Lời giải 1</u>: Đánh số các hàng 1,2,...,5 và xét các cột 1,2,...,7 & xét 12 ô vuông nằm trên ~~các hàng~~ giao các hàng lẻ & cột lẻ. (TÔ màu như hvẽ) 12 ô đen

Mỗi ô vuông được phủ bởi k hình chữ L
$\Rightarrow$ ít nhất 12k hình chữ L được sử dụng ~~trong~~ tổng số. Nhưng số này phủ $3.12k > 35k$ ô, mâu thuẫn.

<u>Lời giải 2</u>: (TÔ màu các ô của bảng Trắng, đen (xem hvẽ) sao cho các góc đều Đen)
Trong mỗi ô đen viết số -2 và trong mỗi ô trắng viết 1
Chú ý rằng tổng của các số trong các ô phủ bởi 1 hình chữ L là không âm và do đó nếu ta có 1 cách phủ hcN bởi k lớp, tổng các số ~~phủ bởi~~ tất cả các hình chữ L (tính bằng tổng các số mà hình chữ L phủ) là 1 số không âm.
Nhưng tổng này là S và s là các số trong bảng thì

$$S = ks = k(-2.12+23.1) = -k < 0$$

Ta có mâu thuẫn $\Rightarrow$ đpcm.

B - Màu tô và phép đếm:

Trong phần này, màu tô không còn đóng vai trò quyết định như phần trước, mà chủ yếu là để diễn đạt các đối tượng cần khảo sát một cách sáng sủa.

Để bắt đầu ta xem xét

BT 6: (Bulgaria 1996)

Hình CN $m \times n$ ($m, n \in N$, $m, n > 1$) được chia thành mn hình vuông đơn vị. Có bao nhiêu cách xoá 2 hình vuông sao cho phần còn lại có thể lát kín bởi các domino ◫?

Lời giải: Gọi $F(m,n)$ là số cần tìm. Vì mỗi domino phủ đúng 2 ô nên $F(m,n) = 0$ nếu mn lẻ

Nếu ít nhất 1 trong 2 số m, n là chẵn. Tô hcn bằng 2 màu trắng, đen xen kẽ. Số ô trắng S_0 bằng số ô đen S_1 và $S_0 = S_1 = \frac{mn}{2}$.

Mỗi domino phủ 1 ô trắng & 1 ô đen (đây là 1 BB mặc dù vai trò của nó không nhiều) Nếu 2 ô trắng hoặc 2 ô đen bị xoá thì không thể phủ kín phần còn lại của hcn bởi các domino

Ta sẽ chỉ ra rằng điều này khả thi nếu 1 ô đen & 1 ô trắng bị xoá.

Do mn chẵn $\Rightarrow mn = 2t$

+ $t = 2$ md đúng

G/sử md đã đúng đến $t = t_0 \in N$, $t_0 > 2$. Xét khi $mn = 2(t_0 + 1)$

Gọi H_1 là hcn gồm 2 hàng đầu của hcn đang xét & H_2 là hcn còn lại.

- Nếu 2 ô bị xoá nằm trong H_1 hay H_2 thì ta có thể phủ mỗi hcn bởi các domino và như thế có thể phủ hcn đã cho.
- Nếu 1 ô bị xoá thuộc H_1 và 1 ô thuộc H_2. Ta xoá 2 ô cạnh nhau, $1 \in H_1$ và $1 \in H_2$ sao cho ô mới xoá khác màu ô đã bị xoá trước đó trong mỗi hình. Theo gt quy nạp, phần còn lại của H_1, H_2 có thể phủ bởi các domino ⇒ Mđ đúng với $t = t_0 + 1$

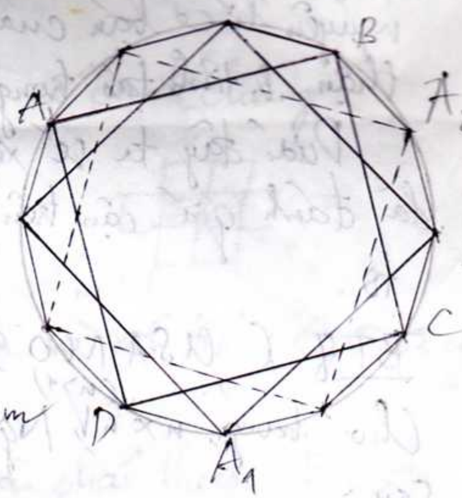
Cuối cùng số cách xoá cần tính là $F(m,n) = \frac{m^2n^2}{4}$.

Trong BT trên thay vì dùng 2 màu đen trắng ta hoàn toàn có thể dùng hệ trục toạ độ và xét tính chẵn/lẻ của các hoành độ, tung độ. Tuy nhiên phương án này sẽ rõ ràng đem lại cái nhìn bất lợi và làm BT rắc rối hơn nhiều.

Tiếp theo ta sẽ xem xét một bài toán mà màu tô được áp đặt ngay trong các yêu cầu của đề bài

<u>BT7</u> (Romania 97)

Tìm số cách tô màu các đỉnh của một hình 12-giác đều bằng 2 màu sao cho không có tập hợp các đỉnh cùng màu tạo thành một đa giác đều.



<u>Lời giải</u>: Gọi 2 màu là xanh & đỏ.

Rõ ràng ta chỉ cần quan tâm tới các tam giác đều và các hình vuông

Các đỉnh của hình 12-giác đều tạo thành 4 tam giác đều. Mỗi tam giác đó có 6 cách tô màu sao cho không có 3 đỉnh cùng màu. Vậy ta có $6^4 = 1296$ cách tô màu không có tam giác đơn sắc

Giờ ta xét số cách tô màu có 1, 2 hay 3 hình vuông đơn sắc

Nếu hình vuông ABCD là hình vuông duy nhất đơn sắc, chẳng hạn cùng màu đỏ, ta có 3 cách tô màu cho 2 đỉnh A_1, A_2 của tam giác đều AA_1A_2 ~~(~~ (xanh - đỏ, đỏ - xanh, xanh - xanh) tương tự với các đỉnh B, C, D. Và như vậy có $2 \cdot 3^4 = 162$ cách tô có 1 hình vuông đơn sắc.

Nếu 2 hình vuông đơn sắc thì ta có 1 cách chọn trong mỗi tam giác trong T/h 2 hình vuông đó cùng màu và 2 cách chọn trong T/h 2 hình vuông đó khác màu. Tổng số có $2+2.2^4=34$.

Nếu 3 hình vuông đơn sắc ta cần chính các hình vuông đó không cùng một màu và như vậy có 6 cách tô màu.

Cuối cùng số cách tô màu thoả mãn không có tam giác đều và hình vuông nào có các đỉnh cùng màu là

$$1296-3.16^2+3.34-6=906 \text{ (cách)}$$

(Cần lưu ý rằng ta có định lí:

Với n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bất kì ta có

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=\sum|A_i|-\sum|A_i\cap A_j|+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|)$$

Hai bài toán trên không quá khó (Chỉ cần áp dụng những nguyên lí cơ bản của phép đếm ~~thứ~~. Quan trọng là phải hết sức cẩn thận & tỉnh táo trong việc tính toán.

Dưới đây ta sẽ xem xét 2 bài toán rất khó với yêu cầu đề ra là đánh giá cận trên/cận dưới của các đại lượng liên quan tới màu tô.

BT8 (USAMO 99)

Cho bảng $n\times n$ $(n>1)$. Người ta tô màu 1 số ô của bảng theo cách sau:

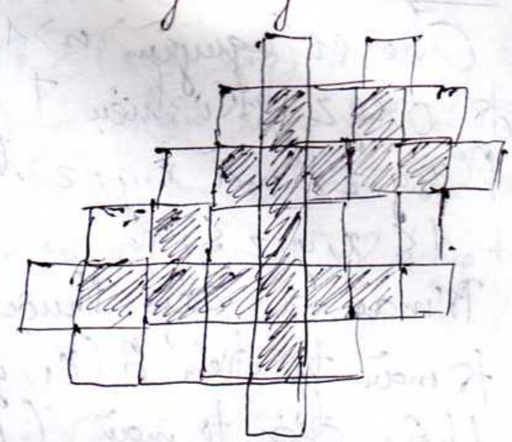
1) Mọi ô vuông không được tô màu của bảng đều có cạnh chung với 1 ô vuông được tô màu

2) Với mọi cặp 2 ô được tô màu, tồn tại 1 dãy các ô được tô màu sao cho 2 ô trong cặp đó là ô đầu và ô cuối của dãy & 2 ô liên tiếp của dãy thì có cạnh chung.

Chứng minh rằng có không ít hơn $\frac{n^2-2}{3}$ ô đã được tô màu.

Lời giải:

Tiến hành bao các ô được tô màu của bảng bằng các ô không được tô màu theo quy tắc: Nếu cạnh nào của ô có màu không phải cạnh của ô có màu khác thì ta dùng 1 ô vuông không được tô màu (hình)



Ta gọi tập các ô vuông không màu vừa chúng là tập các ô vuông "bao".

Mọi ô vuông k° màu & không thuộc tập các ô vuông "bao" thì không có cạnh chung với bất kì ô có màu nào.

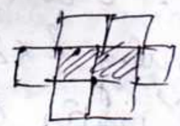
Gọi m là số ô vuông được tô màu của bảng $\Rightarrow m \geq 2$.

Ta sẽ cm số các ô vuông "bao" không quá $2m+2$ bằng pp quy nạp toán học theo m

* Với $m = 2$; 2 ô vuông được tô màu có cạnh chung

$\Rightarrow$ số ô vuông bao là $6 = 2.2+2$

$\Rightarrow$ Mđ đúng với $m = 2$.



* G/sử Mđ đúng đến m ta cm nó đúng với m+1

Xét m ô vuông trong m+1 ô được tô màu và xét tập các ô vuông bao m ô này, gọi là tập F

Từ đk (2) $\Rightarrow$ ô thứ m+1 được tô màu phải thuộc F

$\Rightarrow$ số ô vuông dùng thêm để bao ô này không quá 3

Theo gt quy nạp $|F| \leq 2m+2$

$\Rightarrow$ Số ô vuông bao m+1 ô lớn nhất là $|F| + 3 - 1 \leq 2(m+1)+2$

$\Rightarrow$ Mđ đúng với m+1

$\Rightarrow$ Kết đúng $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Gọi k là số ô vuông được tô màu của bảng. Mọi ô trắng của bảng đều phải thuộc tập hợp các ô vuông bao k ô vuông trên

Do đó $n^2 =$ số ô được tô màu + số ô không được tô màu $\leq k +$ số ô vuông "bao" k ô được tô màu $\leq k + 2k + 2 \Rightarrow k \geq \frac{n^2-2}{3}$

BT9 (Việt Nam TST 2001)

Cho số nguyên $n>1$. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$. Kí hiệu T là tập hợp gồm tất cả các điểm $P(x,y,z)$ mà x,y,z là ~~tọa~~ các số nguyên thỏa điều kiện $1 \le x,y,z \le n$.

Tô màu các điểm thuộc T sao cho nếu điểm $A_0(x_0,y_0,z_0)$ được tô màu thì điểm $B(x_1,y_1,z_1)$ mà $x_1 \le x_0$, $y_1 \le y_0$, $z_1 \le z_0$ không được tô màu $(B \not\equiv A)$

Hỏi theo cách trên có thể tô màu tối đa bao nhiêu điểm?

Đ.S $= \left[\frac{3n^2+1}{4}\right]$

Để kết thúc, xin giới thiệu 1 số bt có liên quan đến màu tô.

BT10: (Czech'96) Cho 6 tập con 3 phần tử của 1 tập hữu hạn X. CMR có thể tô màu các phần tử của X bằng 2 màu sao cho k° có tập con nào đã cho chỉ gồm 1 màu.

BT11: Cho 1 bàn cờ. Được phép sơn lại các ô nằm trong hình vuông 2×2 (Trắng → Đen & đen → trắng). Hỏi bằng cách đó có thể nhận được 1 bàn cờ BT khi có duy nhất 1 ô màu trắng hay không?

BT12: Một tam giác đều được chia thành n^2 tam giác bằng nhau. Một số tam giác đó được đánh số $1,2,\dots,m$ sao cho các tam giác với các số liên tiếp có cạnh chung. CMR $m \le n^2-n+1$.

BT13: ~~Một~~ (USAMO'98) Một bàn cờ 98×98 được tô màu đen trắng xen kẽ. Mỗi thao tác cho phép chọn 1 hcN con của bàn cờ hình vuông (mép // với mép bàn cờ) & đổi màu các ô trong đó. Hỏi số nhỏ nhất các thao tác để làm tất cả các ô thành màu đen.

BT19: (Russia'97) Một lưới vuông được quấn quanh 1 hình trụ, 1 vài ô được tô đen. CMR ∃ 2 đt // chứa cùng 1 số ô đen.

BT 14. (IMO Shortlist 2002) .....